Die simultanen Systeme binärer Formen.

Von P. Gordan in Giessen.

In einer im 69^{ten} Bande des Crelle'schen Journals veröffentlichten Abhandlung habe ich für eine binäre Form n^{ten} Grades ein System von Covarianten und Invarianten aufgestellt, durch welche sich, wie ich bewies, alle Covarianten und Invarianten derselben ausdrücken liessen. Ich habe nun im Folgenden die dabei angewandten Methoden vereinfacht und auf die simultanen Covarianten und Invarianten mehrerer Formen ausgedehnt.

Anknüpfend an die von Herrn Clebsch (Crelles Journal Bd. 59.) gegebenen Sätze untersuche ich zunächst die symbolischen Producte, da sich alle Covarianten und Invarianten einer Anzahl binärer Formen durch Aggregate derselben ausdrücken lassen. Jede simultane Covariante kann als neue Form angesehen werden und giebt als solche zur Einführung neuer Symbole Anlass. Die diese neuen Symbole enthaltenden symbolischen Producte sind Aggregate anderer symbolischer Producte, welche einfachere Symbole enthalten, und umgekehrt lässt sich jedes symbolische Product als Aggregat anderer ausdrücken, welche weniger aber verwickeltere Symbole enthalten. Hierhin gehört auch die Behandlung der schon anderwärts untersuchten Uebereinanderschiebungen. Indem ich sodann zu Formensystemen übergehe, führe ich den Begriff des combinirten Systems ein, eines Systems von Formen, welche durch Uebereinanderschiebung von Formen gegebener Systeme entstehen und wende ihn auf eine wichtige Classe von Systemen, die vollständigen Systeme an, d. h. auf solche, bei denen alle durch Uebereinanderschiebung entstehende Formen sich als ganze Functionen der ursprünglichen ausdrücken lassen. Hierbei zeigt sich, dass durch Combination vollständiger Systeme neue vollständige Systeme entstehen.

Schliesslich werden die allgemeinen Sätze benutzt, um für Formen, deren einzelne Systeme man kennt, simultane Systeme aufzustellen und endlich zur Aufstellung der Systeme für einzelne Formen.

Als Beispiel füge ich die einzelnen Systeme der Formen vom 1^{ten}.

$2^{\text{ten}}, \ldots, 6^{\text{ten}}$ Grade und die simultanen Systeme der Formen vom 2^{ten}, 3^{ten} und 4^{ten} Grade hinzu.

§ 1.

Symbolische Producte.

Die Aufgabe, welche ich hier behandeln will, ist die Untersuchung der simultanen Formen (Covarianten und Invarianten) einer Anzahl gegebener binärer Formen:

$$f_1 \;, \; f_2 \;, \; f_3 \;, \; \ldots\ldots ,$$

deren Grade n_1, n_2, ... sein mögen.

Diese Formen sind ganze homogene Functionen von zwei Variabeln x_1 und x_2, man kann für sie folgende symbolische Bezeichnung einführen:

$$f_1 = (f_{11}x_1 + f_{12}x_2)^{n_1} = f_{1,x}^{n_1} = f'^{\,n_1}_{1,x} = f''^{\,n_1}_{1,x} \ldots$$

$$f_2 = (f_{21}x_1 + f_{22}x_2)^{n_2} = f_{2,x}^{n_2} = f'^{\,n_2}_{2,x} = f''^{\,n_2}_{2,x} \ldots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_i = (f_{i,1}x_1 + f_{i,2}x_2)^{n_i} = f_{i,x}^{n_i} = f'^{\,n_i}_{i,x} = f''^{\,n_i}_{i,x} \ldots .$$

Die Symbole f_i, f_i', f_i'' ... stellen sämmtlich dieselbe Form f_i dar; ich nenne sie die Symbole dieser Form. Nach einem, von dem Herrn Clebsch (Crelle's Journal Bd. 59.) nachgewiesenen Satze kann man alle simultanen Formen (Covarianten und Invarianten) der Formen f als Aggregate (lineare Functionen mit numerischen Coefficienten) symbolischer Producte darstellen, welche die Form haben:

$$R = f_{1,x}^{\alpha_1} f_{2,x}^{\alpha_2} \ldots (f_1, f_2)\,(f_1', f_3) \ldots$$

Ich will daher zunächst diese symbolischen Producte untersuchen.

Die symbolischen Factoren zerfallen in zwei Arten, deren erste wie $f_{1,x}$, $f_{2,x}$ .... die Variable x (x_1 und x_2) enthält, während dieselbe bei den andern, wie (f_1, f_2), (f_1, f_3) ... nicht auftritt.

Die Anzahl der Factoren erster Art von R giebt den Grad von R in den Variabeln oder schlechthin den Grad an. Die Factoren zweiter Art, welche ich Klammerfactoren nennen will, bedeuten symbolische Determinanten; der Klammerfactor (f_1, f_2) z. B. die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

und können dadurch aus den Factoren erster Art wie $f_{1,x}$ abgeleitet werden, dass man x_1 in das Symbol f_{22} und x_2 in $-f_{21}$ übergehen lässt.

Der Grad von R in den Coefficienten der ursprünglichen Formen

f_1, f_2 ... nenne ich seine Ordnung; es ist dies in unserer symbolischen Darstellungsweise die Anzahl der verschiedenen in R auftretenden Symbole. Jedes derselben kommt so oft in R vor, als der Grad der durch dasselbe dargestellten Form Einheiten enthält; das Symbol f_1 n_1 Male, das Symbol f_2 n_2 Male u. s. f.

Sind die in R auftretenden Symbole, abgesehen von den durch sie dargestellten Formen, p_1, p_2, ..., dann will ich das symbolische Product R durch $\vartheta(p_1, p_2, \ldots)$ oder kurz $\vartheta(p)$ bezeichnen.

Vereinigt man einige unter den Symbolen p zu einer Gruppe, dann kann man diese Symbole auf mannigfache Art in Gruppen eintheilen; bei einer solchen Eintheilung werden im Allgemeinen die Symbole einer Gruppe in Factoren erster und zweiter Art auftreten, in den Klammerfactoren, in denen sie vorkommen, werden entweder beide Symbole derselben Gruppe angehören, oder einer der einen Gruppe, der zweite einer andern.

Bezeichnet man die Symbole zweier Symbolengruppen durch:

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots\ldots$$
$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad \ldots\ldots,$$

dann nenne ich die Anzahl derjenigen Klammerfactoren, welche ausser einem der Symbole s noch ein von s verschiedenes Symbol enthalten, die Norm von R in Bezug auf die Symbole s und bezeichne sie durch (s), die Anzahl derjenigen Klammerfactoren (s_i, t_k), welche sowohl ein Symbol s als auch ein Symbol t enthalten, bezeichne ich durch (s, t), und die Anzahl derjenigen, welche nur Symbole s enthalten durch (s, s). Die Anzahl der Klammerfactoren, in denen ein Symbol s auftritt, ist dann:

$$(s) + (s, s).$$

Ist die Norm (s) gleich 0, dann geht das symbolische Product R in das (wirkliche) Product zweier anderer symbolischer Producte über, von denen das erste nur Symbole s enthält, während in dem andern keines derselben auftritt. Besteht eine Symbolengruppe aus einem einzigen Symbol s, dann ist die Norm (s) von R nicht grösser als der Grad der durch dasselbe dargestellten Form.

Bezeichne ich das Product aller Klammerfactoren von R durch $\Delta(R)$ und die Factoren erster Art (von denen auch mehrere einander gleich sein können) durch:

$$r_{1,x}, \quad r_{2,x}, \quad \ldots, \quad r_{g,x},$$

dann nimmt R die Form an:

$$R = r_{1,x}\, r_{2,x} \ldots r_{g,x}\, \Delta(R),$$

wo g den Grad von R bedeutet.

§ 2.

Anordnung der symbolischen Producte nach den in ihnen auftretenden Symbolen.

Jede Covariante φ vom μ^{ten} Grade kann ebenso wie die ursprünglichen Formen f_i durch:

$$f'^{n_i}_{i,x} = f''^{n_i}_{i,x} = f'''^{n_i}_{i,x} \dots\dots$$

symbolisch dargestellt wurden, durch:

$$\varphi^{\mu}_{x} = \varphi'^{\mu}_{x}$$

symbolisch dargestellt werden und giebt hierdurch zur Bildung der neuen Symbole: φ , φ' , ... Veranlassung.

Diese neuen Symbole können ebenso wie die ursprünglichen Symbole f_i in symbolischen Producten R auftreten und jedes derselben wird so oft in R vorkommen, als der Grad der dadurch dargestellten Form Einheiten enthält. Bei der Bestimmung der Ordnung des symbolischen Productes R, welches die Symbole φ , ψ , χ, . . . enthalten mag, muss man für jedes dieser Symbole die Ordnung der durch dasselbe dargestellten Form in Rechnung ziehn. Ein symbolisches Product z. B., welches nur die Symbole φ und ψ enthält, welche Covarianten p^{ter} und q^{ter} Ordnung darstellen, besitzt die Ordnung $p + q$.

Den Beitrag, welchen die Symbole der Formen:

$$\varphi_1 \ , \ \varphi_2 \ , \ \dots$$

zu der Ordnung des symbolischen Productes R liefern, nenne ich die Ordnung von R in den Symbolen der Formen φ. Diejenigen symbolischen Producte, welche nur Symbole der Formen φ enthalten und ihre Aggregate sollen durch $C(\varphi_1 , \varphi_2 , \dots)$ oder kurz $C(\varphi)$ bezeichnet werden, während diejenigen, in denen mindestens eines derselben vorkommt und ihre Aggregate durch $P(\varphi)$ bezeichnet werden mögen. Die letzteren sind ganze homogene Functionen der Coefficienten der Formen φ und verschwinden, wenn diese verschwinden.

Man kann nun diejenigen symbolischen Producte, bei denen Symbole verschiedener Arten von Formen auftreten, nach den Ordnungen classificiren, welche sie in den Symbolen der einzelnen Formen oder auch Formgruppen besitzen.

Es mögen die Formen:

$$\varphi_{11} \ , \ \varphi_{12} \ , \ \dots$$

die erste Formengruppe bilden, die Formen:

$$\varphi_{21} \ , \ \varphi_{22} \ , \ \dots$$

die zweite Formengruppe, die Formen endlich:

$$\varphi_{p1} \ , \ \varphi_{p2} \ , \ \dots$$

die p^{te}; ich will dann symbolische Producte derselben Ordnung, in denen nur die Symbole der Formen φ_{ik} auftreten, folgendermassen anordnen.

Zuerst stehen diejenigen Formen, deren Ordnung in den Symbolen der p^{ten} Formengruppe am grössten ist und es tritt in der gesammten Anordnung eine Form um so früher auf, je grösser ihre Ordnung in diesen Symbolen ist.

Diejenigen dieser symbolischen Producte P, welche in den Symbolen der p^{ten} Gruppe dieselbe Ordnung besitzen, ordne ich ebenso nach ihrer Ordnung in den Symbolen der $(p-1)^{ten}$ Gruppe; diejenigen symbolischen Producte, welche sowohl in den Symbolen der p^{ten} als auch in den Symbolen der $(p-1)^{ten}$ Gruppe dieselbe Ordnung besitzen, nach ihrer Ordnung in den Symbolen der $(p-2)^{ten}$ Gruppe u. s. f.

Dieser Anordnung gemäss sollen die Formen P in Classen eingetheilt werden und in einer höheren oder niederen Classe stehen, je nachdem sie später oder früher hierbei auftreten.

Da die Formen φ_{ik} im Allgemeinen von einander abhängen, so wird öfters der Fall eintreten, dass ein symbolisches Product einer gewissen Classe zugleich ein Aggregat symbolischer Producte niederer Classe ist.

Hierbei kann man zeigen, dass, wenn irgend welche Formen:

$$\psi_1 \quad , \quad \psi_2 \quad , \quad \cdots\cdot$$

diese Eigenschaft besitzen, jede Form $P(\psi)$ sie gleichfalls hat.

§ 3.

Eintragung des Werthes für ein Symbol.

Da jedes symbolische Product R, in welchem das Symbol einer Covariante

$$\varphi = \varphi_x^p = s_{1,x}\, s_{2,x} \cdots s_{p,x}\, \Delta(\varphi)$$

auftritt, zugleich eine simultane Form der Formen f_i ist, so ist es nach dem oben citirten Satze von Herrn Clebsch ein Aggregat symbolischer Producte, in denen nur die Symbole der Formen f_i vorkommen. Es liegt daher die Aufgabe nahe, symbolische Producte z zu suchen, aus denen sich R linear zusammensetzen lässt und welche statt des Symbols φ die Symbole s enthalten.

Ich bezeichne das Product aller das Symbol φ nicht enthaltenden Factoren durch T und diejenigen Symbole, welche mit dem Symbol φ in denselben Klammerfactoren auftreten, durch $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$; die Zahl ν ist dann die Norm (φ) in Bezug auf das Symbol φ.

Das symbolische Product R nimmt dann die Form an:

$$R = T\varphi_x^{p-\nu} (\varphi r_1) (\varphi r_2) \ldots (\varphi r_\nu).$$

Um es zu transformiren, bilde ich eine Hülfsformel, indem ich die Identität

$$\varphi_x^p = s_{1,x}\, s_{2,x} \ldots s_{p,x}\, \Delta(\varphi)$$

der Reihe nach ν Mal nach den Variabeln x (x_1 und x_2) differentiire und die Incremente der x jedesmal durch ein Paar neuer Variabeln

$$y_1 (y_{12}, -y_{11})\ ;\ y_2 (y_{22}, -y_{21}) \ldots y_i (y_{i2}, -y_{i1}) \ldots y_\nu (y_{\nu 2}, -y_{\nu 1})$$

ersetze. Man gelangt dann zu der Identität:

$$\frac{p!}{(p-\nu)!} \varphi_x^{p-\nu} (\varphi y_1) (\varphi y_2) \ldots (\varphi y_\nu)$$

$$= \Sigma (s_{\alpha_1}, y_1)(s_{\alpha_2}, y_2) \ldots (s_{\alpha_\nu}, y_\nu)\, s_{\alpha_{\nu+1},x}\, s_{\alpha_{\nu+2},x} \ldots s_{\alpha_p,x}\, \Delta(\varphi),$$

worin man für die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ alle möglichen Combinationen von ν Zahlen in allen möglichen Reihenfolgen aus den Zahlen $1, 2, \ldots p$ setzen und dann die Summation über alle diese $\frac{p!}{(p-\nu)!}$ Combinationen ausdehnen muss. Ersetzt man in dieser Hülfsformel die Variabeln y_i durch die Symbole r_i und multiplicirt man mit T, so gelangt man zu der Gleichung:

$$R = \frac{1}{h} \Sigma\, T.\Delta(\varphi)(s_{\alpha_1}, r_1)(s_{\alpha_2}, r_2) \ldots (s_{\alpha_\nu}, r_\nu)\, s_{\alpha_{\nu+1},x}\, s_{\alpha_{\nu+2},x} \ldots s_{\alpha_p,x}$$

$$= \frac{1}{h} \sum_1^h{}_i\, Z_i,$$

worin h die Zahl $\frac{p!}{(p-\nu)!}$ bedeutet.

Die Aufgabe ist somit gelöst; die symbolischen Producte Z besitzen den Factor T und alle Symbole, welche in R auftreten, ausser dem Symbol φ; statt des letzteren enthalten sie die Symbole s. Diese symbolischen Producte Z sollen *Eintragungsglieder* genannt werden.

Ist φ eine Form $P(\psi)$, dann kommt das Symbol ψ unter den s vor, steht also auch in den Ausdrücken Z. Dieselben sind mithin Formen $P(\psi)$ und daher auch R. Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dass, wenn die Formen

$$\varphi_1\ ,\ \varphi_2\ ,\ \ldots$$

Formen $P(\psi_1, \psi_2, \ldots)$ sind, jede Form $P(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ gleichfalls eine Form $P(\psi_1, \psi_2, \ldots)$ oder kurz eine Form $P(\psi)$ ist.

Alle Eintragungsglieder Z haben die Factoren $\Delta(\varphi)$ und T; sie enthalten dieselben Symbole und haben in Bezug auf die Symbole s dieselbe Norm ν. Für jedes andere Symbol ψ von R ist die Differenz $(\psi) - (\varphi, \psi)$ für R ebenso gross als die Differenz $(\psi) - (s, \psi)$ für ein Z; da diese Zahl nur von den Klammerfactoren des Factors T herrührt.

§ 4.

Differenzen der Eintragungsglieder, die symbolischen Producte L.

Zwei Eintragungsglieder, etwa Z und Z' sollen benachbart heissen, wenn sie alle ausser zwei Factoren gemeinsam haben; die beiden nicht gemeinsamen Factoren können entweder beide Klammerfactoren sein oder einer derselben ein Klammerfactor und der andere ein Factor erster Art. Bezeichnet man das Product der gemeinsamen Factoren von Z und Z_1 durch Q, dann ist im ersten Falle:

$$Z = Q(rs)(r's'); \; Z' = Q(rs')(r's) \text{ also: } Z - Z' = Q(rr')(ss')$$

und im zweiten Falle:

$$Z = Q s_x (rs') \;;\; Z' = Q s'_x (rs) \text{ also: } Z - Z' = Q r_x (ss').$$

Die symbolischen Producte:

$$Z - Z' = Q(rr')(ss') \text{ oder } Q r_x (ss'),$$

sowie ihre Aggregate will ich Formen L nennen; in ihnen treten dieselben Symbole wie in den Formen Z auf, sie besitzen ebenso wie diese die Factoren T und $\Delta(\varphi)$ und für sie besitzt die Zahl $(\psi) - (\varphi\psi)$ denselben Werth wie für die Formen Z, da diese Zahl ja nur von den in T enthaltenen Klammerfactoren herrührt.

Hingegen ist für die symbolischen Producte L die Norm (s) und daher auch die Zahl $(s) + (\psi) - (s\psi)$ kleiner, die Zahl (s, s) jedoch grösser als für die Eintragungsglieder Z.

Sind Z_i und Z irgend zwei Eintragungsglieder, dann kann man eine Anzahl anderer Glieder:

$$Z_{i1} \;;\; Z_{i2} \;, \; \ldots \; Z_{ik}$$

der Art angeben, dass in der Reihe:

$$Z_i \;, \; Z_{i1} \;, \; Z_{i2} \;, \; \ldots \; Z_{ik} \;, \; Z$$

je zwei auf einander folgende Glieder im obigen Sinne benachbart sind. Die Differenzen $Z_i - Z$ sind daher auch Formen L und so mit nach der Formel:

$$R = \frac{1}{h} \sum_1^h {}_i Z_i = Z + \frac{1}{h} \sum_1^h {}_i (Z_i - Z)$$

auch die Differenz $R - Z$.

§ 5.

Darstellung symbolischer Producte durch andere, in denen weniger Symbole auftreten.

Umgekehrt kann man aus jedem Eintragungsgliede:

$$Z = T.\Delta(\varphi)(s_{\alpha_1}, r_1)(s_{\alpha_2}, r_2)(s_{\alpha_3}, r_3)\ldots(s_{\alpha_\nu}, r_\nu) s_{\alpha_{\nu+1}, x} s_{\alpha_{\nu+2}, x} \ldots s_{\alpha_p . x}$$

die Formen φ und R ableiten.

Ersetzt man nämlich in Z nach Weglassung des Factors T die Klammerfactoren (s_{α_i}, r_i) durch $s_{\alpha_i, x}$, dann entsteht die Form:

$$\varphi = \Delta(\varphi)\, s_{1,x}\, s_{2,x} \ldots s_{p,x}.$$

Ersetzt man hingegen nach Weglassung des Factors $\Delta(\varphi)$ die Factoren (s_{α_i}, r_i) und $s_{\alpha_i, x}$ durch (φ, r_i) und φ_x, dann gelangt man zu der Form:

$$R = T\varphi_x^{p-\nu}(\varphi r_1)(\varphi r_2) \ldots (\varphi r_\nu).$$

Man kann zeigen, dass jedes symbolische Product $\vartheta(p_1, p_2, \ldots)$ (vgl. § 1.) auf viele Arten als Eintragungsglied dargestellt werden kann; zu dem Ende sondere man irgend eine Anzahl der darin enthaltenen Symbole, eine Symbolgruppe, ab, und führe hierbei folgende Bezeichnung ein. Das Product derjenigen (symbolischen) Factoren, welche kein Symbol der abgesonderten Gruppe enthalten, bezeichne man durch T, das Product derjenigen Klammerfactoren, welche nur Symbole der Gruppe enthalten, durch $\Delta(\varphi)$; die übrigen Symbole der Gruppe, sei es, dass sie in Factoren erster Art, sei es, dass sie mit andern Symbolen zusammen in Klammerfactoren auftreten durch $s_1, s_2, \ldots.$, jene anderen Symbole endlich, welche mit den s zusammen in Klammerfactoren stehen, durch $r_1\, r_2 \ldots. r_\nu$.

In dieser Bezeichnung nimmt $\vartheta(p)$ die Form an:

$$\vartheta(p) = T.\Delta(\varphi)(s_1, r_1)(s_2, r_2) \ldots (s_\nu, r_\nu)\, s_{\nu+1,x}\, s_{\nu+2,x} \ldots s_{p,x},$$

welche es als Eintragungsglied charakterisiren.

Da nun jedes Eintragungsglied Z, wie im vorigen Paragraph gezeigt wurde, in die Form:

$$Z = R + \Sigma L$$

gebracht werden kann, worin für die L die Norm (s) kleiner als ν war, so kann ein Gleiches mit dem symbolischen Producte $\vartheta(p)$ geschehen.

Das Eintragungsglied Z kann nun auch in die Form:

$$Z = R + \Sigma c R'$$

gebracht werden, worin die R' ähnliche symbolische Producte wie die R bedeuten. Sie haben nämlich mit R den symbolischen Factor T gemein, und es treten in ihnen alle Symbole von R ausser φ auf. Statt des letzteren enthält jedes der symbolischen Producte R' das Symbol neuer Formen $\varphi', \varphi'' \ldots$ und hat in Bezug auf dasselbe eine Norm $(\varphi^{(i)})$, welche kleiner als (s) ist. Diese Formen $\varphi^{(i)}$ sind symbolische Producte, welche den symbolischen Factor $\Delta(\varphi)$ besitzen und in denen dieselben Symbole wie in φ vorkommen. Um nun zu beweisen, dass das Eintragungsglied Z in die obige Form gebracht werden kann, mache man die Annahme, dieser Satz sei für alle symbolischen Producte $\vartheta(p)$ bewiesen, bei denen die Norm $(s) < \nu$ ist.

Nach dieser Annahme gilt derselbe für die symbolischen Producte L, so dass man:

$$L = \Sigma c R'$$

setzen darf. Da nun nach § 4. die Differenz $Z - R$ ein Aggregat solcher Producte L ist, so hat man:

$$Z = R + \Sigma c' R'.$$

§ 6.

Unvollständige symbolische Producte.

Ein Product von (symbolischen) Klammerfactoren, welches nicht jedes darin vorkommende Symbol so oft enthält, als der Grad der durch dasselbe dargestellten Form Einheiten enthält, nenne ich ein unvollständiges symbolisches Product und diejenigen (vollständigen) symbolischen Producte, welche es als Factor enthalten und in denen nur die Symbole desselben auftreten, die zu ihm gehörigen Formen.

Bezeichnet man nun die zu einem unvollständigen symbolischen Producte Δ gehörigen Formen durch

$$\varphi_1 \ , \ \varphi_2 \ , \ \varphi_3 \ , \ \ldots .$$

dann ist *jedes* den Factor Δ enthaltende symbolische Product P als Form $P(\varphi)$ darstellbar.

Ich theile, um dies nachzuweisen, die in P vorkommenden Symbole in zwei Gruppen, je nachdem sie in Δ stehen oder nicht, und stelle sodann P in der im vorigen Paragraph angegebenen Weise als Eintragungsglied dar, so dass es die Form:

$$P = R + \Sigma c R'$$

annehmen kann. Die hier auftretenden Ausdrücke R sind symbolische Producte, von denen jedes statt der Symbole der ersten Gruppe je ein Symbol enthält, welches eine der Formen φ darstellt; sie sind also Formen $P(\varphi)$.

§ 7.

Eintragung der Werthe für mehrere Symbole.

In derselben Weise, wie im § 3. für ein Symbol φ in das symbolische Product R sein Werth eingetragen wurde, kann man in einem Eintragungsgliede Z_i für ein zweites in R also auch in Z_i vorkommendes Symbol ψ, welches eine Form:

$$\psi = \Delta(\psi) \ t_{1,x} \ t_{2,x} \ \ldots \ t_{q,x}$$

darstellen möge, seinen Werth eintragen.

Die hierdurch entstehenden Eintragungsglieder

$$Z_{i1} \ , \ Z_{i2} \ , \ Z_{i3} \ \ldots .$$

treten auch bei R auf, wenn man darin zu gleicher Zeit für die

Symbole φ und ψ ihre Werthe einträgt. Auch in die symbolischen Producte L (§ 4.) kann man für das Symbol ψ seinen Werth eintragen; man erhält dann für L ein Aggregat symbolischer Producte L', in welchen dieselben Symbole wie in den Z_{ik} vorkommen.

Für die Formen Z_{ik} haben die Zahlen (s), (t) und (st) dieselben Werthe wie die Zahlen (s), (ψ) und $(s\psi)$ für Z_i und die Zahlen (φ), (ψ) und $(\varphi\psi)$ für R.

Für die Formen L' haben die Zahlen (s), (t) und (st) dieselben Werthe wie die Zahlen (s), (ψ) und $(s\psi)$ für die Formen L; für diese letzteren ist nun aber nach § 4. die Zahl $(s) + (\psi) - (s\psi)$ kleiner als die Zahl $(\varphi) + (\psi) - (\varphi\psi)$ für R, welche ich durch ϱ bezeichnen will, mithin ist auch die Zahl $(s) + (t) - (st)$ für die Formen Z_{ik} gleich ϱ und für die Formen L' kleiner als ϱ.

Ebenso wie (§ 4.) die Differenz zweier benachbarten Eintragungsglieder Z und Z' ein symbolisches Product L war, worin dieselben Symbole wie in den Z vorkommen und wofür die Norm (s) kleiner als für die Z war, so ist auch hier die Differenz zweier benachbarten Eintragungsglieder Z_{i1} und Z_{i2} ein symbolisches Product L'', welches dieselben Symbole, wie Z_{i1} und Z_{i2} enthält, für das jedoch die Norm (t) einen kleineren Werth besitzt, die Zahl $(s) - (st)$ aber denselben Werth hat als für die Formen Z_{ik}. Für die symbolischen Producte L'' ist daher die Zahl $(s) + (t) - (st) < \varrho$.

Die Differenz $R - Z_i$, welche nach § 4. ein Aggregat symbolischer Producte L war, ist, da diese wieder Aggregate der Formen L' sind, ein Aggregat der L'; ebenso ist die Differenz $Z_i - Z_{ik}$ ein Aggregat symbolischer Producte L''.

Mithin ist die Differenz $R - Z_{ik}$ ein Aggregat symbolischer Producte L' und L'', für welche die Zahl $(s) + (t) - (st) < \varrho$ ist.

§ 8.

Die Uebereinanderschiebungen.

Unter den symbolischen Producten, in denen die Symbole φ und ψ gleichzeitig auftreten, sind diejenigen von besonderer Wichtigkeit, welche *nur* diese Symbole enthalten, also die Formen:

$$R = \varphi_x^{p-\nu}\, \psi_x^{q-\nu}\, (\varphi\psi)^\nu;$$

sie sind schon anderwärts ausführlich behandelt worden.

Die Operation, durch welche R aus den Covarianten φ und ψ entsteht, nenne ich Uebereinanderschiebung; desgleichen will ich die Form R selbst Uebereinanderschiebung nennen und durch $(\varphi\psi)^\nu$ bezeichnen.

Die Zahl ν nenne ich den Grad der Uebereinanderschiebung; sie ist gleich den Normen (φ) und (ψ) und den Zahlen $(\varphi\psi)$ und

$$(\varphi) + (\psi) - (\varphi\psi)$$

und nicht grösser als der Grad einer der Formen φ und ψ. Wird $\nu = 0$, dann geht R in das Product der Covarianten φ und ψ über.

Trägt man in R für die Symbole φ und ψ ihre Werthe ein (vgl. § 3. und § 7.), dann erhält man für R einen Ausdruck, welcher, abgesehen vom Factor

$$\frac{(p-\nu)!}{p!}\frac{(q-\nu)!}{q!},$$

die Gestalt besitzt:

$$\Sigma\, \Delta(\psi)\Delta(\varphi)(s_{\alpha_1}, t_{\beta_1})(s_{\alpha_2}, t_{\beta_2}) \ldots (s_{\alpha_\nu}, t_{\beta_\nu})\, s_{\alpha_{\nu+1},x} s_{\alpha_{\nu+2},x} \ldots s_{p,x} t_{\beta_{\nu+1},x} t_{\beta_{\nu+2},x} \ldots t_{\beta_q,x}$$

also:

$$R = \frac{(p-\nu)!}{p!}\frac{(q-\nu)!}{q!}\,\Sigma Z_{ik}\,.$$

Die Glieder dieser Summe, die symbolischen Producte Z_{ik}, nenne ich die Glieder der Uebereinanderschiebung R, für dieselben haben die Zahlen (s), (t) (st) und $(s) + (t) - (st)$ den Werth ν.

Nach dem vorigen Paragraphen ist die Differenz $R - Z_{ik}$, sowie die Differenz $Z_{ik} - Z_{i',k'}$, ein Aggregat symbolischer Producte $\vartheta\,(s, t)$ (vgl. § 1.), deren Norm $(s) = (t) = (st) = (s) + (t) - (st)$ kleiner als ν ist.

§ 9.

Darstellung symbolischer Producte als Glieder von Uebereinanderschiebungen.

In ähnlicher Weise, wie im § 5. die Formen R und φ aus den symbolischen Producten Z_i abgeleitet wurden, kann man auch hier die Formen φ, ψ und R erzeugen, wenn ein Uebereinanderschiebungsglied:

$$Z_{ik} = \Delta(\varphi)\Delta(\psi)(s_{\alpha_1}, t_{\beta_1})(s_{\alpha_2}, t_{\beta_2}) \ldots (s_{\alpha_\nu}, t_{\beta_\nu})\, s_{\alpha_{\nu+1},x} \ldots s_{px}\, t_{\beta_{\nu+1},x} \ldots t_{\beta_q,x}$$

gegeben ist. Ersetzt man nämlich in dem symbolischen Producte Z_{ik} nach Weglassung der Factoren $\Delta(\psi)$ und t_{ix} die Factoren (s_i, t_k) durch s_{ix}, dann erhält man die Form φ. Ebenso ergiebt sich die Form ψ, wenn man nach Weglassung der Factoren $\Delta(\psi)$ und $s_{i,x}$ die Factoren (s_i, t_k) durch $t_{k,x}$ ersetzt.

Man kann nun zeigen (vgl. § 5.), dass jedes symbolische Product P sich auf viele Weisen als Uebereinanderschiebungsglied darstellen lässt. — Theilt man die in P vorkommenden Symbole in irgend zwei Gruppen, dann kann man folgende Bezeichnung einführen. Das Product derjenigen Klammerfactoren, welche nur Symbole der ersten Gruppe enthalten, bezeichne ich durch $\Delta(\varphi)$, das Product derjenigen, in denen nur Symbole der zweiten auftreten, durch $\Delta(\psi)$; die übrigen Symbole der ersten Gruppe, sei es, dass sie in Factoren erster oder zweiter Art stehen, durch $s_1, s_2, \ldots s_p$; die entsprechenden Symbole der zweiten Gruppe durch

$$t_1\,,\ t_2\,,\ \ldots\ t_q\,.$$

Durch diese Bezeichnungsweise erhält man für das symbolische Product P den Ausdruck:

$$P = \Delta(\varphi)\,\Delta(\psi)\,(s_1,t_1)\,(s_2,t_2)\ldots(s_\nu,t_\nu)\,s_{\nu+1,x}\,s_{\nu+2,x}\ldots s_{p,x}\,t_{\nu+1,x}\,t_{\nu+2,x}\ldots t_{q,x}\,,$$

welcher es als Glied der ν^{ten} Uebereinanderschiebung der beiben Covarianten:

$$\varphi = \Delta(\varphi)\ s_{1,x}\,s_{2,x}\ \ldots\ s_{p,x}$$
$$\psi = \Delta(\psi)\ t_{1,x}\,t_{2,x}\ \ldots\ t_{q,x}$$

characterisirt. Der Grad ν ist die Norm des symbolischen Productes P sowohl in Bezug auf die Symbole der ersten Gruppe, als auch in Bezug auf diejenigen der zweiten.

§ 10.

Formensysteme.

Nachdem ich die einzelnen simultanen Formen (Covarianten und Invarianten) für die vorliegende Untersuchung genügend beschrieben habe, will ich nunmehr *Formensysteme* untersuchen. Eine Anzahl von irgend welchen Covarianten und Invarianten:

$$A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots\ ,\ A_\varrho$$

will ich unter dem Namen *Formensystem* zusammenfassen und ihre Grade entsprechend durch:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_\varrho$$

bezeichnen.

Die Formen $P(A)$ (vgl. § 2.) sind dann Aggregate symbolischer Producte, in deren jedem mindestens ein Symbol A vorkommt und die Formen $C(A)$ symbolische Producte, in denen nur Symbole A auftreten. Die *wirklichen* Producte der Formen A bezeichne ich durch:

$$S(A) = A_1^{\alpha_1}\ A_2^{\alpha_2}\ \ldots\ A_\varrho^{\alpha_\varrho}\,.$$

Die Anzahl der Factoren A_i von $S(A)$ ist

$$\sum_1^{\varrho}{}_i\ \alpha_i\ ;$$

der Grad von $S(A)$

$$\sum_1^{\varrho}{}_i\ a_i\,\alpha_i\,.$$

Ebenso mögen die Formen:

$$B_1\ ,\ B_2\ ,\ \ldots\ ,\ B_\sigma$$

ein zweites System bilden, ihre Grade bezeichne ich durch:

$$b_1\ ,\ b_2\ ,\ \ldots\ ,\ b_\sigma$$

und ihre Producte:

$$B_1^{\beta_1}\ B_2^{\beta_2}\ \ldots\ B_\sigma^{\beta_\sigma}$$

durch $S(B)$.

§ 11.

Die Uebereinanderschiebungen 1ter und 2ter Art der Form: $[S(A), S(B)]^\nu$.

Von grossem Interesse bei der Untersuchung der Formensysteme sind Uebereinanderschiebungen wie:

$$[S(A) \;,\; S(B)]^\nu.$$

Bei denselben unterscheide ich zwei Arten, je nachdem ein Glied derselben existirt, das in Factoren zerfällt oder nicht (vgl. § 8.). Ich behaupte nun, dass die Uebereinanderschiebung $[S(A) , S(B)]^\nu$ in folgenden Fällen, und zwar nur in denselben der ersten Art angehöre.

Erster Fall.

Wenn eines der Producte $S(A)$ oder $S(B)$ eine Invariante zum Factor hat; die Uebereinanderschiebung $[S(A) , S(B)]^\nu$ besitzt dann gleichfalls diesen Factor.

Zweiter Fall.

Wenn eines der übereinandergeschobenen Producte, etwa $S(A)$, einen Factor K besitzt, dessen Grad g nicht kleiner als ν ist.

Beweis. Setzt man $S(A) = K.L$ und bezeichnet man irgend ein Glied der Uebereinanderschiebung $[K, S(B)]^\nu$ durch Z, dann ist das Product $Z.L$ ein Glied der Uebereinanderschiebung $[S(A), S(B)]^\nu$.

Dritter Fall.

Wenn man die beiden Producte $S(A)$ und $S(B)$ in solche Factoren:

$$S(A) = K_1 . K_2 \qquad\qquad S(B) = L_1 . L_2$$

zerlegen kann, dass die Grade g_1, g_2, h_1 und h_2 der Formen K_1, K_2, L_1 und L_2 den Ungleichungen genügen:

$$h_1 < g_1 \qquad \text{und} \qquad \nu \leqq h_1 + g_2 .$$

Beweis. Da für $\nu \leqq h_1$ der vorige Fall eintritt und für

$$\nu > h_1 + h_2$$

unsere Uebereinanderschiebung verschwindet, so will ich mich auf den Fall beschränken, wo:

$$0 \leqq \nu - h_1 \leqq h_2$$

ist. Bezeichne ich dann irgend welche Glieder der Uebereinanderschiebungen $(K_1 , L_1)^{h_1}$ und $(K_2 , L_2)^{\nu-h_1}$ durch Z_1 und Z_2, dann ist das Product $Z_1 . Z_2$ ein Glied der Uebereinanderschiebung

$$[S(A) , S(B)]^\nu.$$

Vierter Fall.

Wenn eines der übereinandergeschobenen Producte, etwa $S(A)$ einen Factor K besitzt, dessen Grad g nicht kleiner ist als der Grad des andern Productes $S(B)$.

Beweis. Es sind hier zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem ν grösser als der Grad des Productes $S(B)$ ist oder nicht. Im ersteren verschwindet unsere Uebereinanderschiebung, im letzteren ist auch $\nu \leqq g$ und es tritt der zweite Fall ein.

Fünfter Fall.

Wenn ein Factor K des Productes $S(A)$ und ein Factor L des Productes $S(B)$ denselben Grad g haben.

Beweis. Man unterscheide wieder zwei Unterfälle, je nachdem $\nu \leqq g$ oder $\nu > g$ ist. Im ersten Unterfalle tritt der zweite Fall ein, im letzteren setze man

$$S(A) = K . K_1 \quad , \quad S(B) = L . L_1$$

und bezeichne irgend welche Glieder der Uebereinanderschiebungen $(K, L)^g$ und $(K_1, L_1)^{\nu-g}$ durch Z_1 und Z_2. Dann ist das Product $Z_1 . Z_2$ ein Glied der Uebereinanderschiebung $[S(A), S(B)]^\nu$.

Sechster Fall.

Wenn man die Producte $S(A)$ und $S(B)$ in solche Factoren:

$$S(A) = K . K_1 \quad ; \quad S(B) = L . L_1$$

zerlegen kann, dass die Grade g, g_1, h und h_1 der Formen K, K_1, L und L_1 den Ungleichungen genügen:

$$g > h \qquad \text{und} \qquad g_1 > h_1 .$$

Beweis. Man unterscheide zwei Unterfälle, je nachdem ν grösser ist als $h + h_1$ oder nicht. Im ersteren verschwindet unsere Uebereinanderschiebung, im letzteren ist $\nu < h + g_1$ und es tritt der dritte Fall ein.

Siebenter Fall.

Wenn die Anzahl der Factoren A_i des Productes $S(A)$ der Ungleichung genügt:

$$\sum_1^\varrho{}_i \alpha_i > \varrho \sum_1^\sigma{}_i b_i$$

(oder die Anzahl der Factoren B_i des Productes $S(B)$ der Ungleichung

$$\sum_1^\sigma{}_i \beta_i > \sigma \sum_1^\varrho{}_i a_i$$

genügt).

Beweis. Schreibt man die Ungleichung in der Form:

$$\sum_1^\varrho{}_i \left\{ \alpha_i - \sum_1^\sigma{}_k b_k \right\} > 0,$$

dann sieht man, dass mindestens einer der Summanden

$$\alpha_i - \sum_1^\sigma{}_k\, b_k$$

etwa

(I) $$\alpha_1 - \sum_1^\sigma{}_i\, b_i > 0$$

sein muss.

Man unterscheide nun drei Unterfälle, je nachdem:

1) $\nu > \sum_1^\sigma{}_i\, b_i\, \beta_i$ oder 2) $\nu \leqq a_1(\alpha_1 - 1)$ oder 3) $\sum_1^\sigma{}_i\, b_i \beta_i \geqq \nu > a_1(\alpha_1 - 1)$.

Im ersten Unterfalle verschwindet die Uebereinanderschiebung $(S(A)\,,\, S(B))^\nu$; im zweiten ist ν nicht grösser als der Grad $a_1(\alpha - 1)$ des Factors $A_1{}^{\alpha-1}$ des Productes $S(A)$ und es tritt der zweite Fall ein; im dritten Unterfalle endlich ist:

$$\sum_1^\sigma{}_i\, b_i\, \beta_i > a_1(\alpha_1 - 1) \geqq a_1 \sum_1^\sigma{}_i\, b_i \qquad \text{(vgl. F. I)}$$

und daher:

$$\sum_1^\sigma{}_i\, b_i\, (\beta_i - a_1) \geqq 0.$$

Diese Ungleichung kann nur dann bestehen, wenn mindestens eine der Differenzen $\beta_i - a_1$ etwa

(II) $$\beta_1 - a_1 \geqq 0$$

ist.

Aus den Formeln (I) und (II) geht hervor, dass die Potenzen $A_1^{b_1}$ und $B_1^{a_1}$ Factoren der Producte $S(A)$ und $S(B)$ sind. Da die Grade dieser Potenzen übereinstimmen, so tritt hier der fünfte Fall ein.

§ 12.

Die Uebereinanderschiebungen erster und zweiter Art der Form $(S(A)\,,\,\varphi^\varrho)^\nu$.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wo das System der B nur aus einer einzigen Form besteht; ich will dieselbe durch φ und ihren Grad durch n bezeichnen.

Die zu untersuchenden Uebereinanderschiebungen haben dann die Form:

$$(S(A)\,,\,\varphi^\varrho)^\nu,$$

man unterscheide bei denselben zwei Fälle, je nachdem $S(A)$ eine einzelne Form A_i oder ein Product mehrerer solcher Formen ist.

Die Uebereinanderschiebung:

$$(A_i\,,\,\varphi^\varrho)^\nu$$

gehört der ersten Art an, wenn der Grad $n(\varrho - 1)$ der Potenz $\varphi^{\varrho-1}$ entweder nicht kleiner als a_i oder nicht kleiner als ν ist (vgl. § 11. Fall 2. und 4.), also dann der zweiten Art, wenn $n(\varrho - 1)$ sowohl kleiner als a_i als auch kleiner als ν ist.

Ich gehe nunmehr zu dem zweiten Falle über, wo $S(A)$ ein Product mehrerer Formen A etwa:

$$S(A) = A_1 . A_2 \ldots . A_\mu$$

ist, unter denen auch mehrere übereinstimmen können. Man kann dann das Product $S(A)$ auf mannigfache Art in zwei Factoren P und Q zerlegen.

$$S(A) = PQ.$$

Von den Factoren P und Q will ich sagen, sie entsprechen einander und ihre Grade durch p und q bezeichnen.

Den Grad $p + q$ des Productes $S(A)$ bezeichne ich durch g und die Reste, welche man erhält, wenn man die Zahlen p und q durch n dividirt, durch r und r'.

Man kann dann beweisen, dass die Uebereinanderschiebung:

$$(S(A)\,,\ \varphi^\varrho)^\nu = (P{:}Q\,,\ \varphi^\varrho)^\nu$$

in folgenden Fällen der ersten Art angehört:

Erster Fall.

Wenn

$$n\varrho \gtrless n + g - (r + r')$$

ist.

Beweis. Man unterscheide vier Unterfälle, je nachdem:

1. $n\varrho \leqq p$
2. $n(\varrho - 2) > g - (r + r')$
3. $p < n\varrho < g - (r + r_1)$
4. $n\varrho = g + 2n - (r + r_1)$.

Im ersten Unterfalle hat der Factor P des Productes $S(A)$ einen Grad, der nicht kleiner ist als der Grad von φ^ϱ (vgl. § 11. Fall IV.); im zweiten Unterfalle hat der Factor $\varphi^{\varrho-1}$ der Potenz φ^ϱ einen Grad, der nicht kleiner als der Grad g des Productes $S(A)$ ist (vgl. § 11. Fall IV.); im dritten Unterfalle zerfällt die Potenz φ^ϱ in die Factoren

$$\varphi^{\frac{p-r}{n}} \quad \text{und} \quad \varphi^{\varrho - \frac{p-r}{n}},$$

deren Grade nicht grösser als die Grade p und q sind (vgl. § 11. Fall VI.).

Im vierten Unterfalle zerfällt die Potenz φ^ϱ in die Factoren $\varphi^{\frac{p+n-r}{n}}$ und $\varphi^{\frac{q+n-r'}{n}}$, deren Grade grösser als die Grade p und q sind. (Vgl. § 11. Fall VI.).

Zweiter Fall.

Wenn $n\varrho = g + n - (r + r')$ und p durch n theilbar, also $r = 0$ ist. — In diesem Falle hat der Factor $\varphi^{\frac{p}{n}}$ der Potenz φ^ϱ denselben Grad p als der Factor P von $S(A)$. (Vgl. § 11. Fall V.).

Dritter Fall.

Wenn $n\varrho = g + n - (r + r')$ und $\nu \leqq g - r$ ist.

Beweis. Ich bezeichne irgend welche Glieder der Uebereinanderschiebungen:

$$\left(P,\ \varphi^{\frac{p-r}{n}}\right)^{p-r} \quad \text{und} \quad \left(Q,\ \varphi^{1+\frac{q-r'}{n}}\right)^{\nu-(p-r)}$$

durch Z_1 und Z_2; das Product $Z_1 . Z_2$ ist dann ein Glied der Uebereinanderschiebung

$$(P . Q,\quad \varphi^\varrho)^\nu.$$

Diese drei Fälle sind die einzigen, in denen die Uebereinanderschiebung

$$(S(A),\quad \varphi^\varrho)^\nu$$

der ersten Art angehört; sie gehört mithin der zweiten Art an, wenn folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden.

Erste Bedingung. Für keine Zerlegung darf der Rest r verschwinden (vgl. zweiten Fall).

Zweite Bedingung. Für jede Zerlegung muss

$$n\varrho = g + n - (r + r')$$

sein (vgl. ersten Fall).

Dritte Bedingung. Für jede Zerlegung muss $\nu > g - r$ sein (vgl. dritten Fall).

Aus diesen Bedingungen lassen sich die folgenden ableiten, welche die Aufstellung sämmtlicher Uebereinanderschiebungen zweiter Art erleichtern.

Vierte Bedingung. Die Summe $r + r'$ muss für alle Zerlegungen denselben Werth haben (vgl. zweite Bedingung).

Fünfte Bedingung. Bezeichnet man den kleinsten Werth, welchen der Rest r für eine Zerlegung annimmt, durch r_0, dann muss $\nu > g - r_0$ sein.

Diese Bedingung folgt aus der dritten und ersetzt dieselbe. Den dem Rest r_0 bei einer Zerlegung entsprechenden Rest bezeichne ich durch r_0'.

Sechste Bedingung. Die Anzahl μ der Factoren A von $S(A)$ darf nicht grösser als n sein.

Beweis. Wäre $\mu > n$, dann gäbe es in der Reihe der Formen:

$$A_1\,;\quad A_1 \,.\, A_2\,;\quad A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3\,; \ldots A_1 \,.\, A_2 \ldots A_\varrho$$

mindestens zwei, deren Grade durch n dividirt, denselben Rest gäben. Wären dieselben:

$$A_1\, A_2 \ldots A_i \text{ und } A_1\, A_2 \ldots A_k\,,$$

dann wäre ihr Quotient, das Product

$$A_{i+1} \,.\, A_{i+2} \ldots A_k$$

ein Factor von $S(A)$, dessen Grad durch n theilbar wäre (vgl. Bedingung 1).

Die Reste r, r', r_0, r_0', welche hierbei auftreten, kann man in der folgenden Weise berechnen. Man bezeichne durch:

$$s_1\,,\quad s_2 \ldots . s_\mu$$

diejenigen Reste, welche entstehen, wenn man die Grade der einzelnen Factoren A von $S(A)$ durch n dividirt. Theilt man sie auf alle möglichen Weisen in zwei Gruppen

$$s_{i_1}\,,\quad s_{i_2} \ldots s_{i_{h_1}} \quad \text{und} \quad s_{k_1}\,,\quad s_{k_2} \ldots s_{k_{h_2}}$$

und dividirt man dann die Summen:

$$s_{i_1} + s_{i_2} + s_{i_3} \ldots s_{i_{h_1}} \quad \text{und} \quad s_{k_1} + s_{k_2} \ldots s_{k_{h_2}}$$

durch n, dann erhält man die Reste r und r', welche den verschiedenen Zerlegungen des Productes $S(A)$ entsprechen. Den Rest r' kann man dadurch aus r berechnen, dass man die Differenz $\sum_1^\mu {}_i\, s_i - r$ durch n dividirt.

Da die Kenntniss des Systemes der Reste s zur Bestimmung der Zahl μ und der Restepaare r und r' also auch des Restepaars r_0 und r_0' ausreicht, so ergeben die Bedingungen 1, 4 und 6 nur Eigenschaften dieses Restsystems; ich will diejenigen Restsysteme, welche sie besitzen, speciell nennen.

Die Bedingungen, unter denen die Uebereinanderschiebung $(S(A)\,,\ \varphi^\varrho)^\nu$ der zweiten Art angehört, lassen sich denn folgender Massen aussprechen.

I.

Ist $S(A)$ eine einzelne Form A_i, dann muss gleichzeitig:

$$n(\varrho - 1) < \nu \quad \text{und} \quad n(\varrho - 1) < a_i$$

sein.

II.

Ist $S(A)$ ein Product mehrerer Formen A, dann muss gleichzeitig

1. das dem Producte $S(A)$ entsprechende Restsystem speciell,
2. $g - n\varrho = r_0 + r_0' - n$,
3. $g - \nu < r_0$,
4. $\nu \leqq a$ und $\nu \leqq n\varrho$ sein.

Diese Bedingungen genügen zur Aufstellung *sämmtlicher* Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form $(S(A), \varphi^\varrho)^\nu$. Diejenigen unter ihnen, bei denen $S(A)$ eine einzelne Form A_i ist, findet man, indem man für ϱ alle ganzen Zahlen setzt, welche der Ungleichung $n(\varrho - 1) < a_i$ genügen, und dann für ν alle Zahlen, die zwischen $n(\varrho - 1)$ und $n\varrho$ liegen, diejenigen ausgenommen, welche grösser als a_i sind.

Um diejenigen Uebereinanderschiebungen, bei denen $S(A)$ ein Product mehrerer A ist, zu finden, bilde man zuerst alle zu der Zahl n gehörigen Restsysteme, berechne alsdann für jedes derselben die entsprechenden Producte $S(A)$ und schliesslich nach der zweiten, dritten und vierten Bedingung die Zahlen ϱ und ν.

Als Beispiel will ich für $n = 1, 2, 3$ und 4 die speciellen Restsysteme aufstellen und für jedes derselben die Reste r_0 und r_0' sowie die Zahl $r_0 + r_0' - n$ berechnen.

Für $n = 1$ existirt kein specielles Restsystem.

Für $n = 2$ ist $(1, 1)$ das einzige specielle Restsystem; für dasselbe ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 1$; $r_0 + r_0' - n = 0$.

Für $n = 3$ giebt es die speciellen Restsysteme:

$$(1, 1); \quad (1, 2); \quad (2, 2); \quad (1, 1, 1); \quad (2, 2, 2).$$

Für das Restsystem $(1, 1)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 1$; $r_0 + r_0' - n = 1$,
" " " $(1, 2)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
" " " $(2, 2)$ ist: $r_0 = 2$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 1$,
" " " $(1, 1, 1)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
" " " $(2, 2, 2)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 0$.

Für $n = 4$ existiren die speciellen Restsysteme:

$$(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (2,2);\ (2,3);\ (3,3);\ (1,1,1);\ (1,1,2);\ (2,3,3);\ (3,3,3);$$
$$(1,1,1,1);\ (3,3,3,3).$$

Für das Restsystem $(1, 1)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 1$; $r_0 + r_0' - n = -2$,
" " " $(1, 2)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = -1$,
" " " $(1, 3)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
" " " $(2, 2)$ ist: $r_0 = 2$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
" " " $(2, 3)$ ist: $r_0 = 2$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 1$,
" " " $(3, 3)$ ist: $r_0 = 3$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 2$,
" " " $(1, 1, 1)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 2$; $r_0 + r_0' - n = -1$,

Für das Restsystem $(1,1,2)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
" " " $(2,3,3)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 1$; $r_0 + r_0' - n = -2$,
" " " $(3,3,3)$ ist: $r_0 = 2$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 1$,
" " " $(1,1,1,1)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 0$,
" " " $(3,3,3,3)$ ist: $r_0 = 1$; $r_0' = 3$; $r_0 + r_0' - n = 0$.

§ 13.

Combinirte Formensysteme.

Gehört die Uebereinanderschiebung $(S(A), S(B))^\nu$ der zweiten Art an, dann ist nach § 11. zweiter Fall die Anzahl der Factoren A des Productes $S(A)$ nicht grösser als $\varrho \sum_1^\sigma {}_i\, b_i$ und die Anzahl der Factoren B des Productes $S(B)$ nicht grösser als $\sigma \sum_1^\varrho {}_i\, a_i$. Hieraus folgt, dass die Anzahl dieser Uebereinanderschiebungen endlich ist. Bezeichnet man dieselben sowie die Formen A und B selbst, durch:

$$[AB]_1, \quad [AB]_2 \ldots$$

dann bilden die Formen $[AB]$ ein neues endliches Formensystem. Ich nenne dasselbe das aus den Systemen A und B combinirte System.

In derselben Weise kann man eine beliebige Anzahl p von Formensystemen combiniren. Ich bezeichne die Formen des ersten Systemes durch A_{11}, $A_{12} \ldots$, die des zweiten durch A_{21}, $A_{22} \ldots$, allgemein die Formen des ersten Systems durch A_{i1}, $A_{i2} \ldots$ und combinire vorerst die beiden ersten Systeme zu dem Systeme $[A_{1\varkappa}, A_{2\varkappa}]$. Dieses System combinire ich mit dem dritten Systeme zu dem Systeme $[[A_{1\varkappa}, A_{2\varkappa}], A_{3\varkappa}]$, welche Formen ich kurz durch $[A_{1\varkappa}, A_{2\varkappa}, A_{3\varkappa}]$ bezeichne.

In dieser Weise fahre ich fort und combinire dieses System mit dem vierten Systeme zu dem Systeme $[A_{1\varkappa}, A_{2\varkappa}, A_{3\varkappa}, A_{4\varkappa}]$ u. s. w. bis ich schliesslich zu dem Systeme $[A_1, A_1 \ldots A_p]$ gelange, welches ich das aus den so gegebenen Systemen combinirte System nenne. Ich setze stets diese gegebenen Systeme als endlich voraus und erhalte daher durch Combination nur endliche Systeme.

§ 14.

Vollständige Systeme.

Besonders wichtig für unsere Betrachtung sind die vollständigen Systeme. — Ist ein System

$$A_1, \quad A_2 \ldots A_\varrho$$

so beschaffen, dass jedes symbolische Product $C(A)$ (welches nach § 2. nur Symbole von Formen A enthält) eine ganze Function der A

$$C(A) = \Sigma\, c\, S(A)$$

ist, dann soll das System der A vollständig heissen.

Es kommen hierbei öfter Formen A vor, welche sich durch andere A ausdrücken lassen; man kann diese Formen im Systeme weglassen, ohne dass es aufhört vollständig zu sein, ich nenne sie daher *überflüssig*. Das System der übrigbleibenden (nothwendigen) Formen nenne ich das *reducirte System* der A.

Aehnlich diesen Systemen sind die folgenden, welche *relativ vollständig* heissen sollen.

Stehen die Formen:

$$A_1,\quad A_2 \ldots A_\varrho$$

mit den Formen:

$$B_1,\quad B_2 \ldots B_\sigma$$

in der Beziehung, das jedes symbolische Product $C(A)$ (vgl. § 3) in die Form:

$$C(A) = \Sigma\, c\, S(A) + P(B)$$

gebracht werden kann, dann nenne ich das System

$$A_1;\quad A_2 \ldots$$

in Bezug auf die Formen B vollständig.

Hierbei unterscheide man zwei Fälle, je nachdem die symbolischen Producte, deren Aggregat $P(B)$ ist, nur Symbole A und B enthält oder nicht. Im ersteren nenne ich das System A in Bezug auf die B *eigentlich*, im letzteren *uneigentlich* vollständig.

Der erstere Fall tritt dann immer ein, wenn das System A sämmtliche Originalformen f_1, $f_2 \ldots$ enthält.

Ist das System A in Bezug auf die B vollständig und sind sämmtliche Formen B Formen

$$P(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \ldots) = P(\varphi) \quad \text{(vgl. § 2.)},$$

dann ist es auch in Bezug auf die φ vollständig.

Auch bei relativ vollständigen Systemen treten oft überflüssige Formen auf. Diejenigen Formen A, welche sich in die Form:

$$A = \Sigma\, c\, S(A) + P(B)$$

bringen lassen, in welcher die Producte $S(A)$ nur die übrigen, nothwendigen, enthalten dürfen, sind im Systeme A überflüssig. Das so reducirte System A ist, wie das ursprüngliche, in Bezug auf die B vollständig.

§ 15.

Kriterien für die Vollständigkeit eines Systemes.

Um zu sehen, ob ein gegebenes System

$$A_1, \quad A_2 \ldots A_\varrho$$

(absolut oder relativ) vollständig sei, braucht man keineswegs alle nur denkbaren Formen $C(A)$ zu untersuchen. Es genügt, zu zeigen, dass die Uebereinanderschiebungen irgend zweier derselben $(A, A')^\nu$ die verlangte Form $\Sigma\, c\, S(A)$ oder $\Sigma\, c\, S(A) + P(B)$ annehmen können.

Ist dies für alle Uebereinanderschiebungen der Form $(A, A')^\nu$ der Fall, dann ist das System vollständig resp. in Bezug auf die B vollständig.

Beweis. Bei dem Beweise dieses Satzes will ich mich auf die relativ vollständigen Systeme beschränken, da das dabei angewandte Verfahren die absolut vollständigen mit umfasst. Ich mache die Annahme, dass die Uebereinanderschiebungen $(A, A')^\nu$ sich in die Form:

$$(A, A')^\nu = \Sigma\, c\, S(A) + P(B)$$

bringen lassen und behaupte, dass jedes symbolische Product $C(A)$ gleichfalls in dieselbe gebracht werden könne.

Man bezeichne die Ordnung von $C(A)$ durch m und die Norm von $C(A)$ in Bezug auf dasjenige Symbol A_i, in Bezug auf welches sie am kleinsten ist, durch $(A_i) = \nu$, und mache die Annahme, dass unser Satz für alle Formen $C(A)$ Geltung habe, deren Ordnung kleiner als m ist und für diejenigen Formen der m^{ten} Ordnung, deren Norm in Bezug auf irgend ein Symbol A_k kleiner als ν ist.

Unser symbolisches Product $C(A)$ enthält nach Annahme das Symbol A_i und in Bezug auf dasselbe die Norm ν; nach § 9 ist es ein Glied einer Uebereinanderschiebung $(C'(A), A_i)^\nu$.

Die Ordnung des symbolischen Productes $C'(A)$ ist hier kleiner als m, mann kann es nach Annahme in die Form:

$$C'(A) = \Sigma\, c\, S(A) + P(B)$$

bringen. Man erhält dann für $C(A)$ den Ausdruck:

$$C(A) = (C(A) - (C'(A), A_i)^\nu) + \Sigma\, c\, (S(A), A_i')^\nu + (P(B), A_i)^\nu.$$

Von den Gliedern auf der rechten Seite lassen sich das erste und dritte in die verlangte Form bringen; das erste, weil es nach § 8. ein Aggregat symbolischer Producte ist, deren Norm (A_i) kleiner als ν ist, das letztere, weil es eine Form $P(B)$ ist. Es bleiben daher nur noch die Uebereinanderschiebungen $(S(A), A_i)^\nu$ zu untersuchen. Ich bezeichne irgend einen Factor A von $S(A)$ durch A_k, setze $S(A) = A_k\, S'(A)$ und unterscheide zwei Fälle, je nachdem der Grad a_k von A_k kleiner als ν ist oder nicht.

Im ersteren Fall ist $(S(A), A_i)^\nu$ ein Aggregat symbolischer Producte, deren Norm (A_k) kleiner als ν ist, im letzteren Falle ist das Product: $S'(A) \,.\, (A_i, A_k)^\nu$ ein Glied der Uebereinanderschiebung $(S(A), A_i)^\nu$.

In dem Ausdrucke:

$$((S(A), A_i)^\nu - (S'(A) \,.\, (A_i\, A_k))^\nu + S'(A) \,.\, (A_i, A_k)^\nu,$$

ist dann das letzte Glied nach Annahme von der verlangten Form, während das erste Glied nach § 8. ein Aggregat symbolische Producte ist, deren Norm (A_i) kleiner als ν ist.

§ 16.

Abgeleitete vollständige Systeme.

Man kann aus einem (absolut oder relativ) vollständigen Systeme leicht andere solche Systeme ableiten.

I.

Ist das System $A_1, A_2 \ldots A_\varrho$ vollständig, dann ist das aus einer beliebigen Anzahl Formen, etwa:

$$A_1, \quad A_2 \ldots A_\nu$$

bestehende System in Bezug auf die übrigen vollständig.

II.

Ist das System $A_1, A_2 \ldots A_\varrho$ in Bezug auf die Formen $B_1, B_2 \ldots B_\sigma$ (eigentlich oder uneigentlich) vollständig, dann ist das aus einer beliebigen Anzahl der Formen A etwa $A_1, A_2 \ldots A_\nu$ bestehende System in Bezug auf die Formen $A_{\nu+1}, A_{\nu+2} \ldots A_\varrho, B_1, B_2 \ldots B_\sigma$ vollständig.

III.

Ist das System $A_1, A_2 \ldots A_\varrho$ in Bezug auf die Formen $B_1, B_2 \ldots B_\sigma$ eigentlich vollständig und sind diese letzteren sämmtlich Invarianten, dann ist das aus den Formen $A_1, A_2 \ldots A_\varrho, B_1, B_2 \ldots B_\sigma$ bestehende System vollständig.

§ 17.

Ueber die Vollständigkeit combinirter Systeme.

Ich gehe jetzt zu der Untersuchung combinirter Systeme (vgl. § 13.) über und stelle für dieselben die folgenden Sätze auf:

Erster Satz.

Sind die Systeme $A_1, A_2 \ldots A_\varrho$ und $B_1, A_2 \ldots B_\sigma$ vollständig, dann ist es auch das System der Formen $[AB]$.

Zweiter Satz.

Ist das System A in Bezug auf die Formen B eigentlich vollständig, und das aus denselben bestehende System B vollständig, dann ist das System der $[AB]$ vollständig.

Dritter Satz.

Ist das System:

$$A_1, \quad A_2 \ldots A_\varrho$$

in Bezug auf die Formen:

$$B_1, \; B_2 \ldots B_\sigma, \quad C_1, \; C_2 \ldots C_\tau$$

eigentlich vollständig, und das System $B_1, B_2 \ldots B_\sigma$ in Bezug auf die C vollständig, dann ist das aus den $[AB]$ bestehende System in Bezug auf die C vollständig.

Beweis. Ich will mich auf den Beweis des dritten Satzes beschränken, da das dabei angewandte Verfahren die übrigen Sätze mit umfasst. Unter den gegebenen Voraussetzungen will ich nachweisen, dass jedes symbolische Product der Form $C(A, B)$ in die Form:

$$\text{(I)} \qquad C(A, B) = \Sigma\, c\, S[A, B] + P(C)$$

gebracht werden kann. Hierbei mache ich die Annahme, dass dieser Satz bereits für alle Formen $C'(AB)$ gelte, deren Ordnung oder Classe (vgl. § 2.) oder Norm (A) kleiner als für $C(A, B)$ ist. Das symbolische Product $C(A, B)$ ist nach § 9. ein Glied einer Uebereinanderschiebung $(C'(A), C(B))^\nu$, welche, da man n. V.

$$C'(A) = \Sigma\, c\, S(A) + P(B, C) \quad \text{und} \quad C(B) = \Sigma\, c\, S(B) + P(C)$$

setzen darf, die Form annehmen kann:

$$(C(A), C(B))^\nu = \Sigma\, c\, (S(A), S(B))^\nu + (P(B, C), C(B))^\nu + P(C).$$

Bezüglich der Uebereinanderschiebung $(S(A), S(B))^\nu$ unterscheide ich zwei Fälle, je nachdem sie der ersten oder zweiten Art angehört. Im ersten besitzt sie ein Glied, das in Factoren zerfällt, ich will es durch $Z_1 . Z_2$ bezeichnen, im zweiten Falle ist $(S(A), S(B))^\nu$ eine Form $[AB]$. Ich setze nun für das symbolische Product $C(A, B)$ den Ausdruck:

$$C(A, B) = \begin{cases} C(A, B) - (C(A), C(B))^\nu + \Sigma c\, ((S(A), S(B))^\nu - Z_1 . Z_2) \\ + \Sigma\, c\, [A, B] + \Sigma\, c\, Z_1 . Z_2 + (P(B, C), C(B))^\nu + P(C) \end{cases}.$$

Keines der Glieder auf der rechten Seite übertrifft $C(A, B)$ in Bezug auf Ordnung, Klasse oder Norm, sie lassen sich sämmtlich und mithin auch $C(A, B)$ in die verlangte Form (I) bringen.

Die Glieder:

$$C(A, B) - (C(A), C(B))^\nu \quad \text{und} \quad (S(A), S(B))^\nu - Z_1 . Z_2$$

nämlich sind nach § 9. Aggregate symbolischer Producte, deren Norm

(A) kleiner als ν ist; das Glied $(P(B, C), C(B))^\nu$ gehört einer niederen Classe (vergl. § 2.), die Formen Z_1 und Z_2 niederen Ordnungen als $C(A, B)$ an.

§ 18.

Die überflüssigen Formen des combinirten Systems.

Formen $[AB]_1$; $[AB]_2$ .... des combinirten Systems will ich nach ihrer Ordnung, ihrer Classe und ihrer Norm in Bezug auf die Symbole A ordnen und hierbei die Formen niederer Ordnung voranstellen. Bei Formen gleicher Ordnung stelle ich die von niederer Classe voran (vgl. § 2.) und bei Formen gleicher Ordnung und Classe die von niederer Norm (A). In dieser Anordnung will ich diejenigen als überflüssig ausscheiden, welche sich durch andere, ihnen nicht nachstehende Formen des Systems als ganze Functionen ausdrücken lassen.

In diesem Sinne ist eine Form $[AB]$ dann überflüssig, wenn für dieselbe ein Ausdruck der Form:

$$[AB] = \Sigma c\,[AB]' + \Sigma\, C(A, B)$$

existirt, worin die Formen $[AB]'$ der Form $[AB]$ nicht nachstehen und die $C(A, B)$ entweder eine niedere Ordnung, oder eine niedere Classe, oder eine niedere Norm besitzen als $[AB]$, da nach dem vorigen Satze diese symbolischen Producte $C(A, B)$ sich durch Formen des combinirten Systems ausdrücken lassen, welche $[AB]$ nicht nachstehen. —

Die Uebereinanderschiebung zweiter Art $(S(A), S(B))^\nu$ kann in zweierlei Art gebildet werden. Entweder kann man darin für jeden Factor A des Productes $S(A)$ ein besonderes ihn darstellendes Symbol einführen, oder man kann für diejenigen Formen A, deren symbolische Ausdrücke nur Symbole von Formen B, C und (andern) Formen A enthalten, diese symbolischen Producte eintragen. In beiden Darstellungsweisen ist die Differenz der Uebereinanderschiebung $(S(A), S(B))^\nu$ und eines ihrer Glieder nach § 8. ein Aggregat symbolischer Producte mit niederer Norm (A). Diese Uebereinanderschiebung ist daher im combinirten Systeme durch eines ihrer Glieder oder ein Aggregat derselben ersetzbar. Jedoch darf bei diesem Aggregat die Summe der numerischen Coefficienten nicht verschwinden.

Es ist mir nicht gelungen, alle Fälle zu ermitteln, in denen die Uebereinanderschiebung zweiter Art $(S(A), S(B))^\nu$ im combinirten System überflüssig ist; ich will mich hier auf die Angabe der folgenden, besonders häufig vorkommenden überflüssigen Formen beschränken.

Erster Fall.

Wenn eines ihrer Glieder durch Formen niederer Ordnung, Classe oder Norm (A) ausdrückbar ist.

Zweiter Fall.

Wenn ein Aggregat ihrer Glieder:

$$c_1 Z_1 + c_2 Z_2 \dots$$

in dieser Weise darstellbar ist, die Summe der numerischen Coefficienten c aber nicht verschwindet.

Dritter Fall.

Wenn sich das Product $S(A)$ in die Form:

$$S(A) = \Sigma c\, S'(A) + P(B, C)$$

bringen lässt, worin die Ausdrücke $S'(A)$ andere Producte der A bedeuten und $P(B, C)$ ein Aggregat symbolischer Producte ist, in denen nur Symbole A, B und C vorkommen.

Beweis. In dem Ausdrucke:

$$(S(A),\, S(B))^\nu = \Sigma c\, (S'(A),\, S(B))^\nu + (P(B, C),\, S(B))^\nu$$

hat kein Glied der rechten Seite eine höhere Ordnung, Classe oder Norm als $(S(A), S(B))^\nu$.

Die Uebereinanderschiebungen $(S'(A), S(B))^\nu$ gehören entweder der ersten oder zweiten Art an. Im ersteren Falle lassen sie sich durch Formen niederer Ordnung und Norm (A) ausdrücken, im letzteren sind sie andere Formen $[AB]$ des combinirten Systems. Die Uebereinanderschiebung $(P(B, C), S(B))^\nu$ gehört einer niederen Classe an, als $(S(A), S(B))^\nu$.

Vierter Fall.

Wenn ein Glied Z der Uebereinanderschiebung ein unvollständiges symbolisches Product Δ zum Factor hat, für welches die zugehörigen Formen φ_1, $\varphi_2 \dots$ sich auf Formen niederer Classe zurückführen lassen. In diesem Falle nämlich ist das Glied Z, durch welches man im combinirten Systeme die Uebereinanderschiebung $(S(A), S(B))^\nu$ ersetzen kann, nach § 2. eine Form $P(\varphi)$, also ein Aggregat von Formen niederer Classe.

§ 19.

Das combinirte System wird durch ein anderes ersetzt.

Das combinirte System kann durch ein anderes System T ersetzt werden, welches zwar mehr überflüssige Formen enthält, dessen Aufstellung jedoch nach einfacheren Regeln bewerkstelligt werden kann.

Man bildet dasselbe in der folgenden Weise. Zuerst combinirt man das System $A_1, A_2 \dots A_\varrho$ mit dem aus der Form B allein bestehenden Systeme zu einem neuen Systeme U. In demselben bezeichne man diejenigen Formen, bei welchen das Symbol B_1 nur in Klammerfactoren auftritt, die Formen A selbst inbegriffen durch:

$$A_1'; \quad A_2'; \quad A_3' \dots$$

und füge sodann dem Systeme U alle Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form $(S(A'), S(B_2, B_3 \dots B_\sigma))^\nu$ hinzu.

Um zu zeigen, dass das aus den Formen $[AB]$ bestehende System durch das System T ersetzbar ist, unterscheide ich drei Fälle für die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form $P = (S(A), S(B))^\nu$, je nachdem das Product $S(B)$ in einem der drei Ausdrücke:

1. B_1^s,
2. $S(B_2, B_3 \dots B_\sigma)$,
3. $B_1^s\, S(B_2 \dots B_\sigma)$

enthalten ist. In den beiden ersten Fällen gehört P dem Systeme T an, in dem letzten ist $P = (S(A), B_1^s\, S(B_2 \dots B_\sigma))^\nu$. Da diese Uebereinanderschiebung der zweiten Art angehört, so ist nach § 11. Fall IV der Grad des Products $S(A)$ grösser als $s \,.\, b_1$, ich will es in solche Factoren $S'(A)$ und $S''(A)$ zerlegen, dass der Grad des Productes $S'(A)$ zwar nicht kleiner als $b_1 s$ ist, dass aber die Grade aller Factoren von $S'(A)$ kleiner als diese Zahl sind. Die Uebereinanderschiebung $(S'(A), B_1^s)^{b_1 s}$ ist dann entweder eine Form A' oder eine ganze Function solcher Formen und daher die Uebereinanderschiebung:

$$Q = (S''(A) \,.\, (S'(A), B_1^s)^\nu, S(B_2 \dots B_\sigma)^{\nu - b_1 s}$$

eine Form des Systems T oder durch solche Formen ausdrückbar.

Man kann nun die Uebereinanderschiebung P in dem aus den Formen $[AB]$ bestehenden Systeme durch die Form Q ersetzen, welche ein Aggregat ihrer Glieder ist. Mithin entspricht jeder Form $[AB]$ mindestens eine Form des Systems T, durch welche sie ersetzbar ist und das System:

$$[AB]_1, \quad [AB]_2 \dots$$

kann durch das System T ersetzt werden.

§ 20.

Ueber die Vollständigkeit von Systemen, welche aus mehr als zwei Systemen combinirt sind.

Aehnliche Sätze gelten für Systeme, welche aus mehr als zwei Systemen combinirt sind. Besonders wichtig ist der folgende:

Stehen p Formensysteme in solcher Beziehung zu einander, dass jedes derselben in Bezug auf die Formen der folgenden eigentlich vollständig ist, dann ist das aus allen p Systemen im Sinne des § 13. combinirte System vollständig.

Beweis. Das aus den beiden ersten Systemen combinirte System ist nach § 17. in Bezug auf die folgenden eigentlich vollständig. Combinirt man es mit dem dritten Systeme, dann erhält man das aus den drei ersten Systemen combinirte System, dasselbe ist in Bezug auf die folgenden eigentlich vollständig. Ebenso kann man zeigen, dass das aus den vier ersten Systemen combinirte System in Bezug auf die folgenden eigentlich vollständig ist, ebenso das aus den fünf ersten Systemen combinirte System u. s. w., endlich dass das aus den $(p-1)$ ersten Systemen combinirte System in Bezug auf das p^{te} vollständig ist, wodurch sich die Richtigkeit unserer Behauptung ergiebt.

§ 21.

Das simultane System der Formen f und die speciellen Formen.

Diese Sätze setzen mich in den Stand, die Aufgabe zu lösen, welche ich mir gestellt habe, nämlich sowohl für eine einzelne Form f, als auch für eine Anzahl Formen $f_1, f_2 \ldots$ Systeme von Covarianten und Invarianten aufzustellen, wodurch sich *alle* simultanen Covarianten und Invarianten dieser Formen als ganze Functionen ausdrücken lassen. Solche Systeme nenne ich die simultanen Systeme der Formen $f_1, f_2 \ldots$. Man sieht nun unmittelbar, dass jedes vollständige System, welches die Formen $f_1, f_2 \ldots$ selbst enthält (und worin nur simultane Formen der f vorkommen) das simultane System derselben ist. Setzt man daher die einzelnen Systeme dieser Formen als bekannt voraus, dann erhält man durch Combination derselben nach § 20. ein vollständiges System, welches die Formen f selbst enthält und daher ihr simultanes System ist. Die noch zu lösende Aufgabe ist somit die Aufstellung des Systems *einer* gegebenen Form:

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n \ldots .$$

Ich will mich hierbei im Allgemeinen auf die Untersuchung derjenigen Formen f beschränken, deren Grad durch 4 theilbar ist, da die dabei angewandten Methoden die übrigen Formen mit umfassen. Dieselben stimmen im Anfang mit denen überein, deren ich mich früher (Crelles Journal Bd. 69. S. 333) bediente, ich will die dahin einschlagenden Stellen hier wiederholen und wie dort die Annahme machen, dass die Systeme von Formen, deren Grad kleiner als n ist, bereits aufgestellt seien.

Es sei die Form:

$$f' = a_x'^{\,n-1} = b_x'^{\,n-1} \;\ldots .$$

eine beliebige Form des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades; man kann dann aus jedem symbolischen Producte $C(f')$, das nur die Symbole a', b', c' ... enthält, ein analoges Product für die Form f dadurch herleiten, dass man erst die oberen Indices weglässt und sodann mit dem Producte $a_x b_x c_x \ldots$ multiplicirt.

Umgekehrt kann man aus jedem den Factor $a_x\, b_x\, c_x \ldots$ enthaltenden symbolischen Producte von f ein symbolisches Product für die Form f' dadurch ableiten, dass man erstens diesen Factor weglässt und sodann den Buchstaben $a\; b\; c \ldots$ Indices anfügt. — Nenne ich nun nun die Formen des zu f' gehörigen, als bekannt vorausgesetzten Systems:

$$A_1', \quad A_2' \;\ldots .\; A_\varrho',$$

dann entsprechen diesen Formen in obiger Weise Covarianten von f, welche ich durch:

$$A_1, \quad A_3 \ldots A_\varrho$$

bezeichne und die *speciellen* Formen von f nenne.

Da jede Covariante und Invariante von f' eine ganze Function mit numerischen Coefficienten der Formen A' ist, so ist auch jede den Factor $a_x\, b_x\, c_x \ldots$ enthaltende Form von f eine ganze Function der speciellen Formen.

§ 22.

Die Formen K und χ.

Die zunächst interessanten Covarianten und Invarianten sind die Formen zweiter Ordnung; ihr symbolischer Ausdruck ist:

$$(f, f)^\nu = a_x^{n-\nu}\, b_x^{n-\nu}\, (ab)^\nu .$$

Diejenigen unter ihnen, für welche die Zahl ν ungerade ist, haben den Werth 0; die übrigen unterscheide ich je nachdem ν kleiner, gleich oder grösser als $\frac{n}{2}$ ist. Die Covariante:

$$(f, f)^{\frac{n}{2}} = a_x^{\frac{n}{2}}\, b_x^{\frac{n}{2}}\, (ab)^{\frac{n}{2}},$$

für welche also $\nu = \frac{n}{2}$ ist, bezeichne ich durch K; die Formen:

$$(f, f)^{\frac{n}{2}+2}; \quad (f, f)^{\frac{n}{2}+4}; \quad (f, f)^{\frac{n}{2}+6} \ldots (f, f)^n$$

durch:

$$\chi_1; \qquad \chi_2; \qquad \chi_3; \qquad \chi_{\frac{n}{2}},$$

für sie ist $\nu > \frac{n}{2}$.

(Bei denjenigen Formen f, deren Grad nicht durch 4 theilbar ist, existirt keine Form K.)

In dieser Bezeichnungsweise gehören im Sinne des § 6. zu dem unvollständigen Producte $(ab)^{\frac{n}{2}}$ die Formen K und χ (und wenn n nicht durch 4 theilbar ist, die Formen χ allein). Zu dem unvollständigen Producte $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ gehören die Formen χ.

Jedes den Factor $(ab)^{\frac{n}{2}}$ enthaltende symbolische Product ist daher eine Form $P(K, \chi)$ und jedes den Factor $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ enthaltende symbolische Product eine Form $P(\chi)$.

§ 23.

Die Formen W.

Die Formen W will ich hier etwas anders definiren, als es in der im Crelle'schen Journal, 69. Band veröffentlichten Abhandlung geschehen ist. Diejenigen symbolischen Producte, bei denen jedes der darin vorkommenden Symbole

$$a, \quad b, \quad c \ldots .$$

mindestens durch einen Factor erster Art vertreten ist und bei denen ferner mindestens einer dieser Factoren etwa a_x zu einer Potenz vorkommt, deren Grad grösser als $\frac{n}{2}$ ist, mögen W heissen. Da W den Factor $a_x b_x c_x \ldots$ besitzt, so ist es als eine ganze Function der speciellen Formen darstellbar (vgl. § 21.). Ich behaupte nun: Für jede Uebereinanderschiebung $(Wf)^\nu$ existirt entweder ein Glied, welches als eine Form $P(K, \chi)$ dargestellt werden kann, oder ein Glied, welches eine Form W ist.

Beweis. Ist:

$$W = b_x^{\frac{n}{2}+i} c_x^{\alpha_1} d_x^{\alpha_2} \ldots \Delta(W),$$

dann ist für $\nu > \frac{n}{2} + i$ das symbolische Product (vgl. § 8.):

$$Z_1 = a_x^{\frac{n}{2}-i} (ab)^{\frac{n}{2}+i} (ac)(ad) \ldots \Delta(W)$$

für $\nu \leqq \frac{n}{2} + i$ das symbolische Product:

$$Z_2 = a_x^{n-\nu} (ab)^\nu b_x^{\frac{n}{2}+i-\nu} c_x^{\alpha_1} d_x^{\alpha_2} \ldots \Delta(W),$$

ein Glied der Uebereinanderschiebung $(Wf)^\nu$.

Die Form Z_1 hat stets, Z_2 für $\nu \geqq \frac{n}{2}$ den Factor $(ab)^{\frac{n}{2}}$; Z_1 ist also immer, Z_2 für $\nu \geqq \frac{n}{2}$ als Form $P(K, \chi)$ darstellbar. Für $\nu < \frac{n}{2}$ ist Z_2 eine Form W. —

Zweiter Satz. Jedes symbolische Product R lässt sich in die Form:

$$R = \Sigma\, W + P(K, \chi)$$

bringen.

Beweis. Man bezeichne dasjenige Symbol in R, für welches R die kleinste Norm hat, durch a, diese Norm (a) durch ν, und mache die Annahme, unser Satz gelte für alle Formen von niederer Ordnung als R und für diejenigen Formen derselben Ordnung, für welche die Norm in Bezug auf irgend ein Symbol kleiner als ν ist. —

Man bezeichne die Ordnung von R mit m und stelle diese Form nach § 9. als Glied einer Uebereinanderschiebung $(R' f)^\nu$ dar. Die Form R' ist von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, lässt sich also nach Annahme in die Form bringen:

$$R' = \Sigma\, W + P(K, \chi).$$

Die Uebereinanderschiebungen $(Wf)^\nu$ besitzen nach dem ersten Satze Glieder Z, welche entweder Formen W oder $P(K, \chi)$ sind. In dem Ausdrucke

$$R = (R - (R'f)^\nu) + \Sigma\,((Wf)^\nu - Z) + P(K, \chi) + \Sigma\, Z$$

besitzen die Glieder $P(K, \chi)$ und Z die verlangte Form, während die Glieder:

$$R - (R', f)^\nu \text{ und } (Wf)^\nu - Z$$

nach § 4. Aggregate symbolischer Producte sind, für welche eine Norm kleiner als ν ist; welche sich also nach Annahme in der verlangten Form darstellen lassen. —

Da nun alle Covarianten und Invarianten von f Aggregate symbolischer Producte R sind, so lassen sie sich in die Form $W + P(K, \chi)$ bringen und da die W ganze Functionen der speciellen Formen A sind, in die Form:

$$\Sigma\, c\, S(A) + P(K, \chi).$$

Hieraus folgt nach § 14., *dass das System der speciellen Formen in Bezug auf die Formen K und χ vollständig ist.*

(Bei Formen f, deren Grad nicht durch 4 theilbar ist, ist das System der speciellen Formen in Bezug auf die Formen χ vollständig).

§ 24.

Das System der Covariante K.

Die Covariante $K = a_x^{\frac{n}{2}}\, b_x^{\frac{n}{2}}\, (ab)^{\frac{n}{2}}$ ist wie f vom n^{ten} Grade, besitzt also ein System von Formen, welche den Covarianten und Invarianten von f entsprechen. Die speciellen Formen im System von K will ich durch:

$$B_1, \quad B_2 \ldots B_\varrho$$

bezeichnen, während ich die den Formen K und χ_i im System von f entsprechenden Formen $(K,K)^{\frac{n}{2}}$ und $(K,K)^{\frac{n}{2}+2i}$ durch L und ψ_i bezeichnen will. Das aus den Formen B bestehende System ist dann in Bezug auf die Formen L und ψ vollständig und man kann die symbolischen Producte:

$$\text{(I)} \qquad C(B) = \Sigma\, c\, S(B) + P(L\,,\,\psi)$$

setzen. Um dieser Gleichung eine einfachere Form zu geben, bedienen wir uns der folgenden Hülfssätze:

Erster Satz.

Die Uebereinanderschiebung $(K,f)^\nu$ ist eine Form $P(K\,,\,\chi)$, wenn $\nu \geqq \frac{n}{2}$ und $< n$ ist.

Beweis. Die Uebereinanderschiebung:

$$R = (K,f)^\nu = \left(a_x^{\frac{n}{2}}\, b_x^{\frac{n}{2}}\, (ab)^{\frac{n}{2}},\, c_x^n\right)^\nu$$

besitzt folgende Glieder (vgl. § 8.):

$$Z_0 = (ab)^{\frac{n}{2}}\,(ac)^{\frac{n}{2}}\,(bc)^{\nu-\frac{n}{2}}\, b_x^{n-\nu}\, c_x^{n-\nu}\,,$$

$$Z_1 = (ab)^{\frac{n}{2}}\,(ac)^{\frac{n}{2}-1}\,(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+1}\, a_x\, b_x^{n-\nu-1}\, c_x^{n-\nu}\,,$$

$$Z_2 = (ab)^{\frac{n}{2}}\,(ac)^{\frac{n}{2}-2}\,(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2}\, a_x^2\, b_x^{n-\nu-2}\, c_x^{n-\nu}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Differenzen benachbarter Glieder haben nach § 8. das unvollständige symbolische Product $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ zum Factor und sind daher nach § 22. Formen $P(\chi)$; demgemäss sind auch die Differenzen von irgend zwei Gliedern sowie die Differenzen $R - Z$ Formen $P(\chi)$. Unsere Behauptung ist erwiesen, wenn man zeigt, dass eines der Glieder Z selbst oder ein Aggregat derselben verschwindet oder eine Form $P(\chi)$ ist.

Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem erstens ν ungerade ist, zweitens den Werth $n - 2$ hat oder drittens gerade und $\leqq n - 4$ ist.

Im ersten Falle verschwindet das Glied Z_0.

Im zweiten Falle ist:

$$Z_1 = (ab)^{\frac{n}{2}}\,(ac)^{\frac{n}{2}-1}\,(bc)^{\frac{n}{2}-1}\, a_x\, b_x\, c_x^2\,.$$

Vertauscht man in diesem symbolischen Producte die Buchstaben a, b, und c mit einander, dann erhält man die Formel:

$$3Z_1=(ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\frac{n}{2}-1}(bc)^{\frac{n}{2}-1}a_x b_x c_x\{c_x(ab)-b_x(ac)+a_x(bc)\}=0.$$

Im dritten Falle bedarf es einer etwas längeren Rechnung. Es ist in demselben:

$$Z_1=(ab)^{\frac{n}{2}}(ac)^{\frac{n}{2}-1}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+1}a_x b_x^{n-\nu-1}c_x^{n-\nu}.$$

Durch Vertauschung der Symbole b und c erhält man die Gleichung:

$$2Z_1=(ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\frac{n}{2}-1}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+1}a_x b_x^{n-\nu-1}c_x^{n-\nu-1}\{c_x(ab)-b_x(ac)\}$$

$$=-(ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\frac{n}{2}-1}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2}a_x^2 b_x^{n-\nu-1}c_x^{n-\nu-1},$$

und wenn man hierin die Symbole a und b vertauscht:

$$4Z_1=(ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\nu-\frac{n}{2}+2}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2}a_x^2b_x^2c_x^{n-\nu-1}\left\{(a_x(bc))^{n-\nu-3}-(b_x(ac))^{n-\nu-3}\right\}.$$

Diese Formel geht, wenn man für $a_x(bc)$ seinen Werth $b_x(ac)-c_x(ab)$ einträgt, in die folgende über:

$$4Z_1=(ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\nu-\frac{n}{2}+2}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2}a_x^2b_x^2c_x^{n-\nu-1}\left\{(b_x(ac)-c_x(ab))^{n-\nu-3}-(b_x(ac))^{n-\nu-3}\right\}$$

$$=(ab)^{\frac{n}{2}-1}(ac)^{\nu-\frac{n}{2}+2}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2}a_x^2b_x^2c_x^{n-\nu-1}\sum_1^{n-\nu-3}{}_i\binom{n-\nu-3}{i}(-1)^i(b_x(ac))^{n-\nu-3-i}(c_x(ab))^i$$

$$=\sum_1^{n-\nu-3}{}_i\binom{n-\nu-3}{i}(-1)^i(ab)^{\frac{n}{2}+i-1}(ac)^{\frac{n}{2}-i-1}(bc)^{\nu-\frac{n}{2}+2}a_x^2b_x^{n-\nu-i-1}c_x^{n-\nu+i-1}.$$

Das erste Glied dieser Summe hat den Werth $-(n-\nu-3)Z_2$; die übrigen sind symbolische Producte, welche das unvollständige symbolische Product $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ zum Factor haben, also nach § 22. Formen $P(\chi)$.

Da das Aggregat $4Z_1+(n-\nu-3)Z_2$ eine Form $P(\chi)$ ist, so ist es auch die Uebereinanderschiebung R.

Zweiter Satz.

Bezeichnet man die Invariante $(f,K)^n$ durch J, dann sind die Formen $L=(K,K)^{\frac{n}{2}}$ und $\psi_i=(K,K)^{\frac{n}{2}+2i}$ als Formen $P(\chi,J)$ darstellbar.

Beweis. Zu dem unvollständigen Producte $(aK)^{\frac{n}{2}}$ gehören die Formen:

$$(f,K)^{\frac{n}{2}},\quad (f,K)^{\frac{n}{2}+1}\ \ldots\ (f,K)^{n-1},\quad (f,K)^n=J.$$

Da sie nach dem vorigen Satze sämmtlich Formen $P(\chi,J)$ sind, so ist auch jedes den symbolischen Factor $(aK)^{\frac{n}{2}}$ enthaltende symbolische Product eine solche Form (vergl. § 6.), mithin auch das symbolische Product:

$$Z = (aK)^{\frac{n}{2}} (ab)^{\frac{n}{2}} (bK)^i b_x^{\frac{n}{2}-i} K_x^{\frac{n}{2}-i}.$$

Dasselbe ist eines der Eintragungsglieder, welche entstehen, wenn man in dem symbolischen Producte:

$$K_x^{\frac{n}{2}-i} K'^{\frac{n}{2}-i}_x (K', K)^{\frac{n}{2}+i} = (K, K)^{\frac{n}{2}+i},$$

für das die Form $K = a_x^{\frac{n}{2}} b_x^{\frac{n}{2}} (ab)^{\frac{n}{2}}$ darstellende Symbol K' seinen Werth einträgt (vergl. § 3.). Die Differenz $(K, K)^{\frac{n}{2}+i} - Z$ ist nach § 4. ein Aggregat symbolischer Producte, welche das unvollständige symbolische Product $(ab)^{\frac{n}{2}+1}$ als Factor enthalten, also von Formen $P(\chi)$.

Da die Ausdrücke Z und $(K, K)^{\frac{n}{2}+i} - Z$ Formen $P(\chi, J)$ sind, so sind es auch die Formen $(K, K)^{\frac{n}{2}+i}$ d. h. die Formen L und ψ.

Ebenso wie die Formen L und ψ ist jede Form $P(L, \psi)$ eine Form $P(\chi, J)$, so dass die Gleichung (I)

$$C(B) = \Sigma c\, S(B) + P(L, \psi)$$

durch die Gleichung:

$$C(B) = \Sigma c\, S(B) + P(\chi, J)$$

ersetzt werden kann, welche aussagt, *dass das aus den Formen B bestehende System in Bezug auf die Formen χ und J vollständig ist.*

§ 25.

Das System der Form f.

Das aus den speciellen Formen A bestehende System ist in Bezug auf die Formen K und χ, also auch in Bezug auf die Formen B und χ, vollständig, das aus den B bestehende System im Bezug auf die Formen χ und J, mithin ist nach § 17. das aus diesen beiden Systemen combinirte System der $[AB]$ in Bezug auf die Formen χ und J vollständig, und zwar eigentlich vollständig, da es die Form f enthält.

Die Grade der Formen χ_i sind kleiner als n; ich mache die Annahme, dass ihre Systeme aufgestellt seien. Combinirt man dieselben, dann erhält man ein vollständiges System S (vergl. § 17.); dasselbe enthält f, ist daher das System dieser Form.

Es enthält im Sinne des § 18. überflüssige Formen; am leichtesten kann man es dadurch reduciren, dass man die einzelnen bei seiner Bildung auftretenden Systeme (vergl. § 13.):

$$A\ ;\ B\ ;\ [A\,,B]\ ;\ [A\,,B\,,\chi_{1k}]\ ;\ (A\,,B\,,\chi_{1k}\,,\chi_{2k})\ \ldots$$

jedes für sich reducirt.

Von den Formen A sind diejenigen überflüssig, welche sich in der Form:

$$\Sigma c\, S\,(A) + P\,(K\,,\chi)$$

ausdrücken lassen; eine Anzahl der dahin gehörigen Formen kann man sofort angeben. Bezeichnet man nämlich diejenigen Formen von f', welche K und χ entsprechen, durch K' und χ' (vgl. § 21.), dann lassen sich einige Formen A' als Formen $P\,(K'\,,\chi')$ darstellen; man kann nun zeigen, dass diejenigen speciellen Formen, welche diesen Formen A' entsprechen, Formen $P\,(K\,,\chi)$ sind.

Diejenigen Formen B und $[AB]$, welche in die Form:

$$\Sigma c\, S\,(B) + P\,(\chi\,,J) \quad \text{und} \quad \Sigma c\, S\,[AB] + P\,(\chi\,,J)$$

gebracht werden können, sind im System S überflüssig; von denselben erwähne ich besonders diejenigen Formen B, welche überflüssigen Formen A entsprechen (vgl. § 24).

In dem System der Formen χ_1 und in dem aus diesem Systeme und dem Systeme der $[AB]$ combinirten Systeme sind alle diejenigen Formen überflüssig, welche sich als ganze Functionen anderer solcher Formen und Formen $P\,(\chi_2\,,\chi_3\,,\ldots,J)$ ausdrücken lassen u. s. w.

Lässt man alle diese Formen weg, dann erhält man das reducirte System der Form f, dessen Formen Herr Cayley (Philosophical Transactions vol. 146) irreductibel genannt hat. Im Allgemeinen kenne ich keine Criterien, um die überflüssigen und nothwendigen Formen von einander zu unterscheiden; ich beschränke mich in den folgenden Beispielen darauf, die als überflüssig erkannten wegzulassen.

§ 26.

Ueber die Form $f = a_x$.

Da die Form $f = a_x$ keine Covariante oder Invariante hat, so besteht ihr System aus ihr allein.

Combinirt man dasselbe mit dem aus den beliebigen Formen:

$$A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots\ ,\ A_\varrho$$

bestehenden Systeme S (vgl. § 12.), dann erhält man ein System T, welches ausser den Formen A und f diejenigen Uebereinanderschiebungen der Form:

$$(A_i\ ,\ f^\nu)^\nu$$

enthält, für welche die Zahl ν nicht grösser als der Grad a_i der Form A_i ist.

Das simultane System einer Anzahl linearer Formen:

$$f_1 \,,\, f_2 \,,\, \ldots .$$

besteht aus diesen Formen und ihren Functionaldeterminanten.

§ 27.

Ueber die Form $f = a_x^2$.

I. Die Form $f' = a'_x$ (vgl. § 21.) ist hier linear; ihr System besteht aus ihr allein und somit das System der speciellen Formen von f aus f allein.

Die einzige Form χ (vgl. § 22.) ist hier die Invariante

$$(ab)^2 = (f, f)^2,$$

in Bezug auf dieselbe ist das aus der Form f allein bestehende System vollständig.

Hieraus folgt, dass die Formen f und $(f\,,\,f)^2$ ein vollständiges System, nämlich das der Form f bilden.

II. Ich gehe nun zu der Aufgabe über, dieses System mit einem beliebigen Systeme S, welches aus den Formen:

$$A_1 \,;\, A_2 \,;\, A_3 \,;\, \ldots \,;\, A_\varrho$$

bestehen möge, zu einem System zu combiniren.

Demgemäss combinire ich das System S mit dem aus der Form f allein bestehenden Systeme und füge alsdann die Invariante $(f\,,\,f)^2$ hinzu.

Das System T enthält nach § 14. ausser den Formen f, $(f\,,f)^2$ und A die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$[S(A)\,,\, f^\varrho]^\nu.$$

Dieselben zerfallen nach § 12. in zwei Gruppen, je nachdem $S(A)$ eine einzelne Form A oder ein Product solcher Formen bedeutet. Die Uebereinanderschiebungen der ersten Gruppe haben entweder die Form:

$$(A_i \,,\, f^\varrho)^{2\varrho-1}$$

oder die Form:

$$(A_i\,,\, f^\varrho)^{2\varrho},$$

wobei jedoch der Grad der Uebereinanderschiebung nicht grösser als derjenige der Form A_i sein darf.

Bei der Aufstellung der Uebereinanderschiebungen der zweiten Gruppe muss man solche Producte $S(A)$ wählen, welche dem Restsystem $(1\,,\,1)$ (vgl. § 12.) entsprechen, also aus zwei Factoren A_i und A_k bestehen, deren Grade a_i und a_k ungerade Zahlen sind.

Für diese Uebereinanderschiebungen muss ausserdem:

$$\nu = 2\varrho = a_i + a_k$$

sein, sie sind Invarianten.

Ist das System S entweder absolut vollständig oder in Bezug auf die Form f eigentlich vollständig, dann ist das System T ein vollständiges System. In demselben kommen im Allgemeinen überflüssige Formen vor; ich will hier nur die folgenden erwähnen, welche sehr häufig auftreten.

Ist nämlich die Form A die Functionaldeterminante zweier anderer Formen A, welche ich durch $\varphi = \varphi_x^r$ und $\psi = \psi_x^s$ bezeichnen will, ist also:

$$A = \varphi_x^{r-1} \psi_x^{s-1} (\varphi\psi),$$

und findet ferner die Ungleichung statt:

$$2\varrho < r + s - 1,$$

dann ist die Uebereinanderschiebung:

$$(A, f^{\varrho})^{2\varrho-1} = (\varphi_x^{r-1} \psi^{s-1} (\varphi\psi), a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^2 \ldots a_{\varrho-1,x}^2)^{2\varrho-1}$$

im Systeme T überflüssig.

Beweis. Zerlegt man ϱ in zwei Theile, welche der Ungleichung genügen:

$$r \geqq 2\sigma \qquad ; \qquad s - 1 > 2\tau,$$

dann ist das symbolische Product:

$$\varphi_x^{r-2\sigma} \psi_x^{s-1-2\tau} a_x (\varphi a_1)^2 (\varphi a_2)^2 \ldots (\varphi a_{\sigma-1})^2 (\psi a_\sigma)^2 (\psi a_{\sigma+1})^2 \ldots (\psi, a_{\varrho-1})^2 (\varphi a)(\varphi\psi)$$

ein Glied unserer Uebereinanderschiebung. Da sich dasselbe mittelst der Identität:

$$2 a_x \psi_x (\varphi a)(\varphi\psi) = a_x^2 (\varphi\psi)^2 + \psi_x^2 (\varphi a)^2 - \varphi_x^2 (\psi a)^2$$

auf Formen niederer Ordnung zurückführen lässt, so ist unsere Uebereinanderschiebung überflüssig (§ 18. Fall I.).

III. Besonderes Interesse bieten die simultanen Systeme mehrerer quadratischer Formen dar; für dieselben hat Herr Bessel in diesem Journal I. Bd. die Systeme der Invarianten bereits angegeben.

Ich beginne mit der Aufstellung des Systems der beiden quadratischen Formen f_1 und f_2; es entsteht durch Combination der einzelnen Systeme dieser Formen. Da dieselben aus den Formen:

$$f_1, (f_1, f_1)^2 \qquad \text{und} \qquad f_2, (f_2, f_2)^2$$

bestehen, so enthält das simultane System ausser diesen Formen noch die Uebereinanderschiebungen:

$$(f_1, f_2) \qquad \text{und} \qquad (f_1, f_2)^2.$$

IV. Combinirt man dieses System mit dem einer dritten quadratischen Form f_3, dann ergiebt sich das simultane System der drei Formen f_1, f_2 und f_3.

Dasselbe enthält ausser den Formen:

$$f_1, f_2, (f_1, f_2), (f_1, f_1)^2, (f_1, f_2)^2, (f_2, f_2)^2,$$

des simultanen Systems der Formen f_1 und f_2 und den Formen:

$$f_3 \text{ und } (f_3\,,\,f_3)^2$$

des Systems von f_3 die Uebereinanderschiebungen:

$$(f_1\,,f_3)\ ;\ (f_2\,,f_3)\ ;\ ((f_1\,,f_2)\,,f_3)\ ;\ (f_1\,,f_3)^2\ ;\ (f_2\,,f_3)^2\ ((f_1\,,f_2)\,f_3)^2.$$

Von denselben ist nach dem obigen Satze die Uebereinanderschiebung $((f_1\,,f_2)\,,f_3)$ überflüssig.

Die Invariante $((f_1\,,f_2)\,,f_3)^2$ ist die Determinante aus den Coefficienten dieser drei Formen; ich will sie durch $(f_1\,,f_2\,,f_3)$ bezeichnen.

V. Fährt man in dieser Weise fort und combinirt man dieses System mit demjenigen der Form f_4 zu dem simultanen Systeme der Formen $f_1\,,f_2\,,f_3\,,f_4$; dieses System wieder mit dem der Form f_5 zu dem simultanen Systeme der Formen $f_1\,,f_2\,,\ldots,f_5$ u. s. f., so gelangt man endlich zu dem simultanen Systeme der n quadratischen Formen:

$$f_1\ ,\ f_2\ ,\ \ldots\ ,\ f_n\,.$$

Dasselbe besteht aus den Formen:

$$f_i\ ;\ (f_i\,,f_k)\ ;\ (f_i\,,f_k)^2\ ;\ (f_i\,,f_k\,,f_\lambda).$$

§ 28.

Ueber die Form $f = a_x^3$.

I. Die Form $f' = a_x'^2$ (vgl. § 21.) ist quadratisch; ihr System besteht aus den Formen:

$$a_x'^2 \text{ und } (a'\,b')^2\,,$$

das System der *speciellen* Formen von f besteht daher aus den Formen:

$$f \text{ und } (f\,,f)^2 = a_x\,b_x\,(ab)^2.$$

Die letztere Form bezeichne ich durch τ, sie ist die einzige Form χ (vgl. § 22.) und im Systeme der speciellen Formen überflüssig.

Nach Weglassung von τ besteht nunmehr das System der speciellen Formen aus f allein, es ist in Bezug auf τ eigentlich vollständig; combinirt man es mit dem System dieser Form, dann erhält man das *System der Form f.*

Dasselbe enthält ausser den Formen:

$$f\,,\ \tau \text{ und } (\tau\,,\tau)^2$$

der zu combinirenden Systeme nach § 27. die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f\,,\,\tau^\varrho)^\nu \text{ und } (f^2\,,\,\tau^3)^\sigma,$$

also die Formen:

$$(f\,,\tau)\,,\,(f\,,\,\tau)^2\,,\,(f\,,\,\tau^2)^3\,,\,(f^2\,,\,\tau^3)^6.$$

Die drei letzten Formen sind im Systeme überflüssig.

Die Form:

$$(f, \tau)^2 = a_x (a\tau)^2 = a_x (ab)(ac)(bc)^2$$

nämlich verschwindet in Folge der Identität:

$$3 (f\tau)^2 = (ab)(ac)(bc) \left\{a_x(bc) - b_x(ac) + c_x(ab)\right\} = 0;$$

sie ist die einzige zu dem unvollständigen Producte $(a\tau)^2$ gehörige Form (§ 6.).

Es verschwinden daher alle symbolischen Producte, welche den Factor $(a\tau)^2$ enthalten; da zu denselben auch Glieder der Uebereinanderschiebungen:

$$(f, \tau^2)^3 \qquad \text{und} \qquad (f^2, \tau^3)^6$$

gehören, so sind diese letzteren ein System der Form f überflüssig. Die Formen, welche dieses System bilden, sind somit:

$$f \;;\; (f, f)^2 = \tau \;;\; (f, \tau) = p \;;\; (\tau, \tau)^2$$

zwischen ihnen besteht die bekannte Beziehung:

$$\text{(I)} \qquad 2p^2 + \tau^3 + f^3 \,.\, (\tau, \tau)^2 = 0.$$

II. Ich will nun das simultane System T einer cubischen Form f und einer quadratischen Form f' aufstellen. Die in demselben auftretenden Invarianten hat bereits Herr Bessel angegeben.

Das System T entsteht durch Combination der Systeme von f und f', welche aus den Formen:

$$f, \; \tau \;, \; p \;, \; (\tau\tau)^2$$

und:

$$f' \;, \; (f', f')^2$$

bestehen, und enthält ausser denselben die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f^{r_1} \tau^{r_2} p^{r_3}, f'^{\varrho})^\nu,$$

also nach § 27. (II) die Formen:

$$(f, f') \;;\; (f, f')^2 \;;\; (f, f'^2)^3 \;;\; (\tau, f') \;;\; (\tau, f')^2$$
$$(p, f') \;;\; (p, f')^2 \;;\; (p, f'^2)^3$$
$$(f^2, f'^3)^6 \;;\; (fp, f'^3)^6 \; (p^2, f'^3)^6.$$

Von denselben sind die Formen:

$$(p, f') \qquad \text{und} \qquad (p^2, f'^3)^6$$

im Systeme T überflüssig; die erste nach § 27. (II), weil p eine Functionaldeterminante ist, die letztere nach § 18. Fall III, weil das Quadrat der Functionaldeterminante p mittelst Identität (I) durch andere Producte ausdrückbar ist.

III. Ich gehe nun dazu über, das System der cubischen Form f, welches aus den Formen:

$$f, \; p \;, \; \tau \;, \; (\tau, \tau)^2$$

besteht, mit einem beliebigen andern Systeme S, welches aus den Formen:

$$A_1 \quad , \quad A_2 \quad , \quad A_3 \quad , \quad \ldots$$

bestehen möge, zu combiniren.

Durch diese Combination entsteht ein System, welches ausser den Formen der beiden Systeme die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A) \;,\; f^r \; p^{r_1} \; \tau^{r_2})^\nu$$

enthält.

Da dieselbe der Coefficient von λ^{r_1} in der Uebereinanderschiebung:

$$(S(A) \;,\; (f + \lambda p)^{r+r_1} \; \tau^{r_2})^\nu$$

ist, so wird man alle Formen des gesuchten Systems dadurch erhalten, dass man zuerst die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A) \;,\; (f + \lambda p)^s \; \tau^{s_1})^\nu$$

bildet, d. h. das System S mit dem System der Formen:

$$f + \lambda p \;;\; \tau \;;\; (\tau\,,\,\tau)^2$$

combinirt und alsdann die Coefficienten der Potenzen von λ als einzelne Formen ansieht.

Das so zu bildende System kann man nach § 19. durch ein anderes System T ersetzen, welches in der folgenden Weise gebildet wird.

Zuerst combinire man das System S mit dem aus der Form

$$f + \lambda\,(f\tau),$$

welche ich durch q bezeichnen will, allein bestehenden Systeme zu einem neuen Systeme U, bezeichne in demselben diejenigen Formen, in denen das Symbol q nicht in Factoren erster Art auftritt, die Formen A mit inbegriffen, durch:

$$A_1' \quad , \quad A_2' \quad , \quad \ldots .$$

und füge dann dem Systeme U die Formen τ , $(\tau\,,\,\tau)^2$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A') \quad , \quad \tau^\varrho)^\nu$$

hinzu.

Die Bildung des Systems U ist bereits im § 12. angegeben worden; es enthält 1) die Uebereinanderschiebungen der Form

$$(A_i \;,\; q^\varrho)^\nu$$

und 2) Uebereinanderschiebungen der Form:

$$(S(A) \;,\; q^\varrho)^\nu,$$

bei denen das Product $S(A)$ einem der Restsysteme:

$$(1\,,\,1) \quad , \quad (1\,,\,2) \quad , \quad (2\,,\,2) \quad , \quad (1\,,\,1\,,\,1) \quad , \quad (2\,,\,2\,,\,2)$$

entspricht.

IV. Als Anwendung dieser Methode will ich nunmehr das simultane System zweier cubischen Formen f und f' aufstellen.

Die einzelnen Systeme dieser Formen enthalten die Formen:

$$f\ ,\ (f, f)^2 = \tau\ ,\ (f\ , \tau) = p\ ,\ (\tau\ ,\ \tau)^2$$
$$f'\ ,\ (f', f')^2 = \tau'\ ,\ (f'\ , \tau') = p'\ ,\ (\tau'\ ,\ \tau')^2 .$$

Setzt man die Ausdrücke:

$$f + \lambda p = q \qquad \text{und} \qquad f' + \lambda' p' = q'$$

und combinirt man das System:

$$q\ \ ,\ \ \tau\ \ ,\ \ (\tau\ , \tau)^2$$

mit dem Systeme:

$$q'\ \ ,\ \ \tau'\ \ ,\ \ (\tau'\ , \tau')^2 ,$$

dann erhält man ein System Ω, aus dem das gesuchte simultane System dadurch entsteht, dass man die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als einzelne Formen ansieht.

Das System Ω kann durch ein System T ersetzt werden (vgl. oben III.), welches in der folgenden Weise entsteht. Zuerst combinire man das System

$$q\ \ ,\ \ \tau\ \ ,\ \ (\tau\ , \tau)^2$$

mit dem aus der Form q' allein bestehenden Systeme zu einem neuen Systeme U, bezeichne darin diejenigen Formen, bei denen das Symbol q' nicht in Factoren erster Art auftritt, die Formen q , τ , $(\tau\ , \tau)^2$ inbegriffen durch

$$A_1'\ \ ,\ \ A_2'\ \ ,\ \ \ldots .$$

und füge sodann dem Systeme U die Formen τ' , $(\tau'\ , \tau')^2$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art, der Form:

$$[S(A')\ \ ,\ \ \tau'^{\varrho}]^{\nu}$$

hinzu.

Das System U enthält ausser den Formen:

$$q\ ,\ \tau\ ,\ (\tau\ , \tau)^2\ ,\ q'$$

erstens die Uebereinanderschiebungen

$$(q\ , q')^{\nu} \qquad \text{und} \qquad (\tau\ , q')^{\nu},$$

und ferner Uebereinanderschiebungen der Form

$$(q^r\, \tau^s\ \ ,\ \ q'^{\varrho})^{\nu},$$

bei denen das Product $q^r \tau^s$ einem der Restsysteme:

$$(1\ , 1)\ \ ,\ \ (1\ , 2)\ \ ,\ \ (2\ , 2)\ \ ,\ \ (1\ , 1\ , 1)\ \ ,\ \ (2\ , 2\ , 2)$$

entspricht (vgl. § 12.).

Da die Grade der Formen q und τ durch den Grad 3 der Form q' dividirt die Reste 0 und 3 lassen, so sind die einzigen Producte dieser Art: τ^2 und τ^3. Die ihnen entsprechenden Uebereinanderschiebungen sind:

$$(\tau^2\,,\,q')^3 \quad \text{und} \quad (\tau^3\,,\,q'^2)^6\,,$$

Von denselben ist wegen der Identität (I) (vgl. § 18. dritter Fall) die Invariante $(\tau^3\,,\,q'^2)^6$ im Systeme U überflüssig, dasselbe besteht mithin aus den Formen:

$$q\,;\tau\;;\;(\tau,\tau)^2\,;\;q'\;;\;(q,q')\;;\;(q,q')^2\;;\;(q,q')^3\;;\;(\tau,q')\;;\;(\tau,q')^2\;;\;(\tau^2,q')^3.$$

Von denselben sind die Formen:

$$q\;;\;\tau\;;\;(\tau\,,\,\tau)^2\;;\;(q\,,\,q')^3\;;\;(\tau^2,q')^3 \qquad \text{Formen } A',$$

da bei den übrigen das Symbol q' in Factoren erster Art auftritt.

Das System T enthält ausser den Formen des Systems U und den Formen:

$$\tau' \text{ und } (\tau'\,,\,\tau')^2$$

die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(q^{r_1}\,\tau^{r_2}\;((\tau^2,q')^3)^{r_3},\;\tau'^{\varrho})^{\nu},$$

also die Formen (vgl. § 27. II.):

$$(q\,,\tau')\,;\,(q\,,\tau')^2\,;\,(\tau\,,\tau')\,;\,(\tau\,,\tau')^2\,;\,((\tau^2,q')^3,\tau')\;;\;((\tau^2,q')^3,(\tau^2,q')^3,\tau')^2$$
$$(q,\tau'^2)\;\;;\;(q'(\tau^2,q'^3),\,\tau'^2)\,;\;(q^2,\tau'^3)^6\,.$$

Von denselben sind die vier Formen:

$$((\tau^2,q')^3,\tau')\;;\;((\tau^2,q')^3\,.\,(\tau^2,q')^3\,,\,\tau')^2\;;\;(q\,.\,(\tau^2\,,\,q')^3\,,\,\tau'^2)^4\;;\;(q^2\,,\,\tau'^3)^6$$

überflüssig; die ersten drei Formen, weil sie sich von den Producten

$$(\tau,\tau')^2\,.\,(\tau,q')^2\;\;;\;\;(\tau,\tau')^2\,.\,(\tau^3,q'^2)^6\;\;;\;\;(\tau,\tau')^2.(\tau\tau')^2.(qq')^3,$$

welche mit ihnen in Symbolen und Norm übereinstimmen, nur um Formen niederer Norm unterscheiden; die letzte Form nach § 18. Fall 3., weil sich die Potenz τ'^3 nach Identität (I) durch andere Producte ausdrücken lässt.

Das in dieser Weise reducirte System Ω besteht aus den Formen:

$$q\;\;;\;\;\tau\;\;;\;\;(\tau,\tau)^2\;\;;\;\;q'\;\;;\;\;\tau'\;\;;\;\;(\tau',\tau')^2,$$
$$(q,q')\;;\;(q,q')^2\;\;;\;(q,q')^3\;\;;\;(\tau,q')\,;\,(\tau,q')^2\;\;;\;(\tau^2,q')^3\;\;;\;(\tau',q)\;\;;\;(\tau',q)^2\,;$$
$$(\tau'^2,q)^3\;\;;\;\;(\tau,\tau')\;\;;\;\;(\tau,\tau')^2.$$

Setzt man in denselben für q und q' ihre Werthe $f+\lambda p$ und $f'+\lambda p'$, und betrachtet man sodann die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen, dann erhält man das simultane System der Formen f und f'. Es besteht aus den 34 Formen:

$$f\;;\;\tau\;;\;p\;;\;(\tau,\tau)^2\;;\;f'\;;\;\tau'\;;\;p'\;;\;(\tau',\tau')^2\;;\;(\tau,\tau')\;;\;(\tau,\tau')^2;$$
$$(f,f')\,;\,(f,p')\;;\;(f',p)\;;\;(f',p')\;;\;(f,f')^2\;;\,(f,p')^2\;;\;(p,f')^2\;;\;(p,p')^2;$$
$$(f,f')^3\;;\;(f,p')^3\;;\;(p,f')^3\;;\;(p,p')^3\;;\;(f,\tau')\;;\;(p,\tau')\,;\,(f,\tau')^2\,;\,(p,\tau')^2\,;\,(f,\tau'^2)^3;$$
$$(p,\tau'^2)^3\;;\;(f',\tau)\;;\;(f',\tau)^2\;;\;(f',\tau^2)^3\;;\;(p',\tau);\;(p',\tau)^2\;;\;(p',\tau^2)^3;$$

von welchen diejenigen Functionaldeterminanten überflüssig sind (§ 27.) (II), bei denen p oder p' eine der übereinanderzuschiebenden Formen ist, da sich dieselben durch Formen niederer Ordnung ausdrücken lassen. Es sind dies die fünf Formen:

$$(f,p')\ ;\ (p,f')\ ;\ (p,p')\ ;\ (p,\tau')\ ;\ (\tau,p')\,.$$

§ 29.

Ueber die Form $f = a_x{}^4$.

I. *Das System der Form f.* Da der Grad der Form f durch 4 theilbar ist, so existirt eine Covariante K (§ 22.); es ist die Form:

$$(f\,,f)^2 = a_x^2\, b_x^2\ (ab)^2,$$

ich will sie durch Δ bezeichnen. Die einzige Form χ ist die Invariante $(f,f)^4$.

Das System der Form $f' = a_x'^3$ (vgl. § 21.) und nach § 28. (I) besteht aus den Formen:

$$f'\ ;\ (f',f')^2 = \tau'\ ;\ (f',\tau')\ ;\ (\tau',\tau')^2.$$

Der Form τ' in demselben entspricht die Form Δ des Systems von f und daher entsprechen nach § 25. den das Symbol τ' enthaltenden Formen (f',τ') und $(\tau',\tau')^2$ Formen $P\,(K,\chi)$.

Diese Formen sind im System der speciellen Formen überflüssig; nach ihrer Weglassung besteht dieses System aus der Form f allein, es ist nach § 23. in Bezug auf die Formen Δ und $(f,f)^4$ eigentlich vollständig. Das System der speciellen Formen von Δ besteht aus dieser Form allein; es ist in Bezug auf die Invarianten $(f,f)^4$ und $(f,\Delta)^4$ vollständig (§ 24.).

Combinirt man die beiden Systeme specieller Formen, dann entsteht ein System T, welches in Bezug auf diese Invarianten eigentlich vollständig ist. Es enthält ausser den Formen f und Δ die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f^r\ ,\ \Delta^\varrho)^\nu.$$

Diese Uebereinanderschiebung gehört nun nach § 11. nur dann der zweiten Art an, wenn sowohl r als auch ϱ gleich 1 ist; wir erhalten somit nur die neuen Formen:

$$(f,\Delta)\ ;\ (f,\Delta)^2\ ;\ (f,\Delta)^3\ ;\ (f,\Delta)^4.$$

Die letzteren drei sind im System T überflüssig, da die Formen $(f,\Delta)^2$ und $(f,\Delta)^3$ nach § 24. als Formen $P(\chi)$ darstellbar sind, also die Invariante $(f,f)^4$ zum Factor haben.

Fügt man zu dem so reducirten System T die Invarianten $(f,f)^4$ und $(f,\Delta)^4$ hinzu, dann erhält man (§ 16. III.) ein vollständiges System, nämlich das der Form f. Es enthält die Formen:

$$f\,;\;(f,f)^2=\Delta\,;\;(f,\Delta)=t\,;\;(f,f)^4 \text{ und } (f,\Delta)^4,$$

zwischen denen die bekannte Beziehung stattfindet:

$$\text{(II)} \qquad 2t^2+\Delta^3-\tfrac{1}{2}f^2\Delta.(f,f)^4+\tfrac{1}{3}f^3.(f\Delta)^4=0.$$

II. Das simultane System einer biquadratischen Form f und einer quadratischen Form f' entsteht durch Combination der einzelnen Systeme dieser Formen.

Diese Systeme bestehen aus den Formen:

$$f\,;\;(f,f)^2=\Delta\,;\;(f,\Delta)=t\,;\;(f,f)^4\,;\;(f,\Delta)^4\,;$$
$$f'\;;\;(f',f')^2.$$

Das gesuchte System enthält daher nach § 27. ausser diesen Formen die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f,f'^{\varrho})^{\nu}\;;\;(\Delta,f'^{\varrho})^{\nu}\;;\;(t,f'^{\varrho})^{\nu},$$

also die Formen:

$$(f,f')\,;\;(f,f')^2\,;\;(f,f'^2)^3\,;\;(f,f'^2)^4\,;\;(\Delta,f')\,;\;(\Delta,f')^2\,;\;(\Delta,f'^2)^3;$$
$$(\Delta,f'^2)^4\,;\;(t,f')\,;\;(t,f')^2\,;\;(t,f'^2)^3\,;\;(t,f'^2)^4\,;\;(t,f'^3)^5\,;\;(t,f'^3)^6,$$

von denen nach § 27. (II) die drei Formen:

$$(t,f')\,;\;(t,f'^2)^3\,;\;(t,f'^3)^5$$

überflüssig sind, da t eine Functionaldeterminante ist.

III. Das simultane System einer biquadratischen Form f und einer cubischen Form f' kann dadurch gebildet werden, dass man die einzelnen Systeme dieser Formen:

$$f\,;\;\Delta=(f,f)^2\,;\;t=(f,\Delta)\,;\;(f,f)^4\,;\;(f,\Delta)^4\,;$$
$$f'\,;\;(f',f')^2=\tau\,;\;(f'\tau)=p\,;\;(\tau,\tau)^2$$

mit einander combinirt.

Dieses Verfahren ist jedoch etwas weitläufig; ich will mich daher lieber der § 19. gegebenen und § 28. III. und IV. angewandten Methode bedienen.

Die Ausdrücke $f+\lambda\Delta$ und $f'+\lambda' p$ bezeichne ich durch φ und q und combinire sodann das System:

$$\varphi\,;\;t\,;\;(f,f)^4\,;\;(f,\Delta)^4$$

mit dem aus der Form q allein bestehenden Systeme zu einem Systeme U.

Hierin bezeichne ich ferner diejenigen Formen, bei denen das Symbol q nicht in Factoren erster Art (q_x) auftritt, die Formen

$$\varphi\,;\;t\,;\;(f,f)^4\,;\;(f,\Delta)^4$$

inbegriffen, durch $A_1', A_2' \ldots$ und füge endlich dem Systeme U die Formen τ und $(\tau,\tau)^2$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A'),\,q^{\varrho})^{\nu}$$

hinzu. Das in dieser Weise gebildete System bezeichne ich durch T; betrachtet man in den Formen derselben, nachdem man für φ und q ihre Werthe $f + \lambda\Delta$ und $f' + \lambda' p$ eingesetzt hat, die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen, dann erhält man das simultane System.

Das System U enthält ausser den Formen

$$\varphi \;;\; t \;;\; (f,f)^4 \;;\; (f,\Delta)^4 \;;\; q$$

zweierlei Uebereinanderschiebungen; erstens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form (§ 12.)

$$(\varphi\,,\,q^\varrho)^\nu \qquad \text{und} \qquad (t\,,\,q^\varrho)^\nu,$$

also die Formen:

$$(\varphi\,,\,q) \;;\; (\varphi\,,\,q)^2 \;;\; (\varphi\,,\,q)^3 \;;\; (\varphi\,,\,q^2)^4,$$
$$(t\,,\,q) \;;\; (t\,,\,q)^2 \;;\; (t\,,\,q)^3 \;;\; (t\,,\,q^2)^4 \;;\; (t\,,\,q^2)^5 \;;\; (t\,,\,q^2)^6$$

und zweitens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form

$$(\varphi^r\, t^s\,,\,q^\varrho)^\nu,$$

bei denen das Product $\varphi^r \,.\, t^s$ einem der Restsysteme entspricht:

$$(1\,,1) \;;\; (1\,,2) \;;\; (2\,,2) \;;\; (1\,,1\,,1) \;;\; 2\,,2\,,2).$$

Da nun die Grade der Formen φ und t durch den Grad 3 der Form q dividirt die Reste 1 und 0 lassen, so entsprechen hier diesen Restsystemen nur die Producte φ^2 und φ^3 und demnach die Uebereinanderschiebungen:

$$(\varphi^2\,,\,q^3)^8 \qquad \text{und} \qquad (\varphi^3\,,\,q^4)^{12}.$$

Die Formen A', diejenigen Formen des Systems U nämlich, bei denen das Symbol q nicht in Factoren erster Art auftritt, sind hier:

$$\varphi \;;\; t \;;\; (f,f)^4 \;;\; (f,\Delta)^4 \;;\; (\varphi\,,\,q)^3 \;;\; (t\,,\,q)^3 \;;\; (t,q^2)^6 \;;\; (\varphi^3\,,q^4)^{12}$$

und demgemäss die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form

$$(S\,(A')\,,\,\tau^\varrho)^\nu$$

nach § 27. II.:

$$(\varphi,\tau) \;;\; (\varphi\,,\,\tau)^2 \;;\; (\varphi,\tau^2)^3 \;;\; (\varphi\,,\,\tau^2)^4,$$
$$(t\,,\tau) \;;\; (t\,,\tau)^2 \;;\; (t\,,\,\tau^2)^3 \;;\; (t\,,\tau^2)^4 \;;\; (t\,,\,\tau^3)^5 \;\; (t\,,\,\tau^3)^6,$$
$$((\varphi\,,q)^3\,,\tau) \;;\; ((t,q)^3\,,\tau) \;;\; ((t,q)^3\,,\tau)^2 \;;\; ((t\,,\,q)^3\,,\tau^2)^3,$$
$$((\varphi,q)^3\cdot(\varphi,q)^3\,,\tau)^2 \;;\; ((\varphi\,,q)^3\cdot(t\,,q)^3\,,\tau^2)^4 \;;\; ((t\,,q)^3\cdot(t\,,q)^3,\tau^3)^6.$$

Diese Uebereinanderschiebungen, die Formen des Systems U und die Formen τ und $(\tau\,,\tau)^2$ bilden zusammen das System T.

Man kann nun leicht zeigen, dass in demselben die Uebereinanderschiebungen:

$$(t\,,q) \;;\; (t\,,q)^2 \;;\; (t\,,\,q^2)^4 \;;\; (t\,,\tau) \;;\; (t\,,\,\tau^2)^3 \;;\; (t\,,\,\tau^3)^5,$$
$$((t,q)^3\,,\tau) \;;\; ((t,q)^3\,,\tau^2)^3 \;;\; ((t,q)^3\cdot(\varphi\,,\,q)^3\,,\tau^2)^4 \;;\; ((t,q)^3\,.\,(t\,,q)^3\,,\tau^3)^6$$

überflüssig sind und dass sich die Uebereinanderschiebungen

$$((\varphi, q)^3, \tau) \; ; \; ((t, q)^3, \tau)^2 \; ; \; ((\varphi, q)^3 . (\varphi, q)^3, \tau)^2$$

durch die Uebereinanderschiebungen

$$(\varphi, q . \tau)^4 \; ; \; (t, q . \tau)^5 \; ; \; (\varphi^2, q^2 \tau)^8$$

ersetzen lassen, welche dieselben Symbole und dieselbe Norm besitzen.

Das in dieser Weise reducirte System T enthält die Formen:

$$\varphi \; ; \; t \; ; \; (f, f)^4 \; ; \; (f, \Delta)^4 \; ; \; q \; ; \; \tau \; ; \; (\tau, \tau)^2,$$
$$(\varphi, q) \; ; \; (\varphi, q)^2 \; ; \; (\varphi, q)^3 \; ; \; (\varphi, q^2)^4 \; ; \; (\varphi^2, q^3)^8 \; ; \; (\varphi^3, q^4)^{12} \; ;$$
$$(\varphi, \tau) \; ; \; (\varphi, \tau)^2 \; ; \; (\varphi, \tau^2)^3 \; ; \; (\varphi, \tau^2)^4 \; ; \; (\varphi, q\tau)^4 \; (\varphi^2, q^2\tau)^8,$$
$$(t, q)^3 \; ; \; (t, q^2)^5 \; ; \; (t, q^2)^6 \; ; \; (t, \tau)^2 \; ; \; (t, \tau^2)^4 \; ; \; (t, \tau^3)^6 \; ; \; (t, q\tau)^5 .$$

Trägt man in diesen Uebereinanderschiebungen für die Formen φ und q ihre Werthe $f + \lambda \Delta$ und $f' + \lambda' p$ ein und betrachtet alsdann die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen, dann erhält man das simultane System der Formen f und f'; es enthält 93 Formen, von denen die folgenden als überflüssig weggelassen werden können:

1) die Functionaldeterminante (φ, p), da sie sich durch Formen niederer Ordnung darstellen lässt;

2) alle diejenigen Uebereinanderschiebungen, bei denen eine der übereinander zu schiebenden Formen den Factor p^2 oder Δ^3 besitzt, da sich diese Potenzen nach den Identitäten (I) und (II) auf andere Producte zurückführen lassen (vgl. § 18. Fall III.).

IV. Um das System einer biquadratischen Form f mit einem beliebigen Systeme S zu combiniren, dessen Formen ich durch

$$A_1 \; , \; A_2 \; , \; \ldots .$$

bezeichne, bediene man sich des § 19. angegebenen Verfahrens.

Zuerst combinire man das System S mit dem aus der Form

$$\varphi = f + \lambda \Delta$$

allein bestehenden Systeme, zu einem Systeme U, bezeichne darin alle diejenigen Formen, bei denen das Symbol φ nicht in Factoren erster Art (φ_x) auftritt, durch A_1', A_2', ..., und füge dann dem Systeme U die Formen t ; $(f, f)^4$; $(f, \Delta)^4$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A'), t^{\varrho})^{\nu}$$

hinzu.

Das in dieser Weise entstehende System bezeichne ich durch T; in seinen Formen ersetze ich φ durch seinen Werth $f + \lambda \Delta$ und betrachte dann die Coefficienten der Potenzen von λ als besondere Formen. Sie bilden das gesuchte System.

Das System U enthält nach § 12. zweierlei Uebereinanderschiebungen:

Erstens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(A_i\ ,\ \varphi^\varrho)^\nu$$

und ferner Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A)\ ,\ \varphi^\varrho)^\nu,$$

bei denen das Product $S(A)$ einem der Restsysteme entspricht:

$$(1,1)\ ;\ (1,2)\ ;\ (2,2)\ ;\ (1,3)\ ;\ (2,3)\ ;\ (3,3)\ ;\ (1,1,1)\ ;\ (1,2,2)\ ;\ (2,3,3);$$
$$(3,3,3)\ ;\ (1,1,1,1)\ ;\ (3,3,3,3).$$

Ist das System S absolut oder in Bezug auf f eigentlich vollständig, dann ist T ein vollständiges System; in diesem Falle kann man darin alle diejenigen Uebereinanderschiebungen der Form:

$$(S(A')\ ,\ t^\varrho)^\nu$$

als überflüssig weglassen, bei denen $\varrho > 1$ ist; da bei denselben t^2 nach Identität (II) durch andere Producte ausdrückbar ist (vgl. § 18. Fall 3.). Das System T enthält dann ausser den Formen des Systems U und den Formen t, $(f, f)^4$ und $(f, \Delta)^4$ nur die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A')\ ,\ t)^\nu.$$

V. Um das simultane System zweier biquadratischen Formen f und f' zu erhalten, combinire ich die einzelnen Systeme dieser Formen:

$$f\ ;\ (f, f)^2 = \Delta\ ;\ (f, \Delta) = t\ ;\ (f, f)^4\ ;\ (f, \Delta)^4,$$
$$f'\ ;\ (f', f')^2 = \Delta'\ ;\ (f', \Delta') = t'\ ;\ (f', f')^4\ ;\ (f', \Delta')^4$$

mit einander und wende hierbei die so eben angegebene Methode an.

Die Aggregate $f + \lambda\Delta$ und $f' + \lambda'\Delta'$ bezeichne ich durch φ und φ', und combinire das System:

$$\varphi\ ;\ t\ ;\ (f, f)^4\ ;\ (f, \Delta)^4$$

mit dem aus der Form φ' allein bestehenden Systeme zu dem Systeme U. In demselben bezeichne ich diejenigen Formen, bei denen das Symbol φ' nicht in Factoren erster Art (φ'_x) auftritt, die Formen:

$$\varphi\ ;\ t\ ;\ (f, f)^4\ ;\ (f, \Delta)^4$$

inbegriffen durch A_1', A_2', ... und füge dem Systeme U die Formen t; $(f, f)^4$; $(f, \Delta)^4$ und die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(S(A')\ ,\ t^\varrho)^\nu$$

hinzu. Das so entstehende System bezeichne ich durch T. In den

Formen derselben betrachte ich die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen; sie bilden das simultane System.

Das System U enthält ausser den Formen:

$$\varphi \; ; \; t \; ; \; (f, f)^1 \; ; \; (f, \Delta)^4 \; ; \; \varphi'$$

zweierlei Uebereinanderschiebungen:

Erstens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(\varphi \, , \, \varphi'^{\varrho})^{\nu} \qquad \text{und} \qquad (t \, , \, \varphi'^{\varrho})^{\nu} ,$$

also die Formen:

$$(\varphi \, , \varphi') \; ; \; (\varphi \, , \varphi')^2 \; ; \; (\varphi \, , \varphi')^3 \; ; \; (\varphi \, , \varphi')^4 ,$$
$$(t \, , \varphi') \; ; \; (t \, , \varphi')^2 \; ; \; (t \, , \varphi')^3 \; ; \; (t \, , \varphi')^4 \; ; \; (t \, , \varphi'^2)^5 \; ; \; (t \, , \varphi'^2)^6$$

und ferner Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(\varphi^r \, t^s \, , \, \varphi'^{\varrho})^{\nu} ,$$

bei denen das Product $\varphi^r \, t^s$ einem der Restsysteme entspricht:

$$(1 \, , 1) \; ; \; (1 \, , 2) \; ; \; (1 \, , 3) \; ; \; (2 \, , 2) \; ; \; (2 \, , 3) \; ; \; (3 \, , 3) ;$$
$$(1,1,1) \; ; \; (1,1,2) \; ; \; (2,3,3) \; ; \; (3,3,3) \; ; \; (1,1,1,1) \; ; \; (3,3,3,3).$$

Da die Grade der Formen φ und t durch den Grad 4 der Form φ' dividirt die Reste 0 und 2 lassen, so entspricht hier diesen Restsystemen nur das Product t^2 und demnach die Uebereinanderschiebungen (§ 12.):

$$(t^2 \, , \varphi'^3)^{11} \qquad \text{und} \qquad (t^2 \, , \varphi'^3)^{12}.$$

Die Formen A', bei denen das Symbol φ' nicht in Factoren erster Art (φ'_x) auftritt, sind hier:

$$\varphi \; ; \; t \; ; \; (f, f)^1 \; ; \; (f, \Delta)^4 \; ; \; (\varphi \, , \varphi')^1 \; ; \; (t \, , \varphi')^4 \; ; \; (t^2 \, , \varphi'^3)^{12}.$$

Das System T enthält daher ausser den Formen des Systems U und den Formen t', $(f', f')^4$; $(f', \Delta')^4$ die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$((\varphi^{r_1} \, t^{r_2} \, (t \, , \varphi')^4)^{r_3} \, , \, t')^{\nu} ,$$

also die Formen:

$$(t', \varphi) \; ; \; (t', \varphi)^2 \; ; \; (t', \varphi)^3 \; ; \; (t' \, \varphi)^4 \; ; \; (t', \varphi^2)^5 \; ; \; (t', \varphi^2)^6$$
$$(t', t) \; ; \; (t', t)^2 \; ; \; (t', t)^3 \; ; \; (t', t)^4 \; ; \; (t', t)^5 \; ; \; (t', t)^6 ,$$
$$((t, \varphi')^4, t') \; ; \; ((t, \varphi')^4 \, , t'^2) \; ; \; ((t, \varphi')^4 . (t, \varphi')^4, t')^3 \; ; \; ((t, \varphi')^4 . (t, \varphi')^4, t')^4 ,$$
$$((t, \varphi')^4 . (t, \varphi')^4 . (t, \varphi')^4, t')^5 \; ; \; ((t, \varphi')^4 . (t, \varphi')^4 . (t, \varphi')^4, t')^6 \; ; \; (\varphi . (t, \varphi')^4, t')^5 ;$$
$$(\varphi . (t, \varphi')^4, t')^6 .$$

In demselben sind die folgenden Formen überflüssig:

I.

$((t,\varphi')^4, t')$; $((t,\varphi')^4, t')^2$; $((t,\varphi')^4.(t,\varphi')^4, t')^3$; $((t,\varphi')^2.(t,\varphi')^2, t')^4$
$((t,\varphi')^4.(t,\varphi')^4.(t,\varphi')^4, t')^5$; $((t,\varphi')^4(t,\varphi')^4.(t,\varphi')^4, t')^5$; $(\varphi.(t,\varphi')^4, t')^5$;
$(\varphi.(t,\varphi')^4, t')^6$,

da diese Uebereinanderschiebungen mit den Producten:

$$\varphi'.(t,t')^6 \; ; \; \varphi'.(t,t')^6 \; ; \; (t,t')^6.(t,\varphi'^2)^5 \; ; \; (t,t')^6.(t,\varphi'^2)^6,$$
$$(t,t')^6.(t^2,\varphi'^3)^{11} \; ; \; (t,t')^6.(t^2,\varphi'^3)^{12} \; ; \; (t,t')^6.(\varphi.\varphi')^3 \; ; \; (t,t')^6.(\varphi,\varphi')^4.$$

in den Symbolen und der Norm übereinstimmen, sich also nur um symbolische Producte von niederer Norm von denselben unterscheiden.

II.

$$(t^2, \varphi^3)^{11} \quad \text{und} \quad (t^2, \varphi^3)^{12}$$

weil t^2 nach Identität (II) durch andere Producte ausdrückbar ist (vgl. § 18. Fall III.).

III.

$$(t, \varphi') \; ; \; (t, \varphi')^2 \; ; \; (t, \varphi')^3 \; ; \; (t, \varphi'^2)^5 \; ; \; (t, \varphi'^2)^6 ;$$
$$(t', \varphi) \; ; \; (t', \varphi)^2 \; ; \; (t', \varphi)^3 \; ; \; (t', \varphi^2)^5 \; ; \; (t', \varphi^2)^6 ;$$
$$(t', t) \; ; \; (t', t)^2 \; ; \; (t', t)^3 \; ; \; (t', t)^4 \; ; \; (t', t)^5 \; ; \; (t', t)^6 ;$$

da sie sich mittelst symbolischer Rechnung auf Formen niederer Ordnung und Norm zurückführen lassen.

Lässt man diese überflüssigen Formen weg, dann enthält das reducirte System T die Formen:

$$\varphi \; ; \; t \; ; \; (f,f)^4 \; ; \; (f,\Delta)^4 \; ; \; \varphi' \; ; \; t' \; ; \; (f',f')^4 \; ; \; (f',\Delta')^4 ;$$
$$(\varphi,\varphi') ; (\varphi,\varphi')^2 \; ; \; (\varphi,\varphi')^3 \; ; \; (\varphi,\varphi')^4 \; ; \; (t,\varphi')^4 \; ; \; (t',\varphi)^4 .$$

Sieht man in diesen Uebereinanderschiebungen, nachdem man für φ und φ' ihre Werthe $f + \lambda\Delta$ und $f' + \lambda'\Delta'$ eingesetzt hat, die Coefficienten der Potenzen von λ und λ' als besondere Formen an, dann gelangt man zu dem simultanen Systeme der Formen f und f'. Es besteht aus den 30 Formen:

$$f \; ; \; \Delta \; ; \; t \; ; \; (f,f)^4 \; ; \; (f,\Delta)^4 \; ; \; f' \; ; \; \Delta' \; ; \; t' \; ; \; (f',f')^4 \; ; \; (f',\Delta')^4 ;$$
$$(f,f') ; (f,f')^2 \; ; \; (f,f')^3 \; (f,f')^4 ; (f,\Delta') ; (f,\Delta')^2 ; (f,\Delta')^3 ; (f,\Delta')^4 ;$$
$$(\Delta,f') ; (\Delta,f')^2 ; (\Delta,f')^3 ; (\Delta,f')^4 ; (\Delta,\Delta') ; (\Delta,\Delta')^2 ; (\Delta,\Delta')^3 ; (\Delta,\Delta')^4 ;$$
$$(t,f')^4 \; ; \; (t,\Delta')^4 \; ; \; (t',f)^4 \; ; \; (t',\Delta)^4 ;$$

§ 30.

Das System der Form $f = a_x^5$.

Die einzige Form χ (§ 22.) ist hier die quadratische Covariante:

$$(f,f)^4 = a_x \, b_x \, (ab)^4,$$

ich will sie durch i bezeichnen.

Da die Form f' (vgl. § 21.) biquadratisch ist, so besteht ihr System nach § 29. I. aus den Formen:

$$f' = a_x'^4 \; ; \; (f', f')^2 = \Delta' \; ; \; (f', \Delta') \; ; \; (f', f')^4 \; ; \; (f', \Delta')^4 = (a'b')^2 (a'c')^2 (b'c')^2,$$

und mithin das System der speciellen Formen aus den folgenden:

$$f \; ; \; (f, f)^2 = \varphi \; ; \; (f, \varphi) = t \; ; \; (f, f)^4 \; ; \; a_x b_x c_x (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 .$$

Von denselben sind die beiden letzten nach § 25. überflüssig; die Form $(f, f)^4$, weil sie eine Form χ ist, die Form

$$a_x b_x c_x (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2,$$

weil sie sich in die Form $-(f, i)^2$ bringen, also als Form $P(\chi)$ darstellen lässt.

Das reducirte System der speciellen Formen besteht somit aus den Formen

$$f \; ; \; \varphi \; ; \; t ;$$

es ist nach § 24. in Bezug auf die Form i eigentlich vollständig; combinirt man es mit dem System dieser Form, dann gelangt man zu dem System der Form f. Dasselbe enthält ausser den Formen:

$$f \; ; \; \varphi \; ; \; t \; ; \; i \; ; \; (i, i)^2$$

der zu combinirenden Systeme nach § 27. II. zweierlei Uebereinanderschiebungen:

Erstens die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f, i^\varrho)^\nu \quad ; \quad (\varphi, i^\varrho)^\nu \quad ; \quad (t, i^\varrho)^\nu ;$$

also die Formen:

$$(f, i) \; ; \; (f, i)^2 \; ; \; (f, i^2)^3 \; ; \; (f, i^2)^4 \; ; \; (f, i^3)^5 ;$$

$$(\varphi, i) \; ; \; (\varphi, i)^2 \; ; \; (\varphi, i^2)^3 \; ; \; (\varphi, i^2)^4 \; ; \; (\varphi, i^3)^5 \; ; \; (\varphi, i^3)^6 ;$$

$$(t, i) \; ; \; (t, i)^2 \; ; \; (t, i^2)^3 \; ; \; (t, i^2)^4 \; ; \; (t, i^3)^5 \; ; \; (t, i^3)^6 \; ; \; (t, i^4)^7 ;$$

$$(t, i^4)^8 \; ; \; (t, i^5)^9 ;$$

und zweitens die Uebereinanderschiebungen:

$$(f^2, i^5)^{10} \quad ; \quad (f \cdot t, i^7)^{14} \quad ; \quad (t^2, i^9)^{18} .$$

In diesem Systeme der Form f sind die Uebereinanderschiebungen:

$$(t, i) \; ; \; (t, i^2)^3 \; ; \; (t, i^3)^5 \; ; \; (t, i^4)^7 \; ; \; (t^2, i^9)^{18}$$

überflüssig; die vier ersten nach § 27. II., weil t eine Functionaldeterminante ist; die letzte nach § 18. Fall III, weil sich das Quadrat der Functionaldeterminante t durch andere Producte ausdrücken lässt.

§ 31.

Das System der Form $f = a_x^6$.

Die Formen χ (vgl. § 22.) sind hier die Covariante

$$(f, f)^4 = a_x^2 b_x^2 (ab)^4$$

und die Invariante $(f, f)^6$; die erstere bezeichne ich durch k, die letztere durch A.

Die Form $f'' = a_x'^5$ (vgl. § 21.) ist vom 5^{ten} Grade; ihr System besteht aus den Formen:

$$f'' \; ; \; \varphi' = (f'', f'')^2 \; ; \; (f'', \varphi') \; ; \; (f'', f'')^4 = i'$$

und Formen $P(i')$ (vgl. § 30.), denen im System der Form f die Formen:

$$f \; ; \; \varphi = (f, f)^2 \; ; \; (f, \varphi) = t \; ; \; (f, f)^4 = k$$

und Formen $P(k, A)$ entsprechen (vgl. § 25.). Dieselben bilden das in Bezug auf die Formen k und A vollständige System der speciellen Formen. Da die Formen k und $P(k, A)$ darin überflüssig sind, so kann man sie weglassen, das reducirte System der speciellen Formen besteht dann aus den Covarianten:

$$f \; ; \; \varphi \; ; \text{ und } t .$$

Combinirt man es mit dem Systeme der Form k, dann entsteht ein in Bezug auf die Invariante A vollständiges System und durch Hinzufügung derselben das System der Form f.

Dieses Verfahren ist jedoch mit grossen Weitläufigkeiten verknüpft, da einerseits die Formen der zu combinirenden Systeme, andererseits die dabei auftretenden überflüssigen Formen in zu grosser Anzahl vorhanden sind. Ich will mich daher einer andern Methode bedienen.

Ich bezeichne die quadratische Covariante $(f, k)^1$ durch l und entwickle in der *Annali di Math. Ser. II. t. I. pag. 60.* angegebenen Weise, die Beziehung:

$$\text{(I)} \qquad (f, l)^2 = \tfrac{2}{9}(k, k)^2 + \tfrac{1}{3} Ak.$$

Sie lehrt, dass die Covariante $(k, k)^2$ eine Form $P(l, A)$ ist und dass demnach das aus der Form k allein bestehende System, welches nach § 29. I. in Bezug auf die Formen $(k, k)^2$ und $(k, k)^4$ vollständig ist, auch in Bezug auf die Formen l, A und $(k, k)^4$ vollständig ist (vgl. § 14.).

Combinirt man es mit dem Systeme der speciellen Formen, dann entsteht ein in Bezug auf die Formen l, A und $(k, k)^4$ ebenfalls vollständiges System U. Dasselbe enthält ausser den Formen:

$$f \; ; \; \varphi \; ; \; t \; ; \; k$$

der zu combinirenden Systeme, die Uebereinanderschiebungen zweiter Art der Form:

$$(f^{r_1} \varphi^{r_2} t^{r_3}, k^{\varrho})^{\nu}.$$

Zu dem unvollständigen Producte $(ak)^3$ gehören die Formen:

$$(f, k)^3 = a_x^3\, k_x\, (ak)^3 \quad \text{und} \quad (f, k)^4 = l = a_x^2\, (ak)^4.$$

Da die erste derselben verschwindet, so ist (vgl. § 6.) jedes den symbolischen Factor $(ak)^3$ enthaltende symbolische Product eine Form $P\,(l)$.

Da nun bei denjenigen Uebereinanderschiebungen der Form

$$(f^{r_1}\ \varphi^{r_2}\ t^{r_3}\ ,\ k^{\varrho})^{\nu},$$

für welche $\nu > z$ ist, solche symbolische Producte als Glieder auftreten, so sind dieselben im System U überflüssig.

Von den übrigen Uebereinanderschiebungen, für welche ν den Werth 1 oder 2 besitzt, nämlich den Formen:

$$(f, k)\ ;\ (f, k)^2\ ;\ (\varphi, k)\ ;\ (\varphi, k)^2\ ;\ (t, k)\ ;\ (t, k)^2$$

sind die drei letzten gleichfalls überflüssig.

Zu den unvollständigen symbolischen Producten $(\varphi k)^2$ nämlich gehören die Formen (§ 6.):

$$(\varphi k)^2 = \varphi_x^6\, k_x'^2\, (\varphi k)^2 \quad ; \quad (\varphi k)^3 = \varphi_x^5\, k_x\, (\varphi k)^3 \quad ; \quad (\varphi k)^4 = \varphi_x^4\, (\varphi k)^4\,;$$

sie lassen sich in die Form bringen:

$$\begin{aligned}(\varphi, k)^2 &= c_1\, l \,.\, f + c_2 k^2,\\ (\varphi, k)^3 &= c\,(f, l),\\ (\varphi, k)^4 &= c_1\,(f, l)^2 + c_2\, Ak,\end{aligned}$$

also durch Formen niederer Classe ausdrücken.

Da nun ein Glied der Uebereinanderschiebung

$$(t, k)^2 = [a_x^5\, \varphi_x^7\, (a\varphi), k]^2,$$

nämlich das symbolische Product

$$a_x^5\, \varphi_x^5\, (\varphi k)^2\, (a\varphi)\, k_x^2$$

den Factor $(\varphi k)^2$ besitzt, so ist dieselbe im System U überflüssig (§ 18. Fall IV.).

Die Form (t, k) ist überflüssig, weil t eine Functionaldeterminante und (t, k) daher auf Formen niederer Ordnung reducirbar ist (§ 27. II.).

Das reducirte System U besteht aus den Formen:

$$f\ ;\ \varphi\ ;\ t\ ;\ k\ ;\ (f, k)\ ;\ (f, k)^2 = p\ ;\ (\varphi, k);$$

es ist in Bezug auf die Formen l, A und $(k, k)^4$ vollständig.

Combinirt man es mit dem Systeme der Form l, dann entsteht ein in Bezug auf die Invarianten A und $(k, k)^4$ vollständiges System T.

Dasselbe enthält nach § 27. II. ausser den Formen:

$$f\,;\;\varphi\,;\;t\,;\;k\,;\;(f,k)\,;\;p\,;\;(\varphi,k)\,;\;l\,;\;(l,l)^2$$

der zu combinirenden Systeme die Uebereinanderschiebungen:

$$(f, l^\varrho)^{2\varrho-1}\;;\;(\varphi, l^\varrho)^{2\varrho-1}\;;\;(t, l^\varrho)^{2\varrho-1}\;;\;(k, l^\varrho)^{2\varrho-1}\;;\;((f,k), l^\varrho)^{2\varrho-1};$$
$$(p, l^\varrho)^{2\varrho-1}\;;\;((\varphi,k), l^\varrho)^{2\varrho-1};$$
$$(f, l^\varrho)^{2\varrho}\;;\;(\varphi, l^\varrho)^{2\varrho}\;;\;(t, l^\varrho)^{2\varrho}\;;\;(k, l^\varrho)^{2\varrho}\;;\;((f,k), l^\varrho)^{2\varrho}\;;\;(p, l^\varrho)^{2\varrho};$$
$$((\varphi,k), l^\varrho)^{2\varrho}.$$

Von denselben sind die folgenden überflüssig:

I.

$$(\varphi, l)^2 = \varphi_x^6\,(\varphi, l)^2 \quad \text{und} \quad (p, l)^2 = p_x^4\,(p, l)^2.$$

Diese Uebereinanderschiebungen sind die einzigen zu den unvollständigen symbolischen Producten $(\varphi, l)^2$ und $(p, l)^2$ gehörigen Formen; sie lassen sich in die Form bringen:

$$(\varphi, l)^2 = c_1\, k\,.\,l + c_2 f\,.\,(k,k)^4 + c_3 A\,.\,p,$$
$$(p, l)^2 = c_1\, l^2 + c_2\, A\,(f,l)^2 + c_3\, A^2 k + c_4\, k\,.\,(k,k)^4:$$

also auf Formen niederer Classe reduciren.

II.

Diejenigen der Uebereinanderschiebungen:

$$(\varphi, l^\varrho)^\nu\;;\;(t, l^\varrho)^\varrho\;;\;(p, l^\varrho)^\nu\;;\;((\varphi,k)\, l^\varrho)^\nu,$$

für welche $\nu > 1$ ist, da bei ihnen Glieder auftreten, welche einen der unvollständigen Producte $(\varphi, l)^2$ und $(p, l)^2$ zum Factor besitzen (§ 18. Fall IV.).

III.

Die Formen:

$$(t, l)\;;\;((\varphi,k), l)\;;\;((f,k), l^\varrho)^{2\varrho-1},$$

da bei ihnen eine der übereinander zu schiebenden Formen eine Functionaldeterminante ist (vgl. § 27. II.).

IV.

Die Invariante $(k, l^2)^4$; sie lässt sich in die Form bringen:

$$(k, l^2)^4 = c_1\, A\,.\,(l,l)^2 + c_2\, A^2\,.\,(k,k)^4 + c_3\,(k,k)^4\,.\,(k,k)^4.$$

Das reducirte System T besteht aus den Formen:

$$f\ ;\ \varphi\ ;\ t\ ;\ k\ ;\ (f\,,k)\ ;\ p\ ;\ (\varphi\,,k)\ ;\ l\ ;\ (l\,,l)^2\ ;$$
$$(f\,,l)\ ;\ (f\,,l)^2\ ;\ (f\,,l^2)^3\ ;\ (f\,,l^2)^4\ ;\ (f\,,l^3)^5\ ;\ (f\,,l^3)^6\ ;$$
$$(\varphi\,,l)\ ;\ (k\,,l)\ ;\ (p\,,l)\ ;\ (k\,,l)^2\ (k\,,l^2)^3\ ;$$
$$((f\,,k)\,,l)^2\ ;\ ((f\,,k)\,,l^2)^4\ ;\ ((f\,,k)\,,l^3)^6\ ;\ ((f\,,k)\,,l^4)^8\ ;$$

es ist in Bezug auf die Invarianten A und $(k\,,k)^4$ vollständig, fügt man dieselben hinzu, dann entsteht das System der Form f (vgl. § 16. III.).