Zur Theorie der Riemann'schen Fläche *).

Von A. Clebsch †.

Im vierten Bande der Annalen hat Hr. Lüroth einen Satz gegeben, welcher für die Theorie der algebraischen Functionen von grosser Wichtigkeit ist. Er zeigt, dass für die einer Gleichung $f(s, z) = 0$ entsprechende Riemann'sche Fläche eine typische Darstellung existirt, in welcher die Verzweigungspunkte eine einfache und übersichtliche Lage besitzen. Da in dem angeführten Aufsatz die Sache nur kurz angedeutet, die Beweise grossentheils nicht gegeben sind, mag es nicht überflüssig erscheinen, wenn ich hier den Gegenstand nochmals darlege, wie ich ihn in meinen Vorlesungen behandle, um zugleich einige Erweiterungen und Bemerkungen daran zu knüpfen. Es wird sich dabei insbesondre der volle Umfang von Möglichkeiten zeigen, welche die Lüroth'sche Umformung der Riemann'schen Fläche noch einschliesst, auch wird sich zeigen, wie eine Anzahl von Betrachtungen, welche für die Abel'schen Functionen nicht ohne Schwierigkeit sind, auf das einfachere Schema der hyperelliptischen Functionen zurückgeführt werden können.

§ 1.

Blätter und Schleifen.

Denken wir uns eine Gleichung $f(s, z) = 0$ gegeben, welche vom $n$ten Grade in s sein mag. Der Darstellung von s als Function von z entspricht eine über die z-Ebene ausgebreitete n-blättrige Riemann'sche Fläche. Um sie zu construiren, wählt man in der z-Ebene einen beliebigen Punkt z, der nur kein Verzweigungspunkt sein darf, und ordnet die ihm entsprechenden Werthe von s (etwa $s_1, s_2 \ldots s_n$) in beliebiger Folge; sie bezeichnen die Blätter der Riemann'schen Fläche. Sodann markiren wir in der z-Ebene die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, von denen vorausgesetzt werden soll, dass in jedem nur *zwei* Werthe von s gleich werden und dass keiner im Unendlichen liege; wir ordnen diese Verzweigungspunkte in beliebiger Weise an und ziehen eine sich nicht durchkreuzende Curve C, welche, vom ersten beginnend, die Verzweigungspunkte der festgesetzten Reihenfolge nach durchläuft und bei dem letzten endigt.

---

*) Unmittelbarer Abdruck eines nachgelassenen, für diese Annalen bestimmten Manuscriptes.

Setzen wir nun die Function s, von einem Werthe s_i bei z_0 ausgehend, (im i^{ten} Blatte) continuirlich fort, jedoch ohne dabei je die Curve C zu überschreiten, so erhalten wir vollkommen alle Werthe, welche s im i^{ten} Blatte annimmt, und zwar eindeutig, und — abgesehen von den Punkten der Curve C — stetig.

Führen wir eben dies für alle Blätter, d. h. der Reihe nach mit allen s_i beginnend, aus, so erhalten wir die Ausbreitung der ganzen Function s. Sie verläuft in jedem Blatte eindeutig und stetig; nur längs der Curve C gelangt man aus einem Blatte ins andere.

Von dem Punkte z_0 ziehen wir nun Curven k, welche sich selbst und einander nicht kreuzen, nach den Verzweigungspunkten auf C, und zwar so, dass die Folge der Tangenten, welche diese Curven in z_0 besitzen, der Folge der Verzweigungspunkte entspricht, nach welchen sie gehen. Wir können dies auch so ausdrücken, dass wir die Curve C durch eine zweite Curve C' zu einer geschlossenen, sich nicht schneidenden Curve ergänzen, in deren Innerem z_0 liegt, und die Curven k sämmtlich im Innern des von C, C' umschlossenen Flächenstücks ziehen. Uebrigens kann man, da die Curven C, C' nur ohne Ueberschreitung von Verzweigungspunkten und ohne gegenseitige Durchkreuzung verschiebbar sind, insbesondere diese Curven auch durch das System der Curven k ersetzt denken. Von diesen ist dann nur jede doppelt zu rechnen; die erste und die letzte, jede einfach gerechnet, ersetzt die Curve C', alles Uebrige zusammen die Curve C.

Unter *einer* Schleife soll nun ein Weg verstanden werden, welcher vom Punkte z_0 beginnend auf einer der Curven k bis zu dem entsprechenden Verzweigungspunkte verläuft, in unendlich kleinem Kreise um diesen herumgeht und auf der Curve k selbst zu z_0 wieder zurückkehrt. Diese Schleife kann in n verschiedenen Weisen durchlaufen werden, indem man mit jedem der n Anfangswerthe von s beginnen kann. In $n-2$ Fällen wird man nach dem Durchlaufen der Schleife zu dem Ausgangswerthe von s zurückkehren. Dagegen wird ein Anfangswerth s_p existiren, der nach Durchlaufen der Schleife zu einem andern Werthe s_q führt, während umgekehrt der Ausgangswerth s_q zu s_p als Endwerth zurückführt. Wir sagen dann, der betreffende Verzweigungspunkt verbinde das p^{te} und das q^{te} Blatt, und bezeichnen ihn als einen Verzweigungspunkt (p, q).

Die Nummern p und q der Blätter, welche bei der getroffenen Anordnung durch *einen* gewissen Verzweigungspunkt verbunden werden, sind nicht an und für sich durch diesen Verzweigungspunkt bestimmt, sondern sie hängen von der Reihenfolge ab, in welcher man durch die Curve C die Verzweigungspunkte verbunden hat. Die Aenderung dieser Reihenfolge bedingt eine andere Lage der Curve C und führt im Allgemeinen eine Aenderung in den Nummern der Blätter herbei, welche durch die einzelnen Verzweigungspunkte verbunden werden. Es entsteht die Frage, ob man durch Aenderung der Reihenfolge der Verzweigungspunkte eine einfache Gesetzmässigkeit in diesen Verbindungen, eine typische Anordnung der Riemann'schen Fläche zu erreichen im Stande sei

§ 2.

Anordnung der Verzweigungspunkte.

Wir wollen die Verzweigungspunkte der Reihe nach durch

$$w_1, w_2 \ldots w_r$$

bezeichnen. Es soll jetzt die Reihenfolge geändert werden. Dies kann immer dadurch geschehen, dass man hinreichend oft zwei auf einander folgende Punkte vertauscht. Es ist also nur die Wirkung zu untersuchen, welche die Vertauschung zweier auf einander folgender Punkte in Bezug auf die Verbindung der Blätter hervorruft.

Indessen kann man diese Vertauschung von w_i und w_{i+1} noch in doppelter Weise vornehmen. Erstlich kann man von w_{i-1} zu w_{i+1} auf einem Wege gehen, welcher innerhalb des von C, C' umschlossenen Raumes liegt, dann von w_{i+1} zu w_i (ob im äussern oder im innern Raume ist hier gleichgültig), und von w_i zu w_{i+2} im äussern Raume gehen. Oder man kann von w_{i-1} zu w_{i+1} durch den äussern Raum gehen, dagegen von w_i zu w_{i+2} durch den innern. Offenbar ist der Unterschied beider Verfahrungsarten derselbe, als ob man die Reihenfolge aller Verzweigungspunkte umgekehrt hätte. Ich werde mich nur der ersten Verfahrungsweise bedienen, welche, wie man sehen wird, ausreicht.

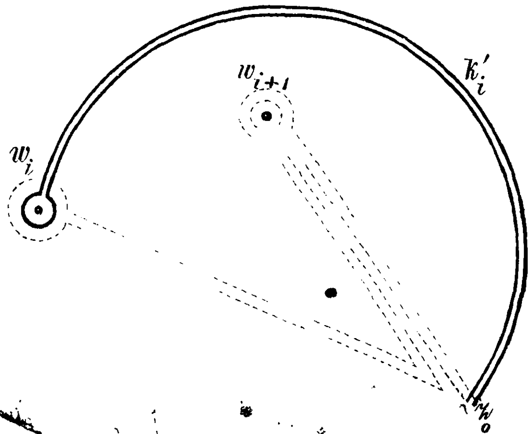
Der neue Weg

$$w_1, w_2 \ldots w_{i-1}, w_{i+1}, w_i, w_{i+2} \ldots w_r$$

mag so gezogen sein, dass z_0 noch innerhalb des von der neuen Curve C und von C' umschlossenen Raumes liegt. Es ist nun ersichtlich, dass die Punkte $w_1, w_2 \ldots w_{i-1}, w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots w_r$ bei der neuen Anordnung dieselben Blätter verbinden wie früher; nur bei w_i hat sich die Sache geändert. Betrachten wir nämlich das alte System der Curven k, so sehen wir, dass alle übrigen Curven dieses Systems, abgesehen von k_i, auch noch als Curven k für die neue Curve C benutzt werden können. Nur die alte Curve k_i verläuft jetzt weder in einer Weise, wie die Definition der entsprechenden Curven bei der neuen Anordnung es verlangt, noch lässt sie sich durch unwesentliche Deformationen in eine solche Lage bringen. Denn es war wesentlich, dass nach der ursprünglichen Anlage die Curve k_i, wenn wir uns in einem kleinen Kreise, den Nummern $1, 2 \ldots r$ der Curven k folgend, um z_0

bewegen, *vor* k_{i+1} kam, während bei der neuen Anordnung an Stelle von k_i eine Curve k_i' gesetzt werden muss, welche *nach* k_{i+1} kommt. Diese Curve muss, um im Innern der neuen Begrenzung zu verlaufen, den Punkt w_i erreichen, indem sie zwischen w_{i+1} und w_{i+2} die alte Begrenzung überschreitet.

Es ist nun die Frage, welche der Wurzeln $s_1, s_2 \ldots s_n$ durch die neue Schleife k_i' verbunden werden. Um dies einzusehen, muss man die Schleife k_i' in ein Aggregat von Schleifen k durch erlaubte, d. h. keinen Verzweigungspunkt überschreitende Schleifen überführen. Dies geschieht, indem man zunächst die Schleife k_{i+1}, dann die Schleife k_i und endlich nochmals die Schleife k_{i+1} durchläuft.



Verbindet nun w_i in der ersten Anordnung zwei ganz andre Blätter wie w_{i+1}, so können bei diesem Umgange niemals die Schleifen k_i und k_{i+1} gleichzeitig zur Wirkung kommen. Fängt man in einem Blatte an, dessen Wurzel k_{i+1} zugeordnet ist, so endigt man beim ersten Durchlaufen von k_{i+1} auch mit einer solchen, das Durchlaufen von k_i ändert demnach nichts, das zweite Durchlaufen von k_{i+1} führt zur Ausgangswurzel zurück. Fängt man in einem Blatte an, dessen Wurzel k_i zugeordnet ist, so ist die Schleife k_{i+1} jedesmal wirkungslos, und der Erfolg des durchlaufenen Weges ist derselbe, als wenn man die Schleife k_i allein durchlaufen hätte.

Die Vertauschung von w_{i+1} mit w_i ändert also nichts, wenn die durch diese Punkte verbundenen Blätter sämmtlich verschieden sind. Ebenso ist es, wenn beide Punkte dieselben Blätter, etwa p und q, verbinden. Denn gehen wir von der Wurzel s_p aus, so führt k_{i+1} zu s_q, sodann k_i zu s_p, endlich k_{i+1} zu s_q. Der ganze Umgang, also die Schleife k_i', führt also von s_p zu s_q, wie k_i.

Wenn dagegen w_{i+1} die Blätter p und q, w_i die Blätter p und m verbindet, wo m von q verschieden ist, so führt, indem man von s_q ausgeht, die Schleife k_{i+1} zu s_p, dann k_i zu s_m, das letzte Durchlaufen von k_{i+1} aber ändert nun nichts mehr. Daher verbindet k_i' nunmehr die Wurzeln s_q und s_m, also die Blätter q, m, während k_i die Blätter p, m verband.

Man kann diese 3 verschiedenen Fälle in der einen Regel zusammenfassen:

I. *Vertauscht man in der angegebenen Weise zwei auf einander folgende Verzweigungspunkte, so vertauschen diejenigen Blätter, welche der vorantretende Punkt verband, in Bezug auf den zurücktretenden ihre Rolle, während alles übrige ungeändert bleibt.*

In der That bleibt nach dieser Regel alles ungeändert, sobald die zu w_i gehörigen Blätter beide mit den zu w_{i+1} gehörigen übereinstimmen oder beide davon verschieden sind. Haben die beiden Punkte aber ein Blatt gemein, so dass w_{i+1} die Blätter p, q, w_i die Blätter p, m verbindet, so verbindet w_i später, indem p, q ihre Rolle tauschen, die Blätter q, m, wie oben.

Stellt man einen Punkt w_{i+1} nicht bloss, wie oben, um eine, sondern um mehrere Stellen voran, also etwa vor $w_{i-\alpha}$, so ist nur der obige Schritt wiederholt auszuführen, und man hat die Regel:

II. *Stellt man in der oben angegebenen Weise einen spätern Verzweigungspunkt an eine frühere Stelle, so vertauschen sich in Bezug auf alle übersprungenen Punkte die beiden Blätter, welche durch den vorgeschobenen Punkt verbunden waren.*

§ 3.

Schematische Anordnung der Verzweigungspunkte. Gruppen.

Es muss nun gezeigt werden, wie man mit Hülfe dieses Satzes zu einer Anordnung der Verzweigungspunkte, bez. einer Curve C, gelangen kann, bei welcher die Verbindung der Blätter nach einem einfach auszudrückenden und übersichtlichen Gesetze erfolgt.

Diese übersichtliche Anordnung soll darin bestehen, dass Verzweigungspunkte, welche dieselben Blätter verbinden, auch immer zusammenstehen und eine *Gruppe* bilden, derart, dass dieselben Blätter durch weitere Verzweigungspunkte nicht mehr verbunden erscheinen. Eine solche Gruppe mag dann durch G_{hk} bezeichnet werden, wenn alle ihre Verzweigungspunkte die Blätter h, k verbinden. Ferner aber *sollen diese Gruppen sich in folgender Anordnung befinden:*

$$G_{12},\ G_{13}\ \ldots\ G_{1n},\ G_{23},\ G_{24}\ \ldots\ G_{2n},\ \ldots\ G_{n-1,\,n},$$

wobei nicht ausgeschlossen ist, dass einige dieser Gruppen fehlen, d. h. keine Verzweigungspunkte enthalten können.

Es ist zu zeigen, dass durch Anwendung des Satzes II. eine solche Anordnung sich erreichen lässt. Dabei genügt es zu zeigen, dass man Gruppen G_{12}, G_{13} ... G_{1n} vorziehen kann, so dass hinter diesen kein Verzweigungspunkt mit dem Index 1 mehr erscheint. Denn auf dieselbe Weise kann man diesen Rest dann behandeln, und erhält Gruppen G_{23}, G_{23} ..., auf welche dann Verzweigungspunkte folgen, die auch den Index 2 nicht mehr enthalten u. s. w.

Das erstere aber sieht man folgendermassen ein. Ich stelle zunächst eine vorläufige Anordnung her, bei welcher die ersten Verzweigungspunkte, bis zu einem gewissen hin, immer das Blatt 1 mit einem andern verbinden, während die darauf folgenden immer Blätter verbinden sollen, welche von 1 verschieden sind. Um diese vorläufige Anordnung zu erreichen, bemerke ich, dass, wenn bei irgend einer Anordnung im Anfange Verzweigungspunkte, welche sich auf das erste Blatt beziehen, am Ende aber auf andere Blätter bezügliche, stehen, diese bereits der Anforderung genügen, und also nur die zwischen ihnen befindliche Reihe von Punkten noch umzuordnen ist. Kann man also ein Verfahren angeben, wodurch die Zahl dieser noch umzuordnenden Punkte vermindert wird, so muss eine endliche Reihe von Schritten zu der gesuchten vorläufigen Anordnung führen. Ein solches Verfahren besteht aber darin, dass man in der noch zu betrachtenden Reihe den letzten noch dem Blatte 1 zugeordneten Verzweigungspunkt vor alle andern Punkte der Reihe zieht. Dieser Punkt scheidet dann aus der Zahl der noch umzuordnenden Punkte aus, und die Zahl derselben ist also wenigstens um 1 vermindert.

So sehen wir, dass die vorläufige Anordnung erreichbar ist. Die in dem ersten Theil der Anordnung verbundenen Blätter seien der Reihe nach

$$1, h;\ 1, i;\ 1, k\ \ldots\ldots$$

Von den Zahlen $h, i, k \ldots$ sei μ die kleinste; und die Verbindung $1, \mu$ komme α mal vor. Man ziehe nun der obigen Regel nach diese α Punkte vor. Man hat dann in der neuen Anordnung erstlich eine Anzahl von Punkten, welche die Blätter $1, \mu$ verbinden. In der darauf folgenden Reihe, die aus den übrigen Punkten $1, h;\ 1, i \ldots$ hervorgegangen sind, kommen dann ausser 1 nur Zahlen vor, welche mindestens gleich μ sind. Behandeln wir diese Reihe ebenso, wie oben die ganze Reihe der Verzweigungspunkte — theilen wir sie also wieder in frühere Punkte, welche dem Blatt 1, und in spätere, welche andern Blättern zugehören, so ist die Reihe der jetzt mit 1 verbundenen Punkte jedenfalls wenigstens um α kleiner als vorhin. Ist nun ν ($\geqq \mu$) die kleinste mit 1 hier verbundene Zahl, so ziehen wir wieder alle die Blätter $1, \nu$ verbindenden Verzweigungspunkte vor u. s. w. Man erhält auf diese Weise eine Anordnung der Verzweigungspunkte in Gruppen

$$G_{1\mu},\ G_{1\nu},\ G_{1\varrho}\ \ldots \qquad (\mu \leqq \nu \leqq \varrho \ldots),$$

auf welche dann Punkte folgen, die mit dem Blatte 1 nicht mehr verbunden sind. Dies aber war zu beweisen.

Die Herstellbarkeit der Anordnung

$$G_{12},\ G_{13}\ \ldots\ G_{1n},\ G_{23},\ G_{24}\ \ldots\ G_{2n},\ \ldots\ G_{n-1,\,n}$$

ist hiermit dargethan. Hr. Lüroth hat bewiesen, *dass die Zahl der in* *jeder Gruppe vereinigten Verzweigungspunkte eine gerade sein muss.* Man kann diesen Beweis folgendermassen führen. Nehmen wir an, der Satz wäre bewiesen für die ersten Gruppen der Anordnung bis zu der Gruppe G_{ik} $(i < k)$. Es ist zu zeigen, dass er dann auch für diese gilt. Nun weiss man aber, dass, wenn man alle Schleifen sich cyclisch geordnet denkt, so dass auf die letzten die ersten wieder folgen, und wenn man nun mit irgend einer Wurzel s_i beginnend, von irgend einer Stelle aus den ganzen Schleifencyclus durchläuft, man immer zu der Ausgangswurzel zurückkehrt. Beginnen wir nun mit s_i und bei der ersten Schleife der Gruppe G_{ik}. Enthielte diese Gruppe eine ungerade Anzahl von Verzweigungspunkten, so würde das Durchlaufen der Gruppe zur Wurzel s_k führen; diese aber findet sich als Index erst wieder bei Gruppen, welche grössere Indices als i enthalten. Beim Fortgange der Operation würde man also durch die spätern Gruppen nie mehr zur Wurzel s_i zurückgeführt werden können, das Ende der letzten Gruppe würde etwa auf eine Wurzel s_m führen, wo $m > i$. Jetzt würde man zu den ersten Gruppen übergehen. Aber diese enthalten der Voraussetzung nach jede eine gerade Anzahl von Verzweigungspunkten; das Durchlaufen einer solchen Gruppe kann also nur immer zu der Wurzel zurückführen, mit welcher man begonnen hat. Also auch diese Gruppen können nicht zu s_i zurückführen, mithin auch nicht der ganze Umgang. Demnach ist die Voraussetzung unmöglich, dass G_{ik} aus einer ungeraden Anzahl von Verzweigungspunkten bestehe. Dass die erste Gruppe G_{12} aus einer geraden Anzahl besteht, findet man durch dasselbe Verfahren, indem man das Gegentheil annimmt und zeigt, dass man, mit der Wurzel s_1 beginnend, nie wieder zu ihr zurückkehren könne. Demnach müssen überhaupt alle Gruppen aus einer geraden Anzahl von Verzweigungspunkten bestehen.

Hieraus folgt, dass wir die Gruppen G_{ik} nach Belieben umordnen können, ohne dass ihre Indices zu verändern sind. Denn ziehen wir gleichzeitig eine gerade Anzahl neben einander stehender und gleichartiger Verzweigungspunkte vor eine beliebig grosse Anzahl voranstehender Punkte, so werden bei diesen nur die Blätter, welche durch jene vorgeschobenen Punkte verbunden werden, eine gerade Anzahl von Malen zu vertauschen sein, d. h. diese Blätter behalten genau ihre ursprüngliche Rolle bei, es wird überhaupt nichts geändert.

§ 4.

Zusammenziehung von Gruppen. Zurückführung auf die geringste Zahl.

Die Vertauschung der Gruppen entspricht also gewissen Abänderungen der Curve C, welche die Art des Zusammenhanges der Blätter durchaus ungeändert lässt.

Dagegen giebt es, wie ebenfalls Hr. Lüroth gezeigt hat, eine einfache Art, *die Curve C so abzuändern, dass an Stelle zweier Gruppen* G_{ik}, G_{im} *die Gruppen* G_{ik}, G_{km} *treten*, und zwar enthalten diese neuen Gruppen einzeln genau dieselben Verzweigungspunkte wie die vorigen. Das Verfahren ist folgendes. Die Gruppe G_{ik} mag aus 2α Punkten bestehen. Man theilt diese in $2\alpha - 1$ erste, und einen letzten. Zwischen die $2\alpha - 1$ und diesen einen schiebt man die Gruppe G_{im}, was ohne Aenderung des Blätterzusammenhanges geschieht; denn man kann immer die Gruppe G_{im} unmittelbar hinter G_{ik} stellen und sie dann vor den einen Punkt von G_{ik} ziehen. Sodann aber zieht man zweitens diesen einen Punkt wieder vor die ganze Gruppe G_{im}. Die Gruppe G_{ik} ist dann wieder vollständig; in der Gruppe G_{im} aber sind die Blätter i, k zu vertauschen, d. h. sie geht in eine Gruppe G_{km} über, was zu beweisen war.

Wenden wir diesen Satz nun auf eine Anzahl von Gruppen an, deren Indices von einem Blatte α zu einem Blatte μ überführen:

$$G_{\alpha\beta},\ G_{\beta\gamma}\ \ldots\ G_{\varkappa\lambda},\ G_{\lambda\mu},$$

so sehen wir, dass wir die Curve C immer so abändern können, dass zunächst die Gruppe $G_{\lambda\mu}$ in eine Gruppe $G_{\varkappa\mu}$ übergeht, dass dann in dieser $\varkappa$ wieder durch den nächst vorhergehenden Buchstaben ersetzt werden kann u. s. w.; und dass also endlich an Stelle von $G_{\lambda\mu}$ eine Gruppe $G_{\alpha\mu}$ tritt. Dies ist immer der Fall, sobald nur die Blätter α, μ durch eine Reihe von Gruppen verbunden erscheinen.

Hieraus kann man nun leicht den folgenden Satz ableiten:

An Stelle der Gruppen

$$G_{12},\ G_{13}\ \ldots\ G_{1n},\ G_{23},\ G_{24}\ \ldots\ G_{2n},\ \ldots\ G_{n-1,n}$$

kann man immer $n - 1$ Gruppen setzen, welche zusammen alle Verzweigungspunkte umfassen und welche gerade ausreichen, um alle Blätter unter einander zu verbinden. Die Art aber, in welcher die Blätter unter einander verbunden werden, ist ganz willkürlich und kann durch Aenderung der Curve C in jeder beliebigen Weise abgeändert werden.

Um diesen Satz zu beweisen, genügen folgende Betrachtungen.

In irgend einer beliebigen Anordnung seien die Blätter

$$i_1,\ i_2,\ i_3\ \ldots\ i_n.$$

Durch die Gruppen G ist jedenfalls eine Verbindung zwischen allen Blättern hergestellt, da sonst die Fläche zerfallen würde. Daher ist auch zunächst eine Verbindung zwischen den Blättern i_1 und i_2; und irgend eine Gruppe, welche den Index i_2 enthält, kann daher in $G_{i_1 i_2}$ übergeführt werden. Sodann besteht zweitens eine Verbindung dieser Blätter mit i_3; daher können wir irgend eine Gruppe, welche i_3 enthält, in eine Gruppe $G_{i_1 i_3}$ oder $G_{i_2 i_3}$ überführen, und zwar ist es ganz in unser Belieben gestellt, was von beiden eintreten soll. Indem wir so fortfahren, erzeugen wir ein System von Fundamentalgruppen. Sie verbinden die Blätter so, dass i_2 mit i_1, i_3 mit i_1 oder i_2, i_4 mit i_1, i_2 oder i_3 etc. zusammenhängt. Wir wollen diese $n-1$ Gruppen daher durch

$$\Gamma_1 = (i_1\, i_2),\ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} i_1 & \\ & i_3 \\ i_2 & \end{pmatrix},\ \Gamma_3 = \begin{pmatrix} i_1 & \\ i_2 & i_4 \\ i_3 & \end{pmatrix}, \ldots\ \Gamma_{n-1} = \begin{pmatrix} i_1 & \\ i_2 & i_n \\ \vdots & \\ i_{n-1} & \end{pmatrix}$$

bezeichnen.

Ausser diesen sind nun noch andre Gruppen vorhanden. Eine solche sei etwa $G_{\alpha\beta}$. Dabei ist β eine der Zahlen $i_1, i_2 \ldots i_n$, α eine andre. Kommen α, β in den Gruppen Γ vereinigt vor, so vereinigt sich $G_{\alpha\beta}$ nur mit der betreffenden Gruppe Γ. Kommt aber in den Γ β nicht mit α, sondern mit γ vereinigt vor, so kann man dem Obigen zufolge die Curve C immer so abändern, dass die Gruppe $G_{\alpha\beta}$ in eine Gruppe $G_{\gamma\beta}$ übergeht und dann sich mit einer der Gruppen Γ vereinigt. Die so erweiterten Gruppen Γ bleiben also allein übrig; sie umfassen alle Verzweigungspunkte, die Art und Weise aber, in welcher sie die Blätter verbinden, ist ganz willkürlich gewählt, wie der Satz es aussagt.

§ 5.

Kreis der möglichen Abänderungen bei Herstellung der typischen Gruppen.

Nach dem Bisherigen können also die Verzweigungspunkte in $n-1$ Gruppen Γ von solchen geordnet werden, welche nur immer dieselben zwei Blätter der Fläche verbinden; die Curve C ist dann so gelegen, dass sie zuerst alle Punkte der ersten, dann alle der zweiten Gruppe trifft etc. Auch ergab sich schon eine Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten, indem man die Curve C so abändern konnte, dass dieselben Gruppen immer andre Blätter verbanden, und dass auf solche Weise alle möglichen Combinationen hergestellt wurden, welche nur die Eigenschaft hatten, *alle* Blätter unter einander in Verbindung zu setzen.

Hierbei aber waren noch die in jeder Gruppe befindlichen Punkte und ihre Anzahlen immer dieselben. Um den eigentlichen Inhalt dieser Untersuchungen aber zu ergründen, muss man auch noch fragen, in wie weit diese Elemente wesentlich und unveränderlich sind. Bei näherer Betrachtung zeigt sich beides als ganz unwesentlich und durchaus veränderlich. Man kann nämlich folgenden Satz beweisen:

Theilt man die r Verzweigungspunkte ganz beliebig in

$$2\, r_1 + 2\, r_2 \ldots + 2\, r_{n-1} = r$$

Gruppen, wo r_1, r_2 ... beliebig gewählte, dieser Gleichung genügende *positive Zahlen sind, und in jede Gruppe beliebig gewählte Punkte fallen, so kann man immer eine Curve C so wählen, dass diese r_1, $r_2 \dots r_{n-1}$ Punkte Gruppen Γ_1, $\Gamma_2 \dots \Gamma_{n-1}$ bilden, welche eine beliebig festgesetzte Verbindung zwischen den n Blättern herstellen.*

Um diesen Satz, der den Sachverhalt in seiner allgemeinsten Weise darlegt, zu beweisen, muss man erstlich zeigen, dass man, ohne die Verbindung der Blätter zu ändern, die Anzahlen der in den Gruppen Γ_1, $\Gamma_2 \dots \Gamma_{n-1}$ bez. enthaltenen Punkte um gerade Zahlen beliebig ändern kann; zweitens, dass man, wenn die Anzahlen $2r_1$, $2r_2 \dots 2r_{n-1}$ der in den Gruppen enthaltenen Verzweigungspunkte festgehalten werden, diese selbst noch beliebig unter einander zu permutiren im Stande ist; endlich, dass bei gleichem Inhalt der Gruppen die Verbindung der Blätter noch beliebig abgeändert werden kann.

Ich werde zunächst zeigen, dass man, ohne den Inhalt der Gruppen zu ändern, die Verbindung der Blätter in beliebiger Weise modificiren kann:

Gehen wir von den Gruppen

$$\Gamma_1 = (i_1\, i_2),\ \Gamma_2 = \left(\begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix}\ i_3\right),\ \Gamma_3 = \left(\begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{matrix}\ i_4\right), \dots$$

aus, welche einer gewissen Folge

$$i_1,\ i_2 \dots i_n$$

entsprechen, in welcher die Blätter verbunden werden. Die unter einander stehenden Indices können nach den oben entwickelten Sätzen durch Abänderung der Curve C beliebig für einander substituirt werden. Es genügt daher als Typus dieser Verbindung etwa die folgende zu studiren:

$$\Gamma_1 = (i_1\, i_2),\ \Gamma_2 = (i_2\, i_3),\ \Gamma_3 = (i_3\, i_4), \dots,$$

und es ist nur zu zeigen, dass in dieser durch Abänderung der Curve C die Zahlen i beliebig permutirt werden können, ohne dass man den Inhalt der Gruppen ändert. Hierzu aber genügt, dass die Vertauschbarkeit zweier neben einander stehender Zahlen i nachgewiesen werde, da durch wiederholte Vertauschungen dieser Art jede Anordnung hervorgerufen werden kann. Seien also

$$h\ k\ l\ m$$

vier aufeinanderfolgende der Zahlen i; man hat die Gruppen

$$(hk),\ (kl),\ (lm);$$

und k, l komme nur in diesen vor. Nach den Sätzen von S. 223 kann man statt (hk), (kl) setzen (hl), (kl); ebenso statt (kl), (lm) setzen (kl), (km). Dann werden diese Gruppen also

$$(hl),\ (lk),\ (km),$$

d. h. k und l sind vertauscht, was zu beweisen war.

Es soll nun die Verbindung der Blätter in einer bestimmten Weise festgehalten und gezeigt werden, dass die Anzahlen der in jeder Gruppe enthaltenen Punkte beliebig um gerade Zahlen geändert werden kann. Es genügt hiezu, wenn man zeigt, wie, indem man den Typus

$$\Gamma_1 = (12), \quad \Gamma_2 = (23), \ldots$$

annimmt, zwei Punkte der einen Gruppe entnommen und der nächsten hinzugefügt werden können und umgekehrt. Man theilt also etwa Γ_1 in eine Gruppe Γ_1' und in ein Paar, welches eine Gruppe G_{12} bildet. Für diese kann man nach den Betrachtungen von S. 223 zunächst G_{13} setzen, da Punkte folgen, welche die Blätter 2, 3 verbinden, sodann aber G_{23}, da Punkte vorhergehen, welche 1, 2 verbinden. Die neue Gruppe G_{23} vereinigt sich also mit Γ_2 und erhöht die Zahl der Punkte dieser Gruppe. Umgekehrt kann man genau ebenso die Gruppe Γ_2 vermindern und Γ_1 vermehren. In beiden Fällen ist nur erforderlich, dass die verminderte Gruppe überhaupt noch bestehen bleibt, also mindestens noch 2 Punkte enthält.

Hierdurch ist also bewiesen, dass man wirklich die Zahlen der Verzweigungspunkte in den Gruppen abändern kann, nur so, dass sie immer gerade bleiben und dass keine von ihnen auf Null herabsinkt.

Halten wir endlich diese Zahlen fest und zeigen, dass die Verzweigungspunkte noch permutirt werden können. Dazu ist nur nachzuweisen, dass irgend ein Punkt b aus einer Gruppe Γ mit einem Punkte c der folgenden vertauscht werden könne. Denn die Punkte einer Gruppe sind, da sie dieselben Blätter verbinden, beliebig vertauschbar; tritt also Obiges noch hinzu, so ist jede Anordnung der Punkte möglich. Es seien also etwa a, b Punkte einer Gruppe Γ, c, d Punkte der folgenden; b und c sollen vertauscht werden. Man führt wie im Vorigen das Paar $a\,b$ in diese folgende Gruppe ein, wodurch die Zahl ihrer Punkte um 2 erhöht wird, und führt sodann rückwärts das Paar $a\,c$ in die vorhergehende Gruppe ein. Die Anzahlen sind dann wieder die alten, aber b, c sind vertauscht.

Hiermit ist das oben ausgesprochene Theorem vollständig bewiesen.

Fassen wir nun die Resultate der Untersuchung nochmals zusammen, so sehen wir, dass weder in der Anordnung der Verzweigungspunkte, noch in der Folge, in der die Blätter verbunden werden, etwas Specifisches liegt, noch endlich in der Zahl der Punkte, die bei gegebener Anordnung zu jeder einzelnen Verbindung gebraucht werden. Alle die Dinge kann man beliebig vorher bestimmen und dann doch noch immer eine Curve C angeben, welche, wenn alles dieses gegeben ist, die typische Verbindung herstellt. Um sie zu finden geht man nach dem Vorigen von einer beliebigen Anordnung aus und stellt die geforderte allmälig her. Die Curve C ist dann schliesslich nicht völlig der Lage nach bestimmt; aber zwei Curven C, welche denselben Bedingungen genügen, müssen dann immer so liegen, dass zwei entsprechende Curventheile sich zu *cyklischen Wegen* ergänzen, d. h. zu solchen geschlossenen Curven, deren einmalige Durchlaufung von einem beliebigen Werthsysteme s, z immer zu demselben wieder zurückführt.

§ 6.

Anwendung auf die linearen Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln eines Integrals erster Gattung.

Die im Vorigen entwickelten Verhältnisse dienen dazu, die Untersuchungen aufs Aeusserste zu vereinfachen, welche Hr. Gordan und ich im vierten Abschnitte unserer „Theorie der Abel'schen Functionen“ gegeben haben. Ich werde zeigen, wie mit Zugrundelegung der oben hergestellten typischen Anordnung jene Untersuchungen sich gestalten.

Seien also die Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_{n-1}$ in irgend einer Weise gebildet. Als Fundamentalschleifen, d. h. solche, welche gerade ausreichen, um alle Blätter mit einander zu verbinden, können wir je eine, etwa die erste aus jeder Gruppe betrachten. Die cyklischen Wege, aus denen alle andern sich zusammensetzen, erhalten wir, wenn wir jede andre Schleife mit der betreffenden Fundamentalschleife so combiniren, dass ein Durchlaufen beider immer zum Ausgangssysteme s, z zurückführt. Daher muss man alle Schleifen der ersten Gruppe mit der Fundamentalschleife der ersten Gruppe, alle der zweiten mit der Fundamentalschleife der zweiten verbinden etc.

Ein Integral erster Gattung giebt, wenn man es über einen cyklischen Weg integrirt, seinen entsprechenden Periodicitätsmodulus. Aus einer Gruppe Γ von 2ϱ Punkten erhält man also $2\varrho - 1$ Periodicitätsmoduln eines Integrals, indem man die als Fundamentalschleife ausgezeichnete Schleife der Gruppe mit den $2\varrho - 1$ übrigen combinirt.

Sind, wie oben, die Zahlen der in den einzelnen Gruppen auftretenden Verzweigungspunkte $2r_1, 2r_2 \ldots$, und also

$$2r_1 + 2r_2 \ldots + 2r_{n-1} = r,$$

so erhält man auf diese Weise

$$2r_1 + 2r_2 \ldots + 2r_{n-1} - (n-1) = r - (n-1)$$

Periodicitätsmoduln. Von diesen lassen sich noch $n-1$ durch die übrigen ausdrücken, und zwar wie folgt.

Man erhält im Allgemeinen diese Relationen, wenn man der Reihe nach mit $s_1, s_2 \ldots s_n$, beim Punkte z_0 beginnend, über alle Schleifen integrirt. Dies giebt n Relationen der über die Schleifen genommenen

Integrale; Relationen, welche sich in ebenso viele für Periodicitätsmoduln überführen lassen, von welchen aber immer eine die Folge der übrigen ist.

Nun kommen bei der gegenwärtigen Anordnung nur $n-1$ Arten von Schleifen vor, deren jede zwei Blätter verbindet. Daher muss von den Indices $1, 2 \ldots n$ der Blätter nothwendig mindestens *einer* nur bei einer Gruppe Γ vorkommen. Beginnen wir mit dem entsprechenden s_i und integriren über alle Schleifen, so können nur die etwas von Null Verschiedenes geben, welche der betreffenden Gruppe zugehören; denn s_i kommt weder bei einer frühern, noch bei einer spätern Gruppe vor, die Integration aber über alle Schleifen dieser einen Gruppe geführt, beginnt und endigt mit s_i. Daher muss die Summe der über diese Schleifen genommenen Integrale gleich Null sein.

Bei allen andern Umgängen tritt diese Gruppe entweder gar nicht auf, oder mit der Summe eben dieser Integrale; da diese Summe aber Null ist, so hat diese Gruppe auf alle andern Umgänge überhaupt keinen Einfluss.

Wir können sie also im Uebrigen auslassen und haben dann noch $n-2$ Gruppen, deren keine mehr sich auf das i^{te} Blatt bezieht, die also zusammen $n-1$ Indices haben, unter denen i nicht vorkommt. Unter den von i verschiedenen Zahlen muss also wieder mindestens eine sein, die nur bei *einer* Gruppe vorkommt. An diese eine Gruppe lassen sich dann genau dieselben Betrachtungen wieder knüpfen.

Man gelangt, so fortfahrend, endlich zu folgendem Satze:

Ein Integral erster Gattung, über alle Schleifen einer Gruppe geführt, giebt jederzeit Null.

Dies ist die einfache Art, wie die Beziehungen zwischen den über die Schleifen geführten Integrale sich hier ausdrücken.

Bezeichnen wir die Werthe eines Integrals erster Gattung, über die Schleifen einer Gruppe geführt, durch $a_1, a_2 \ldots a_{2\varrho}$, und zwar so, dass jedes dieser Integrale mit demselben Werthe s_i beginne. Dann ist die dieser Gruppe entsprechende Gleichung:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots + a_{2\varrho-1} - a_{2\varrho} = 0.$$

Die entsprechenden Periodicitätsmoduln erhält man, wenn man eines dieser Integrale, etwa $a_{2\varrho}$, von allen andern abzieht. Zwischen den Periodicitätsmoduln

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - a_{2\varrho}, \\ b_2 &= a_2 - a_{2\varrho}, \\ &\ldots \\ b_{2\varrho-1} &= a_{2\varrho-1} - a_{2\varrho} \end{aligned}$$

erhält man also aus obiger Gleichung die Beziehung:

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \cdots + b_{2\varrho-1} = 0.$$

Die Gleichung repräsentirt die $n-1$ gesuchten Beziehungen; vermöge derselben wird immer *ein* Periodicitätsmodul jeder Gruppe durch die übrigen linear und ganzzahlig ausgedrückt.

§ 7.

Anwendung auf die bilinearen Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln zweier Integrale erster Gattung. Zurückführung auf das Schema der hyperelliptischen Functionen.

Es handelt sich nun ferner um die Ermittelung *der bilinearen Beziehung, welche zwischen den Periodicitätsmoduln zweier verschiedener Integrale erster Gattung besteht.* Seien u, v diese Integrale, von z_0 aus mit einem der Werthe s_i beginnend, bis zu einem unbestimmten Werthsysteme s, z ausgedehnt. Zerschneiden wir die Blätter der Riemann'schen Fläche durch die Curven k, welche den beliebig gewählten Ausgangspunkt mit den Verzweigungspunkten verbinden, und betrachten wir die äussern und innern Ränder dieser Curve als Begrenzungen, so ist $\int u\,dv$ endlich, stetig und eindeutig in jedem einzelnen der Blätter, die Verzweigungspunkte (also Punkte der Begrenzung) ausgenommen. Integrirt man also $\int u\,dv$ in irgend einem der Blätter auf einem Wege, welcher neben der ganzen Begrenzung hinläuft, also über alle Schleifen, so erhält man Null. Die gesuchte Beziehung ergiebt sich, wenn man dasselbe für alle Blätter ausführt und die Summe aller so gebildeten Integrale gleich Null setzt:

$$(1) \quad \ldots \quad \Sigma \int u\,dv = 0,$$

wo die Summe sich auf die n Blätter beziehen mag. Man kann andrerseits die linke Seite der Gleichung (1) aus den $n \cdot r$ Theilen zusammensetzen, welche den einzelnen Schleifen in den verschiedenen Blättern entsprechen; dabei ist dann jede Schleife fortzulassen, wo sie nicht wirklich von einem Werthe s_i zu einem andern führt, und jede Schleife wird also nur zweimal, und zwar in entgegengesetztem Sinne, so durchlaufen, dass sie zu berücksichtigen ist.

Nun ist aber der Werth von u, nachdem man alle Schleifen einer Gruppe durchlaufen hat, nach dem Vorigen gleich Null. Beim Durchlaufen der Schleife einer spätern Gruppe hat also das Durchlaufen der frühern Gruppen auf den Werth keinen Einfluss. Man kann also die linke Seite von (1) so bilden, dass jede Gruppe unabhängig von der andern durchlaufen wird, d. h. man zerlegt sie in $n-1$ den Gruppen entsprechende Theile und behandelt jeden Theil so, als wären überhaupt nur die beiden entsprechend verbundenen Blätter vorhanden — mit andern Worten, als wären es *hyperelliptische* Functionen, mit denen man zu thun hat.

Die gesuchte Gleichung geht daher über in

$$P_1 + P_2 + \cdots P_{n-1} = 0,$$

wo die einzelnen Ausdrücke P_i gebildet sind, als wären die zu der entsprechenden Gruppe gehörigen Punkte w die Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals.

Insbesondre führt dies darauf, unter den möglichen Gruppenbildungen *eine* zu bevorzugen, bei welcher die erste Gruppe aus $r - 2(n-2)$ Verzweigungspunkten besteht, alle übrigen nur aus zweien derselben. In diesem Falle zeigt das Vorige, dass die Periodicitätsmoduln, welche den letztern Gruppen entsprechen, durch die einfache Bedingung $b_1 = 0$ gegeben sind, also verschwinden. Mithin haben wir es überhaupt nur noch mit den $r - 2(n-1) = 2p$ Periodicitätsmoduln zu thun, welche von der Verbindung der ersten beiden Blätter herrühren, und die ganze Untersuchung ist auf die längst bekannte Behandlung der hyperelliptischen Functionen zurückgeführt.

Ich bemerke noch, dass durch die vorliegende Betrachtung auch die volle Berechtigung des Beispiels nachgewiesen ist, von welchem Hr. Gordan und ich als Schema im vierten Abschnitte unserer Theorie der Abel'schen Functionen Gebrauch gemacht haben. Denn jenes Schema (es bezieht sich auf eine vierblättrige Fläche mit 12 Verzweigungspunkten, der Gleichung einer allgemeinen Curve vierter O. entsprechend) lässt sich auf den oben entwickelten Normaltypus für die Gruppen einer vierblättrigen Fläche zurückführen, mithin lässt sich auch umgekehrt immer jenes Schema aus diesem Typus erzeugen.

Göttingen, 8. September 1872.