Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1874
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0007
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0006
LOG Titel: Periodical issue
LOG Typ: issue

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch.

Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen

von einigen seiner Freunde.

Als vorigen Spätherbst ein zu früher Tod den verewigten Clebsch der Wissenschaft entriss, vereinigten sich im Gefühle des gemeinsamen Verlustes eine Reihe seiner Freunde und ehemaligen Schüler (Brill, Gordan, Klein, Lüroth, A. Mayer, Nöther, Von der Mühll), um der Verehrung, die sie dem Dahingeschiedenen widmeten, einen Ausdruck in einer grösseren wissenschaftlichen Biographie zu geben. Wohl erschien es schwierig, bei einem Manne, dessen Thätigkeit wesentlich dem letzten Jahrzehnte angehört und der mit ungewöhnlicher Vielseitigkeit in den verschiedensten Theilen der Wissenschaft gearbeitet hat, schon jetzt ein solches Unternehmen zu versuchen. Aber eben hierin erblickten wir ein erhöhtes Interesse, eine doppelte Wichtigkeit desselben: es galt nicht nur, die Arbeiten des einzelnen Forschers in ihrer Aufeinanderfolge zu schildern, es galt vielmehr auch, wissenschaftliche Bestrebungen Anderer in vergleichendem Ueberblicke zu charakterisiren und einen grossen Theil der Fragen zu bezeichnen, mit denen sich die Mathematiker der Gegenwart beschäftigen. Und wenn der Einzelne, bei der Beschränkung, die jeder subjectiven Anschauung anhaftet, es kaum wagen wird, eine solche Aufgabe in Angriff zu nehmen, so glaubten wir der hieraus fliessenden Schwierigkeit durch unsere Vereinigung einigermassen begegnen zu können.

Eine kürzere, auch in diese Annalen (Bd. VI. 2) aufgenommene Notiz über Clebsch erschien bereits in den Göttinger Nachrichten (Dec. 1872). Als ursprünglich für einen weiteren Leserkreis entworfen, bringt dieselbe wesentlich biographisches Material; ihre fachwissenschaftlichen Partieen sind mehr allgemein gehalten. Dem gegenüber wenden sich die nachstehenden Auseinandersetzungen an den engeren Kreis eigentlicher Mathematiker; sie beschränken sich durchaus auf speciell wissenschaftliche Erörterungen und mögen also in jener Notiz nach verschiedenen Seiten eine Ergänzung finden.

Man kann die mannigfachen Arbeiten, mit denen sich Clebsch beschäftigt hat, nach Inhalt und Aufeinanderfolge in 6 Gruppen bringen. Die ersten Untersuchungen Clebsch's beziehen sich auf Gegenstände der mathematischen Physik; er wendet sich sodann zu Problemen der Variationsrechnung und der Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Es folgen weiter seine ersten geometrischen Arbeiten, welche allgemeine Curven- und Flächentheorie betreffen. An sie schliesst sich eine Periode, die durch das Studium der Abel'schen Functionen und ihre Verwerthung in der Geometrie charakterisirt ist. Die letzten Jahre endlich sind durch gleichzeitige Arbeiten über Flächenabbildung und Invariantentheorie bezeichnet.

Wir haben die hiemit geschilderte Trennung des uns vorliegenden Stoffes zur Grundlage für unser Zusammenarbeiten gemacht, indem jede der genannten Gruppen von einem von uns (und zwar bez. von Von der Mühll, Mayer, Lüroth, Brill, Nöther, Gordan) übernommen und hernach die Reihe der so entstandenen Einzelreferate (durch Klein) zu einem Ganzen verbunden wurde. Freilich hat so unsere Arbeit nicht denjenigen Grad von Gleichmässigkeit erhalten können, den man vielleicht wünschen mag. Auch glaubten wir auf absolute Vollständigkeit unseres Berichtes verzichten zu sollen, da die Besprechung mancher Arbeit, die ein einzelnes Problem betrifft, den Zusammenhang des Ganzen zu sehr unterbrochen haben würde. — Möge es uns gelungen sein, von dem Wirken und Forschen des theuren Dahingeschiedenen ein anschauliches Bild entworfen und dazu beigetragen zu haben, dass ein Verständniss für die von ihm verfolgten wissenschaftlichen Ziele in immer weiteren Kreisen erwachse!

Im Juli 1873.

Ueberblickt man die Entwickelung der Mathematik, insbesondere der deutschen Mathematik, in den letzten Jahrzehnten, so wird man, ganz im Allgemeinen, zwei Gruppen zusammengehöriger Arbeiten unterscheiden: auf die eine Seite wird man die Untersuchungen aus dem Gebiete der Functionentheorie, der Zahlentheorie, der mathematischen Physik stellen, auf die andere Seite die neuere Geometrie und Algebra. Diese Trennung ist nicht nur eine äusserliche, durch die Verschiedenheit des Gegenstandes begründete. Es hat sich vielmehr in den verschiedenen Disciplinen die mathematische Denkweise selbst nach verschiedenen Richtungen ausgebildet: auf der einen Seite concentrirt sich die Forschung auf möglichst exacte Umgrenzung der einzuführenden Begriffe, auf der andern Seite geht man von einem kleineren Kreise bereits erkannter Grundbegriffe aus und richtet sein Augenmerk auf die Beziehungen und Folgerungen, welche aus ihnen hervorsprossen.

Die erstgenannte Richtung ist in Deutschland wesentlich auf Dirichlet und in weiterer Instanz auf Gauss zurückzuführen, die andere erwuchs einerseits aus den analytischen Arbeiten Jacobi's, andererseits aus den Ergebnissen der neueren geometrischen Speculation.

Clebsch gehörte seiner ganzen Beanlagung nach durchaus der zweiten Richtung an und muss um so mehr als deren Hauptvertreter im letzten Jahrzehnte unter den deutschen Mathematikern betrachtet werden, als er durch seine vielfältigen persönlichen Beziehungen wie durch seine eminente Lehrthätigkeit in den weitesten Kreisen fördernd und anregend für dieselbe gewirkt hat. Und doch hat er in gewissem Sinne dazu beigetragen, dass eine Vereinigung der beiderlei Richtungen in Zukunft möglich scheint: denn indem er seine Untersuchungen auf immer weitere Gebiete der Wissenschaft erstreckte, hat er die Gegenstände, mit denen sich die Mathematiker der einen oder der andern Richtung beschäftigen, in hohem Masse genähert.

Clebsch war in erster Linie Algebraiker, und allen seinen Arbeiten gemeinsam ist die vollendete Beherrschung des algebraischen Apparates. Ihr zur Seite stellt sich in den späteren Untersuchungen die klare geometrische Auffassung, vermöge deren jeder Schritt, den die Rechnung vollführt, zu einem anschaulichen Verständnisse gebracht wird. Aber es ist nicht die concrete Art, die räumlichen Verhältnisse zu sehen, wie wir sie bei manchen anderen Geometern finden; die geometrische Anschauung ist ihm mehr Symbol und Orientirungsmittel für die algebraischen Probleme, mit denen er sich beschäftigt. Immerhin wird Clebsch, gegenüber den verschiedenartigen Bestrebungen, deren sich andre Geometer der neueren Zeit beflissen haben, durch das Zusammengehen der algebraischen und der geometrischen Auffassung zu charakterisiren sein, und man wird unter seinen Leistungen diejenigen obenan stellen, in denen er vermöge dieser doppelten Begabung bis dahin gesonderte Disciplinen in ihrem gemeinsamen Grunde erfasste.

Freilich war zu solchen Arbeiten nur eine Natur befähigt, die gleich ihm unter der Menge der Einzelheiten die grossen treibenden Gedanken hervorzuziehen wusste. Wir berühren hiermit eine andere wesentliche Seite seiner mathematischen Denkweise, die sich bei manchen Vertretern der algebraisch-gometrischen Richtung, z. B. bei Jacobi, ebenfalls zeigt, die aber durchaus nicht an die Beschäftigung mit Algebra und Geometrie nothwendig geknüpft ist. Vom Einzelnen ausgehend, erfasst Clebsch allgemeine Methoden, und diese sind es, die ihn weiter führen, die seinen Arbeiten ein einheitliches, systematisches Gepräge ertheilen. Die apriorische Fragestellung nicht nur in der mehr philosophischen Form, sondern überhaupt die Concentration auf ein von vornherein gegebenes Problem tritt verhältnissmässig zurück; der mathematische Gedanke entspringt in freier organischer Entwickelung aus der Methode.

In voller Deutlichkeit spiegelt sich diese Art in der mehr analysirenden als deducirenden Darstellungsweise wieder, deren sich Clebsch in seinen Arbeiten bedient, deren durchsichtige Form nicht nur die Ueberzeugung von der Richtigkeit einer Behauptung, sondern das Bewusstsein einer klar erkannten Wahrheit vermittelt. Clebsch wurde dabei, wenn ein solcher Ausdruck gestattet ist, geradezu von einem künstlerischen Tacte geleitet: das Streben nach harmonischer Abrundung des Stoffes ist für die Richtung seiner Untersuchungen wie die Gestalt seiner Abhandlungen von der grössten Bedeutung gewesen.

Aber nicht minder erblicken wir darin einen hauptsächlichen Grund für den ausserordentlichen Erfolg seiner Lehrthätigkeit. Indem der Zuhörer geradezu ein ästhetisches Interesse empfand, den Vorträgen von Clebsch zu folgen, wurde ihm das Eindringen in die Grundanschauungen des Lehrers möglichst erleichtert. Doch ungerecht wäre es, an dieser Stelle nicht auch der liebenswürdigen Art und Weise zu gedenken, mit der Clebsch im persönlichen Verkehr von seinen Gedanken reich und unbegrenzt mittheilte. Der wissenschaftliche Austausch war für ihn selbst in hohem Grade Bedürfniss; indem er, in voller Würdigung fremder Gedanken, ebensogern empfing als gab, wusste er sich durch ihn die ungewöhnliche geistige Regsamkeit zu erhalten, vermöge deren das Gebiet seiner mathematischen Thätigkeit kein abgeschlossenes war, sondern immer umfassenderen Erweiterungen zustrebte.

Die ersten Arbeiten von Clebsch datiren aus der Mitte der fünfziger Jahre. Sie betreffen, im Gegensatze zu den späteren Arbeiten, meist einzelne Probleme, die er mit grosser Geschicklichkeit zu behandeln und zum Abschluss zu führen weiss. Man wird sie, insofern sich in ihnen die Eigenart von Clebsch noch weniger ausspricht, wesentlich als Vorstudien zu betrachten haben. Die glänzende Reihe seiner algebraisch-geometrischen Untersuchungen, die alle auseinander in innerem Zusammenhange erwachsen, und in denen Clebsch je länger um so bewusster dazu übergeht, der Wissenschaft neue Bahnen vorzuzeichnen, beginnen erst mit dem Jahre 1860. Wenn man bedenkt, wie kurz der Zeitraum ist, in welchem alle diese Arbeiten entstanden sind, wenn man in ihnen eine fortschreitende Entwickelung wahrnimmt, die wohl noch lange nicht ihren Höhepunkt erreicht hatte, so wird man doppelt schwer den Verlust empfinden, den die Wissenschaft durch den zu frühen Tod von Clebsch erlitten hat.

Clebsch hat den Grund zu seiner mathematischen Ausbildung auf der Universität seiner Vaterstadt Königsberg gelegt, die er von 1850—54 besuchte. Ein passenderer Ort für die Entwickelung eines mathematischen Talentes konnte damals wohl kaum gefunden werden. Denn gerade in Königsberg waren zu jener Zeit durch die Vereinigung von Hesse, Neumann und Richelot die mathematischen Fächer eben so vielseitig als glänzend vertreten. Wenn Clebsch durch Neumann's Vorlesungen in die damals noch weniger verbreiteten Vorstellungen der mathematischen Physik eingeführt wurde, wenn er andererseits durch Richelot's unermüdliche und mannigfaltige Lehrthätigkeit eine genaue Kenntniss der Analysis in ihrem damaligen Zustande gewann, so ist doch eigentlich Hesse für ihn von der nachhaltigsten Bedeutung geworden, indem ihn derselbe mit den neueren algebraisch - geometrischen Untersuchungen bekannt machte.

Die ersten Arbeiten, welche Clebsch unternahm, betreffen Probleme der mathematischen Physik, insbesondere der Elasticität und der Hydrodynamik. Veranlassung zur Wahl dieser Gegenstände waren ihm zunächst Neumann's Vorlesungen gewesen, aber er blieb auch später durch seine Stellung am Carlsruher Polytechnicum, an welchem er 1858—63 die Professur für theoretische Mechanik bekleidete, längere Zeit auf ähnliche Fragen hingewiesen. Clebsch ist in diesen Arbeiten übrigens nicht eigentlich Physiker. Die physikalische, überhaupt die naturwissenschaftliche Auffassung lag ihm, bei allen Kenntnissen, die er im Einzelnen besass, verhältnissmässig fern und interessirte ihn nicht besonders. Nur in seiner ersten Arbeit, seiner Inauguraldissertation: „Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit" (Königsberg 1854, vergl. Crelle's Journal Bd. 52), sowie später noch einmal in einer Untersuchung über Circularpolarisation (Crelles Journal Bd. 57) findet sich bei ihm eine Vergleichung der abgeleiteten Resultate mit dem Experimente. Ihn interessirte vielmehr die mathematische Fragestellung, insofern sie geschickte analytische Behandlung verlangte: er gehörte, auch hierin Jacobi ähnlich, der rein mathematischen Richtung an, welche den abstracten Gedanken um seiner selbst willen verfolgt. Es war daher natürlich, dass er sich allmählich von den physikalischen Problemen zu rein mathematischen Fragen hinwandte.

Eine grössere Reihe von Abhandlungen, die sich auf hydrodynamische und auf optische Probleme beziehen, enthält das Borchardt'sche Journal (vergl. die am Schlusse zugefügte Liste der Publicationen). Das Verdienst dieser Untersuchungen liegt wohl weniger in den durch sie erzielten Resultaten, so schätzbar manche derselben sind, als in der eleganten Handhabung des analytischen Apparates; aber eben deswegen lässt sich, ohne Eingehen auf Einzelheiten, nicht genauer von ihnen berichten. Gewissermassen als Abschluss dieser Periode der mathematisch-physikalischen Forschung veröffentlichte Clebsch 1862 (Leipzig, B. G. Teubner) sein Lehrbuch der Elasticität. Hatte Lamé's bekanntes Werk ein hohes Verdienst um die Ableitung und Umformung der allgemeinen elastischen Gleichungen und um die Anwendung derselben auf das Problem der doppelten Strahlenbrechung gehabt, so gab Clebsch im Wesentlichen eine musterhafte Darstellung des sogenannten de St. Venant'schen Problems. Neu ist dabei die Umkehrung desselben. De St. Venant hatte sich mit dem Falle eines Stabes beschäftigt, auf dessen Seitenflächen keine Kräfte wirken, und gezeigt, dass man die Probleme der Biegung und der Torsion lösen kann, wenn die auf die Endflächen wirkenden Kräfte nach einem bestimmten Gesetze über dieselben vertheilt sind. Clebsch zeigt nun, dass unter entsprechenden Voraussetzungen auch der umgekehrte Fall lösbar ist, wo auf die Seitenflächen Kräfte wirken, dagegen keine auf die Endflächen. Liefern jene Betrachtungen eine angenäherte Lösung für den Fall eines Stabes, an dessen Enden Kräfte wirken, so führen diese zu einer annähernden Lösung für den Fall einer Platte, deren Rand von Kräften angegriffen wird. Clebsch entwickelte dann weiter, dass die gemachten Voraussetzungen in dem Falle eines sehr dünnen Stabes und ebenso in dem Falle einer sehr dünnen Platte für die Elemente zutreffen, in welche man diese Körper nach Kirchhoff zerlegen muss, um richtige Gleichungen zu erhalten, und leitet so die zuerst von Kirchhoff gegebenen Endgleichungen für die beiden Fälle ab.

Mit seiner ersten rein mathematischen Arbeit knüpft Clebsch an Untersuchungen von Hesse und von Jacobi an. Clebsch hat Jacobi nicht persönlich gekannt, aber er hat dessen Werke mit Vorliebe studirt und sich später geradezu gelegentlich als Schüler desselben bezeichnet. Es sind von Jacobi hinterlassene Probleme, die Clebsch in den nun zu besprechenden Arbeiten aufgreift; und wenn der Ideenkreis, in welchem sich diese Untersuchungen bewegen, durchaus der Jacobi'sche ist, so gehen dieselben, was einzelne Leistungen betrifft, über das von jenem Erreichte doch weit hinaus.

Die Aufgabe, eine oder mehrere unbekannte Functionen so zu bestimmen, dass ein Integral, welches diese Functionen nebst ihren Differentialquotienten auf eine gegebene Weise enthält, einen grössten oder kleinsten Werth erreiche, verlangt zunächst, dass die erste Variation des Integrals zum Verschwinden gebracht wird, und aus dieser Bedingung erhält man die Differentialgleichungen, durch deren Integration sich die unbekannten Functionen bestimmen. Damit aber ein wirkliches Maximum oder Minimum eintritt, muss überdiess für die hierdurch erhaltenen Functionen die zweite Variation ein unabänderliches Vorzeichen besitzen. Hieraus entspringt die andere Aufgabe, die zweite Variation auf eine zur Untersuchung ihres Zeichens geeignete Form zu bringen. Diese Aufgabe führt ihrerseits auf neue Differentialgleichungen, die auf den ersten Blick von so complicirtem Charakter scheinen, dass ihre Integration selbst den Bemühungen von Lagrange widerstand. Es war daher eine ausserordentliche Entdeckung Jacobi's, dass die Integration der Differentialgleichungen der zweiten Variation unmittelbar aus der Integration der Differentialgleichungen der ersten Variation abgeleitet werden kann (Crelle's J. Bd. 17, 1837). Aber Jacobi hatte nur den einfachsten Fall eines einfachen Integrals mit einer unbekannten Function untersucht, und wenn man bedenkt, wie viel Anstrengungen es kostete, bis nur Jacobi's Angaben vollständig bewiesen waren, was erst durch Hesse's Arbeit (Borch. J. Bd. 54, 1857) geschah, so durfte man wohl kaum erwarten, dass es gelingen werde, auch in der Complication der allgemeineren Fälle den Jacobi'schen Satz wiederzufinden. Trotzdem unternahm Clebsch, bald nach dem Erscheinen der Hesse'schen Arbeit, die allgemeine Untersuchung der zweiten Variation (Borch. J. Bd. 55, Nov. 1857, Febr. 1858, Bd. 56, Juni 1858),*) und indem er

*) Das den Citaten hier und im Folgenden beigesetzte Datum bezeichnet, wenn nicht ausdrücklich ein Anderes bemerkt wird, die von dem Autor angegebene Zeit des Abschlusses der Arbeit.

durch einen sinnreichen Gedanken die Aufgaben der Variationsrechnung zunächst auf solche Probleme des relativen Maximums oder Minimums zurückführte, in denen nur erste Differentialquotienten auftreten, gelang es ihm, nicht blos für einfache, sondern auch für vielfache Integrale zu zeigen, dass für die Reduction der zweiten Variation neue Integrationen nicht erforderlich sind *).

Bei dieser Reduction tritt im Falle eines einfachen Integrals der merkwürdige Umstand ein, dass man ein Endresultat mit scheinbar mehr willkürlichen Constanten erhält, als nach der Theorie darin vorkommen können. Diese Constanten sind überdies durch gewisse Bedingungsgleichungen verbunden und müssen so bestimmt werden, dass der Nenner der Reduction innerhalb der Grenzen des Integrals nicht verschwindet. Wenn es daher eine oft versuchte Aufgabe war (die in den einfachsten Fällen von Eisenlohr, Spitzer und Hesse gelöst wurde), nachzuweisen, dass diese Constanten sich auf eine vorgeschriebene kleinere Anzahl reduciren lassen, so ist es doch auf der anderen Seite noch ungleich wichtiger, die ursprünglichen Constanten durch solche Functionen von neuen unabhängigen Constanten auszudrücken, welche jene Bedingungsgleichungen identisch erfüllen.

Von beiden Aufgaben enthalten die Arbeiten von Clebsch die erste vollständige Lösung (vergl. Borch. J. Bd. 55, Febr. 1858) **). Und bedeutsamer noch als das Resultat ist der Weg, auf dem diese Lösung erhalten wird. Er bringt den Beweis und die Erweiterung einer anderen fundamentalen Bemerkung, die Jacobi a. a. O. macht, den Nachweis nämlich, dass sich die Differentialgleichungen eines jeden isoperimetrischen Problems, in welchem nur eine unabhängige Variable auftritt, zurückführen lassen auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung ***), wodurch der Variationsrechnung dieselben Methoden zugänglich werden, die Hamilton und Jacobi der Dynamik eröffnet haben.

Bald nach diesen Arbeiten begann Clebsch sich geometrischen Problemen zuzuwenden. Er ist aber später noch wiederholt (1860—62,

---

*) In etwas kürzerer Weise wurde dieselbe Reduction unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen später durch Lipschitz erreicht (Borch. J. Bd. 65). Die wirkliche Herstellung der Kriterien für ein Maximum oder Minimum gab auf Grund der Clebsch'schen Arbeit Mayer in seiner Habilitationsschrift (Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig 1866), vergl. auch Mayer's Abhandlung in Borch. J. Bd. 69.

**) Eine directere Lösung der ersten Aufgabe wurde später im Anschlusse an Clebsch von Mayer gegeben (in der bereits genannten Schrift); ebenso, unabhängig von Clebsch, durch Stern (Göttinger Abhandl. Bd. 13, 1867).

***) In den erst später (1866) veröffentlichten Vorlesungen Jacobi's über Dynamik findet man allerdings diesen Satz ebenso allgemein ausgesprochen, doch wird er dort immerhin nur für specielle Fälle bewiesen.

1865) dazu gekommen, eine Reihe von Problemen, die Jacobi hinterlassen hatte, aufzunehmen. Er wurde dazu zunächst durch den Umstand veranlasst, dass er die Herausgabe einiger Theile des Jacobi'schen Nachlasses, sowie der Jacobi'schen Vorlesungen über Dynamik (erschienen 1866) übernommen hatte. Bei der nahen Beziehung, in der diese Arbeiten Clebsch's zu den oben besprochenen stehen, mag derselben gleich hier gedacht werden. Wie bei den Untersuchungen über Variationsrechnung ist auch bei diesen hauptsächlich die Geschicklichkeit in der Ueberwindung technischer Schwierigkeiten hervorzuheben; es ist ferner die für so complicirte Verhältnisse ganz ungewöhnliche Klarheit der Exposition zu betonen.

Man wusste aus einer Andeutung Jacobi's (Crelle's J. Bd. 29, p. 253), dass das Verfahren, durch welches man früher das Pfaff'sche Problem zu behandeln pflegte, hinsichtlich der Zahl der erforderlichen Integrationen vervollkommnet werden konnte; auch lag es nicht fern, zu vermuthen, dass hier eine Methode existiren müsse, die derjenigen analog ist, durch welche Jacobi die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung so wesentlich gefördert hatte.*) Die Schwierigkeit der Aufgabe lag in der sehr viel grösseren Complication der Vorgänge und Operationen, welche nothwendig werden. Aber Clebsch überwand alle diese Hindernisse (Borch. J. Bd. 60. dat. Sept. 1860, publ. 1862, Bd. 61. dat. Jan. 1861, publ. 1862), und indem er das Problem auf Systeme gleichzeitiger linearer partieller Differentialgleichungen zurückführte, die unabhängig von einander und ohne jede Integration aufgestellt werden können, gewann er demselben einen neuen Gesichtspunkt ab, der sich bald als fundamental erwies und voraussichtlich auch für alle künftigen Untersuchungen über das Pfaff'sche Problem die Grundlage bilden wird.

Hierbei trat eine Schwierigkeit auf. Die einzelnen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen, von deren Integration die Lösung des Pfaff'schen Problems abhängt, haben nämlich nicht unmittelbar diejenige Form, die Jacobi in seiner Nova Methodus zu integriren gelehrt hat, und in Folge dessen ist auch die Jacobi'sche Methode nicht ohne Weiteres auf dieselben anzuwenden. Es entstand also die Aufgabe, überhaupt die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen einer Untersuchung zu unterwerfen**). Clebsch

*) In der That hat Natani schon vor Clebsch die von Jacobi vorhergesehene Reduction der Anzahl von Integrationen im Pfaff'schen Probleme wirklich erzielt (Borch. J. Bd. 58. dat. Januar 1860. publ. 1861). Seine Methode und die von Clebsch sind indess trotz ihrer Uebereinstimmung betr. die Zahl der nothwendigen Integrationen noch nicht in Verbindung gebracht worden.

**) Mit Untersuchungen über die simultane Integration mehrerer partieller Differentialgleichungen hat sich, ohne jedoch speciell auf lineare einzugehen, schon wurde erst einige Jahre später (1865) veranlasst, das Problem in diesem Sinne weiter zu führen. Ihn beschäftigten damals die linearen partiellen Differentialgleichungen, denen die Invarianten algebraischer Formen genügen, wovon wir weiter unten noch zu berichten haben. Andererseits hatte er eine Arbeit von Weiler kennen gelernt, in welcher derselbe (vergl. Schlömilch's Zeitschrift. 1863.) die Zahl der Integrationen, welche nach der Jacobi'schen Methode bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu leisten sind, beträchtlich erniedrigt hatte. Der Untersuchung von Clebsch (Borch. J. Bd. 65) verdankt man wiederum zwei wichtige Resultate. Einmal den Satz, dass jedes System linearer partieller Differentialgleichungen, das überhaupt gemeinsame Lösungen zulässt, auf die Jacobi'sche Form gebracht werden kann, wodurch zur Lösung aller Probleme, die auf solche partielle Differentialgleichungen führen, eine gemeinsame Methode gewonnen ist. Sodann im Anschlusse an die Weiler'sche Untersuchung den Nachweis, dass die Zahl der erforderlichen Integrationen sowohl bei der eigentlichen Jacobi'schen Integrationsmethode als bei deren Ausdehnung auf das Pfaff'sche Problem um ein Bedeutendes reducirt werden kann. Neueren Arbeiten war es vorbehalten, zu zeigen, dass sich auch die Zahl der Integrationen, welche bei der Clebsch-Weiler'schen Methode erfordert werden, noch beträchlich verringern lässt (vergl. Aufsätze von Lie und Mayer in den Gött. Nachrichten 1872, sowie in Math. Ann. Bd. 5 und 6), wie denn überhaupt die hier einschlägigen Theorien in der allerletzten Zeit einer wesentlichen Entwickelung entgegen zu gehen scheinen. —

Die geometrisch-algebraischen Arbeiten von Clebsch beginnen mit dem Jahre 1860. Die nächste Veranlassung dazu, sich mit geometrischen Problemen zu beschäftigen, hatte ihm, wie er selbst angiebt, das Studium der Salmon'schen Werke geboten, die in ihrer bekannten Reichhaltigkeit für jeden Leser des Anregenden die Fülle enthalten. Auch mag der wissenschaftliche Austausch, wie ihn Clebsch bei mehreren seiner Carlsruher Collegen fand, von bestimmendem Einflusse gewesen sein: wie denn Clebsch später mit Vorliebe erzählte, dass er damals durch Schell die neuere synthetische Geometrie habe kennen lernen. Die analytisch-geometrische Grundlage für seine nun

---

vor Clebsch ganz allgemein Bour beschäftigt, dessen Resultate jedoch einer exacteren Formulirung bedürfen (vergl. einen Aufsatz von Mayer, Math. Ann. Bd. 4). Andererseits sind die im Texte noch zu nennenden linearen partiellen Differentialgleichungen der Invariantentheorie bereits 1856 von Cayley hinsichtlich ihrer simultanen Integration untersucht worden (A second Memoir upon Quantics. Phil. Transactions 146). Cayley's Betrachtungen sind mit denen, die Clebsch anstellt, nahe verwandt; er hebt aber nicht die allgemeine Bedeutung hervor, welche dieselben für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen besitzen.

beginnende Thätigkeit hatte Clebsch, wie schon angedeutet, während seiner Universitätszeit in den Vorlesungen von Hesse gewonnen, auf dessen Untersuchungen er ja auch bei früheren Gelegenheiten (Reduction der zweiten Variation) geradezu weiter gearbeitet hatte.

Wollen wir für die Stellung, welche Clebsch in der Wissenschaft fortan einnahm, ein Verständniss gewinnen, so wird es nöthig, auf die Entwickelung der Geometrie in den letzten Jahrzehnten überhaupt zurückzugehen.

Es sind hauptsächlich zwei Richtungen geometrischer Forschung, die in dieser Zeit ihre Ausbildung gefunden haben, und diese gehen in mancher Beziehung mit der allgemeinen Zweitheilung mathematischer Bestrebungen parallel, deren wir im Eingange gedachten. Die Betrachtungen der einen Art sind wesentlich durch die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf metrische Probleme charakterisirt: es gehören dahin die Untersuchungen über Flächenkrümmung, über geodätische Linien etc., wie sie in Frankreich durch Monge, in Deutschland durch Gauss im heutigen Sinne angeregt worden sind. Wenn diese Forschungen rückwirkend ihre Wichtigkeit für die Ausbildung des Infinitesimalcalculs, wie andererseits eine hohe Bedeutung in Fragen der mathematischen Physik gewonnen haben, so hatten sie von Hause aus zu wenig algebraischen Charakter, um mit den Untersuchungen der anderen Art, die man unter dem Namen der neueren Geometrie zusammenfasst, in Zusammenhang zu bleiben. Erst in der allerneuesten Zeit bahnt sich in Folge der beiderseitigen Fortschritte eine Vereinigung der beiderlei Richtungen an, die in hohem Masse interessant und fruchtbar zu werden verspricht.

Die neuere Geometrie geht nach ihrem Ursprunge ebenfalls auf Monge resp. auf seine zahlreichen Schüler zurück, unter denen vor Allen Poncelet hervorragt, dessen grundlegendes Werk, der „Traité des propriétés projectives“ 1822 erschien. Es ist sehr merkwürdig, dass die junge und lebenskräftige Disciplin in Frankreich zunächst nur einen Vertreter fand, der es vermochte, sie über den von Poncelet gewonnenen Standpunkt hinauszuführen. Wenn man Chasles hierfür allen Dank schulden wird, so muss man um so mehr bedauern, dass in jener Zeit der wissenschaftliche Austausch nur erst wenig entwickelt war und Chasles eine ganze Reihe von Gesichtspunkten erst selbständig zu finden hatte, die von den deutschen Geometern längst entwickelt waren.

Denn im Anschlusse an die von der französischen Schule gegebene Anregung entfaltete sich in Deutschland gegen Mitte der zwanziger Jahre plötzlich ein reiches geometrisches Leben, dessen Beginn durch das beinahe gleichzeitige Auftreten der drei grossen Forscher: Möbius, Plücker und Steiner bezeichnet ist.

Das erste und auch das wichtigste Werk von Möbius, der barycentrische Calcul, erschien bereits 1827. Aber es blieb lange Zeit fast unbeachtet. Die neuen und fundamentalen Gedanken, welche Möbius in demselben niedergelegt hat, haben erst Interesse und Verständniss finden können, als sich der allgemeine geometrische Sinn allmählich zu der Höhe gehoben hatte, von der aus Möbius seine Untersuchungen anstellt. Der barycentrische Calcul hat daher auch nicht in dem Masse in die Entwickelung der geometrischen Anschauungen eingreifen können, als er nach dem Reichthume neuer und fruchtbringender Ideen, die er einschloss, gesollt hätte. Ein ganz ähnliches Schicksal haben leider die nicht nur für Geometrie äusserst wichtigen Arbeiten eines anderen Forschers, H. Grassmann's, erfahren. Man beginnt erst in der letzten Zeit, auf die Grassmann'schen Arbeiten zurückzugehen und bemerkt, dass Grassmann bereits in den vierziger Jahren eine Reihe sehr umfassender Ideen concipirte, welche der Process allgemeiner geometrischer Entwickelung erst in der Zwischenzeit ausgebildet, zum Theil aber noch gar nicht berührt hat. Wir müssen hier vorgreifend dieses ausserordentlichen Verdienstes gedenken, da wir bei der isolirten Stellung, die Grassmann einnimmt, im Folgenden nur selten Gelegenheit haben werden, auf die Besprechung seiner Leistungen zurückzukommen, und dürfen dies um so mehr, als wir damit einer Ueberzeugung Ausdruck geben, der Clebsch im vollsten Masse beipflichtete.

Mit den Namen Plücker und Steiner ist für die deutsche Geometrie die Trennung in sogenannte analytische und synthetische Geometrie gegeben, welche bis in die allerneueste Zeit die Geometer in zwei getheilte Lager gespalten hat. Steiner hatte in der unmittelbaren geometrischen Anschauung das hinreichende Hülfsmittel und den einzigen Gegenstand seiner Erkenntniss erblickt, während Plücker in der Identität der analytischen Operation und der geometrischen Construction die Quelle seiner Beweise suchte und geometrische Wahrheit nur als eins der vielen denkbaren Gegenbilder analytischer Beziehung betrachtete. Und doch sind die Ziele, welche die beiden Forscher verfolgten, in vieler Hinsicht nahe verwandt: der Fortschritt der Wissenschaft hat es inzwischen ermöglicht, fast an allen Stellen zwischen den formal geschiedenen Betrachtungsweisen den Uebergang zu bewerkstelligen. Das gemeinsam Charakteristische: die projectivische Anschauung und die Anlehnung an die Begriffsbildung der Algebra tritt je länger je mehr in den Vordergrund, und die Bevorzugung der einen oder anderen Ausdrucksweise erscheint als etwas verhältnissmässig Nebensächliches.

Eben diese Auffassung von dem Verhältnisse der synthetischen und analytischen Geometrie bildet eine der Grundanschauungen von

Clebsch. Man vergleiche hierüber die Gedächtnissrede auf Plücker, die Clebsch im 16ten Bande der Göttinger Abhandlungen gegeben hat (1871). Clebsch schildert dort ausführlich und in vergleichendem Ueberblicke die damalige Entwickelung der Geometrie und nimmt dabei Gelegenheit, seine eigenen allgemeinen wissenschaftlichen Gesichtspunkte auseinanderzusetzen.

Während die rein geometrische Richtung Steiner's, mit welcher die gleichzeitig von Chasles verfolgten Untersuchungen nahe verwandt sind, durch Staudt eine principiellere Durchbildung erfuhr, erhielt die analytische Geometrie in Hesse's wichtigen Arbeiten eine neue und wesentliche Bereicherung. Hatte Plücker einen hauptsächlichen Vortheil seiner Betrachtungsweisen darin erblickt, dass er die algebraische Elimination durch eine geometrische Ueberlegung umging, so zeigte Hesse, wie man unter Benutzung der inzwischen ausgebildeten Hülfsmittel, besonders der Determinantentheorie, der algebraischen Operation diejenige Geschmeidigkeit ertheilen kann, deren Mangel für Plücker eben der Grund gewesen war, um dessen willen er die Elimination überhaupt verbannt wissen wollte.

Erst so war die Möglichkeit einer Verschmelzung der Geometrie mit der neu entstehenden Disciplin gegeben, welche man heute als Formen- oder Invarianten-Theorie bezeichnet und die bestimmt ist, die Grundgedanken der neueren Geometrie in analytischer Allgemeinheit zu repräsentiren.

Das Verdienst, diese Disciplin geschaffen und durch Verbindung derselben mit der geometrischen Speculation die letztere über den von Hesse gewonnenen Standpunkt hinaus gefördert zu haben, gebührt den englischen Geometern*) Sylvester, Cayley, Salmon, denen sich in Deutschland Aronhold anschliesst. Die späteren Untersuchungen von Steiner über höhere Curven und Flächen, die in den von ihm ohne Beweis veröffentlichten Resultaten für manchen Geometer, so namentlich auch für Clebsch, von der höchsten Anregung gewesen sind, haben leider auf die englischen Arbeiten zu wenig Rücksicht genommen, so dass manche der merkwürdigen Ergebnisse, die Steiner publicirte, von den englischen Forschern schon lange anticipirt waren. Andererseits hatten die Untersuchungen über Invariantentheorie, wie sie in jener Zeit durch Hermite und Brioschi angestellt wurden, eine zu wenig geometrische Form, um unmittelbar für die Geometrie von Wichtigkeit zu sein.

So ungefähr waren die verschiedenen Entwickelungsphasen geometrisch-algebraischer Kenntniss auf einander gefolgt, als sich Clebsch

---

*) Uebrigens besitzen die ersten englischen Arbeiten nicht diejenige analytische Eleganz, welche bereits in Hesse's Untersuchungen entwickelt war.

der Geometrie zuwandte. Schon früher einmal (Borch. J. Bd. 53. 1855) hatte er in einer seiner ersten Arbeiten ein geometrisches Thema berührt. Dasselbe bezieht sich auf das von Steiner auf Flächen zweiten Grades übertragene Malfatti'sche Problem, insbesondere auf eine von Cayley gegebene algebraische Auflösung desselben, von der Clebsch zeigt, dass sie sich mit Hülfe der elliptischen Functionen sehr einfach darstellen lasse. Es ist sehr merkwürdig, dass Clebsch mit dieser Arbeit einen Gedanken berührte, dessen spätere, allerdings in ganz anderer Richtung liegende Ausführung zu seinen grössten Verdiensten gehört: den Gedanken, die Theorie der höheren Transcendenten für neuere Geometrie zu verwerthen.

Wie soeben die Entwickelung der Geometrie geschildert wurde, war es natürlich, dass Clebsch an die Arbeiten der englischen Geometer anknüpfte. Wie sie stellt er, hierin über Hesse hinausgehend, die Probleme sofort in homogenen Coordinaten, die nur als Verhältnisszahlen definirt sind*). Dabei wird nicht nur als irrelevant betrachtet, wie in diesen Coordinaten die Gleichung der unendlich fernen Ebene gestaltet ist, sondern es wird auch die Frage unberührt gelassen (oder doch als von secundärer Wichtigkeit angesehen), ob man es mit reellen oder mit complexen Gebilden zu thun hat. Das algebraische Instrument, dessen sich Clebsch in seinen ersten Untersuchungen mit Vorliebe bedient (und hierin lehnt er sich an Hesse an), ist der Determinantenmultiplicationssatz in seiner Anwendung auf geränderte Determinanten. Erwähnen wir zunächst der eben auch mit Rücksicht hierauf sehr wichtigen Arbeiten über allgemeine Theorie der algebraischen Curven und Flächen. Es sind damit solche Arbeiten gemeint, welche in Anlehnung an die projectivische Anschauungsweise die allgemeinen Curven oder Flächen einer gegebenen Ordnung zum Gegenstande ihrer Untersuchung haben. Dieselben stehen in der engsten Beziehung zu den Problemen der Invariantentheorie linearer Substitutionen; dagegen sind sie wohl zu unterscheiden von anderen Betrachtungen, deren wir weiter unten zu gedenken haben, welche eine Curve oder Fläche als Ausdruck einer algebraischen Irrationalität auffassen und nach den Eigenthümlichkeiten fragen, die bei beliebiger eindeutiger Transformation erhalten bleiben.

Das erste Problem der allgemeinen Flächentheorie, mit dem sich Clebsch beschäftigt hat, betrifft diejenigen Punkte einer algebraischen Fläche der n^{ten} Ordnung, in denen dieselbe von einer Geraden vier-

*) Dem widerspricht nicht, wenn Clebsch in seinen Arbeiten, wo Differentiale der Coordinaten in Betracht kommen, gelegentlich eine nicht homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten voraussetzt. Dieselbe bezweckt dann nur eine symmetrische Durchführung von Eliminationsprocessen; die Werthe der in ihr vorkommenden Constanten sind gleichgültig.

punktig berührt wird (Zur Theorie der algebr. Flächen. Borch. J. Bd. 58. März 1860). Bereits Salmon hatte (Cambridge a. Dublin Math. J. t. IV. 1849) den Grad der von solchen Punkten gebildeten Curve zu $11\,n - 24$ durch Abzählung gefunden, er hatte auch (Quarterly J. t. I. 1857) die Gleichung einer Fläche construirt, welche diese Curve aus der gegebenen Fläche ausschneidet. Aber diese Gleichung erscheint bei ihm in einer ziemlich unübersichtlichen Form, und es ist das Verdienst der Clebsch'schen Arbeit*), das einfache Bildungsgesetz derselben aufgedeckt zu haben. Clebsch gelangt dahin durch Entwickelung einer allgemeinen Methode, die gestattet, das Resultat der Elimination von n homogen vorkommenden Unbekannten, die an $(n - 2)$ lineare Gleichungen, eine quadratische Gleichung und eine Gleichung beliebigen Grades geknüpft wird, in fertiger Form hinzuschreiben. Die Methode besteht ganz allgemein gesagt darin, die quadratische Gleichung mit Hülfe der $(n - 2)$ linearen in zwei Factoren aufzulösen, welche im Schlussresultate symmetrisch vereinigt auftreten und also keine Irrationalität mit sich führen (vergl. auch Clebsch's Theorie der binären Formen § 27.). Die Resultante erscheint dabei — und darauf legte Clebsch besondern Werth — nicht als unübersichtliches Coëfficientenaggregat, sondern in durchsichtiger Weise aus gesetzmässig erzeugten Bildungen aufgebaut.

Clebsch hat von dieser Eliminationsmethode eine Anzahl weiterer geometrischer Anwendungen gegeben. Es gehört dahin die Arbeit über die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung**) (Borch. J. Bd. 58. April 1860), dann namentlich der Aufsatz über ein Classe von Eliminationsproblemen etc. (ebenda Bd. 58. Juni 1860), wie endlich die inhaltreiche Abhandlung über Curven vierter Ordnung (Bd. 59. Sept. 1860). Letztere mag in der Absicht entstanden sein, für eine dereinstige durchgreifende Behandlung dieser Curven vorläufiges Material zu sammeln, an dem es noch sehr fehlt. Hatten sich die Untersuchungen Hesse's und Steiner's mit den merkwürdigen Gruppirungen beschäftigt, welche die 28 von Plücker zuerst gefundenen Doppeltangenten besitzen, so geht Clebsch mit seiner Arbeit nach einer anderen Richtung, indem er die Eigenschaften der cubischen Polarcurven zu erforschen strebt, welche die Curve vierter Ordnung

---

*) Clebsch's Arbeit ist vom 11. März 1860 datirt. Den 14. Juni desselben Jahres hat Salmon der Royal Society in einer Abhandlung über ternäre cubische Formen dasselbe Resultat ohne Beweis mitgetheilt (vergl. Phil. Transactions 1870). Später hat Gordan dasselbe unter consequenter Anwendung der symbolischen Bezeichnung auf kürzerem Wege abgeleitet (Schlömilch's Zeitschrift. Bd. 12 1867).

**) Das dort abgeleitete Produkt der 9 Wendetangenten war vorher von Salmon ohne Beweis angegeben worden (Higher Algebra 1. ed. p. 116).

den Punkten der Ebene zuordnet. Eine besondere Rolle spielt hierbei die Hesse'sche Curve der jedesmaligen ersten Polare, die Polardeterminante, wie Clebsch sie nennt, welche für unendlich viele Punkte der Ebene in ein Dreieck ausartet. Die Pole dieser Dreiecke bilden eine neue Curve der vierten Ordnung, deren Gleichung in ähnlicher Weise aus den dritten Differentialquotienten der gegebenen Form zusammengesetzt ist, wie die erste Invariante einer cubischen Form aus deren Coëfficienten. Eine Reihe von schönen Sätzen erläutert die Beziehungen zwischen den Polardeterminanten und ihren Polen, sowie die merkwürdige Reciprocität zwischen diesen und den Ecken der Polardeterminantendreiecke, welche selbst jene neue Curve vierter Ordnung beschreiben.

Unter den Formen, auf welche die Untersuchung der hierbei auftretenden Curven führt, ist eine Invariante sechsten Grades, obwohl nicht die einfachste überhaupt, dadurch merkwürdig, dass sie verschwindet, wie Clebsch zeigt, wenn sich die Gleichung der Curve vierter Ordnung als Summe von fünf vierten Potenzen schreiben lässt *). Dieser Umstand gibt ein merkwürdiges Beispiel für die Unmöglichkeit einer Umformung, deren Möglichkeit nach einem ersten Constantenzählen zu erwarten schien (vergl. hierzu Clebsch's Gedächtnissrede auf Plücker p. 23). In ihm lag wohl für Clebsch die erste Veranlassung sich mit dem Pentaeder der Flächen dritter Ordnung und der auf dasselbe gegründeten Umformung ihrer Gleichung in die Summe von fünf Cuben zu beschäftigen, insofern ihm die Begründung der betreffenden kanonischen Form aus dem blossen Uebereinstimmen der Zahl der Constanten nicht genügen konnte. Das Pentaedertheorem musste ihn umsomehr interessiren, als sich die Sätze über die 27 Geraden der Flächen dritter Ordnung als Corollare der allgemeinen Theoreme auffassen liessen, die Clebsch für die vierpunktige Berührung einer Geraden mit einer Fläche entwickelt hatte: es galt nun, bei den Flächen n^{ter} Ordnung auch solche Beziehungen nachzuweisen, wie sie bei den Flächen dritter Ordnung durch die Existenz des Pentaeders gegeben sind.

Die Flächen dritter Ordnung sind erst in verhältnissmässig neuer Zeit Untersuchungsgegenstand geworden. Im Jahre 1849 erschien eine Arbeit von Cayley über dieselben, in der er die Existenz der 27 Geraden, welche auf der Fläche liegen, nachwies, worauf er denn, in Verbindung mit Salmon, rasch eine Deduction der Haupteigenschaften der Fläche gab, welche sich an diese Geraden anschliessen (Cambridge and Dublin Math. J. t. IV). Bald darauf entdeckte Syl-

*) Diese merkwürdigen Curven sind später von Lüroth näher untersucht worden (Math. Ann. Bd. I).

vester, ausgehend von algebraischen Betrachtungen, das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung und dessen Beziehungen zur Hesse'schen Fläche (ebenda. t. VI. 1851). Mit diesen beiden Entdeckungen sind die Hauptmomente gegeben, um welche sich noch jetzt die Untersuchung der Flächen dritter Ordnung dreht, und es mag betont werden, was Clebsch gern hervorhob, dass es seither noch nicht gelungen ist, die beiden Richtungen der Untersuchung in eine einfache Verbindung zu setzen *). Die Theorie der 27 Geraden machte durch die Grassmann'schen und Steiner'schen Betrachtungen über die Erzeugung der Flächen dritter Ordnung einen wesentlichen Fortschritt, vermöge dessen weiterhin die Abbildung der Flächen dritter Ordnung auf die Ebene und damit ein einfaches Mittel zum Studium dieser Verhältnisse gefunden wurde; sie wurde ferner in den Händen von Schläfli das Instrument für eine Eintheilung der Flächen dritter Ordnung in Arten. Die Theorie des Pentaeders dagegen ist in ihrer Bedeutung für die Geometrie der Flächen dritter Ordnung bis jetzt relativ unentwickelt geblieben.

Sylvester hatte seine Sätze über das Pentaeder ohne Beweis publicirt. Fünf Jahre später gab Steiner in seiner viel genannten Abhandlung über Flächen dritten Grades (Crelle's J. Bd. 53. 1856) neben manchen anderen eben auch diese Sätze, aber, wie er damals pflegte, ohne Beweis oder auch nur Andeutung eines solchen. Clebsch unternahm es daher, einen Beweis für die Pentaedersätze zu entwerfen. Nach einer ersten vorläufigen Mittheilung (Borch. J. Bd. 58, März 1860), in der er, von der Existenz des Pentaeders ausgehend, dessen Beziehungen zur Hesse'schen Fläche darlegte und die Schritte auseinandersetzte, die im Sinne der Invariantentheorie nothwendig sind, um die Gleichung fünften Grades zu bilden, von der die Bestimmung der fünf Pentaederebenen abhängen muss **), zeigt er in einer grösseren Abhandlung (Borch. J. Bd. 59. Febr. 1861), dass die Existenz des Pentaeders mit den in seine Ecken fallenden Knotenpunkten der Hesse'schen Fläche aus einem allgemeinen Satze über die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche einer Fläche n^{ter} Ordnung hervorgeht. Der Beweis dieses Satzes, den man übrigens in manchen Punkten ver-

*) Für eine besondere Fläche dritter Ordnung, die von ihm sogenannte Diagonalfläche, hat Clebsch einen Zusammenhang zwischen den beiden Problemen nachgewiesen (Math. Ann. Bd. IV. Zur Theorie des Fünfseits etc.) und im Anschlusse hieran hat Klein eine Methode gefunden, bei den Flächen mit 27 reellen Geraden die Ebenen des Pentaeders näherungsweise zu construiren (Berichte der Erlanger phys. med. Societät. Juni 1873).

**) In der bereits genannten Arbeit über quaternäre cubische Formen (Juni 1860) publicirte Salmon ähnliche Resultate. Ein Irrthum, der sich in der bez. Arbeit von Clebsch findet und aus dem Uebersehen der Invarianten ungeraden Charakters entstanden war, ist in Salmon's Arbeit vermieden.

vollständigt wünschen mag, kommt darauf hinaus, die Zahl der gemeinsamen Schnittpunkte aller derjenigen Flächen zu bestimmen, welche durch die gleich Null gesetzten Unterdeterminanten der Hesse'schen Fläche repräsentirt werden, und ist seitdem für ähnliche Abzählungsaufgaben von Wichtigkeit geworden. Diese Punkte sind bei den Flächen dritter Ordnung, wie bekannt, in der Zahl 10 vorhanden und bilden eben die Ecken des Pentaeders. Clebsch erörtert ausführlich die hierin liegende Eigenthümlichkeit der betr. Gleichung 10ten Grades, bei der jedesmal gewisse Paare von Wurzeln eine dritte Wurzel rational bestimmen, und die desshalb durch eine Gleichung fünften Grades lösbar ist. Ueberdies ist die Arbeit von Clebsch durch die wiederholte Anwendung der symbolischen Bezeichnung interessant, die später von Clebsch mit Consequenz gebraucht wurde*).

Es sei ferner der Abhandlung von Clebsch über das Normalenproblem bei Curven und Flächen zweiten Grades gedacht (Borch. J. Bd. 62. Jan. 1862). Sie ist ein musterhaftes Beispiel für die Behandlung metrischer Probleme im Sinne der neueren projectivischen Anschauung. Die metrische Beziehung des Senkrechtstehens wird nach dem Vorgange von Cayley durch eine Polarbeziehung zu einem beliebig gegebenen Kegelschnitte resp. einer beliebigen Fläche zweiten Grades ersetzt (was übrigens bei Gebilden zweiten Grades keine Verallgemeinerung des Resultats in projectivischem Sinne begründet), und die ganze Aufgabe tritt dadurch in den Kreis derjenigen, welche sich auf das simultane System zweier quadratischer Formen (mit beliebig vielen Veränderlichen) beziehen. Der Unterschied des Reellen und Imaginären, auf den Joachimsthal in seiner bekannten Abhandlung über dasselbe Problem (Crelles J. Bd. 59.) besonders eingeht, wird nicht berührt; dagegen concentrirt sich die Untersuchung darauf, die Orte der Punkte zu erforschen, für welche zwei oder drei oder zweimalzwei etc. Lösungen des Problems zusammenfallen. So bringt denn die Abhandlung eine Fülle neuer Sätze über die interessante Krümmungscentrafläche der Flächen zweiten Grades**).

---

*) Entsprechend der inzwischen erreichten Vervollkommnung der algebraischen Methoden, hat Gordan im fünften Bande der math. Annalen die Clebsch'sche Untersuchung unter fortwährender Anwendung des symbolischen Apparates strenger durchgeführt und eine Anzahl interessanter Formenbildungen (z. B. das schon von Salmon ohne Beweis angegebene Product der fünf Pentaederebenen) hinzugefügt. Andererseits brachten die Preisarbeiten von Cremona und Sturm rein geometrische Beweise für die Existenz des Pentaeders.

**) Beinahe gleichzeitig erschien in den Berl. Monatsberichten eine Arbeit über diese Fläche von Kummer, der ein Modell derselben construirt hatte (Juni 1862). Bei Clebsch wie bei Kummer wird der alte Irrthum, der sich noch in Liouville's Ausgabe von Monge findet, als könne eine Centrafläche im Allgemeinen keine Doppelcurve haben, corrigirt.

Von der grossen Zahl von Arbeiten, die Clebsch im Zusammenhange mit den nun besprochenen vollendete, erwähnen wir noch einzelne. Es gelang Clebsch nach wiederholten Versuchen, die Zahl der Doppelpunkte der Curve vierpunktiger Berührung auf den Flächen n^{ter} Ordnung zu bestimmen und sie als Durchschnitte eines Flächensystems von der Ordnung $(8n - 14)$ darzustellen (Zur Theorie der alg. Flächen. Borch. J. Bd. 63. Mai 1863). Eine besondere Anwendung davon ist die Darstellung der 135 Schnittpunkte der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung durch ein System von Flächen der 10^{ten} Ordnung. — In einem Aufsatze über die Wendungsberührebenen der Raumcurven (ebenda Sept. 1862) leitet Clebsch die Gleichung einer Fläche von der $(6m + 6n - 20)^{ten}$ Ordnung ab, welche die Durchschnittscurve zweier Flächen von der m^{ten} und bez. der n^{ten} Ordnung in ihren Wendepunkten trifft. — Wir erwähnen endlich der Arbeit „über einige von Steiner behandelte Curven" (Borch. J. Bd. 64. Juli 1864), in der Clebsch zum ersten Male von dem kurz zuvor von ihm eingeführten Begriffe des Geschlechts einer Curve Gebrauch macht, um für die Singularitäten eindeutig auf einander bezogener Curven eine neue Bestimmungsgleichung zu besitzen. —

Wir sind hiermit bis zu der Zeit gekommen, in der Clebsch durch Einführung der Abel'schen Functionen und der in ihnen entwickelten Betrachtungsweisen in die Geometrie der letzteren einen neuen, mächtigen Aufschwung ertheilte, der als eines der wichtigsten Verdienste erscheint, die mit dem Namen Clebsch verbunden bleiben werden. Die Veranlassung dazu war insofern eine äussere, als die ganze Richtung, welche Clebsch nunmehr mit seinen Arbeiten einschlägt, wesentlich durch den Umstand bestimmt wurde, dass sich um diese Zeit (Sommer 1863) Gordan in Giessen habilitirte, wohin Clebsch Ostern 1863 von Carlsruhe berufen worden war. Durch ihn wurde Clebsch mit den Abel'schen Functionen und insbesondere mit den damals noch verhältnissmässig neuen und wenig verbreiteten Riemann'schen Untersuchungen bekannt. Aber nicht nur in dieser einen Richtung, sondern nach vielen Seiten hin sollte der rege persönliche Verkehr, in den von nun ab die beiden Forscher traten, für ihre Thätigkeit wie für ihre Erfolge von der grössten Bedeutung sein. Es ist im Folgenden um so schwieriger, zu sondern, was dem Einen, was dem Anderen der Beiden gehört, als sie viele ihrer Arbeiten gemeinsam veröffentlicht haben. Auf Clebsch allein ist wohl zurückzuführen, was sich auf geometrische Deutung der gewonnenen algebraischen Resultate bezieht, während die Herleitung der letzteren vielfach Gordan zugefallen sein mag.

Die Veranlassung, die transcendenten Functionen mit der neueren Geometrie in Verbindung zu bringen, hatte für Clebsch zunächst ein von Steiner ohne Beweis mitgetheilter Satz gebildet (vergl. Crelle's J. Bd. 33), der sich auf Polygone bezieht, welche sich einer Curve dritter Ordnung einbeschreiben lassen. Es gelang ihm (Borch. J. Bd. 63. Sept. 1863), einen einfachen und durchsichtigen Beweis zu finden, indem er von einer Darstellung der Coordinaten der Punkte einer solchen Curve durch elliptische Functionen eines Parameters ausging, die Aronhold in den Berliner Monatsberichten 1861 gegeben hatte (vergl. Aronhold's ausfürlichere Darstellung*) in Borch. J. Bd. 61). Der Beweis kommt einfach auf eine Anwendung des Additionstheorems der elliptischen Functionen hinaus, indem zwischen den oberen Grenzen von drei elliptischen Integralen erster Gattung, deren Summe gleich einer Constanten ist, die nämliche Beziehung besteht, wie zwischen den Abscissen der drei Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve dritter Ordnung, in deren Gleichung bloss das Quadrat der Ordinate auftritt. Vermöge dieser Bemerkung ist nicht nur der Steiner'sche Satz fast ohne Weiteres bewiesen, sondern es sind alle die merkwürdigen Theoreme, welche von Maclaurin, von Poncelet, von Plücker, Hesse und Steiner über die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung, über die Tangenten derselben, die Berührungskegelschnitte u. s. w. aufgestellt worden sind, wie mit einem Schlage erledigt: sie sind auf die einfache Gleichung zurückgeführt, die aussagt, dass die Summe der zu den Schnittpunkten gehörigen Argumente bis auf Multipla zweier Perioden einer Constanten gleich sind.

Bald hernach erschien die grosse Abhandlung über die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie (Borch. J. Bd. 63. Oct. 1863), deren Principien in zwei weiteren Arbeiten: über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als rationale, bez. als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen (Borch. J. Bd. 64. Mai und October 1864), für die einfachsten Fälle ausführlicher verwerthet wurden.

Es liegt derselben der einfache Gedanke zu Grunde, dass man die Gleichung, welche Abel zur Definition der Irrationalität in den nach ihm benannten Integralen ansetzt, als Gleichung einer algebraischen Curve auffassen kann. Die Grenzen der Integrale, deren Summe nach Abel's Theorem gleich einer logarithmischen und einer algebraischen Function werden soll, sind dann durch die Coordinaten der Schnittpunkte der gegebenen Curve mit einer beweglichen bestimmt, und die Sätze über Schnittpunktsysteme, wie sie von geometrischer Seite her durch Plücker aufgestellt, durch Jacobi und Cayley entwickelt worden waren (vergl. Plücker's Theorie der algebraischen Curven,

*) Vergl. auch Brioschi in den Annali di Matematica, Serie I. t. 3. 1860, sowie Bemerkungen desselben in den Comptes Rendus 1863, 64.

Einleitung), sind nichts, als eine unmittelbare Folge des Abel'schen Theorems. Aber Abel's Theorem gibt mehr, als diese Sätze aussprechen; es gibt nicht nur die Zahl der Bedingungen zwischen den Schnittpunkten, sondern es gibt diese Bedingungen selbst in der möglichst durchsichtigen Form. Indem Clebsch die Schnittpunkte beliebig zusammenrücken, die schneidende Curve also in eine Berührungscurve übergehen liess, ergaben sich ihm eine Fülle von Sätzen über die Zahl solcher Berührungscurven, die zu einer gegebenen Curve gehören. Zugleich gestattete der Charakter der Relationen, von welchen die Bestimmung dieser Curven abhängt, ein Urtheil über die eigenthümliche Gruppirung der Lösungen, sowie über den Charakter der in dem entsprechenden algebraischen Probleme auftretenden Gleichungen. Es schliessen diese Sätze die mannigfachen Theoreme von Hesse und Steiner über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung als Corollare in sich *). Indess muss hier hervorgehoben werden, dass die von Clebsch betrachteten Berührungscurven wesentlich nur Contacte derselben Ordnung an den Stellen, in denen sie die gegebene Curve treffen, besitzen, hinsichtlich ihrer Allgemeinheit also hinter den von Jonquières (Borch. J. Bd. 66) und Cayley (Phil. Trans. Bd. 158) behandelten zurückstehen, welche die Anzahl der beliebigen Contactbedingungen unterworfenen Curven eines linearen Systems in eine Formel zusammenfassen.

Aber wir verdanken dem Clebsch'schen Aufsatze weiter ein fundamentales Eintheilungsprincip für algebraische Curven: das Geschlecht (deficiency bei Cayley). Dieser Begriff war nach seiner Bedeutung für Gleichungen zwischen zwei Variabeln zuerst von Riemann erkannt worden, seinen analytischen Eigenschaften nach aber auch Abel nicht fremd, der in seiner Preisschrift (Mémoires des savants étrangers. t. VII; die Arbeit wurde 1826 eingereicht, aber erst 1841 publicirt) die Frage nach der geringsten Zahl von Integralen gestellt hatte, auf die man eine Summe von Integralen mit gegebenen Grenzen zurückführen kann. Nach Clebsch gehören zu demselben Geschlechte alle diejenigen algebraischen (ebenen oder doppelt gekrümmten) Curven, welche einander derart zugeordnet werden können, dass jedem Punkte der einen nur ein Punkt der anderen entspricht und umgekehrt (wie z. B. Curve und Evolute), oder, was dasselbe ist, dass die eine Curve aus der anderen durch eindeutige Transformation abgeleitet werden kann (vergl. den Aufsatz von Clebsch: Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. Borch. J. Bd. 64. April 1864). Für eine gegebene Curve ist das Geschlecht eine Function ihrer Ordnung

*) In einer schönen Abhandlung im 66. Bande des Borchardt'schen Journals stellt Roch die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung durch die Abel'schen Functionen für $p = 3$ explicite dar und beweist hierdurch die bez. Theoreme von den Θ-Functionen ausgehend.

und der Zahl ihrer Doppel- und Rückkehrpunkte, andererseits ist es gleich der Classe der Abel'schen Functionen, durch welche die Coordinaten ihrer Punkte als Functionen eines Parameters darstellbar sind.

Mochte die Idee der geometrischen Interpretation des Geschlechtsbegriffs zu der Zeit, als Clebsch seine Abhandlung schrieb, auch sonst im Gefühle der mathematischen Welt gelegen haben und in besonderen Fällen auch wohl zum Ausdrucke gekommen sein (vergl. z. B. Schwarz: de superficiebus explicabilibus etc. Borch. J. Bd. 64), die Thatsache wird dadurch nicht geändert, dass Clebsch dieselbe zuerst allgemein aussprach und, was mehr ist, in ihrer Tragweite erkannte und nutzbar zu machen verstand. Seit jener Zeit ist der Geschlechtsbegriff in der Geometrie eingebürgert und wird von Synthetikern und Analytikern ununterschiedlich gebraucht. Es ist kein Zufall, wenn die allgemeinen auf algebraische Curven bezüglichen Abzählungsformeln sich durch Einführung desselben wesentlich vereinfachen; die oben erwähnte elegante Formel von Jonquières und Cayley für die Anzahl der Curven, die gegebenen Contactbedingungen genügen, sowie die Correspondenzformel für Punktsysteme auf einer Curve von höherem Geschlechte*) sind Beispiele dafür.

Der Satz von der Erhaltung des Geschlechts bei eindeutiger Transformation ist an und für sich ein algebraischer und verlangt als solcher einen directen (nicht auf die Betrachtung der Integrale gegründeten) algebraischen, oder, was bei der heutigen Ausbildung der Geometrie dasselbe sagen will, geometrischen Beweis**). Er gehört einem Gebiete an, das, seiner Entstehung nach eng mit der Theorie der Abel'schen Functionen verbunden, doch von demselben als etwas Selbständiges abgelöst werden muss: dem bis jetzt nur erst nach wenig Richtungen durchforschten Gebiete, welches überhaupt von den bleibenden Eigenschaften algebraischer Beziehungen bei beliebigen eindeutigen Transformationen handelt. Wir werden weiter unten noch von Untersuchungen zu berichten haben, die diesem Gebiete, soweit es sich um Functionen zweier Variabeln handelt, zuzuweisen sind (Theorie der Flächenabbildung); wir werden ferner Gelegenheit haben, von dem Verhältniss desselben zur eigentlich sogenannten Invariantentheorie zu reden. Hier sei nur der Untersuchungen gedacht, welche Clebsch und Gordan in ihrem sogleich ausführlicher zu besprechenden Werke über Abel'sche Functionen eben mit Rücksicht auf diesen Gesichtspunkt anstellen. Indem sie in dem dritten Abschnitte desselben das Problem der eindeutigen Transformationen

*) Diese Correspondenzformel ist eine Verallgemeinerung des Chasles'schen Correspondenzprincips, das sich bekanntlich nur auf rationale Gebilde einer Dimension bezieht. Sie ist 1866 von Cayley durch Induction gefunden und neuerdings von Brill (Math. Ann. Bd. VI, 1) bewiesen worden.

**) Der von Riemann gegebene Beweis gehört der Analysis situs an.

einer Curve algebraisch formuliren, gelingt ihnen der directe Beweis *) für die Erhaltung des Geschlechts vermöge eines subtilen Eliminationsprocesses, indem sie an Stelle einer identisch verschwindenden Resultante mit Hülfe der Variation der Constanten einen Ausdruck bilden, welcher dieselbe vertritt: ein Verfahren, das sich in anderen Aufgaben der Geometrie seitdem mehrfach als nützlich erwiesen hat. Sie untersuchen ferner die Frage nach den rationalen Functionen der Coordinaten, die man gleich den neuen Coordinaten zu setzen hat, damit die Ordnung der transformirten Curve eine möglichst niedrige wird. Hatte so Cayley die Ordnung auf die $(p+2)^{\text{te}}$ erniedrigt, (unter p das Geschlecht verstanden), so wird in dem Werke von Clebsch und Gordan für Curven mit nicht aussergewöhnlichen Singularitäten bereits die $(p+1)^{\text{te}}$ Ordnung angegeben und dem Geschlechte p eine Curve der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung als Normal-Curve zu Grunde gelegt **). Eine andere wichtige Frage aus der Lehre von den eindeutigen Transformationen wird von Clebsch und Gordan nur berührt: die Frage nach den Moduln, d. h. denjenigen Parametern einer Curve, welche bei beliebiger eindeutiger Transformation ungeändert bleiben, und die somit für diese eine ähnliche Bedeutung haben, wie absolute Invarianten für die linearen Transformationen. (Bei binären Formen existiren Invarianten für höhere Transformationen im Sinne der Moduln nicht, vergl. eine Arbeit von Clebsch in den Göttinger Abhandlungen Bd. 15. 1870.) Die von Riemann gegebene Bestimmung dieser Moduln beruht auf nicht rein algebraischen Betrachtungen. Eine Bestimmung auf algebraischem Wege ist auch bis zur Zeit noch nicht in befriedigender Weise erfolgt, wenn auch ein von Cayley gemachter Einwand sich inzwischen durch Betrachtung einer Anzahl von einzelnen Fällen ***) sowie durch neuere Untersuchungen von Cayley selbst (Math. Ann. Bd. 3) erledigt hat.

*) Cremona hat in seiner „Theorie der Oberflächen“ einen einfachen geometrischen Beweis der Unveränderlichkeit des Geschlechts gegeben, indem er die drei Dimensionen des Raumes zu Hülfe nahm. Später haben, ohne aus der Ebene hinauszutreten, Bertini (Giornale di Mat. t. VII) und Zeuthen die Frage wieder aufgenommen, der Letztere, indem er von dem allgemeineren Falle einander mehrdeutig entsprechender Curven ausging. Vergl. auch eine Note von Brill und Nöther in den Göttinger Nachrichten 1873.

**) Diese Sätze gelten nur für Werthe von $p > 2$. — Riemann hat eine Normalform angegeben, welche die Variabeln einzeln im niedrigsten Grade enthält und somit, als Curve interpretirt, im Unendlichen zwei vielfache Punkte von halb so hoher Ordnung besitzt, als der Grad der Curve beträgt — Neuere Betrachtungen haben gezeigt, dass, wenn p zwischen $3(i+2)$ und $3(i+1)$ liegt, die Normalcurve $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung immer in eine solche der $(p+1-i)^{\text{ten}}$ Ordnung transformirt werden kann, vergl. die bereits erwähnte Note von Brill und Nöther in den Gött. Nachrichten Febr. 1873.

***) Vergl. Cremona und Casorati „osservazioni etc.“ in den Rendiconti del

Hatte es Clebsch in den bis jetzt berührten Untersuchungen unternommen, die Theorie der Abel'schen Functionen für Geometrie fruchtbar zu machen, so stellte er sich nun, mit Gordan zusammen, die umgekehrte Aufgabe, die Geometrie für die Theorie der Abel'schen Functionen zu verwerthen. Ehe wir es unternehmen, von dem aus diesem Gedanken entsprungenen gemeinsamen Werke (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig. B. G. Teubner. 1866. dat. August 1866) Bericht zu erstatten, mögen einige Worte über den allgemeinen Entwickelungsgang der genannten Theorie vorausgeschickt werden. Es wird dies um so kürzer geschehen können, als nur wenige Disciplinen der Mathematik sich durch eine verhältnissmässig so geringe Zahl von Arbeiten einiger hervorragender Forscher in folgerichtigster und raschester Entwickelung bis zu der Höhe aufgeschwungen haben, auf der wir sie heute erblicken.

Die Theorie der Abel'schen Functionen leitet ihren Ursprung aus dem Umkehrprobleme der hyperelliptischen Integrale mit vier Periodicitätsmoduln her, welches Jacobi (vergl. Crelle's J. Bd. IX und XIII) in der Weise formulirt hatte, dass er zwei Summen von je zwei Integralen mit verschiedenen Grenzen bildete und die Frage nach der quadratischen Gleichung aufwarf, deren Wurzeln die oberen Grenzen sind. Diese Frage wurde unabhängig von Rosenhain (Mém. des savants étrangers. t. XI) und Göpel (Crelle's J. Bd. 35) beantwortet, indem sie beide die Bildungsweisen der Coëfficienten jener Gleichungen in gewissen doppelt unendlichen Reihen vermutheten, die der von den elliptischen Functionen her bekannten Function Θ ähnlich sind, und diese Vermuthung durch Rechnung bestätigten. Indessen war der Keim zu einer directen Lösung des Umkehrproblems auch für den Fall, dass n Summen von je n Integralen mit $2n$ Periodicitätsmoduln gegeben sind, deren obere Grenzen als Functionen dieser Summen dargestellt werden sollen, bereits in Jacobi's „Fundamenta nova" niedergelegt. Jacobi definirt bekanntlich die Θ-Function durch ein Integral zweiter Gattung, indem er den Differentialquotienten des Logarithmus der Θ-Function gleich der von ihm eingeführten Function Z setzt. Entsprechend hat nun Weierstrass (Crelle's J. Bd. 47, 52) n Integrale zweiter Gattung in der Weise definirt, dass sie partielle Differentialquotienten einer Function sind, welche alsdann die Stelle von Θ vertritt, und hat mit Hülfe dieser Function das Umkehrproblem für die allgemeinsten hyperelliptischen Integrale gelöst.

Der hiermit geschilderte Kreis von Betrachtungen sollte indess

Istituto Lombardo 1869, Brill, zwei Noten über die Moduln, Math. Ann. I und II, sowie id. ibd. Bd. VI, wo nachgewiesen wird, dass Transformationen existiren, durch die man die Curve in eine gewisse Normalcurve überführt, deren Constantenzahl mit der Zahl der Moduln übereinstimmt.

noch bedeutend erweitert werden. Bereits Abel hatte sein Theorem auf Integrale ausgedehnt, in denen an Stelle des Quadratwurzelausdrucks die allgemeinste algebraische Irrationalität getreten ist. Auch für solche Integralsummen liess sich das Umkehrproblem aufstellen. Lagen die Schwierigkeiten für den Fall der hyperelliptischen Functionen wesentlich in der analytischen Operation, die zum Theil nicht ohne langwierige Rechnung durchzuführen war, so musste für die Lösung des allgemeinen Umkehrproblems vor Allem ein neues Anschauungsgebiet geschaffen werden, in welchem die Integralsummen durch unzweifelhafte Darstellung des Integrationsweges eindeutig definirt werden konnten. Ein solches erfand Riemann in der nach ihm benannten Fläche, welche er über der complexen Ebene, dieselbe mehrfach überdeckend, construirte. Mit Hülfe dieser Fläche und des von ihm nach Dirichlet genannten Princips, vermöge dessen, ähnlich wie in der mathematischen Physik, eine Function durch gewisse Gränz- und Unstetigkeits-Bedingungen definirt wird, stellt Riemann in überraschender Weise Relationen zwischen transcendenten einerseits und algebraischen Functionen andererseits auf und gelangt so durch wenige Schlüsse zur Lösung des Umkehrproblems.

Gegen einige Punkte des kühnen und grossartigen Entwurfes von Riemann lassen sich indess Einwände erheben, welche zurückzuweisen mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verbunden war und auch heute noch nicht in jeder Hinsicht geglückt ist. Zunächst finden sich in dem Beweise des Dirichlet'schen Princips angreifbare Stellen; auf Functionen von so allgemeinem Charakter, wie sie Riemann annahm, ist der Beweis nicht ohne Weiteres anzuwenden.*) Ferner konnte man sich von der Gestalt der Riemann'schen Fläche, welche für die Abel'schen Transcendenten vermöge der ihr auferlegten Bedingungen noch nicht vollständig bestimmt ist, keine klare Vorstellung bilden.**) Endlich bemerkte man (vergl. Neumann's Vorlesungen über Riemann's Theorie etc. Vorrede), dass der Zusammenhang, in welchem die Θ-Function in der Riemann'schen Theorie auftritt, nicht so enge geknüpft ist, wie man dies wohl bei einem der wichtigsten Gliede der ganzen Theorie wünschen mochte.

---

*) Man vergl. u. A. Bemerkungen zum Dirichlet'schen Principe von Kronecker und Weierstrass, deren in einem Aufsatze von Heine in Borch J. Bd. 71 Erwähnung geschieht.

**) Erst in neuester Zeit hat Lüroth eine gewisse Normalgestalt angegeben, auf welche die Fläche gebracht werden kann (Math. Ann IV), und hierdurch die erwähnte Schwierigkeit beseitigt. In einer seiner letzten Arbeiten leitet Clebsch aus der Lüroth'schen Arbeit einige weitere Resultate ab, welche die Untersuchung des Abschnitts über Periodicität in dem weiter unten zu besprechenden Werk in einigen Punkten erweitern und vervollständigen (Math. Ann. Bd. VI).

Diess waren wohl die Hauptgesichtspunkte, welche Clebsch und Gordan eine neue Bearbeitung der Theorie der Abel'schen Functionen auf einer ganz anderen Basis als wünschenswerth erscheinen liessen. Die missliche Umgrenzung des Functionsbegriffs sollte, unter Rückgang auf die Jacobi'schen Methoden, durch engeren Anschluss an die algebraische Seite des Gegenstandes (vermittelst des Abel'schen Theorems) vermieden und ein directer Uebergang zur Θ-Function, in ähnlicher Weise, wie dies Weierstrass bei den hyperelliptischen Functionen gethan hatte*), ermöglicht werden.

Da dieser Weg unmittelbar zu den speciellen Theta's hinführte, welche den Abel'schen Functionen zugehören, so vermied er die Klippen, an welchen auch wohl noch heutzutage jeder Versuch scheitern muss, die Thetafunction zur alleinigen Grundlage einer Theorie der Abel'schen Functionen zu machen, so lange nämlich die Frage nach den Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln, von welcher Riemann im Eingange seiner Arbeit spricht, sowie die Frage nach den Thetarelationen ungelöst ist.

Es stellt sich dem Studium des Werkes von Clebsch und Gordan eine gewisse Schwierigkeit wegen der doppelten geometrischen Repräsentation der zu behandelnden Probleme entgegen, die auf den zwiefachen algebraischen und analytischen Charakter derselben zurückgeht und vielleicht auch mit der verschiedenen Denkweise der beiden Verfasser zusammenhängt. Für die Integrale einerseits konnte man die Repräsentation der Integrationswege auf der complexen Ebene, die Umgänge, Schleifen und Cyclen nach dem Vorgange von Puiseux, wie sie sich in dem Werke von Briot und Bouquet (1859) für die Untersuchung der doppelt periodischen Functionen so werthvoll erwiesen hatten, in keiner Weise entbehren. Für die algebraische Function andererseits gewährte die Bezeichnung: „Curvengleichung" statt „Gleichung zwischen zwei Variabeln", „Schnittpunktsystem", „Doppel- und Rückkehrpunkt" statt der entsprechenden schwerfälligen algebraischen Ausdrücke eine ungleich grössere Beweglichkeit, als sie Riemann in dieser Hinsicht zu Gebote stand. Wenn man bedenkt, welche Vortheile eine nur geringfügig scheinende Abkürzung der Gedankenentwickelung gewähren kann, so schreibt man vielleicht manche der algebraischen Resultate der Abschnitte über Theilung, die sich bei Riemann nicht finden, wie überhaupt die glückliche Lösung des Umkehrproblems auf dem geschilderten Wege auf Rechnung dieser geometrischen Ausdrucksweise.

---

*) Leider ist von den ausgedehnten Untersuchungen, welche Weierstrass über die Abel'schen Functionen angestellt hat, ausser einer kurzen Notiz in den Berliner Monatsberichten (1869), die von den allgemeinsten eindeutigen $2n$-fach periodischen Functionen handelt, nichts Näheres im Zusammenhange bekannt geworden.

Nachdem aber einmal die Curve in die Sprache des Werkes aufgenommen war, entsprach es einer symmetrischen Darstellungsweise, weiter auch die in der analytischen Geometrie längst als vortheilhaft erkannte Homogenität der Curvengleichung einzuführen. Es wird dadurch der Anschauungsweise, welche bei einer algebraischen Function nur auf solche Eigenschaften achten will, die bei eindeutigen Umformungen ungeändert bleiben, wenigstens insoweit Ausdruck gegeben, als die Gleichberechtigung aller Gestalten, welche die Function bei linearer Transformation annehmen kann, von vorne herein ersichtlich ist. Dementsprechend bewirkt der scheinbare Ballast, der durch die dritte Variable hineingebracht wird, eine Glätte und Uebersichtlichkeit der Darstellung, deren Vorzüge selbst durch den Umstand nicht in Schatten gestellt werden, dass die vollkommene Symmetrie den Gedankengang gelegentlich einhüllt.

Diese Einführung der homogenen Coordinaten bedingte die Umgestaltung der Form der Integrale in einer Weise, wie sie von Aronhold in der bereits oben erwähnten nach Darstellung und Inhalt gleich eleganten Arbeit im Borchardt'schen Journale Bd. 61 gegeben worden war. Unter Zugrundelegung dieser Form gestaltet sich die logarithmische und algebraische Function des Abel'schen Theorems überraschend einfach, besonders im Vergleiche mit dem von Abel selbst in seiner Preisschrift gegebenen Ausdrucke.

Das Abel'sche Theorem bildet die natürliche Brücke zwischen dem transcendenten und dem algebraischen Charakter der Theorie.*) Indem die Verfasser es unternehmen, im Anschlusse an den von Weierstrass eingeschlagenen Weg, von den Integralen aus einen Uebergang zu der Gleichung für die oberen Grenzen durch Vermittelung von Integralen zweiter Gattung zu finden, benutzen sie das Abel'sche Theorem für Integrale dritter Gattung. Die Coefficienten der entstehenden Gleichung enthalten indess noch gewisse Summen T von Integralen dritter Gattung, die erst zerfällt werden müssen in eben solche Summen U mit getrennten Unstetigkeitspunkten. Diese Untersuchung, geführt an der Hand der beiden erwähnten geometrischen Repräsentationen, bildet den Schwerpunkt des Werkes und gipfelt ihrerseits in der Darstellung des Differentials jener Function U, deren partielle Differentialquotienten aus Integralen zweiter Gat-

---

*) Der vorzugsweise algebraische Charakter des Abel'schen Theorems geht insbesondere aus neueren Untersuchungen über algebraische Functionen hervor, vermöge deren gewisse fundamentale Sätze, welche Riemann und Roch aus der Betrachtung von Integralen zweiter Gattung und dem Verschwinden der Θ-Function abgeleitet hatten, auf algebraischem Wege bewiesen und der Theorie der algebraischen Functionen organisch eingefügt wurden. Vergl. die Note von Brill und Nöther, Gött. Nachr. Februar 1873.

tung bestehen, welche durch Differentiation gewisser specieller Functionen T gebildet werden. Die Verfasser finden schliesslich, dass jene Function U alle Eigenschaften des Logarithmus einer Θ-Function, wie diese von Riemann definirt worden war, besitzt, deren Monodromie nicht ausgeschlossen. Bei diesem Anlass wird jener Begriff, den man bisher nur für Functionen von zwei Variabeln kannte, für solche von p Variabeln dahin festgestellt, dass eine Function, bei Eindeutigkeit im Allgemeinen, nicht aufhört, monodrom zu sein, wenn sie in einem Gebiete von $(p - 2)$ Dimensionen unbestimmt wird.

Bemerkenswerth ist dabei die eigenthümliche Wahl der Argumente der Θ-Function. Sind bei Riemann die unteren Grenzen der Integrale, aus denen sich die Argumente zusammensetzen, für die Integrale gleichgebildeter Differentialausdrücke dieselben, dagegen für verschieden gestaltete verschieden, so verhalten sich die Festsetzungen von Clebsch und Gordan gerade umgekehrt. Die Verfasser entnehmen nämlich ihr System von unteren Grenzen den Berührungspunkten von gewissen zerfallenden Curven $(n - 1)^{ter}$ Ordnung, welche von der Lage nur eines (übrigens schliesslich indifferenten) Punktes abhängen. Die Vorzüge dieser Bestimmungsweise sind neuerdings von Weber bei Gelegenheit des Umkehrproblems (Borch. J. Bd. 70) und von Fuchs in Anwendungen hervorgehoben worden (Borch. J. Bd. 73).

Wir gedenken hier ferner des Capitels, das von der Transformation der Θ-Function handelt. Substituirt man für ein System von Periodicitätsmoduln von Normalintegralen erster Gattung, wie sie in dem Clebsch-Gordan'schen Werke in dem Abschnitte über „Periodicität" durch die Puiseux'schen Methoden hergestellt worden sind, ein ebensolches anderes, so tritt eine Transformationsdeterminante mit besonderen Eigenschaften auf, deren Werth für diesen Fall, dessen Behandlung Jacobi die Theorie der unendlich vielen Formen der Function Θ nannte, sich auf Eins reducirt (Transformation erster Ordnung). Das allgemeinere Jacobi'sche Problem der Transformation der elliptischen Functionen hatte Hermite in seiner berühmten Abhandlung: sur la transformation des fonctions abéliennes (Comptes Rendus Bd. 55) für die ultraelliptischen durchgeführt, während ein von Abel gestelltes Transformationsproblem (oeuvres I. Nr. XIV. p 275) von Königsberger Borch. J. Bd. 65 auf ultraelliptische Functionen übertragen worden war. In dem Abschnitte über die unendlich vielen Formen der Function Θ beschäftigen sich nun Clebsch und Gordan mit der Transformation erster Ordnung der Abel'schen Functionen überhaupt, indem sie die mit der Transformation der Periodicitätsmoduln verbundene Aenderung der Integrale und der Θ-Function untersuchen, und eine für die Transformation der letzteren wesentliche Constantenbestimmung in derselben Weise, wie dies Kronecker gethan (Monatsber. der Berl. Akad.

Oct. 1866), durch Zurückführung der Transformation auf gewisse Elementartransformationen ausführen. Dieselbe Aufgabe behandelten Thomae (Dissertation, Halle 1864) und neuerdings, mittelst Summation mehrfacher Gaussischer Reihen, Weber (Borch. J. Bd. 74).

Die Verfasser betrachten endlich noch die Theilung der Abel-schen Functionen. Man hatte dieselbe bis dahin nur für elliptische Functionen und, nach den Untersuchungen von Hermite, für hyperelliptische Functionen gekannt. Clebsch und Gordan zeigen, dass die für die elliptischen Functionen aufgestellten Sätze nicht nur auf die hyperelliptischen, sondern, mit geringen Aenderungen, auf die Abel'schen Functionen überhaupt übertragen werden können. Wie bei den elliptischen Functionen ist das allgemeine Problem durch Wurzelziehen zu lösen, wenn man das sogenannte specielle Theilungsproblem als gelöst voraussetzt. Die cyclischen Functionen der allgemeinen Theilungsgleichung werden nämlich unter Adjunction der Wurzeln des speciellen rational durch die Coefficienten ausdrückbar; man hat somit eine „Abel'sche" Gleichung. Das specielle Theilungsproblem seinerseits führt zu einer Gleichung, die in Folge besonderer Eigenthümlichkeiten auf eine Gleichung niederen Grades und mehrere reine Gleichungen reducirt werden kann, aber diese niedere Gleichung ist nicht mehr algebraisch lösbar.

Noch sei des sogenannten „erweiterten Umkehrproblems" gedacht, das Clebsch und Gordan in ihrem Buche aufstellen. Dasselbe war bereits in Clebsch's oben genanntem Aufsatze: über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen (Borch. J. Bd. 64), für elliptische Functionen formulirt worden und hat dort den folgenden Inhalt. Es sind $m-1$ Summen von je m Integralen dritter Gattung und eine Summe von m Integralen erster Gattung gegeben; man soll eine Gleichung m^{ten} Grades aufstellen, deren Wurzeln die in jenen Integralen auftretenden oberen Grenzen sind. Die oberen Grenzen sind dadurch als $(m+1)$-fach periodische Functionen definirt; die Erledigung des Problems lässt sich indessen, wie Clebsch zeigt, auf das gewöhnliche Umkehrproblem zurückführen. Aehnlich gestalten sich die bez. Verhältnisse bei den Abel'schen Functionen.

Die vorstehenden Erörterungen werden zur Genüge gezeigt haben, dass die Theorie der Abel'schen Functionen, wie sie aus Riemann's Händen hervorging, zwei heterogene Bestandtheile umschloss: einen analytischen und einen algebraischen. Die Bestrebungen der späteren Bearbeiter der Theorie waren übereinstimmend darauf gerichtet, bei weitergehender Erforschung der einzelnen Probleme eine grössere Gleichmässigkeit des Ganzen durch Bevorzugung der einen oder anderen Art von Betrachtung herbeizuführen. Clebsch und Gordan ihrerseits erwarteten, wie sie in der Vorrede zu ihrem gemeinsamen Werke ausdrücklich hervorheben, die weiteren Fortschritte wesentlich von der Ausbildung der algebraischen Methoden. Es ist daher nicht zufällig, wenn sich beide seitdem ausschliesslich mit algebraischen (resp. geometrischen) Untersuchungen beschäftigten.

Dieselben gehen bei Clebsch nach zweierlei Richtungen. Sie betreffen einmal die Lehre von der eindeutigen Transformation, andererseits die Theorie der Invarianten bei linearen Substitutionen.

In dem Werke über Abel'sche Functionen waren nur Curven hinsichtlich ihrer bei eindeutigen Transformationen bleibenden Eigenschaften untersucht worden. Clebsch dehnt fortan die bez. Untersuchungen auf Gebilde zweiter Stufe aus, er wendet sich, wie man sich seitdem ausdrückt, zum Studium der Flächenabbildung. Wenn dieselbe naturgemäss als Erweiterung der Riemann'schen Untersuchungen erwachsen musste, wenn andererseits auf sie bezügliche geometrische Betrachtungen vereinzelt wiederholt aufgetreten waren, so ist es doch Clebsch, der durch seine eigenen stetig fortgesetzten Arbeiten, wie durch die mächtige von ihm ausgehende Anregung, aus ihr diejenige geschlossene Disciplin gemacht hat, als welche wir sie heute erblicken. — Die Untersuchungen über Invariantentheorie, mit denen sich Clebsch gleichzeitig beschäftigte, können erst weiter unten ihre Besprechung finden. Clebsch dachte sich das Verhältniss der beiden Disciplinen in der Weise, dass er die Invariantentheorie linearer Substitutionen als nothwendige Vorstufe der allgemeineren Ueberlegungen betrachtete, die sich an eindeutige Transformationen überhaupt anknüpfen. Wir werden im Folgenden noch die bis jetzt allerdings erst kleine Reihe von Untersuchungen zu berühren haben, welche eine Verwirklichung dieses Gedankens anbahnen. —

Es wurde bereits oben des Unterschiedes gedacht, der die Theorie der Flächenabbildung von derjenigen Theorie der algebraischen Flächen scheidet, die sich an die Polarentheorie anschliesst und ihren algebraischen Ausdruck unmittelbar in den einfachsten Bildungen der linearen Invariantentheorie findet. Auch wird man zwischen ihr und der Theorie der conformen Abbildung von Fläche auf Fläche oder gar der von Gauss gegründeten Theorie der auf einander abwickelbaren Flächen keinen nahen Zusammenhang aufstellen wollen. Die neue Abbildungstheorie erachtet alle Flächen als äquivalent, welche durch eindeutige Transformation in einander übergeführt werden können; sie erblickt in einer Fläche das Bild einer algebraischen Function zweier Variabeln, und richtet ihr Augenmerk darauf, wie viel von den Eigenschaften dieser Function bei beliebiger eindeutiger Umformung erhalten bleibt. Von geometrischer Seite entspricht dieser Auffassung, wenigstens in mancher Beziehung, die Betrachtung der Erzeugung der Fläche durch andere Raumgebilde, deren Parameter die Punkte der Fläche eindeutig bestimmen und somit ein Coordinatensystem der Fläche liefern; und man wird als Vorläufer der Flächenabbildung eine Reihe geometrischer Arbeiten betrachten können, die sich auf Erzeugung algebraischer Flächen beziehen.

Es sind hier vor Allem die Grassmann'schen und Steiner'schen Untersuchungen über die Flächen dritten Grades zu nennen (Crelle's J. Bd. 49, 53), die über das merkwürdige System ihrer Geraden nicht nur, sondern auch über die Lage ihrer Curven niederster Ordnung bereits Klarheit verschaffen.*) Ihnen schliessen sich die Untersuchungen Schläfli's, August's und Schröter's als Fortsetzungen und Erweiterungen an (1858, 62, 63). Weiterhin sind die Arbeiten Kummer's über Flächen vierter Ordnung, auf denen Schaaren von Kegelschnitten liegen, zu erwähnen (Berl. Monatsberichte. Juli 1863. Borch. J. Bd. 64). Die in denselben enthaltene Betrachtung der Steiner'schen Fläche vierter Ordnung mit drei sich in einem Punkte schneidenden Doppelgeraden gab Weierstrass (vergl. die Kummer'sche Arbeit) und Cayley (Borch. J. Bd. 64. 1864) Veranlassung, deren Coordinaten als quadratische Functionen zweier Parameter darzustellen, während andererseits Schröter (Berl. Monatsberichte Nov. 1863, Borch. J. 64) und Cremona (Borch. J. 63) dazu übergingen, eine Geometrie auf eben dieser Fläche zu ermitteln, ohne dass damals die Identität beider Betrachtungsweisen zum Bewusstsein oder doch der Uebergang von der einen zur anderen zur Darstellung gebracht wäre.

Nur für eine besonders einfache Fläche, die der zweiten Ordnung, hat man diesen Uebergang schon früh erfasst. Bereits 1847 hatte Plücker die Idee, das Netz, welches die beiden Systeme von Erzeugenden dieser Fläche bilden, zur Grundlage eines geradlinigen Coordinatensystems auf ihr zu machen (Crelle's J. Bd. 34). Zugleich wird von ihm diese Bestimmung der Punkte der Fläche durch die Parameter der beiden Systeme als identisch aufgefasst mit der Abbildung der Fläche auf die Ebene durch die schon 1828 von Chasles in allgemeiner Weise untersuchte stereographische Projection, — ein Gesichtspunkt, vermöge dessen er einzelne Sätze der Ebene auf die Fläche überträgt. Später (1861) entwickelte Chasles (Comptes Rendus t. 53), zu derselben Zeit, als Cayley (Phil. Magazine. Juli 1861)

*) Die allgemeinen Erzeugungsweisen aller algebraischen Gebilde, wie sie Grassmann in seiner Ausdehnungslehre gegeben und in einer Reihe von Aufsätzen in Crelle's Journal entwickelt hat, und die Grassmann's Erzeugungsweise der Flächen dritter Ordnung als Corollar einschliessen, sind seither noch nicht von den Geometern weitergeführt worden; es muss der kommenden Zeit überlassen bleiben, deren Verhältniss zu den im Texte erwähnten Untersuchungen darzulegen.

auf diese Plücker'sche Darstellung und eine aus derselben abzuleitende Eintheilung der auf der Fläche liegenden Curven hinwies, unabhängig die Ideen Plücker's und Cayley's. Dabei führt er dieselben durch Aufstellung von Relationen zwischen den Parametern mit Hülfe seines Correspondenzprincips zu einer vollständigen Discussion der auf der Fläche gelegenen Curven durch. Schon kurz vorher hatte er (ebenda) eine ähnliche Methode auf die einfachsten geradlinigen Flächen mit einer mehrfachen Geraden rein geometrisch angewandt, indem er die Beziehung betrachtete, die durch eine Curve der Fläche zwischen zwei Ebenenbüscheln begründet wird, deren Axen die vielfache Gerade und eine Erzeugende der Fläche sind.

Um auch für höhere Flächen die Darstellung ihrer Coordinaten durch algebraische Functionen zweier Parameter als ein Mittel zum Studium ihrer Geometrie auffassen zu können und diese Darstellung selbst zu einem wichtigen Gegenstande der Forschung zu machen, war von algebraischer Seite der Durchgang durch die Begriffe und Methoden nöthig, welche in den Untersuchungen von Clebsch und Gordan über eindeutige Transformationen, deren wir oben bei den Abel'schen Functionen gedachten, ihre Ausbildung gefunden hatten. Bei ihnen entwickelte sich nicht nur jener Functionsbegriff auch für Flächen, sondern hauptsächlich auch die Methode, die zum Untersuchen der beim eindeutigen Entsprechen vorkommenden Singularitäten dient. Dabei war für die Curven der Zusammenhang zwischen diesem Standpunkte und dem der geometrischen Betrachtung ihrer Erzeugungsweise von vorneherein gegeben, so dass man, von den Curven ausgehend, bei den Flächen zu den entsprechenden Begriffsbildungen gelangen musste.

Aber auch von Seiten der rein geometrischen Forschung waren die Begriffe vorgerückt durch Ausbildung der Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Man hatte sich lange Zeit darauf beschränkt, neben der projectivischen Verwandtschaft die einfachste eindeutige, die quadratische, zu betrachten, die gleichmässig für projectivische und metrische Geometrie wichtig schien.*) Aber in den Arbeiten Cremona's (Mem. dell' Accad. di Bologna Ser. 2. Bd. 2. 1863 u. bes. Bd. 5. 1864) gelangte bereits der allgemeine Begriff der eindeutigen Punktverwandtschaft in der Ebene zur Aufstellung und Entwickelung. Erst neuerdings wurde freilich (ziemlich gleichzeitig von Clifford, Nöther und Rosanes, vergl. Clebsch in den Math. An-

*) Es sei indess hervorgehoben, dass Magnus in der Vorrede zu seinen „Aufgaben über analytische Geometrie“ bereits darauf aufmerksam machte, dass sich durch Verknüpfung wiederholter quadratischer Transformationen höhere eindeutige Beziehungen ergeben (1837).

nalen Bd. IV. p. 490) der einfache Fundamentalsatz der Theorie gefunden: dass sich jede eindeutige Transformation der Ebene aus wiederholten quadratischen Transformationen zusammensetzen lässt.*)

Bei diesem Entwickelungsgange erklärt es sich, dass der eigentliche Beginn der Abbildungstheorie, die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung, durch ein nach Inhalt und Methode der Arbeiten vollständiges Zusammentreffen von Clebsch (Borch. J. Bd. 65. Oct. 1865) und Cremona bezeichnet ist (vergl. dessen 1866 von der Berliner Akademie gekrönte Arbeit in Borch. J. Bd. 68): ein merkwürdiges Beispiel dafür, wie sich in der Theorie der algebraischen Flächen die Objecte der Untersuchung sowohl, als auch die Begriffe, von denen man ausgeht, für die analytische und die synthetische Behandlung allmählich ganz ähnlich gestaltet hatten. Beide Forscher untersuchen die Abbildung der Flächen dritter Ordnung auf die Ebene und begründen dadurch eigentlich, was man „Geometrie auf der Fläche" nennt; bei beiden ist die Grundlage der Abbildung dieselbe: die Grassmann'sche Erzeugungsweise der Fläche durch projectivische Ebenenbündel. Für Clebsch wird die Abbildung ohne Weiteres durch die Formeln vermittelt, welche eben diese Erzeugungsweise darstellen. Bei Cremona wird zunächst eine Raumtransformation untersucht, die den Ebenen des Raumes Flächen dritter Ordnung mit einer gemeinsamen Curve sechster Ordnung zuordnet, eine Transformation, die im Grunde auf eine bereits von Hesse bei seinen Untersuchungen über Curven vierter Ordnung (Crelle J. Bd. 49) betrachtete Beziehung zurückkommt.

Was diese und die zunächst folgenden Arbeiten Clebsch's über Abbildungstheorie auszeichnet, ist die Methode, aus der Definition der die Abbildung bewirkenden Functionen allein die Geometrie der Fläche zu erschliessen. Die Verhältnisse auf der Fläche sind vollkommen bekannt, sowie das System ebener Curven gegeben ist, das, vermöge der Abbildung, den ebenen Schnitten der Fläche entspricht, und es bleibt zunächst unerörtert, wie diese Abbildung, wenn man die Fläche gegeben annimmt, gefunden werden kann.

Von dieser Methode hängt auch die Richtung ab, welche Clebsch mit seinen bez. Arbeiten zunächst einschlägt. Der mit den Specialitäten der ebenen Systeme zunehmenden Schwierigkeit entsprechend,

*) Die Verwerthung der quadratischen Transformation für metrische Probleme, welche an eine besondere Form derselben, die Transformation durch reciproke Radien, anknüpft, hat in neuerer Zeit eine principiellere Auffassung und allgemeine Benutzung gefunden (vergl. die Arbeiten der französischen Geometer Moutard, Laguerre, Darboux u. A., sowie Auseinandersetzungen von Lie und Klein in den Math. Ann. Bd. V). Aber diese Betrachtungen liegen den im Texte besprochenen doch verhältnissmässig fern.

behandelt Clebsch nach der Fläche dritter Ordnung die Steiner'sche Fläche und die geradlinige Fläche dritter Ordnung (Borch. J. Bd. 67. Juli 1866) und weiterhin eine merkwürdige unter den von Kummer betrachteten Flächen, die Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt (Borch. J. Bd. 69. April 1868).

Aber schon bei der letztgenannten Arbeit und bei allen von ihm später in dieser Richtung untersuchten Flächen beschäftigt sich Clebsch auch mit der geometrischen Construction der Abbildung, nicht zum Zwecke ihres Studiums, sondern zum Beweise ihrer Möglichkeit. Die Betrachtungen, zu welchen er hierbei geführt wurde, gehören zu den schönsten und wichtigsten, welche die Abbildungstheorie ihm verdankt.

Der Nachweis der Abbildbarkeit einer Fläche auf die Ebene verlangt, auf der Fläche zwei lineare Systeme von einfach unendlich vielen Curven zu finden, die sich bezüglich nur in einem beweglichen Punkte schneiden. Es führt diese Aufgabe zu interessanten geometrischen Problemen, welche zu merkwürdigen algebraischen Gleichungen Anlass geben. So tritt bei den Flächen dritter Ordnung die Gleichung 27ten Grades auf, von deren Auflösung die Bestimmung der geraden Linien der Fläche abhängt. Bei der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt wird es nöthig, die 16 Geraden dieser Fläche zu kennen, die sich vermöge der von Kummer gefundenen fünf die Fläche doppelt berührenden Kegel zweiten Grades aus einer Gleichung fünften Grades und mehreren quadratischen Gleichungen*) bestimmten u. s. w.

Wenn der Nachweis zweier Curvensysteme der geforderten Art im Anschluss an die Clebsch'schen Arbeiten allgemein für solche Flächen gegeben werden konnte, auf welchen eines derselben bekannt ist (cf. Nöther in den math. Annalen Bd. III), so ist es Clebsch selbst gelungen, die hier auftretenden Gleichungen überhaupt zu charakterisiren und einen Zusammenhang derselben mit denjenigen Gleichungen zu entdecken, welche bei der Theilung der Abel'schen Functionen auftreten. (Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen etc. Math. Ann. Bd. III. Mai 1870.)

Er wurde dazu durch den Versuch geführt, die Flächen fünfter Ordnung mit einer Doppelcurve vierter Ordnung erster Species auf die Ebene abzubilden (Gött. Abhandl. Bd. 15. Jan. 1870). Es handelte sich dabei, wie schon bei der von Clebsch früher (Math. Ann. Bd. I. p. 253 ff.) geleisteten Abbildung der Flächen vierter Ordnung mit

*) Vergl. die citirte Arbeit von Clebsch. Die 16 Geraden der Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt wurden wohl zuerst von Darboux erkannt (Annales de l'Ecole Normale 1863), der in seinen allgemeinen Untersuchungen über Orthogonalsysteme die Flächen vierter Ordnung insbesondere betrachtete, welche den Kugelkreis doppelt enthalten.

Doppelgeraden, um die Aufgabe, auf der Fläche neben der von vorneherein erkennbaren Kegelschnittschaar gewisse isolirte Kegelschnitte nachzuweisen. Dieses Problem verlangte eine schwierige Abzählung (die später von Lüroth geleistet wurde, Math. Ann. Bd. III). Dagegen gestaltete sich die zweideutige Abbildung auf die Ebene, oder, wie Clebsch sagt, die Abbildung auf die Doppelebene, fast unmittelbar, indem man den Büschel von Flächen zweiter Ordnung, die, durch die Doppelcurve hindurchgehend, die Kegelschnittschaar ausschneiden, mit einem Ebenenbüschel schnitt. Es entstand so die neue Aufgabe, die Doppelebene auf die neue Ebene zu übertragen, und diese Aufgabe kommt auf die Aufsuchung gewisser Berührungscurven der in der Doppelebene enthaltenen Uebergangscurve hinaus, was, wie oben erörtert, von einem Zweitheilungsprobleme der auf die Curve bezüglichen Abel'schen Functionen abhängt (die in dem Falle, von dem hier die Rede ist, hyperelliptische sind). Insbesondere beruht der von Clebsch am eingehendsten untersuchte Fall der Abbildung einer Doppelebene mit Uebergangscurve vierter Ordnung auf tiefliegenden Eigenschaften dieser Curven, die Aronhold aufgedeckt hat, indem er von 7 ihrer Doppeltangenten ausging (Berliner Monatsber. Juli 1864). Die entsprechende Methode hat bei allen bekannten Flächenabbildungen den nämlichen Erfolg*). Clebsch hat mit diesen Arbeiten ein neues, weites Gebiet eröffnet, das der analytischen wie der rein geometrischen Forschung zugänglich ist, auf dem aber bisher kaum einige weitere Schritte geschehen sind.

Die Möglichkeit der eindeutigen Beziehung zweier Flächen aufeinander hängt von einer Reihe bis jetzt noch nicht erledigter Fragen ab. Aber Clebsch hat auch in dieser Richtung wenigstens einen ersten Schritt gethan. Analog dem bei Curven entwickelten Geschlechtsbegriffe hat er in einem in den Comptes Rendus, December 1868, ohne Beweis mitgetheilten Satze eine von den Singularitäten der Fläche abhängige Zahl aufgestellt, die er als Geschlecht der Fläche bezeichnet, insofern sie bei beliebiger eindeutiger Transformation erhalten bleibt und ihre Gleichheit also zur Transformirbarkeit zweier Flächen in einander nothwendig ist. Bewiesen wurde dieser Satz von Nöther (1869), analytisch unter Ausdehnung auf mehrere Variable (Math. Ann. II.), sodann (1871) nochmals von Zeuthen durch geometrische Betrachtungen (Math. Ann. IV.). Seine weitergehende Bedeutung erhielt derselbe durch den Nachweis der Invarianteneigenschaft gewisser

*) Es ist zu bemerken, dass das Problem der Abbildung der Doppelebene auf die einfache Ebene in den im Texte gemeinten Fällen, in denen die Doppelebene durch Beziehung einer Fläche auf die Ebene gewonnen wurde, dadurch specialisirt resp. erleichtert ist, dass eine oder mehrere Wurzeln der Theilungsgleichung von vorneherein bekannt sind.

von der Fläche abhängigen Flächensysteme (Nöther, Gött. Nachr. März 1873), welche den mit gleicher Eigenschaft behafteten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung aus der Theorie der Abel'schen Functionen analog gebildet sind. Diese Sätze über die Erhaltung der Geschlechtszahlen scheinen bestimmt zu sein, für eine allgemeine Theorie der algebraischen Functionen mehrerer Variabeln, als deren Vorstufe man die Abbildungstheorie betrachten mag, in späterer Zeit eine Grundlage abzugeben. Clebsch selbst hat in einer seiner letzten Arbeiten, auf die wir weiter unten zu sprechen kommen werden, noch eine Anwendung des Geschlechtsbegriffs auf die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen gegeben.

Auf den reichen Inhalt der Ausführungen, welche Clebsch sowohl für die allgemeine Theorie als für die Geometrie einzelner Flächen gegeben hat (vergl. Math. Ann. Bd. I. III., Rend. del Ist. Lombardo. Nov. 1868), können wir hier nur im Allgemeinen verweisen. Es mag nur noch der Arbeit über die geradlinigen Flächen vom Geschlechte Null gedacht werden (Math. Ann. Bd. V. Oct. 1871), insofern in derselben ein neuer Begriff, der des Flächentypus, eingeführt wird. Flächen werden demselben Typus zugewiesen, wenn sie ohne Zwischentreten singulärer Elemente auf einander eindeutig bezogen werden können, wie z. B. Ebene und Steiner'sche Fläche; Flächen desselben Typus verhalten sich daher in ihrer Geometrie vollkommen ähnlich. — Die Darstellung einer Fläche durch Parameter hat Clebsch wiederholt auch benutzt, um Probleme des Unendlich-Kleinen, die sich auf die Fläche beziehen, zu behandeln. So wies er die Curven der Haupttangenten auf der Steiner'schen Fläche durch Integration als algebraische nach (Borch. J. Bd. 67. Juli 1866), ein Resultat, das daraufhin von Cremona (1867) auch geometrisch durch die Abbildung selbst wiedergefunden wurde*). Er zeigte ferner, in Verallgemeinerung der Methode, dass auf allen geradlinigen Flächen die Aufsuchung der Haupttangentencurven auf Quadratur zurückgeführt ist, wenn man eine derselben kennt (Borch. J. Bd. 68. Juni 1867) u. s. f.

Wie sehr alle diese Arbeiten von Clebsch noch dazu beigetragen haben, die analytische und synthetische Methode geometrischer Forschung ihrem Inhalte nach zur Uebereinstimmung zu bringen, sollte eine neuere Thatsache auf merkwürdige Art zeigen. In Entwickelung der angedeuteten Begriffe und Methoden ist zu gleicher Zeit (1870—71) und von mehreren Seiten her (Cayley, Cremona, Nöther) eine

*) Diese Bestimmung der Haupttangentencurven der Steiner'schen Fläche kann als besonderer Fall der Integration der ebenfalls algebraischen Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten betrachtet werden, wie diese von Lie und Klein gegeben wurde. (Berl. Monatsberichte. Dec. 1870. Vergl. auch Math Ann. V.)

neue Theorie, die Theorie der eindeutigen Raumtransformationen aufgestellt worden, die man als directe Verallgemeinerung der Cremona'schen Transformationen der Ebene betrachten mag. Wenn dieselbe, obgleich erst in ihren Anfängen, schon jetzt gestattet, fast ohne Weiteres alle Flächenabbildungen, mit denen man sich bisher beschäftigt hat, abzuleiten, so darf man nicht vergessen, dass sie eben auf Grund dieser seitherigen Untersuchungen erwachsen ist. —

Wir hatten es seither verschieben müssen, von den Arbeiten Clebsch's auf dem Gebiete der Invariantentheorie im Zusammenhange zu berichten, so oft wir dieselben schon nebenbei berührt haben, und so enge die Beziehung dieser Arbeiten zu den bereits besprochenen geometrischen sein mag. Denn mit Problemen der Invariantentheorie hat sich Clebsch gerade auch in seinen letzten Jahren vielfach beschäftigt, und es hätte der zusammengehörige Stoff zerstückt werden müssen, wenn wir bereits bei früheren Gelegenheiten ausführlicher auf dieselben eingegangen wären.

Obwohl nach ihren Grundvorstellungen das analytische Bild der projectivischen Geometrie ist die Theorie der Invarianten bei linearen Substitutionen in ihren ersten Anfängen weniger auf die vorangegangenen geometrischen Forschungen, als auf die algebraische Determinantentheorie und deren Auftreten in dem zahlentheoretischen Gebiete (Transformation quadratischer Formen etc.) zurückzuführen. Auch ist für die Ausbildung der Invariantentheorie die Variationsrechnung durch die Art der in ihr üblichen Operationen wenigstens indirect von grossem Vortheile gewesen. Erst später hat die Geometrie Einfluss auf die Invariantentheorie geübt. Die elementaren Operationen der letzteren stimmen mit den in der projectivischen Geometrie üblichen Constructionen überein; die Hülfsmittel der Theorie in ihrer weiteren Ausbildung gehen aber bedeutend über die in der Geometrie üblichen Verknüpfungsweisen hinaus. Es fliesst daraus die Aufgabe, die geometrischen Begriffe in einer solchen Weise auszubilden, dass sie sich auch diesen höheren oder allgemeineren Operationen anschliesst. Andererseits ist die algebraische Formulirung gewisser Gattungen geometrischer Probleme, besonders von Aufgaben des Unendlich-Kleinen, im Sinne der Invariantentheorie erst in neuerer Zeit versucht und noch nicht überall consequent durchgeführt worden.*)

Bei der wesentlich geometrischen Auffassung der algebraischen Verhältnisse, die Clebsch eigenthümlich war, und die sich bei ihm je länger um so bestimmter ausgeprägt hatte, ist es natürlich, dass

*) Vergl. hierzu die allgemeinen Untersuchungen über homogene Differentialausdrücke von Christoffel und Lipschitz (Borch. J. Bd. 71 ff.), sowie die Erweiterungen, welche Beltrami der Lehre von den Differentialparametern hat zu Theil werden lassen. (Mem. dell' Accad. di Bologna.)

seine Untersuchungen über Invariantentheorie vorwiegend die geometrische Seite des Gegenstandes betreffen, ohne dass er sich jedoch ausschliesslich auf dieselbe beschränkt hätte. Die Abhandlung, durch deren Studium er zur Invariantentheorie geführt worden war und die für die Richtung seiner späteren Untersuchungen durchaus massgebend gewesen ist, ist Aronhold's *Theorie der ternären cubischen Formen* (Borch. J. Bd. 55). Einmal eröffnete diese Arbeit durch die grosse Zahl ihrer neuen Resultate, die sich sofort in die Theorie der Curven dritter Ordnung übersetzen liessen, wie durch die elegante Behandlung bereits von Anderen (bes. von Hesse) untersuchter Probleme der geometrisch-algebraischen Forschung eine Reihe von neuen Gesichtspunkten. Andererseits bediente sich Aronhold in derselben eines Formalismus, den Clebsch sofort mit dem grössten Interesse aufgriff.

Es ist die Methode der symbolischen Darstellung algebraischer Formen als der Potenzen linearer Ausdrücke, vermöge deren Aronhold im Stande war, eine Aufgabe in voller Allgemeinheit der Coordinatenbestimmung aufzufassen und durchzuführen. Die Darstellungsweise geht in ihren ersten Anfängen auf die Symbolik zurück, deren sich Cauchy, Boole u. A.*) bei der Behandlung von Differentialgleichungen bedient hatten, oder, wenn man will, auf die bekannte abgekürzte Bezeichnung der höheren Glieder der Taylor'schen Reihe. Sie hatte dann in den Händen von Cayley (vergl. z. B. Crelle's J. Bd. 30) bereits die Ausbildung erhalten, welche sie geeignet macht, in der Invariantentheorie mit Erfolg verwandt zu werden. Aronhold, der seinerseits selbständig zu ihr geführt worden war, gab ihr, in Beschränkung auf ganze rationale Functionen, eine minder abstracte Form, indem er die von den Früheren gebrauchte Bezeichnung durch blosse Operationszeichen verliess.

Clebsch's erste**) Invariantenarbeit (Borch. J. Bd. 59. Sept. 1860) geht unmittelbar von Aronhold's symbolischer Darstellung aus. War letztere für Aronhold zunächst nur ein brauchbares Hülfsmittel zum Beweise seiner Sätze gewesen, so wird sie für Clebsch die principielle Grundlage der ganzen Theorie, indem ihm der Beweis gelingt, dass die symbolische Darstellung in ihren Determinantenaggregaten geradezu alle invarianten Bildungen ergibt. Es muss indess, wenn wir im Anschlusse an Clebsch's eigene Ausdrucksweise diesen Satz so uneingeschränkt aussprechen, ausdrücklich hervorgehoben werden, was man damals, zum Theil im Gegensatze zu

*) Vgl. auch Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe von Pfaff (Nova Acta Petropol. XI. 1797) und Jacobi (Crelle's Journal Bd. 36. pag. 135).

**) Vergl. auch die bereits genannte Abhandlung über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, Borch. J. Bd. 58, sowie die sich zunächst anschliessenden geometrischen Arbeiten.

der heutigen, eben durch Clebsch selbst weiter entwickelten Anschauung, unter einer invarianten Bildung verstand. Man betrachtete nur solche Formenbildungen, wie sie bereits bei zwei und drei homogenen Veränderlichen auftreten: die Invarianten, Covarianten, zugehörige Formen und Zwischenformen. Die Grundformen insbesondere dachte man nur mit einer Reihe ursprünglicher Veränderlichen ausgestattet. Später haben Clebsch und Gordan Formen mit verschiedenen Reihen von Veränderlichen zu Grunde gelegt, wie wir weiterhin noch ausführlicher zu berichten haben werden. Die dann nothwendig werdenden Symbole sind selbst aus anderen Symbolen zusammengesetzt und fügen sich dementsprechend in die Determinanten, die man aus ihnen zum Zwecke der Invariantenbildung aufbauen wird, nicht als Ganze ein. Auf Grundformen mit zusammengesetzten Symbolen ist daher der Clebsch'sche Satz in der Form, wie er ihn gab, nicht anwendbar.

Auf dem Standpunkte, der durch den Clebsch'schen Beweis geschaffen ist, und innerhalb der eben angedeuteten Begrenzung, wird das symbolische Aggregat geradezu die Definition der Invarianten; die Relationen zwischen den verschiedenen Bildungen, nach denen die Invariantentheorie sucht, ergeben sich aus den einfachen Principien der symbolischen Rechnung; die Invariantentheorie mit ihrer realen Vorstellung eines durch lineare Substitutionen unzerstörbaren Inhaltes erscheint fast als Corollar des symbolischen Formalismus. Hier springen nun alle die Vortheile hervor, welche ein solcher Formalismus, wenn er geschickt angelegt ist, mit sich führt. Die Hülfsmittel der symbolischen Rechnung, schon in der Form, in der Clebsch sie damals benutzte, führen sofort zu Bildungen, deren geometrische Bedeutung jenseits der Grenzen des rein geometrischen Verständnisses in seiner heutigen Ausbildung liegt. Clebsch hob diesen Punkt gern gesprächsweise hervor und pflegte dann wohl auf das Beispiel der binären Formen fünften und der ternären Formen vierten Grades aufmerksam zu machen. Bei beiden ergibt die symbolische Bezeichnung ohne Weiteres eine Reihe linearer Covarianten, während es bis jetzt nicht gelungen ist, bei fünf Punkten in gerader Linie einzelne covariante Punkte oder bei Curven vierter Ordnung einzelne covariante Gerade zu construiren*).

In seiner Abhandlung im 59ten Bande des Borchardt'schen Journals entwickelte Clebsch neben dem von der Allgemeingültigkeit der Symbolik noch insbesondere ein wichtiges Uebertragungsprincip, das eben durch die symbolische Darstellung ermöglicht wird. Dasselbe

---

*) Die im Texte genannten linearen Covarianten wurden von Hermite und Joubert entdeckt. Vergl. Cambridge a. Dublin Math. J. Vol. IX.

verwerthet die Theorie der Formen mit niederer Variabelnzahl für die Formen mit mehr Veränderlichen. Ein Beispiel wird am deutlichsten zeigen, worin dieses Princip besteht und in welcher Richtung seine Anwendung liegt.

Man kennt die Discriminante einer binären biquadratischen Form, d. h. die Invariante, deren Verschwinden aussagt, dass die gegebene Form zwei gleiche lineare Factoren besitzt. In symbolischer Darstellung ist dieselbe, wie jede Invariante binärer Formen, durch ein Aggregat von Producten zweigliedriger symbolischer Determinanten gegeben. Man kann nun vermöge des in Rede stehenden Princips in Folge dessen sofort die Bedingung hinschreiben, dass eine gerade Linie eine Curve vierter Ordnung in einem Punktsysteme mit verschwindender Discriminante schneiden soll, d. h. die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten. Es ist dazu nur nöthig, die symbolischen Determinanten, welche in der Darstellung der Discriminante vorkommen, durch Vermehrung der Symbolindices auf drei und Hinzunahme einer Reihe von Liniencoordinaten zu dreigliedrigen Determinanten zu erweitern und dann die Symbole als auf die Gleichung einer Curve vierter Ordnung bezüglich aufzufassen.

Clebsch hat damals diese Darstellung der Curven vierter Ordnung in Liniencoordinaten und entsprechend die der Flächen dritter Ordnung in Ebenencoordinaten gegeben, aus denen dann sofort eine Menge bis dahin unbekannter Sätze über diese Gebilde hervorgehen. Es sei hier noch insbesondere hervorgehoben, dass bei consequenter Anwendung dieses Princips und der symbolischen Rechnung die grossen zwiefach geränderten Determinanten, deren sich Clebsch, wie oben berichtet, in seinen früheren Arbeiten mit Vorliebe bediente, durch viel kürzere symbolische Potenzen ersetzt sind.

Im Zusammenhange hiermit erwähnen wir gleich hier einer späteren Arbeit von Clebsch über die Plücker'schen Complexe (Math. Ann. Bd. II. April 1869), in welcher Clebsch dem gemeinten Uebertragungsprincipe wie überhaupt der symbolischen Darstellung eine wesentliche Erweiterung hat zu Theil werden lassen.

Als Plücker, nach längerer physikalischer Thätigkeit, sich wieder mathematischen Problemen zuwandte (1864) und die neue Disciplin schuf, die man nun als Liniengeometrie*) bezeichnet, ergriff Clebsch die geometrischen Ideen, die Plücker vortrug, mit dem grössten Interesse. Für ihn war eine Geometrie der geraden Linien im Raume, wenn auch nicht bewusst von ihm erfasst, doch nach den

*) Dem Plücker'schen Buche (Neue Geometrie etc. Leipzig, B. G. Teubner. 1868/69) gingen eine grosse Zahl verschiedener Arbeiten Anderer voraus, die man heute zur Liniengeometrie rechnen wird. Vergl. Clebsch's Gedächtnissrede auf Plücker. Gött. Abhandl. Bd. 15.

allgemeinen Betrachtungen der bei quaternären Formen möglichen symbolischen Bildungen etwas sehr nahe liegendes gewesen*). Hiermit ist auch die Richtung gegeben, in der sich seine Untersuchungen über Plücker'sche Complexe erstrecken. Sie knüpft an die Darstellung der Liniencoordinaten durch die Determinanten aus zwei Reihen von Punkt- oder Ebenencoordinaten an: ein Standpunkt, von dem aus die Liniengeometrie als ein Theil der quaternären Formentheorie erscheint. In dem Plücker'schen Buche wird umgekehrt eine andere analytische Behandlungsweise der Liniengeometrie angebahnt, die sich der geometrischen Auffassung der Geraden als Raumelement genauer anschliesst und weiterhin besonders von Klein verfolgt worden ist (Math. Ann. Bd. II., V.). Sie betrachtet die 6 Coordinaten der geraden Linie als selbständige Veränderliche, die dann an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades geknüpft sind. Aber hiermit verlässt man den Boden der quaternären Formentheorie und tritt in den Kreis der Formen mit sechs Veränderlichen. —

Indem sich Clebsch der Darstellung der Liniencoordinaten durch zweigliedrige Determinanten bediente, zeigte er in der genannten Arbeit, wie man symbolisch einen Liniencomplex als Potenz einer viergliedrigen Determinante schreiben kann, in der zwei Reihen von Punkt- oder Ebenencoordinaten vorkommen, aus denen sich bei der Entwickelung der Determinante eben die Liniencoordinaten zusammensetzen. Ein wesentlicher Fortschritt, der hierin liegt, ist der, dass die Coëfficienten der darzustellenden Form nicht als blosse Producte von Symbolen, sondern als Determinantenaggregate**) von Symbolen erscheinen. Clebsch hat später (Math. Ann. Bd. V. Jan. 1872) gelegentlich die Fruchtbarkeit dieser Darstellung für die Behandlung der Complexe in ein helles Licht gestellt, indem er die fertigen Gleichungen einer Reihe in der Complextheorie auftretender Flächen ableitete. Er hat sodann diese neue Art von Symbolik bei allgemeinen Untersuchungen zu Grunde gelegt, auf die wir erst weiter unten zu sprechen kommen werden. —

Die Gesichtspunkte, die man bis jetzt in der Invariantentheorie verfolgt hat, mag man in zwei Gruppen bringen. Man hat einmal nach den charakteristischen Eigenschaften der invarianten Bildungen geforscht, man hat andererseits nach deren gegenseitigem Zusammenhange gefragt und nach Fundamentalformen gesucht, aus denen sich die übrigen durch einheitliche Processe ableiten lassen.

In seinen ersten Untersuchungen definirt Cayley die Invarian-

*) Vergl. den Bericht, den Clebsch in den Göttinger Anzeigen von dem Plücker'schen Buche erstattet hat (1869).

**) Dies ist also einer von den oben erwähnten Fällen, auf welche sich die Beschränkung bezieht, die man dem Clebsch'schen Satze von der Allgemeingültigkeit der Symbolik zufügen muss.

ten durch gewisse partielle Differentialgleichungen, in denen die Coëfficienten der gegebenen Formen als unabhängige Variable auftreten und deren einzige rationale Lösungen eben die Invarianten sind (Crelle's J. B. 47, vergl. auch Aronhold ebenda Bd. 62). Clebsch kommt auf diese Differentialgleichungen nur in der bereits oben bei Gelegenheit des Pfaff'schen Problems genannnten Arbeit über simultane lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zu sprechen (Borch. J. Bd. 65). Sie erscheinen dabei als Beispiele eines sogenannten vollständigen Systems von Differentialgleichungen, d. h. eines Systems, dessen Gleichungen mit einander combinirt, keine neue Bildungen ergeben. *)

Eine andere Definition der Invarianten, von der besonders Aronhold in seiner „fundamentalen Begründung der Invariantentheorie" ausgeht (Borch. J. Bd. 62), ist die aus den nothwendigen Transformationsrelationen, welche erfüllt sein müssen, damit zwei Formen linear ineinander übergeführt werden können. Für Clebsch trat auch diese Art der Definition verhältnissmässig zurück. Für ihn waren die Invarianten einfach definirt als ganze rationale Functionen der Coëfficienten gegebener Formen, die sich bei linearer Transformation bis auf eine als Factor vortretende Potenz der Substitutionsdeterminante reproduciren. Dieses ihr Verhalten wird in durchsichtigster Weise durch das symbolische Bildungsgesetz ausgesprochen, und es interessirte nun Clebsch vorwiegend, diejenigen Probleme weiter zu verfolgen, die man auf Grund der symbolischen Darstellung zu erledigen hoffen darf.

Bereits bei einer binären Form kann man eine unbegrenzte Zahl invarianter Bildungen nach dem Principe der Symbolik entwerfen, indem man nur die Reihe der zu vereinigenden symbolischen Determinanten und der zu Hülfe zu nehmenden wirklichen Veränderlichen beliebig vermehrt; um so mehr wächst die Zahl der Bildungen bei ternären, quaternären Formen u. s. w. Man wird sich die Frage vorlegen, ob man nicht aus der Mannigfaltigkeit aller dieser Gestalten einen kleineren Kreis auswählen kann, aus dessen Formen sich alle anderen in einer festzusetzenden Art und Weise ableiten lassen.

Mit Bezug auf diese Fragestellung, die schon von Cayley, Hermite, Brioschi u. A., aber zum Theil in anderer Richtung, in Betracht gezogen war, haben sich Clebsch und Gordan in erster Linie gemeinschaftlich auf die Aufgabe concentrirt, solche Formen anzugeben, aus denen sich die übrigen rational und ganz mit Hülfe bloss numerischer Factoren zusammensetzen. Bei binären Formen gelang es Gordan (Borch. J. Bd. 69) unter Benutzung des symboli-

*) Den Beweis der Unabhängigkeit dieser Gleichungen haben später Christoffel (Borch. J. Bd. 68) und Aronhold (ibd. Bd. 69) geführt.

schen Apparates den Satz zu beweisen, dass jede einzelne binäre Form, wie auch jedes System solcher Formen eine endliche Zahl solcher Bildungen besitzt. Die verhältnissmässig hohe Vollendung, die durch diesen Satz der Theorie der binären Formen geworden ist, veranlasste Clebsch, eine zusammenhängende Darstellung dieser Theorie zu geben, die 1872 erschien (Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, B. G. Teubner. dat. September 1871). Wenn dieses Werk zunächst bestimmt ist, auch in weiteren Kreisen die Ergebnisse und Anschauungsweisen der heutigen Invariantentheorie zu verbreiten*), so haben wir hier und im Folgenden die in ihm enthaltenen einzelnen Fortschritte hervorzuheben. Mit Bezug auf die hier vorliegende Fragestellung hat Clebsch in seinem Buche den Nachweis geführt (der gleichzeitig von Gordan in einem Aufsatze über Resultanten (Math. Ann. Bd. III.) gegeben wurde), dass man binäre Formen mit mehreren Reihen von Veränderlichen immer durch ein simultanes System von Formen ersetzen kann, die nur eine Art von Veränderlichen enthalten, — wodurch denn das Problem der binären Formen nach dieser Seite begrenzt erscheint und namentlich auch bei der Bildung von Covarianten binärer Formen die Beschränkung auf solche mit nur einer Reihe von Veränderlichen gerechtfertigt ist.

Für ternäre und höhere Formen hat sich ein Satz, der dem Theoreme von der Endlichkeit des Formensystems bei binären Formen entspräche, trotz wiederholter Bemühungen von Gordan nur erst in einzelnen Fällen als gültig erwiesen. Dagegen nahm Clebsch in seiner grossen Arbeit: Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (Gött. Abhandl. XVII. März 1872., vergl. auch Math. Ann. Bd. V.) eine Erledigung der Fragen in Angriff, welche bei mehr Veränderlichen den letzt erwähnten auf binäre Formen bezüglichen entsprechen. Bei binären Formen gibt es wesentlich nur eine Art von Veränderlichen, die man als die Punkte einer Geraden zu deuten pflegt. Bei ternären Formen treten aber bereits zweierlei, bei quaternären dreierlei Variable auf, entsprechend den verschiedenen Grundgebilden in Ebene und Raum, welche die projectivische Geometrie unterscheidet: dem Punkte und der Geraden in der Ebene, dem Punkte, der Geraden und der Ebene im Raume. Bei n homogenen Veränderlichen wird die Zahl dieser verschiedenen Stufen*) gleich (n — 1). Insofern man nun

*) Das Werk stellt sich hierdurch neben Salmon's Lessons introductory to the modern Algebra. Ein Vergleich beider Bücher ist namentlich auch für Clebsch's mathematische Denkweise charakteristisch: bei Salmon in mannigfacher Abwechselung eine Fülle verschiedener Methoden, bei Clebsch ein einheitlicher streng systematischer Gang.

*) Die Unterscheidung dieser Stufen spielt bereits in Grassmann's Ausdehnungslehre von 1844 eine wichtige Rolle.

alle solche Bildungen von der Betrachtung ausschliesst, welche sich aus anderen, die man bereits berücksichtigte, rational und ganz zusammensetzen lassen, genügt es, wie Clebsch zeigt, solche Formen zu betrachten, welche von jeder Art der in Betracht kommenden Veränderlichen höchstens eine Reihe enthalten. In der Geometrie der Ebene z. B. beachte man nur solche Formen, welche entweder allein eine Reihe von Punktcoordinaten oder nur eine Reihe von Liniencoordinaten oder von jeder Coordinatenart je eine Reihe enthalten. Die ersten beiden Classen repräsentiren, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Curve in Punkt- bez. Liniencoordinaten. Die dritte Classe ergibt das, was man früher als Zwischenform bezeichnet, aber nicht eigentlich geometrisch verwerthet hat. Die Formen dieser Art repräsentiren geometrisch eine Verwandtschaft zwischen den Punkten der Ebene und einem von Geraden umhüllten Orte, oder, was dasselbe ist, zwischen den geraden Linien der Ebene und zugeordneten Punktgebilden. Wir werden noch weiter unten berichten, wie Clebsch im Anschlusse an die hier besprochene Arbeit es unternahm, diese Art geometrischer Beziehung, die er als Connex bezeichnet, als neues Grundgebilde in die Geometrie der Ebene einzuführen, und dadurch einen ersten Schritt that, um die Lehre von den Differentialgleichungen erster Ordnung mit der neueren geometrischen Forschung in Verbindung zu bringen.

Für ternäre Formen, auf die sich das besprochene Beispiel bezieht, hat übrigens Clebsch in der genannten Arbeit den Kreis der zu betrachtenden Formen noch enger gezogen. Bereits Gordan hatte in einer Arbeit über Combinanten (Math. Ann. Bd. IV) Connexe betrachtet, die einer gewissen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen; auf eben solche Formen darf man sich, nach den Untersuchungen von Clebsch, überhaupt beschränken. Eine entsprechende Reduction des Problems scheint auch bei mehr Veränderlichen statthaft, durch die Arbeit von Clebsch ist aber die bez. Frage erst angeregt, noch nicht erledigt.

Für den Standpunkt, wie ihn Clebsch mit diesen Untersuchungen entwickelt hat, erscheint die Liniengeometrie als ein specieller Theil der überhaupt auf vier homogene Variable bezüglichen Probleme. Dementsprechend gelingt es Clebsch, die Symbolik, die er, wie oben berichtet, insbesondere für Linien-Complexe entwickelt hatte, auf alle Formen mit beliebig vielen Veränderlichen auszudehnen. Sie gibt ihm den Ausgangspunkt für seine weiteren Betrachtungen und den wesentlichen Apparat zum Beweise der abzuleitenden Sätze. —

Die zuletzt besprochenen Arbeiten gehen alle darauf aus, solche Formen anzugeben, aus denen sich alle anderen rational und ganz zusammensetzen lassen. Aber man kann die Aufgabe auch so stellen, dass man nur rationale Darstellung der ausgeschiedenen Bildungen verlangt. Mit Bezug auf diese Fragestellung haben Hermite*) und Brioschi**) bei binären Formen ganz allgemein ein System „associirter Formen“ aufgestellt. Alle Covarianten drücken sich durch dieselben in der Weise rational aus, dass im Nenner jedesmal nur die Potenz einer Form, etwa der Grundform auftritt. Sie gelangten zu diesem wichtigen Satze mit Hülfe einer gewissen linearen Substitution, vermöge deren die gegebene Form Coëfficienten erhält, die sich aus Invarianten und Covarianten zusammensetzen lassen (vergl. hierzu Clebsch's Theorie der binären Formen, deren zweite Hälfte diesen Untersuchungen gewidmet ist). In einer Note in den Göttinger Nachrichten (Aug. 1870. vergl. Math. Ann. Bd. III) zeigte nun Clebsch, dass die von jenen aufgestellten Systeme associirter Formen noch nicht die einfachsten ihrer Art sind, dass sie sich vielmehr noch aus niederen Bildungen zusammensetzen lassen, nämlich aus der Grundform, aus den Covarianten, welche in ihren Coëfficienten quadratisch sind, und aus den Functionaldeterminanten derselben mit der Grundform (vergl. den vereinfachten Beweis von Gundelfinger. Borch. J. Bd. 74).

Beziehen sich diese Betrachtungen gleichmässig auf Invarianten und Covarianten, so gibt es ähnliche Ueberlegungen, die nur Invarianten betreffen. Sie gehen darauf aus, solche Functionen der Veränderlichen als neue Variable einzuführen, welche mit den gegebenen Formen covariant verknüpft sind. Die Coëfficienten der neuen „typischen“ Form sind dann Invarianten, und durch diese Invarianten stellen sich von selbst alle anderen dar. Hermite, von dem diese Art der Betrachtung überhaupt herrührt, benutzt irrationale Bildungen zur typischen Darstellung. Aber dadurch wird gerade der charakteristische Unterschied aufgehoben, der zwischen der Typik und der sonst so viel gebrauchten Methode der kanonischen Formen besteht: die Beschränkung auf das Rationale. Dem gegenüber haben Clebsch und Gordan in einer gemeinsamen Arbeit über Formen fünften und sechsten Grades (annali di matematica. 1867. t. I.) insbesondere entwickelt, wie man den Vortheil rationaler Darstellung bei Formen gerader Ordnung dadurch erreichen kann, dass man quadratische Covarianten als neue Veränderliche einführt. Später haben Clebsch und seine Schüler die typische Darstellung auch anderer Formen gegeben; man vergleiche hierüber den zweiten Theil der „Theorie der binären Formen,“ in dem sie sämmtlich aufgeführt sind. —

Es war schon wiederholt von den Beziehungen der Invariantentheorie der linearen Substitutionen zur allgemeinen Lehre von den ein-

---

*) Cambr. und Dublin math. Journ. 1854. Crelle J. Bd. 52.

**) Annali di matem. tomo I p. 296.

deutigen Umformungen die Rede, und es wurde bereits von den Resultaten berichtet, welche letztere Theorie seither bei ternären und quaternären Formen aufzuweisen hat. Bei binären Formen, bei denen die Erledigung der einschlägigen Probleme um Vieles leichter scheint, hat zuerst Hermite (Comptes Rendus tome 46 pag. 961), dann Gordan (Borch. J. Bd. 71) den Gegenstand in der Weise in Angriff genommen, dass geradezu die Invarianten der durch eine gegebene eindeutige Transformation umgewandelten Form aufgestellt werden. Die Art, in der Gordan die eindeutige Transformation einführt, entspricht genau denjenigen, deren er und Clebsch sich in dem Buche über Abel'sche Functionen bei ternären Formen bedienten. Die neuen homogenen Veränderlichen werden mit ganzen Functionen der ursprünglichen proportional angenommen und aus diesen Gleichungen und der gleich Null gesetzten gegebenen Form werden die ursprünglichen Veränderlichen eliminirt. Die entstehende Resultante ist die transformirte Form. Die letztere ist also eine simultane Invariante der gegebenen Form und der Transformationsgleichungen; ihre Invarianten setzen sich dementsprechend aus den Invarianten der gegebenen Form und der Transformationsfunctionen zusammen.

Clebsch hat sich speciell mit der quadratischen Transformation binärer Formen beschäftigt (vergl. das Fünfseit und die Gleichungen fünften Grades, Math. Ann. Bd. 4. Juni 1871). Den Kern seiner Betrachtung bildet eine geometrische Repräsentation der quadratischen Transformation, die hier um so mehr auseinandergesetzt sein mag, als sie in ihrer Einfachheit ein ausgezeichnetes Beispiel für das Zusammengehen algebraischer Entwickelung und geometrischer Auffassung gibt, wie es die neuere Zeit entwickelt hat. Man ziehe n Tangenten an einen Kegelschnitt. Dann sind bekanntlich die Reihen von n Punkten, in welchen dieselben von einer beliebigen anderen Tangente des Kegelschnittes getroffen werden, alle untereinander projectivisch verwandt. Schneidet man die n Tangenten mit einer anderen Linie der Ebene, so ist das nicht mehr der Fall, sondern die durch die neuen Schnittpunkte repräsentirte Form geht aus der ursprünglichen eben durch eine quadratische Transformation hervor und die Gesammtheit der Formen, die durch quadratische Transformation entstehen können, ist durch die Gesammtheit der Schnittpunktsysteme der Geraden der Ebene mit den n Tangenten repräsentirt*). Handelt es sich jetzt darum, quadratische Transformationen zu bestimmen, welche der transformirten Form besondere Invarianteneigenschaften ertheilen, so

*) In ähnlicher Weise interpretirt man nach Clebsch die cubischen Transformationen, indem man n Osculationsebenen an eine Raumcurve dritter Ordnung legt und diese Ebenen mit den Geraden des Raumes schneidet.

kommt das auf die Bestimmung gewisser Linien der Ebene, d. h. auf ein Problem der linearen Invariantentheorie bei drei Veränderlichen hinaus.

Clebsch wendet diese Untersuchungen insonderheit auf binäre Formen fünften Grades an, und ohne dass wir hier eine nähere Darlegung der zahlreichen Resultate geben können, welche seine Arbeit im Einzelnen bietet, müssen wir hervorheben, dass er dieselben mit den Untersuchungen von Jerrard, Hermite und Kronecker, betr. die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, in Verbindung bringt.

Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, wie sie durch Lagrange begründet, durch Gauss und Abel weiter entwickelt, durch Galois zu ihrer jetzigen Allgemeinheit erhoben worden ist, hat Clebsch in hohem Masse interessirt. Er hat freilich in dieser Richtung nicht eigentlich eigene Untersuchungen angestellt, aber er hat indirect diesen Fragen genützt, indem er keine Gelegenheit vorübergehen liess, wenn ein geometrisches oder algebraisches Problem zu Gleichungen besonderen Charakters hinleitete, auf eben diese Gleichungen als an und für sich beachtenswerth hinzuweisen. Es waren wohl die Untersuchungen von Hesse und weiterhin die von Abel gewesen, die Clebsch's Interesse für diese algebraische Seite der geometrischen Probleme rege gemacht hatten; später wurde seine Aufmerksamkeit durch die vielfachen Beziehungen, in die er mit Camille Jordan getreten war, immer wieder auf Alles, was mit merkwürdigen Gruppirungen von Wurzeln einer Gleichung im Zusammenhange steht, hingelenkt. Umgekehrt hat man es ihm hauptsächlich zu verdanken, wenn Camille Jordan im Stande war, in seinem grossen Werke (Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, Gauthier-Villars 1870) ein besonderes Capitel den „Gleichungen der Geometrie“ zu widmen.

Das erste Beispiel einer solchen „geometrischen“ Gleichung hatten die neun Wendepunkte der Curven dritter Ordnung geboten, von denen Hesse zeigte, dass sie durch eine biquadratische und zwei reine cubische Gleichungen zu bestimmen seien. Es mögen ferner die Gleichungen genannt werden, welche bei der Bestimmung der 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung oder bei der Bestimmung der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung auftreten. Bei ihnen gelang es nicht, den Grad der Gleichungen zu erniedrigen (C. Jordan hat inzwischen bewiesen, dass das unmöglich ist), wohl aber besitzen ihre Wurzeln besondere Gruppirungen, welche interessante Beispiele für die bei Gleichungen höheren Grades in dieser Hinsicht auftretenden Eigenthümlichkeiten abgeben. Clebsch selbst hat in seiner Arbeit über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, deren wir oben gedachten, die Gleichung zehnten Grades näher discutirt, die durch die 10 Eckpunkte des Pentaeder's vorgestellt wird. In seinem Aufsatze „über die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung" (Borch. J. Bd. 58) spielt der Zusammenhang zwischen einer Gleichung vierten und einer Gleichung sechsten Grades, auf den schon Hesse geführt worden war, eine interessante Rolle. Wir gedachten ferner bereits der Untersuchungen über die Theilungsgleichungen der Abel'schen Functionen, die Clebsch und Gordan in ihrem gemeinsamen Buche gegeben haben. Aber sehr viel charakteristischer für Clebsch's allgemeine Auffassungsweise sind zwei andere Leistungen, die wir beide ebenfalls schon berührt haben. Die eine ist die, dass Clebsch allgemein den Zusammenhang erkannte, den die Theilungsgleichungen der Abel'schen Functionen mit den Gleichungen zur Bestimmung der Berührungscurven einer ebenen Curve besitzen; die andere liegt in der Zurückführung der Gleichungen, welche in der Flächenabbildung auftreten, eben auf die Bestimmung solcher Berührungscurven.

Wir haben bei dieser Gelegenheit noch insbesondere von der Arbeit: über die binären Formen sechsten Grades und die Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen (Gött. Abhandl. Bd. 14. Juni 1869. vergl. Math. Ann. Bd. II) Bericht zu erstatten. Von der Aufgabe ausgehend, Curven dritter Ordnung zu construiren, welche sechs gegebene Gerade eines Büschels berühren, hatte Cayley (Quarterly J. Bd. 9) das Problem aufgestellt, eine binäre Form sechsten Grades in die Summe der dritten Potenz einer quadratischen und der zweiten Potenz einer cubischen Form zu zerlegen. Dieses Problem ist, wie Clebsch zeigt, vom 40ten Grade und kann vermöge einer Gleichung vom 27ten und einer anderen vom 5ten Grade gelöst werden. C. Jordan, dem Clebsch diese Resultate mitgetheilt hatte, erkannte die Uebereinstimmung dieser Gleichung vierzigsten Grades mit derjenigen, die sich bei der Dreitheilung der ultraelliptischen Functionen einstellt. Clebsch selbst gab darauf die Zurückführung des einen Problems auf das andere. Bei der weiteren Behandlung der Aufgabe erschliesst er nicht nur die Existenz gewisser Resolventen, sondern, und das macht sie besonders bemerkenswerth, er gibt Methoden an, um diese Resolventen unter Benutzung der Hülfsmittel symbolischer Rechnung wirklich zu bilden. Man vergl. hierzu p. 234 ff. der „Theorie der binären Formen", wo Clebsch diese Untersuchungen, oder wenigstens einen Theil derselben, reproducirt hat.

War Clebsch in dieser Weise bemüht, die Invariantentheorie auch mit solchen Gebieten mathematischer Forschung in Verbindung zu setzen, die ihr bis dahin ziemlich fern standen, so sei, als einer Leistung in gleichem Sinne, eines Aufsatzes über die Charakteristiken der Kegelschnitte gedacht (Math. Ann. Bd. VI. Mai 1872). In der Theorie der Charakteristiken, wie sie durch Chasles geschaffen ist, spielt ein Satz, dem man durch Induction eine grosse Ausdehnung gegeben hat, eine fundamentale Rolle. Derselbe sagt aus, dass die Zahl der Kegelschnitte einer einfach unendlichen Reihe, welche einer gegebenen Bedingung genügen, sich aus zwei Zahlenpaaren linear und homogen zusammensetzt, von denen das eine bloss der Reihe, das andere bloss der hinzutretenden Bedingung angehört. In Benutzung der Resultate seiner Abhandlung: „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie," deren wir oben ausführlich gedacht, zeigt nun Clebsch, dass dieser Satz aus bestimmten Eigenthümlichkeiten hervorgeht, die das simultane Formensystem beliebiger ebener Gebilde besitzt, wenn sich unter denselben ein Kegelschnitt befindet. Es ist durch diese Untersuchung nicht nur der Satz in einer vollständigeren Weise bewiesen, als das bis dahin geschehen war*), sondern es ist namentlich auch eine Begrenzung desselben wahrscheinlich gemacht. Denn der Beweis des Satzes hängt in einer solchen Weise von speciellen Eigenschaften der Kegelschnitte ab, dass eine Geltung desselben in der nämlichen Form bei Curven höherer Ordnung nicht angenommen werden kann. Dem widerspricht nicht, wenn er sich auch bei höheren Curven in einzelnen Fällen als gültig erwiesen hat (cf. Chasles in den Comptes Rendus t. 58, 1864, Zeuthen in den Math. Ann. Bd. 3. p. 154); denn in diesen Fällen sind die Bedingungen, denen man die Curven unterwirft, besonderer Natur. — Clebsch setzt bei seinem Beweise eine gewisse Unabhängigkeit zwischen der gegebenen Kegelschnittreihe und der hinzutretenden Bedingung voraus. Findet eine solche nicht statt, so hat der Satz von Chasles auch keinen unmittelbaren Sinn. Indirect ist er aber auch auf solche Fälle durch Chasles (Comptes Rendus 1864) und Cremona (ebenda 1865) vermöge einer nicht völlig begründeten Induction angewandt worden und hat dann zu lauter richtigen Resultaten geführt. Bei Clebsch sind solche Fälle, wie gesagt, ausdrücklich von der Betrachtung ausgeschlossen; die auf sie bezügliche Benutzung des Chasles'schen Satzes ist bis jetzt noch unbewiesen.

Gedenken wir schliesslich der bereits genannten Untersuchung über Connexe, die Clebsch als neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene einzufügen gedachte (vergl. Gött. Nachrichten, Aug. 1872. Math. Ann. Bd. VI). Mit denselben hat Clebsch der geometrischen Forschung ein unübersehbares Feld neuer Speculation geöffnet; er hat selbst nur noch die Richtung im Allgemeinen bezeichnen können, in der er den Gegenstand zu verfolgen beabsichtigte. Der Connex wird bei ihm in demselben Sinne Object der geometrischen Untersuchung, wie etwa eine Curve oder Fläche. Ein Connex hat seine

*) Vergl. z. B. die Betrachtungen von Darboux in den Comptes Rendus. Es wird dort nur auf solche Curvenreihen Rücksicht genommen, die von einem Parameter rational abhängen. In neuester Zeit wurde ein geometrischer Beweis für den Fundamentalsatz der Charakteristikentheorie von Halphen mitgetheilt, Bulletin de la Société Mathématique. 1873.

Singularitäten, zwischen ihnen bestehen Gleichungen, die den Plücker'schen Formeln für die Singularitäten ebener Curven analog sind. Man kann nach den Gebilden fragen, die zwei, drei Connexen etc. gemeinsam sind. Alle diese Erzeugnisse besitzen bei beliebigen eindeutigen Transformationen, die man auf das doppelt ternäre System der Punkt- und Linien-Coordinaten erstrecken darf, ein Geschlecht u. s. f.

Aber besonders wichtig scheint die Verbindung, in welche die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung (zunächst bei zwei absoluten, oder, was dasselbe ist, drei homogenen Veränderlichen) zur Theorie der Connexe tritt. Jeder Connex zieht eine *solche* Differentialgleichung nach sich; ihre Integralcurven sind dadurch definirt, dass jedesmal Punkt und zugehörige Tangente der Connexgleichung genügen. Man erhält dadurch die allgemeinste algebraische Differentialgleichung erster Ordnung, wobei das Verhältniss ein solches ist, dass zu einer gegebenen Differentialgleichung noch unendlich viele Connexe gehören. Es ist dadurch für diese Differentialgleichungen ein ganz neuer Standpunkt der Auffassung gewonnen, der sich auf das Genaueste an die neuere geometrisch-algebraische Forschung anschliesst. Man kann z. B. diese Differentialgleichungen nach ihrem Geschlechte eintheilen u. s. f. Es ist aber namentlich auch ein formaler Apparat geschaffen, mit dem man die Differentialprobleme behandeln wird, wenn man sich an die genannten neueren Anschauungen anschliessen will. Es scheint dieser Apparat die Ergänzung zu den *mehr synthetischen* Untersuchungen über Differentialgleichungen bilden zu sollen, wie sie in neuester Zeit besonders von Lie begonnen wurden.

Clebsch beabsichtigte, seine Untersuchungen auf mehr Veränderliche auszudehnen. Die Theorie der quaternären Formen z. B., welche eine Reihe von Punkt- und eine Reihe von Ebenen-Coordinaten enthalten, schliesst dann die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bei drei Variabeln in sich. Auch für sie ist die Eintheilung in Geschlechter gegeben; andererseits mag man sie in Gruppen theilen je nach Ordnung und Classe der Connexe, zu denen sie gehören. Clebsch hat alle diese Fragen, die ihn in der letzten Zeit beschäftigten, nur noch gesprächsweise berühren können. Aber wir glaubten um so mehr, dieselben hier wenigstens nennen zu sollen, als er selbst von ihnen reichen Erfolg erwartete. Wie so oft vorher, *hat* Clebsch *mit diesen Untersuchungen* den Blick in neue, weite Gebiete geöffnet, die altbekannte, aber bis dahin getrennte Gegenstände in sich begreifen. Er hat mit ihnen dem Grundzuge seiner mathematischen Denkweise noch einmal Ausdruck gegeben, welche die Mathematik nicht als eine Reihe geschiedener, einander fremder Disciplinen, sondern als einen lebendigen Organismus erfassen wollte.

Liste der Publicationen.

I. Selbständige Veröffentlichungen.

1. De motu ellipsoidis in fluido incompressibili viribus quibuslibet impulsi. Regiomonti 1854.
2. Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig, 1862. B. G. Teubner.
3. Theorie der Abel'schen Functionen. (Mit P. Gordan). Leipzig, 1866. B. G. Teubner.
4. Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig, 1872. B. G. Teubner.

In autographirten Heften: Vorträge über elementare und über analytische Mechanik. Carlsruhe 1858/59.

II. In Crelle-Borchardt's Journal.

Bd. 52. (1856.) Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit. 30 p. Aug. 1854.

Bd. 53. (1857.) Zusatz zu dem vorhergehenden Aufsatze. 5 p. Mai 1856.

Anwendung der elliptischen Functionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes. 17 p. December 1855.

Bd. 54. (1857.) Ueber eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. 20 p. Mai 1857.

Bd. 55. (1858.) Ueber die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form. 20 p. November 1857.

Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten. 21 p. Febr. 1858.

Bd. 56. (1859.) Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. 10 p. März 1858.

Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale. 26 p. Juni 1858.

Bd. 57. (1860.) Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt. 5 p. 1859.

Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens. 18 p. Mai 1859.

Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper. 21 p. Aug. 1859.

Theorie der circularpolarisirenden Medien. 40 p. Oct. 1859.

Bd. 58. (1861.) Zur Theorie der algebraischen Flächen. 16 p. März 1860.

Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen. 18 p. März 1860.

Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung. 11 p. April 1860.

Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren. 19 p. Juni 1860.

Bd. 59. (1861.) Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen. 62 p. September 1860.

Ueber Curven vierter Ordnung. 21 p. Sept. 1860.

Ueber Jacobi's Methode, die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zu integriren und ihre Ausdehnung auf das Pfaff'sche Problem (aus einem Schreiben an den Herausgeber). 3 p. März 1861.

Ueber die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung. 36 p. Februar 1861.

Bd. 60. (1862.) Ueber das Pfaff'sche Problem. 59 p. Sept. 1860.

Ueber eine Eigenschaft der Kugelfunctionen. 8 p. Juni 1861.

Bd. 61. (1863.) Ueber das Pfaff'sche Problem. Zweite Abh. 34 p. Januar 1861.

Bemerkung zur Abhandlung des Hrn. Röthig über das Potential eines homogenen rechtwinkeligen Cylinders. 8 p. Oct. 1861.

Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. 68 p. October 1861.

Bd. 62. (1863.) Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung. 46 p. Januar 1862.

Ueber eine Classe von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. 14 p. November 1861.

Bd. 63. (1864.) Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven. 8 p. September 1862.

Zur Theorie der algebraischen Flächen. 13 p. Mai 1863.

Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. 28 p. Sept. 1863.

Bemerkung zu Jacobi's Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten. 3 p. Juli 1863.

Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie. 55 p. Oct. 1863.

Bd. 64. (1864.) Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. 23 p. Mai 1864.

Ueber die Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades. 3 p. April 1864.

Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. 3 p. April 1864.

Note zur Abhandlung des Hrn. Cremona: Sur l'hypocycloide à trois rebroussements. 2 p. Juni 1864.

Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. 61 p. October 1864.

Ueber einige von Steiner behandelte Curven. 6 p. Juli 1864.

Bd. 65. (1865.) Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. 12 p. Febr. 1865.

Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung. 21 p. October 1865.

Bd. 67. (1867.) Ueber die Steiner'sche Fläche. 22 p. Juli 1866.

Ueber ein Problem der Forstwissenschaft. 18 p. April 1866.

Ueber simultane binäre cubische Formen. 11 p. Juni 1867.

Zur Theorie der binären Formen vierten Grades. 10 p. Juni 1867.

Bd. 68. (1867.) Ueber die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen 11 p. Juni 1867.

Ueber das simultane Formensystem einer quadratischen und einer cubischen binären Form. 8 p. Juli 1867.

Bd. 69. (1868.) Ueber Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. 43 p. April 1868.

Ueber eine Eigenschaft der Functionaldeterminanten. 4 p. November 1868.

Bd. 70. (1869.) Note zu dem vorhergehenden Aufsatze. 7 p. December 1868.

III. In den Mathematischen Annalen.

Bd. 1. (1869.) Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen (mit P. Gordan) 34 p. Sept. 1867.

Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen $p = 2$ ist. 3 p. October 1868.

Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung. 64 p. October 1868.

Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln (mit Gordan). 42 p. Sept. 1868.

Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter Ordnung. 3 p. März 1869.

Bd. 2. (1870.) Ueber die Plücker'schen Complexe. 8 p. April 1869.

Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 5 p. Juni 1869 (vergl. Gött. Abhandl.).

Ueber die Möglichkeit, zwei gegebene binäre Formen linear in einander zu transformiren. 9 p. Nov. 1869.

Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. 3 p. Aug. 1869.

Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve dritten Grades besitzen. 27 p. Januar 1870.

Bd. 3. (1871.) Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen. 31 p. Mai 1870.

Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. 25 p. Mai 1870.

Ueber die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form. 2 p. Februar 1870.

Zur Theorie der binären algebraischen Formen. 3 p. Aug. 1870 (aus den Gött. Nachrichten).

Bd. 4. (1871.) Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits. 62 p. Juni 1871.

Ueber das ebene Fünfeck. 14 p. Juli 1871.

Bd. 5. (1872.) Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$. 26 p. October 1871.

Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung. 3 p. März 1872.

Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung. 5 p. März 1872.

Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. 8 p. März 1872 (vergl. Gött. Abhandl.).

Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe, 7 p. Januar 1872 (aus den Gött. Nachr.)

Bd. 6. (1873.) Zur Theorie der Charakteristiken. 15 p. Mai 1872.

Zur Theorie der Riemann'schen Fläche. 15 p. Sept. 1872.

Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene. 13 p. Sept. 1872. (Aus den Gött. Nachrichten.)

IV. Annali di Matematica.

1. ser. Bd. IV. (1862.) Sur un problème concernant la théorie des surfaces du 2ème ordre. 4 p. Febr. 1862.

2. ser. Bd. I. (1867.) Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie (mit P. Gordan). 57 p. Febr. 1867.

V. Liouville's Journal de Mathématiques.

Bd. VIII. (1863.) Sur la surface qui coupe la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires. 11 p. Sept. 1862.

VI. Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Bd. 14. (1868/69) Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 59 p. Juni 1869.

Bd. 15. (1870.) Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen der fünften Ordnung. 62 p. Jan 1870.

Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. 35 p. Nov. 1870.

Bd. 16. (1871.) Zum Gedächtniss an Julius Plücker. 40 p. December 1871.

Bd. 17. (1872) Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. 60 p. März 1872.

VII. Nachrichten der Kgl. Gesellschaft etc. in Göttingen.

1869. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen. 4 p. December.

1870. Ueber gewisse Probleme aus der Theorie der Oberflächen. 5 p. Mai.

Zur Theorie der binären algebraischen Formen. 5 p. August.

1871. Bemerkungen zu der Theorie der Gleichungen fünften und sechsten Grades. 6 p. April.

Ueber die geometrische Interpretation der höheren Transformationen binärer Formen und der Formen fünfter Ordnung insbesondere. 11 p. Juni.

1872. Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe. 12 p. Februar.

Mittheilung über eine Fläche dritter Ordnung. 2 p. August.

Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene. 20 p. September.

VIII. Göttingische gelehrte Anzeigen.

1869. Bericht über Plücker's „Neue Geometrie des Raumes etc." 12 p. October.

1872. Bericht über Clebsch's „Theorie der binären Formen" 14 p. Februar.

IX. Monatsberichte der Berliner Akademie.

1857. Ueber die Criterien des Maximums und des Minimums in der Variationsrechnung. 4 p. December.

1860. Ueber eine symbolische Darstellungsweise algebraischer Formen, und über die davon zu machende Anwendung auf Probleme der Elimination. 5 p. October.

1868. Ueber die Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiter Ordnung. 6 p. April.

X. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

Bd. 60. (1865.) Sur une propriété des courbes d'ordre n, à $\frac{n \cdot n-3}{2}$ points doubles. 3 p. Juni.

Bd. 62. (1866.) Sur la théorie des fonctions abéliennes (mit P. Gordan). 7 p. März.

Bd. 62. (1866.) Sur la géométrie des courbes gauches tracées sur une surface générale du troisième ordre. 2 p. Mai.

Bd. 64. (1867.) Sur les formes binaires du sixième degré (mit P. Gordan). 7 p. März.

Bd. 67. (1868.) Sur les surfaces algébriques. 2 p. December.

XI. Rendiconti del R. Istituto Lombardo.

1868. Intorno alla rappresentazione di superficie algebriche sopra un piano. 13 p. November.

XII. Werke und Abhandlungen Anderer, durch Clebsch veröffentlicht.

Jacobi. Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi. Borch. Journal Bd. 60. 1862.

Jacobi. Vorlesungen über Dynamik. Berlin G. Reimer. 1866.

Plücker. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig. B. G. Teubner. 1868/69.

Einzelne Referate in den Bänden der Fortschritte der Physik, dem ersten und zweiten Bande der Fortschritte der Mathematik, in Hoffmann's Zeitschrift für mathematischen etc. Unterricht.

Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung.

Von Ferdinand Lindemann in Erlangen.

Schon verschiedentlich hat man versucht, die Resultate und Methoden der neueren Geometrie auch für die Mechanik fruchtbar zu machen, den allgemeinen dort herrschenden Principien hier entsprechende gegenüberzustellen und so die Mechanik unter einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten. Vor Allem schien die in der Geometrie durchgeführte dualistische Auffassung ihr Gegenbild in der Möglichkeit zu finden, alle Kraftwirkungen aus einzelnen Kräften und Kräftepaaren entstehen zu lassen. Mit Begeisterung begrüsste daher Chasles*) das Werk Poinsot's**), in welchem durch Einführung des Begriffs der Kräftepaare die Statik zuerst eine ebenso einfache als consequente Begründung fand; er sieht in dieser neuen Methode einen ersten Schritt zum Aufbau einer doppelten Dynamik, indem man auf der einen Seite den Punkt, auf der andern die Ebene als Element der Ausdehnung betrachten soll***). Dieser Parallelismus in den ersten Principien trat noch klarer hervor, als Poinsot†) auch die directe Betrachtung der drehenden Bewegungen gleich der der translatorischen einführte und so zuerst über die geometrischen Vorgänge bei einer Rotation um einen Punkt Licht verbreitete. Zugleich musste damit ein anderes Princip der Analogie bemerkt werden, welches auf Kräfte und unendlich kleine Rotationen eine ähnliche Anwendung findet, wie in der Geometrie das der Dualität auf Punkte und Ebenen. Es setzen sich nämlich solche Rotationen nach denselben Gesetzen zusammen wie Kräfte, eine Symmetrie, welche Poinsot††) zuerst hervorhob,

*) Chasles: Aperçu historique, note 34. Vgl. auch A. Comte: Cours de philosophie positive, t. I, Paris 1830.

**) Elements de statique, zuerst Paris 1804.

***) Mit ähnlichen Gedanken beschäftigte sich auch Plücker; vgl. Philos. Transact. 1866, p. 361.

†) Théorie nouvelle de la rotation des corps. Paris 1834. Ausführlicher in Liouville's Journal des math. t. XVI, 1851.

††) Théorie nouvelle de la rotation etc.

während Möbius*) sie dann vollkommen durchführte und, über die Zusammensetzungsregeln hinausgehend, auch der Theorie der Momente und der Kräftepaare analoge Betrachtungen für unendlich kleine Rotationen gegenüberstellte. Ueberhaupt ist es ein wesentliches Verdienst des letzteren, die von Poinsot gewonnenen Resultate unter einem neuen Gesichtspunkte bearbeitet und bereichert durch eine Fülle neuer Ideen, in Deutschland verbreitet zu haben; wobei zugleich die räumlich-anschauliche, synthetische Methode, deren sich dieser bei seinen Untersuchungen bediente, in fruchtbringendster Weise durchgebildet wurde. Zur Ausbildung dieser Theorien that zunächst Chasles**) einen weiteren Schritt, indem er die rein geometrischen Vorgänge bei einer unendlich kleinen Bewegung eingehender untersuchte. Es war damit wohl zuerst das Studium der kinematischen Geometrie im Allgemeinen angeregt, einer Disciplin, welche in neuerer Zeit immer weiter ausgebildet ward, wie besonders auch die Arbeiten der Herren Resal und Aronhold bezeugen***). Allerdings wurde so dieser Theil der Mechanik durch Einführung geometrischer Methoden in hohem Masse gefördert; es blieb dabei aber die Betrachtungsweise der neueren projectivischen Geometrie, die ihr eigenthümliche Fassung metrischer Probleme ohne Anwendung, während man doch gerade von ihr einen dualistischen Aufbau der Mechanik auf Grund jener allgemeinen Reciprocitätsgesetze im Sinne von Chasles erwarten durfte. Wenn aber in dieser Richtung keine erfolgreichen Schritte gethan sind, so liegt der Grund dafür in dem undualistischen Charakter unserer metrischen Anschauungen, der sich auch besonders in der unvollkommenen Symmetrie offenbart, welche die Theorie der Kräftepaare mit der einzelner Kräfte verbindet.

Es findet diese Störung der Dualität dadurch ihren Ausdruck, dass wir für die Massbestimmung im Punkte den von ihm nach dem imaginären, unendlich fernen Kugelkreise gehenden Kegel 2. Ordnung zu Grunde legen, dagegen für die Massbestimmung in der Ebene ihren Schnitt mit der unendlich fernen Ebene, also ein lineares Gebilde; und dieser Auszeichnung der metrischen Geometrie im Punkte

---

*) Möbius: Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Crelle's J. Bd. 18, p. 189; 1838.

**) Chasles: Bulletin des sciences math. p. Férussac, 1830; Comptes rendus, t. XVI, p. 1420, 1843; t. LI, 1860; t. LII, 1861. Vgl. auch Jonquières, Mélanges de géométrie pure, Paris 1856.

***) Resal: Traité de cinématique pure, Paris 1862, Chap. III und V. Aronhold: Grundzüge der kinematischen Geometrie; in den Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleisses in Preussen, Berlin 1872. Vgl. auch den bez. Abschnitt in Schell's Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1870, p. 7—99.

steht die Thatsache zur Seite, dass wir an ihn, als erzeugendes Element, unsere mechanischen Vorstellungen vorwiegend zu knüpfen pflegen. Man kann aber eine allgemeinere Massbestimmung concipiren, bei welcher das Gesetz der Dualität vollkommen gewahrt bleibt, und es hat nach den obigen Bemerkungen wohl ein gewisses Interesse, die Gestaltung der mechanischen Gesetze unter einer solchen Voraussetzung zu betrachten. In diesem Sinne habe ich die vorliegenden Untersuchungen durchgeführt, und so mögen sie als ein erster Versuch in der bezeichneten Richtung angesehen werden. Es treten dann Punkt und Ebene einander auch in metrischer Beziehung vollkommen gleichmässig als elementare Grössen gegenüber, und somit lehnt sich die ganze Darstellung auf das Engste an die projectivische Geometrie an.

Wir benutzen dabei nach dem Vorgange von Cayley*) statt des unendlich fernen imaginären Kegelschnittes eine allgemeine (unendlich fern zu denkende) Fläche 2. Ordnung als fundamentales Gebilde und *definiren als Entfernung zweier Punkte den mit einer willkürlich, aber fest gewählten Constanten c multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches durch sie und die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit der Fundamentalfläche bestimmt ist*, und analog: *als Winkel zweier Ebenen den mit einer anderen willkürlich, aber ebenfalls fest gewählten Constanten c′ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches sie mit den beiden von ihrer Schnittlinie an jene Fläche gehenden Tangentenebenen bilden***). Ueber die Natur der Fundamentalfläche, ob sie geradlinig ist oder nicht, ob reell oder imaginär, machen wir zunächst keine bestimmte Voraussetzung; wir werden uns allerdings geometrisch stets so ausdrücken, als wenn sie reell und geradlinig wäre, aber wir brauchen uns die Veränderlichen dann nur als complexe Grössen zu denken, um in der Darstellung alle möglichen Fälle gleichzeitig zu übersehen.

Ein wesentlicher Unterschied der so begründeten Massbestimmung gegenüber den thatsächlich gegebenen Verhältnissen besteht darin, dass eine gerade Linie zwei unendlich ferne Punkte hat, dass man also zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt zwei Parallele ziehen kann. Es ist damit der Zusammenhang angedeutet, in welchem eine auf Grund unserer obigen Definitionen construirte Massgeometrie mit den verschiedenen von anderer Seite aufgestellten Parallelentheorien

---

*) Cayley: A sixth memoir upon quantics. Philos. Transactions, vol. 149. 1859.

**) Die Definition des Winkels als Logarithmus eines Doppelverhältnisses gab für specielle Massbestimmung Laguerre: Nouv. annales de math. 1853, p. 57. Unter *specieller Massbestimmung* ist hier und im Folgenden stets die thatsächlich gegebene zu verstehen.

steht, und in der That hat Herr Klein nachgewiesen*), dass die von Cayley begründete projectivische Massbestimmung diese Theorien umfasst, dass sie insbesondere bei reeller, nicht geradliniger Fundamentalfläche identisch ist mit der Massbestimmung, wie sie die sogenannte *Nicht-Euklidische* (oder imaginäre) Geometrie aufstellt; und es gelang ihm so, diese von Bolyai und Lobatschefsky**) begründeten, anscheinend ganz heterogenen Untersuchungen der projectivischen Betrachtungsweise zu unterwerfen. Hierdurch stehen die folgenden Entwicklungen mit den Arbeiten der Herren Schering und de Tilly***) in gewisser Beziehung; ersterer untersuchte auf Grund dieser *Nicht-Euklidischen* Parallelentheorie besonders die Potentialfunction, während de Tilly die Zusammensetzung der Bewegungen und Kräfte bearbeitete.

Andererseits zeigte Herr Beltrami †), dass diese *Nicht-Euklidische* Geometrie in ihrem planimetrischen Theile zusammenfällt mit der gewöhnlichen metrischen Geometrie auf einer Fläche von constantem, negativem Krümmungsmasse, so dass z. B. die Geraden der Ebene als kürzeste Linien einer solchen Fläche erscheinen; und als dann durch Publication der Arbeiten Riemann's der Begriff eines Krümmungsmasses auch für Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen bekannt wurde, entwickelte er, zu solchen Mannigfaltigkeiten übergehend ††), insbesondere, wie auch dem Raume von 3 Dimensionen in der *Nicht-Euklidischen* Geometrie ein constantes negatives

---

*) Klein: Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Ann. Bd. IV, 1871, p. 573. Es finden sich hier die Definitionen für Strecken und Winkel in der oben gegebenen Form, die noch etwas allgemeiner ist als die Cayley'sche. Die dort auftretende Constante c entspricht geradezu der von Gauss gebrauchten Grösse k, welche für die Euklidische Geometrie unendlich gross gesetzt werden muss. Vgl. weitere Ausführungen einiger Punkte in einer gleich betitelten Arbeit, ib. Bd. VI, p. 112.

**) Vgl. über die einschlägige Litteratur F. Klein a. a. O. Hinzuzufügen ist, dass diese Theorien neuerdings eine übersichtliche Bearbeitung gefunden haben, in Frankreich von Herrn Flye St. Marie: Etudes analytiques sur la théorie des parallèles, Paris 1871; und in Deutschland von Herrn J. Frischauf: Absolute Raumlehre nach Joh. Bolyai, Leipzig 1872.

***) Schering: Die Schwerkraft im Gaussischen Raume; Göttinger Nachrichten, 1870 und 1873. De Tilly: Etudes de mécanique abstraite; Mémoires couronnées etc. publiées par l'académie r. de Belgique, t. XXI, 1870. Es werden hier nur die einfachsten Fälle betrachtet, wo die Richtungen und Axen der Kräfte und Bewegungen durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen.

†) Risolutione di problema di riportare i punti di una superficie etc. Annali di Mat. Serie I, t. VII, 1866; und: Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giornale di Matem. 1868.

††) Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica, Serie II, t. II, 1868/69.

Krümmungsmass beigelegt wird*). Es steht dies mit den allgemeinen Untersuchungen im Zusammenhange, in denen man als Bogenelement die Quadratwurzel aus einer beliebigen, positiven quadratischen Function von den Differentialen der Coordinaten statt der Wurzel aus der Summe ihrer Quadrate zu Grunde legt, wie dies besonders die Herren Beltrami und Lipschitz gethan haben**).

Während die erwähnten Untersuchungen sich auf die allgemeinsten Probleme der Mechanik beziehen, und soweit sie kinematischer Natur sind, die allgemeinste endliche Bewegung eines Systems behandeln, ist es vielmehr der Zweck der vorliegenden Arbeit, die ersten Grundlagen einer projectivischen Auffassung der Mechanik zu geben; sie beschränken sich deshalb darauf, *unter den angeführten Voraussetzungen die Theorie der unendlich kleinen Bewegungen eines freien, unveränderlichen Systems und die der Kräfte, welche an einem solchen angreifen, vom rein projectivischen Standpunkte aus zu entwickeln****. Zu dem Zwecke war es nöthig, auch die metrischen Relationen zwischen 2 Geraden, d. h. deren absolute Invarianten in Bezug auf die Fundamentalfläche in Liniencoordinaten aufzustellen, wie es in § 1. geschieht. Die linearen Transformationen, welche diese Fläche in sich überführen†), stellen alsdann die Bewegungen des Raumes dar (wir betrachten dabei eine Bewegung stets als gleichzeitig auf alle Punkte

*) In der von uns benutzten Massb. drückt sich dies Krümmungsmass des Raumes nach Herrn Klein (l. c.) einfach durch obige Constante c aus.

**) Beltrami: Sulla teorica generale dei parametri differenziali. Memorie dell' academia di Bologna. Serie II, t. VII, 1869. Lipschitz: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Borchardt's J. Bd. 74, p. 116; 1871. Vgl. auch die Untersuchungen desselben in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, ib. Bd. 70 und 72, sowie Christoffel: ib. Bd. 70.

***) Es mag bemerkt werden, dass mir der Werth derartiger Verallgemeinerungen als ein rein mathematischer erscheint, dass mir daher in den folgenden Untersuchungen alle jene philosophischen Speculationen fern liegen, welche man in Betreff unserer Raumanschauung daran knüpfen könnte. Bei einer solchen Auffassung wird man von ihnen nicht mit Herrn Dühring (vgl. dessen Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin 1873, p. 488) eine der Mechanik drohende Untergrabung der geometrischen Principien zu befürchten brauchen.

†) Mit endlichen Transformationen einer Form 2. Grades in sich beschäftigten sich auch Hermite: Remarques sur une mémoire de M. Cayley, rélatif aux déterminants gauches, Cambridge and Dublin Math. J. t. IX, 1854, und Cayley: Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle même par des substitutions linéaires: Crelle's J. Bd. 50, 1855, p. 288. — Sur quelques propriétés des déterminants gauches, ib. Bd. 32, p. 119 und Bd. 50, p. 299. — A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function, Phil. Transactions, 1858, vol. 148.

des Raumes ausgedehnt); *es wird also hier zugleich eine Theorie der unendlich kleinen linearen Transformationen einer Fläche 2. Ordnung in sich selbst gegeben,* wodurch die rein algebraische Seite gekennzeichnet ist, welche unseren Ausführungen — unabhängig von ihrer mechanischen Bedeutung — anhaftet. Durch unendlich oft wiederholte unendlich kleine Transformationen erhalten wir solche Umformungen des Raumes, welche als Bewegungen aufzufassen sind; dieselben führen, so entstanden, natürlich gleichzeitig jedes System von Erzeugenden der Fundamentalfläche in sich über; und nur solche Transformationen dürfen wir daher als Bewegungen betrachten, d. h. nicht diejenigen, welche die beiden Systeme von Erzeugenden vertauschen*). Von den so charakterisirten Transformationen ausgehend, erhalten wir zunächst besonders die von Chasles und Möbius über Elementarbewegungen für specielle Massbestimmung gegebenen Sätze. Insbesondere erscheinen dabei zwei lineare Complexe als charakteristisch für eine unendlich kleine Bewegung, und im Anschluss daran ergiebt sich eine Theorie der metrischen Eigenschaften eines linearen Complexes, d. h. seiner Beziehungen zur Fundamentalfläche (§ 3.). Die erst in kanonischer Form gegebenen Untersuchungen werden sodann für allgemeine Coordinatenbestimmung gegeben und dadurch die betreffenden Bewegungen durch ihre 6-Coordinaten definirt (§ 4.). Nachdem noch die von den Punkten des Raumes beschriebenen und von dessen Ebenen umhüllten Curven und der durch die Tangenten dieser gebildete Complex 2. Grades, sowie dessen Beziehungen zu den linearen Complexen (§ 5.—8.) näher betrachtet sind, wird nach der Lage dieses Complexes gegen die Fundamentalfläche und nach dem Verhalten der Erzeugenden dieser bei der Bewegung eine Eintheilung der verschiedenen Bewegungsarten aufgestellt (§ 10.). Das Princip der Dualität zwischen unendlich kleinen Rotationen und Kräften giebt sodann das Mittel, auch die Gesetze für die Zusammensetzung der Kräfte (§ 11.) und Kraftsysteme, die Theorie der Momente (§ 12. und 13.) und die Bedingungen des Gleichgewichtes (§ 14.) für eine allgemeine projectivische Massbestimmung durchzuführen. Für alle diese Untersuchungen ist die zwiefache Form besonders charakteristisch, in der es erlaubt ist, alle Gesetze und Relationen auszusprechen, was eben in der vollkommen dualistischen Massbestimmung für die Geometrie im Punkte und in einer Ebene seinen Grund hat.

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit erhielt ich von Herrn F. Klein und stand mit ihm während der Ausführung in steter Ver-

---

*) Vgl. Klein; Ueber d. sog. Nicht-Eukl. G. Math. Ann. IV, p. 600, und: Zur Mechanik starrer Körper, ib. p. 403.

bindung, so dass ich ihm wegen der Förderung meiner Arbeit in hohem Masse zu Dank verpflichtet bin.

§ 1.

Neigung und Moment zweier Geraden und zweier linearen Complexe gegen einander.

Für die oben eingeführte Massbestimmung wollen wir nun zunächst die analytischen Ausdrücke aufstellen.

Ist $\Omega = 0$ die Gleichung der Fundamentalfläche*), so wird *die Entfernung zweier Punkte x und y* (vgl. Klein a. a. O. Math. Annal. Bd. IV):

$$= c \cdot \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}} = 2\,ic \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

wo Ω_{xx}, Ω_{yy} diejenigen Ausdrücke bedeuten, welche entstehen, wenn man in Ω die Coordinaten x, resp. y der beiden Punkte einsetzt, und

$$\Omega_{xy} = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Omega_{xx}}{\partial x_i} y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ist; ebenso wird, wenn $\Omega' = 0$ die Gleichung der Fundamentalfläche in Ebenencoordinaten bedeutet, *der Winkel zweier Ebenen u und v:*

$$= c' \log \frac{\Omega'_{uv} + \sqrt{\Omega'^2_{uv} - \Omega'_{uu}\,\Omega'_{vv}}}{\Omega'_{uv} - \sqrt{\Omega'^2_{uv} - \Omega'_{uu}\,\Omega'_{vv}}} = 2\,ic' \arccos \frac{\Omega'_{uv}}{\sqrt{\Omega'_{uu}\Omega'_{vv}}}.$$

In den folgenden Untersuchungen soll jedoch immer

$$c = c' = \frac{i}{2} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

angenommen werden, damit die Summe der Winkel im Strahlbüschel gleich 2π wird. Es wird dadurch das Wesen der Sache im Allgemeinen nicht geändert; nur beim Uebergange zur speciellen Massbestimmung müssen wir die Constanten c und c' wieder einführen, da hier $c' = \frac{i}{2}$ und $c = \infty$ gesetzt wird. Aus dem Gleichsetzen beider Grössen folgt dann:

Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem Winkel ihrer absoluten Polarebenen, wenn wir als *absolute Polarebene* eines Punktes seine Polarebene in Bezug auf die Fundamentalfläche (*the absolute* nach Cayley) bezeichnen. Ebenso ist unter der *absoluten Polare*

*) Die Coefficienten von Ω sind im Folgenden immer als reelle Grössen vorausgesetzt.

einer Geraden die ihr in Bezug auf diese Fläche conjugirte Gerade verstanden.

Wir werden bei unseren Erörterungen besonders die metrischen Relationen, welche die gegenseitige Lage zweier Geraden bestimmen, nöthig haben, und wir wollen daher hier noch die entsprechenden Ausdrücke in Liniencoordinaten aufstellen.

Schneiden sich zunächst die beiden Geraden (p_{ik} und p_{ik}'), so ist ihr Winkel gleich dem mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches sie mit den beiden Tangenten bilden, die von ihrem Schnittpunkte an den Schnitt ihrer Ebene mit der Fundamentalfläche gehen. Ist also

$$\Phi = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche in Liniencoordinaten, oder symbolisch*)

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \left(\Sigma \left(a_i b_k - b_i a_k\right) p_{ik}\right)^2,$$

wenn

$$\Omega = a_x^2 = b_x^2$$

gesetzt ist, so wird jenes Doppelverhältniss gleich dem Quotienten der beiden Wurzeln der Gleichung:

$$\Phi_{pp} + 2\lambda \Phi_{pp'} + \lambda^2 \Phi_{p'p'} = 0,$$

und *der Winkel der beiden Geraden p und p'*:

$$= \frac{i}{2} \log \frac{\Phi_{pp'} + \sqrt{\Phi_{pp'}^2 - \Phi_{pp} \cdot \Phi_{p'p'}}}{\Phi_{pp'} - \sqrt{\Phi_{pp'}^2 - \Phi_{pp} \cdot \Phi_{p'p'}}} = \arccos \frac{\Phi_{pp'}}{\sqrt{\Phi_{pp} \cdot \Phi_{p'p'}}} \; **),$$

ein Ausdruck, welcher mit dem der speciellen Massbestimmung in seiner Bildung völlig übereinstimmt. Es entstehen hier wieder Φ_{pp} und $\Phi_{p'p'}$ aus Φ durch Einsetzen der Coordinaten p_{ik} und p'_{ik}, und es ist

$$\Phi_{pp'} = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Phi_{pp}}{\partial p_{ik}} p'_{ik}.$$

Schneiden sich die beiden betrachteten Geraden nicht, so dienen uns in der gewöhnlichen Massgeometrie zwei Ausdrücke zur Charakterisirung ihrer gegenseitigen Lage: ihre *Neigung* und ihr *Moment*. Die erstere ist dann analytisch ebenso definirt, wie der Winkel

---

*) Ich bezeichne die Liniencoordinaten immer durch p_{ik}, insofern sie aus Punktcoordinaten, durch q_{ik}, insofern sie aus Ebenencoordinaten entstanden gedacht sind.

**) Alle Linien, welche gegen eine dieselbe Neigung (vgl. unten) haben, bilden also einen Complex 2. Grades

$$K \Phi_{pp'}^2 = \Phi_{pp} \Phi_{p'p'};$$

auf eine lineare Congruenz dieses Complexes werden wir in § 12. geführt werden.

zweier sich schneidender Geraden; wir werden also auch bei allgemeiner Massbessimmung den mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Quotienten bezeichen, der aus den Wurzeln der Gleichung:

$$(1) \qquad \Phi_{pp} + 2\lambda\Phi_{pp'} + \lambda^2\Phi_{p'p'} = \Phi_{p+\lambda p',\, p+\lambda p'} = 0$$

zu bilden ist.

Geometrisch bedeutet diese Gleichung aber, wie Herr Pasch gezeigt hat*), *dass der Complex mit den Coordinaten $p + \lambda p'$ zu seinem absolut conjugirten Complexe in Involution liegt*, wobei der zweite Complex von den absoluten Polaren der Geraden des ersten gebildet wird**). Man erkennt dies leicht in folgender Weise: Sind π_{ik}, π'_{ik} die Coordinaten der absoluten Polaren von p, p', so ist symbolisch:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varrho\pi_{12} = \frac{1}{2}(a_3b_4 - b_3a_4)\,\Sigma(a_ib_k - b_ia_k)\,p_{ik} \\ \varrho\pi_{34} = \frac{1}{2}(a_1b_2 - b_1a_2)\,\Sigma(a_ib_k - b_ia_k)\,p_{ik}, \text{ u. s. w.,} \end{cases}$$

und ähnliche Gleichungen bestehen zwischen den π'_{ik} und p'_{ik}. Aus ihnen folgt aber:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varrho\,(\pi, p) = \frac{1}{2}\left\{\Sigma(a_ib_k - b_ia_k)\,p_{ik}\right\}^2 = \Phi_{pp} \\ \varrho\,(\pi', p') = \frac{1}{2}\left\{\Sigma(a_ib_k - b_ia_k)\,p'_{ik}\right\}^2 = \Phi_{p'p'} \end{cases}$$

$$(4) \quad \varrho\,(\pi, p') = \varrho\,(p, \pi') = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(a_ib_k - b_ia_k)p_{ik}\cdot\Sigma(a_rb_s - b_ra_s)p'_{rs} = \Phi_{pp'},$$

wenn

$$(p, \pi) = p_{12}\pi_{34} + p_{34}\pi_{12} + p_{13}\pi_{42} + p_{42}\pi_{13} + p_{14}\pi_{23} + p_{23}\pi_{14} \text{***)}$$

gesetzt wird, und (p, π'), (p', π), (p', π') analog definirt sind.

Durch diese Relationen geht die quadratische Gleichung für λ über in:

$$(5) \qquad (p, \pi) + \lambda\left\{(p, \pi') + (p', \pi)\right\} + \lambda^2\,(p', \pi') = 0,$$

und der links stehende Ausdruck ist jetzt identisch mit $(p + \lambda p', \pi + \lambda\pi')$; sein Verschwinden besagt also in der That, dass der Complex mit den Coordinaten $p_{ik} + \lambda p'_{ik}$ zu dem Complexe mit den Coordinaten

---

*) Vgl. Borchardt's J. Bd. 75, p. 144 f. Es ist diese Relation im Texte noch einmal abgeleitet, da wir die hier benutzten Transformationen noch wiederholt anwenden werden.

**) Es folgt daraus auch: *Sind 2 Gerade einander conjugirt in Bezug auf den einen Complex, so sind es ihre absoluten Polaren in Bezug auf den anderen.* Diese Beziehung wird uns unten nützlich sein. Ueber den Begriff der Coordinaten eines linearen Complexes vgl. Klein: Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. Math. Ann. Bd. II, p. 366.

***) Wir werden diese Bezeichnung auch im Folgenden stets anwenden und setzen insbesondere:

$$\tfrac{1}{2}\,(p, p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}.$$

$\pi_{ik} + \lambda \pi'_{ik}$ in Involution*) liegt. Die Gleichung (5) sagt nun aus, dass es im Allgemeinen in einer zweigliedrigen Gruppe von Complexen zwei giebt, welche mit ihren absolut conjugirten in besagter Beziehung stehen; und, sind λ' und λ'' die beiden Wurzeln dieser Gleichung, so bedeutet (wie sogleich gezeigt werden soll) $\frac{\lambda'}{\lambda''}$ das Doppelverhältniss, welches die Schnittpunkte der Geraden p und p' mit einer beliebigen Ebene und die beiden dieser Ebene bez. in den Complexen $p + \lambda' p'$ und $p + \lambda'' p'$ zugeordneten Punkte bestimmen.

*Wir definiren demnach als die Neigung zweier Geraden gegen einander den mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, gebildet aus den Schnittpunkten einer beliebigen Ebene mit ihnen und aus den beiden Punkten, welche dieser Ebene in zwei linearen Complexen zugehören. Diese letzteren werden dadurch bestimmt, dass sie der durch die zwei Geraden bestimmten zweigliedrigen Gruppe**) angehören und mit ihren absolut conjugirten Complexen in Involution liegen.* Wenn sich p und p' schneiden, geht diese Gruppe in das ebene Strahlbüschel über; und in der That schneiden die beiden Tangenten desselben an die Fundamentalfläche ihre absoluten Polaren, was bei speciellen Complexen der involutorischen Lage entspricht. Unsere Definition fällt also dann mit der obigen für den Winkel zweier Geraden zusammen; sie ist aber auch unabhängig davon, ob die Grössen p_{ik}, p'_{ik} Coordinaten zweier Geraden sind oder selbst schon solche von linearen Complexen; wir werden daher auch von *von der Neigung zweier linearen Complexe gegen einander sprechen können.* Um mich hier einfacher auszudrücken, will ich als *Doppelverhältniss von 4 linearen Complexen einer zweigliedrigen Gruppe* das Doppelverhältniss der 4 Punkte bezeichnen, welche einer beliebigen Ebene durch die 4 Complexe zugeordnet sind (diese Punkte liegen immer auf einer Geraden der zugehörigen Congruenz), oder, was dasselbe ist, das der 4 Ebenen, welche einem beliebigen Punkte entsprechen. Sind P_{ik}, P'_{ik}, $P_{ik} + \lambda' P'_{ik}$, $P_{ik} + \lambda'' P'_{ik}$ die 4 Complexe***), so sind die einer Ebene u zugehörigen 4 Punkte bestimmt durch:

---

*) Vgl. Klein: Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. Bd. II, p. 198.

**) Die Geraden p und p' sind dann die Directricen der Congruenz, welche der zweigliedrigen Gruppe gemeinsam ist, π und π' die der absolut conjugirten Congruenz.

***) Es sollen die Coordinaten von linearen Complexen immer mit grossen Buchstaben bezeichnet werden, und zwar mit P_{ik}, wenn ihre Gleichung ist:

$$(P, p) = 0,$$

$$\begin{aligned}\mu x_k &= P_{1k} u_1 + P_{2k} u_2 + P_{3k} u_3 + P_{4k} u_4 \\ \mu y_k &= P'_{1k} u_1 + P'_{2k} u_2 + P'_{3k} u_3 + P'_{4k} u_4 \\ z_k &= x_k + \lambda' y_k \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, 4 \\ P_{kk} = 0, \ P'_{kk} = 0 \end{pmatrix} \\ t_k &= x_k + \lambda'' y_k, \end{aligned}$$

und also ist $\frac{\lambda'}{\lambda''}$ das erwähnte Doppelverhältniss der 4 Complexe; sind 2 derselben specielle, so geht dies in das für die Neigung der beiden Geraden benutzte Doppelverhältniss über.

Es ist also die Neigung zweier linearer Complexe gleich dem mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches sie mit den beiden Complexen ihrer zweigliedrigen Gruppe bilden, die mit ihren absolut conjugirten Complexen in Involution liegen, d. h.

$$= \frac{i}{2} \log \frac{\Phi_{PP'} + \sqrt{\Phi_{PP'}^2 - \Phi_{PP}\Phi_{P'P'}}}{\Phi_{PP'} - \sqrt{\Phi_{PP'}^2 - \Phi_{PP}\Phi_{P'P'}}} = \arccos \frac{\Phi_{PP'}}{\sqrt{\Phi_{PP} \cdot \Phi_{P'P'}}} \ *).$$

Insbesondere kann man daher zwei lineare Complexe zu einander rechtwinklig nennen, wenn

$$\Phi_{PP'} = 0$$

wird, d. h. wenn der eine mit dem absolut conjugirten des anderen in Involution liegt, und *also sind zwei Gerade zu einander rechtwinklig, wenn die eine die absolute Polare der andern schneidet.*

---

mit Q_{ik}, wenn diese in der Form

$$\Sigma Q_{ik} p_{ik} = (Q, q) = 0$$

geschrieben werden kann.

*) Es bedeuten hier Φ_{PP} etc. die Ausdrücke, welche aus Φ_{pp} etc. entstehen, wenn man statt der Liniencoordinaten Complexcoordinaten einsetzt. — Es ist hier ferner, wenn Π_{ik}, Π'_{ik} die Coordinaten der absolut conjugirten Complexe zu P_{ik} und P'_{ik} sind, nach (3) und (4):

$$\frac{\Phi_{PP'}}{\sqrt{\Phi_{PP} \cdot \Phi_{P'P'}}} = \sqrt{\frac{(P, \Pi')\,(\Pi, P')}{(P, \Pi)\,(P', \Pi')}},$$

und es ist dies, wenn man unter den P_{ik} Liniencoordinaten versteht, ein Ausdruck, der sich, wenn die 4 Linien Erzeugende desselben Hyperboloids sind, auch durch Doppelverhältnisse deuten lässt, wie mir zufällig durch eine mündliche Mittheilung des Herrn Stolz an Herrn Klein bekannt geworden ist. — Es mag bemerkt werden, dass wir Φ_{PP} ausdrücklich in der Form

$$\Phi_{PP} = \tfrac{1}{2} \left\{ \Sigma (a_i b_k - b_i a_k) P_{ik} \right\}^2$$

annehmen, während man in der Gleichung

$$\Phi_{pp} = 0,$$

wo die p_{ik} Liniencoordinaten sind, den Ausdruck (p, p) multiplicirt mit einer beliebigen Constanten hinzufügen kann, ohne die Gleichung zu ändern.

Wir haben noch zu zeigen, wie die hier gegebenen Definitionen in die der speciellen Massbestimmung übergehen. Die Liniencoordinaten will ich alsdann in folgender Weise schreiben:

$$\begin{array}{ll} \varrho p_{12} = x - x' & \varrho p_{34} = yz' - zy' \\ \varrho p_{13} = y - y' & \varrho p_{42} = zx' - xz', \\ \varrho p_{14} = z - z' & \varrho p_{23} = xy' - yx', \end{array}$$

so dass die *Gleichung des imaginären Kugelkreises in Liniencoordinaten,* d. h. die Bedingung, dass eine Gerade p_{ik} ihn schneidet, wird:

$$p_{12}{}^2 + p_{13}{}^2 + p_{14}{}^2 = 0.$$

Einem linearen Complexe ist in Bezug auf ihn kein bestimmter anderer polar zugeordnet; einer Geraden entspricht aber auch hier eine andere: die conjugirte Polare ihres unendlich fernen Punktes in Bezug auf den Kugelkreis, und ich will diese hier als *absolute Polare* bezeichnen; es ist diese Zuordnung nur insofern unbestimmt, dass alle parallelen Linien dieselbe absolute Polare haben. Wir wollen hieran den obigen Ueberlegungen entsprechende anknüpfen. Die Coordinaten des unendlich fernen Punktes einer Geraden sind proportional zu den Cosinus ihrer Richtung, d. h.

$$x : y : z = p_{12} : p_{13} : p_{14},$$

und also sind die Coordinaten von deren absoluter Polaren:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mu \pi_{12} = 0 & \mu \pi_{34} = p_{12} \\ \mu \pi_{13} = 0 & \mu \pi_{42} = p_{13} \\ \mu \pi_{14} = 0 & \mu \pi_{23} = p_{14}. \end{array} \right.$$

Einer zweiten Geraden p' entspricht in derselben Weise eine absolute Polare π', und somit werden wir einem Complexe $p + \lambda p'$ die Gerade $\pi + \lambda \pi'$ zuordnen, d. h. jedem Complexe einer zweigliedrigen Gruppe eine Gerade des in der unendlich fernen Ebene gelegenen Strahlbüschels, welches durch die absoluten Polaren der Directricen der zugehörigen Congruenz bestimmt ist. Die beiden Complexe der Gruppe, welche mit ihren absolut conjugirten in Involution liegen, werden dann diejenigen, welche die ihnen zugehörigen Geraden selbst enthalten; und *in diesem Sinne können wir unsere obige Definition für die gegenseitige Neigung von zwei linearen Complexen auch für specielle Massbestimmung beibehalten.* In der That wird hier nach (6):

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu\,(P, \Pi) = P_{12}{}^2 + P_{13}{}^2 + P_{14}{}^2 \\ \mu\,(P', \Pi') = P_{12}'^2 + P_{13}'^2 + P_{14}'^2 \\ \mu\,(P, \Pi') = \mu\,(P', \Pi) = P_{12} P_{12}' + P_{13} P_{13}' + P_{14} P_{14}', \end{array} \right.$$

und also die *Neigung der beiden Complexe:*

$$= \arccos \frac{P_{12}P_{12}' + P_{13}P_{13}' + P_{14}P_{14}'}{\sqrt{P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{14}^2}\,\sqrt{P_{12}'^2 + P_{13}'^2 + P_{14}'^2}},$$

ein Ausdruck, der, wenn P und P' einzelne Gerade sind, mit dem gebräuchlichen für die Neigung zweier Geraden übereinstimmt.

Das Moment zweier Geraden in Bezug auf einander, d. h. das Product ihres kürzesten Abstandes in den Sinus ihrer Neigung, scheint als solches bei allgemeiner Massbestimmung nicht so unmittelbar darstellbar zu sein. Das Wesentliche in dem gebräuchlichen Ausdrucke ist jedoch, dass er bestimmt ist, eine invariante Beziehung der beiden Geraden zu ihren in der unendlich fernen Ebene gelegenen absoluten Polaren zu geben, denn es ist die Linie kürzester Entfernung die durch den Schnittpunkt dieser beiden Polaren gehende Gerade, welche beide gegebene Linien trifft. Wir werden daher auch bei allgemeiner Massbestimmung das Moment als eine invariante Beziehung der beiden Geraden zu ihren absoluten Polaren auffassen, und zwar wollen wir statt der Geraden sogleich zwei lineare Complexe P und P' annehmen: *Wir definiren dann als Moment zweier linearen Complexe gegen einander den Cosinus der Neigung des einen gegen den absolut conjugirten des andern.* Zwischen den Coordinaten P und Π, P' und Π' bestehen dann die Gleichungen (2); lösen wir dieselben nach Π, Π' auf, so müssen wir wegen der vollkommenen Reciprocität, welche zwischen den Π und P besteht, wieder Gleichungen von der Form (2) erhalten, d. h. es ist:

$$(8) \qquad \begin{cases} \varrho' P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\gamma b_\delta - b_\gamma a_\delta)\,\Sigma(a_i b_k - b_i a_k)\,\Pi_{ik} \\ \varrho' P_{\alpha\beta}' = \frac{1}{2}(a\ b_\delta - b_\gamma a_\delta)\,\Sigma(a_i b_k - b_i a_k)\,\Pi_{ik}', \end{cases}$$

wo statt der α, β, γ, δ die Indices 1, 2, 3, 4 in cyclischer Vertauschung zu setzen sind. Um den Zusammenhang von ϱ und ϱ' zu finden, setzen wir diese Werthe von P wieder in die Gleichungen (2) ein, wobei wir dann statt der a, b einmal neue, gleichbedeutende Symbole c, d einführen müssen; wir erhalten dadurch:

$$\begin{aligned} \varrho\varrho'\Pi_{12} &= \tfrac{1}{4}(a_3b_4 - b_3a_4)\cdot\Sigma(a_\alpha b_\beta - b_\alpha a_\beta)(c_\gamma d_\delta - d_\gamma c_\delta)\cdot\Sigma(c_i d_k - d_i c_k)\,\Pi_{ik} \\ &= \tfrac{1}{4}(a_3b_4 - b_3a_4)\,(abcd)\cdot\Sigma(c_i d_k - d_i c_k)\,\Pi_{ik}, \end{aligned}$$

und 5 ähnliche Gleichungen. In der rechts stehenden Summe ist aber, wenn man die Symbole durch die wirklichen Coefficienten a_{ik} ersetzt:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & 0 & 0 \\ b_\alpha & b_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_\gamma & c_\delta \\ 0 & 0 & d_\gamma & d_\delta \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & a_{\alpha 3} & a_{\alpha 4} \\ a_{\beta 1} & a_{\beta 2} & a_{\beta 3} & a_{\beta 4} \\ a_{\gamma 1} & a_{\gamma 2} & a_{\gamma 3} & a_{\gamma 4} \\ a_{\delta 1} & a_{\delta 2} & a_{\delta 3} & a_{\delta 4} \end{vmatrix};$$

das Product zweier socher Determinanten verschwindet also, sobald irgend zwei der Indices α, β, γ, δ einander gleich sind; es fallen somit in obiger Summe alle Glieder bis auf eins fort, und für dieses geht die rechts stehende Determinante in die Discriminante Δ der Fundamentalfläche über; es ist daher

$$\varrho\varrho' \Pi_{12} = \Delta \Pi_{12},$$

oder

$$\varrho\varrho' = \Delta. \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (8) findet man nun

$$\varrho'(P, \Pi) = \Phi_{\Pi\Pi},$$

und hieraus wegen (3) und (10):

$$\Delta \Phi_{\Pi\Pi} = \varrho'^2 \Phi_{PP}, \tag{11}$$

und ebenso aus (8), (9) und (10)

$$\begin{aligned}\varrho'^2 (P, P') &= \varrho' \Phi_{P'\Pi} \\ &= \tfrac{1}{4}(abcd)\, \Sigma (c_i d_k - d_i c_k) \Pi'_{ik} \cdot \Sigma (a_r b_s - b_r a_s) \Pi_{rs} \\ &= \Delta (\Pi, \Pi'),\end{aligned} \tag{12}$$

oder

$$\varrho'(P, P') = \varrho(\Pi, \Pi'). \tag{13}$$

Unter Berücksichtigung dieser Relationen wird *das gegenseitige Moment der Complexe P und P'*:

$$= \frac{\Phi_{P\Pi'}}{\sqrt{\Phi_{PP} \cdot \Phi_{\Pi'\Pi'}}} = \frac{\Phi_{\Pi P'}}{\sqrt{\Phi_{P'P'}\, \Phi_{\Pi\Pi}}} = \frac{\sqrt{\Delta}(P, P')}{\sqrt{\Phi_{PP}\, \Phi_{P'P'}}}.$$

Es ist hier wieder der arccos des Momentes gleich dem mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses, gebildet von dem einen Complexe, dem absolut conjugirten des andern und den beiden Complexen ihrer zweigliedrigen Gruppe, welche mit ihren absolut conjugirten in Involution liegen. Die beiden letzteren bestimmen sich hier durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}0 = (P + \lambda\varrho\Pi', \Pi + \lambda\varrho' P') = (P, \Pi) &+ \lambda[\varrho(\Pi, \Pi') + \varrho'(P, P')] \\ &+ \lambda^2 \varrho\varrho'(P', \Pi').\end{aligned} \tag{14}$$

In der That ist dann wegen der soeben aufgestellten Relationen, wenn λ' und λ'' die Wurzeln der letzten Gleichung sind:

$$\frac{i}{2} \log \frac{\lambda'}{\lambda''} = \arccos \frac{1}{2} \frac{\varrho'(P, P') + \varrho(\Pi, \Pi')}{\sqrt{(P, \Pi) \cdot (P', \Pi')}} = \arccos \frac{\sqrt{\Delta}(P, P')}{\sqrt{\Phi_{PP} \cdot \Phi_{P'P'}}}.$$

Ordnen wir bei specieller Massbestimmung wieder einer zweigliedrigen Gruppe von linearen Complexen $(P + \lambda P')$ ein in der unendlich fernen Ebene gelegenes Strahlbüschel $(\Pi + \lambda \Pi')$ in obiger Weise zu, so besteht die Gleichung (14) fort; es ist nur in ihr

$$(\Pi, \Pi') = 0$$

zu setzen, während der zuerst für das Moment gegebene Ausdruck wegen des Verschwindens von Δ unbestimmt werden würde*). Es ist ferner, wenn wir wieder $x_1 = 0$ zur unendlich fernen Ebene nehmen:

$$\mu\,(P, \Pi) = P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{14}^2$$
$$\mu\,(P', \Pi') = P_{12}'^2 + P_{13}'^2 + P_{14}'^2,$$

und demnach wird das Moment:

$$= \frac{\frac{1}{2}\,(P, P')}{\sqrt{P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{14}^2}\ \sqrt{P_{12}'^2 + P_{13}'^2 + P_{14}'^2}}\ ^{**)}.$$

Wir können also obige geometrische Definition desselben auch jetzt beibehalten; das darin auftretende Doppelverhältniss wird nunmehr gebildet von dem einen gegebenen Complexe, der dem andern zugeordneten Geraden des unendlich fernen Strahlbüschels und den beiden Complexen der durch die gegebenen bestimmten Gruppe, welche die ihnen zugeordneten Strahlen jenes Büschels selbst enthalten. Sind die Complexe specielle, so wird an dieser Definition im Wesentlichen nichts geändert; der obige Ausdruck giebt dann unmittelbar das halbe Product der kürzesten Entfernung in den Sinus der Neigung.

Setzt man

$$P_{ik} = P'_{ik},$$

so erhält man *das Moment des linearen Complexes in Bezug auf sich selbst;* für specielle Massbestimmung ist dies gleich dem Parameter des Complexes nach Plücker's Bezeichnung. Die geometrische Bedeutung desselben für allgemeine Massbestimmung werden wir in § 5. an einer kanonischen Form erkennen.

Statt zwei Gerade oder zwei lineare Complexe einander gegenüberzustellen, kann man natürlich auch Neigung und Moment einer Geraden gegen einen Complex nach den gegebenen Definitionen bestimmen; insbesondere werden wir gelegentlich in § 13. sehen, wie sich diese Ausdrücke für zwei Complexe zurückführen lassen auf die entsprechenden für gewisse ausgezeichnete Gerade und deren Neigung und Moment gegen die betreffenden Complexe.

---

*) Auch Φ_{PP} würde identisch verschwinden, da jetzt jede Gerade die unendlich ferne Ebene in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet; wir würden also $\frac{0}{0}$ erhalten.

**) Dieser Ausdruck lässt sich, abgesehen von dem Factor $\frac{1}{2}$, auf die Form

$$\Delta \sin \varphi + (K + K') \cos \varphi$$

bringen, welche Herr Klein (Math. Ann. Bd. II, p. 368) als Moment zweier Complexe bezeichnet; Δ ist die kürzeste Entfernung ihrer Hauptaxen, φ die Neigung derselben; K und K' sind die Parameter der beiden Complexe.

§ 2.

Die kanonische Form der Transformation.

Wenden wir uns nunmehr zur Betrachtung der linearen Transformationen der Fläche in sich selbst, welche an Stelle der Bewegungen treten, so wird es sich empfehlen, sie zunächst in der kanonischen Form darzustellen, und wir haben also die Lage des fest bleibenden Tetraëders gegen die Fläche zu bestimmen. Nach einer oben gemachten Bemerkung muss die Transformation jede Schaar von Erzeugenden der Fläche in sich überführen, d. h. jede einzelne dieser Geraden sich so bewegen, dass sie in ihrer neuen Lage wieder eine Erzeugende derselben Art ist; wir haben so zwei Systeme von je einfach unendlich vielen Geraden, d. h. zwei rationale lineare Mannigfaltigkeiten, deren jede in sich verschoben wird, und es bleiben folglich nach dem Correspondenz-Principe von Chasles im Allgemeinen*) zwei Erzeugende jeder Art fest; sie bestimmen durch ihre vier Schnittpunkte die Ecken jenes Tetraëders, und dieses wollen wir der Coordinatenbestimmung zu Grunde legen. Alsdann ist die Gleichung der Fläche von der Form:

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0 .$$

Die beiden Kanten, bestimmt als Schnittlinien der Ebenen $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sind conjugirte Polaren in Bezug auf die Fläche, und die vier Ebenen des Tetraëders berühren dieselbe bezüglich in den vier Ecken.

Gründen wir nun auf die Fläche eine projectivische Massbestimmung, so werden wir diejenigen Bewegungen des Raumes, welche dies Tetraëder ungeändert lassen, durch eine Transformation von der Form

(1) $$\varrho x_i = \alpha_i y_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

darstellen. Damit diese die Fläche und auf ihr die vier Geraden ungeändert lässt, müssen wir noch die Bedingung:

(2) $$\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3$$

hinzufügen. Durch eine solche Transformation wird aber auch jede Fläche des Büschels**)

(3) $$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0$$

*) Diejenigen Fälle, in denen eine Anzahl von Ecken und Seiten des Tetraëders zusammenfallen, oder dasselbe unbestimmt wird, werde ich in § 10. näher behandeln.

**) Führt also eine lineare Transformation *eine* Fläche 2. Ordnung in sich über, so steht sie gleich zu unendlich vielen solchen Flächen in dieser Beziehung.

in sich übergeführt, d. h. *ein jeder Punkt des Raumes bewegt sich auf der durch ihn und die vier auf der Fundamentalfläche gelegenen Kanten des Tetraëders gehenden Fläche 2. Ordnung; dies Flächenbüschel vertritt somit die bei specieller Massbestimmung auftretenden Cylinderflächen.* Da die beiden anderen, sich gegenüberliegenden Kanten des Tetraëders natürlich auch fest bleiben, können wir uns die Bewegung durch eine gleichzeitige Verschiebung und Drehung in Bezug auf jede von ihnen entstanden denken. Es ist nämlich *eine jede Verschiebung nach einer Geraden identisch mit einer Drehung um deren absolute Polare.**) Denn bei der Bedingung

$$\alpha_2 = \alpha_3$$

geht jede Ebene des Büschels

$$x_2 + \varkappa x_3 = 0 \tag{4}$$

in sich über, d. h. die Bewegung besteht in einer Verschiebung nach der Geraden $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; gleichzeitig bleibt aber auch jeder Punkt der Reihe

$$u_2 + \lambda u_3 = 0$$

fest, d. h. die Bewegung besteht in einer Drehung um die Gerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, die absolute Polare der ersteren.

Eine Transformation, welche gleichzeitig das Ebenenbüschel (4) und das Flächenbüschel (3) in sich überführt, und zwar jede Ebene jenes Büschels, muss aber auch die Schnittcurven beider ungeändert lassen, und somit erhalten wir den Satz:

*Bei einer Verschiebung nach einer Geraden bewegt sich jeder Punkt auf einem Kegelschnitte, dessen Ebene diese Gerade enthält, und welcher den in seiner Ebene liegenden unendlich fernen Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit der Directrix der Verschiebung berührt**); die Ebenen dieser Kegelschnitte stehen daher senkrecht zu der absoluten Polare dieser Geraden, um welche sich der Raum gleichzeitig dreht. Jede Ebene des Raumes umhüllt einen Kegel 2. Ordnung, dessen Spitze auf dieser Polare liegt, und welcher den von seiner Spitze an die Fundamentalfläche gehenden Tangentenkegel längs zweier Geraden berührt;* in diesen Geraden berührt er gleichzeitig die beiden von der Axe der Rotation an jene Fläche gehenden Tangentenebenen. Man sieht, wie hier die Dualität

*) Vgl. Schering: die Schwerkraft im Gaussischen Raume. Göttinger Nachrichten 1870, p. 311.

**) Es sind dies die von Herrn de Tilly als *lignes équidistantes* bezeichneten Curven; er entdeckt an ihnen einige Eigenschaften, welche sie mit den Kegelschnitten gemein haben, ohne sie jedoch geradezu als solche zu erkennen. — Den entsprechenden Satz für die Bewegung einer Ebene in sich gab Herr Klein (a. a. O. Math. Ann. IV. p. 602). Die hier auftretenden Kegelschnitte entsprechen den Kreisen der speciellen Massbestimmung.

vollkommen gewahrt bleibt; sobald wir also die eine Art der Bewegung betrachtet haben, können wir die entsprechenden Sätze für die andere Art sofort aufstellen.

Aus diesen Bemerkungen, sowie aus dem Umstande, dass wir im Allgemeinen jede Bewegung als Transformation in obiger kanonischer Form darstellen können, ergiebt sich ferner:

*Jede Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems ist äquivalent einer Drehung um eine Gerade und einer gleichzeitigen Verschiebung nach derselben**) (wobei ich statt dieser Geraden stets auch deren absolute Polare wählen kann). Die Curve, auf welcher sich dabei jeder Punkt bewegt, und welche auf der durch den Punkt gehenden Fläche des Büschels (3) liegt, will ich als *projectivische Schraubenlinie*, die Bewegung selbst als eine *Schraubenbewegung*, die beiden einander absolut conjugirten Kanten des Tetraëders als *Hauptaxen der Bewegung* bezeichnen. Die Eigenschaften dieser Schraubencurven werden sich unten (§ 6.) nach Betrachtung unendlich kleiner Transformationen leicht ergeben.

Dass wir jede Transformation von der Form (1) unter der Bedingung (2) als Bewegung auffassen können, ist sofort klar, da durch sie die Massverhältnisse des Raumes nicht geändert werden; und die einzige Transformationsart, welche dies ebenfalls leistet, nämlich diejenige, welche einer Figur eine ihr invers congruente zuordnet, ist durch den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen von vornherein ausgeschlossen. Eine solche würde sich in kanonischer Form z. B. durch die folgenden Gleichungen darstellen:

$$\varrho x_1 = \alpha_4 y_4 \qquad \varrho x_3 = \alpha_2 y_2$$
$$\varrho x_2 = \alpha_3 y_3 \qquad \varrho x_4 = \alpha_1 y_1 \,,$$

wodurch ebenfalls jede Fläche des Büchels

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0$$

ungeändert bleibt, sobald wieder die Bedingung

$$\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3$$

erfüllt ist.

§ 3.

Der lineare Complex als Bild einer unendlich kleinen Bewegung.

Indem wir uns hier auf die Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen beschränken, werden wir zur Darstellung derselben *unendlich*

*) Für spec. Massbest. gab diesen Satz zuerst Chasles: Bulletin universelle des sciences math. p. Férussac Nov. 1830, und Correspondance math. de Bruxelles t. VII. p. 352.

kleine Transformationen der Fundamentalfläche in sich selbst untersuchen müssen. Wiederholen wir die durch die Gleichungen (1) in § 2 gegebene Transformation λ mal nach einander, so erhalten wir

$$\varrho\, y_i = \alpha_i^\lambda\, x_i .$$

Die entsprechende unendlich kleine Transformation ergiebt sich hieraus, wenn wir λ unendlich klein, etwa gleich $d\lambda$ nehmen, $x_i + dx_i$ statt ϱy_i setzen und rechts nach Potenzen von $d\lambda$ entwickeln. Man findet alsdann

$$(1)\qquad \begin{cases} dx_i = \log \alpha_i x_i\, d\lambda\,, \text{ oder} \\ dx_i = a_i d\lambda\,, \end{cases}$$

wo nun die Bedingungsgleichung übergeht in:

$$(2)\qquad a_1 + a_4 = a_2 + a_3\,.$$

Bei einer solchen unendlich kleinen Bewegung schreitet jeder Punkt des Raumes auf einer Geraden fort, und jede Ebene dreht sich um eine solche. Letztere ist bestimmt als Schnittlinie zweier entsprechender unendlich naher Ebenen, und ihre sechs Coordinaten sind demnach:

$$\sigma\, q_{ik} = u_i\,(u_k + du_k) - u_k\,(u_i + du_i) = -\, u_i u_k\,(a_k - a_i)\, d\lambda\,,$$

wo wir das $-\,d\lambda$ in den Factor σ eingehen lassen können, also:

$$(3)\qquad \sigma\, q_{ik} = u_i u_k (a_k - a_i)\,.$$

Wir wollen diese Gerade nach dem Vorgange von Chasles*) die *Charakteristik der Ebene* u nennen, und ebenso die Verbindungslinie zweier einander unendlich naher entsprechender Punkte, deren Coordinaten durch

$$(4)\qquad \varrho\, p_{ik} = x_i x_k\,(a_k - a_i)$$

gegeben sind, die *Charakteristik des Punktes* x.

Man kann nun in einer Ebene u immer einen Punkt x so bestimmen, dass er sich bei der unendlich kleinen Bewegung senkrecht zu dieser Ebene bewegt, d. h. dass seine Charakteristik durch den absoluten Pol y derselben hindurchgeht. Letzterer ist mit u durch die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu u_1 = y_4 & \mu u_3 = y_2 \\ \mu u_2 = y_3 & \mu u_4 = y_1 \end{cases}$$

verbunden, und man hat also zur Bestimmung von x:

---

*) Propriétés géométriques rélatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. Comptes rend. t. XVI, p. 1420. 1843. Die dort angeführten Sätze wurden bewiesen von Jonquières: Mélanges de géométrie pure, Paris 1856.

$$
\begin{aligned}
x_1 x_4 (a_4 - a_1) &= x_1 y_4 - y_1 x_4 = \mu (x_1 u_1 - x_4 u_4)\\
x_2 x_3 (a_3 - a_2) &= x_2 y_3 - y_3 x_2 = \mu (x_2 u_2 - x_3 u_3)\\
x_1 x_2 (a_2 - a_1) &= x_1 y_2 - y_1 x_2 = \mu (x_1 u_3 - x_2 u_4)\\
x_3 x_4 (a_4 - a_3) &= x_3 y_4 - y_3 x_4 = \mu (x_3 u_1 - x_4 u_2)\\
x_1 x_3 (a_3 - a_1) &= x_1 y_3 - y_1 x_3 = \mu (x_1 u_2 - x_3 u_4)\\
x_2 x_4 (a_4 - a_2) &= x_2 y_4 - y_2 x_4 = \mu (x_2 u_1 - x_4 u_3).
\end{aligned}
$$

Man sieht sofort, dass diese Gleichungen, sowie die Bedingung $u_x = 0$, erfüllt sind, wenn zwischen den x und u folgende Beziehungen bestehen:

$$
(6) \qquad \begin{cases} \mu u_1 = x_4 (a_4 - a_1) & \mu u_3 = x_2 (a_2 - a_3) \\ \mu u_2 = x_3 (a_3 - a_2) & \mu u_4 = x_1 (a_1 - a_4) . \end{cases}
$$

Wir wollen den Punkt x als *Nullpunkt der Ebene* u*) und diese als *Nullebene des Punktes* x bezeichnen. Während sich die Ebene um ihre Charakteristik dreht, ist ihr Nullpunkt der einzige Punkt, welcher sich senkrecht zu ihr aus ihr heraus bewegt, und im Anschluss hieran haben wir den Satz:

*Die Bewegung einer Ebene im Raume lässt sich in jedem Augenblicke ersetzen durch eine Drehung derselben um eine ihrer Geraden und eine gleichzeitige Bewegung in sich um einen in ihr gelegenen Punkt.***)

Durch die Gleichungen (6) ist uns ein linearer Complex bestimmt, dessen durch einen Punkt gehende Geraden in der Nullebene des Punktes liegen; seine Gleichung ist:

$$
(7) \qquad (a_4 - a_1) p_{14} + (a_3 - a_2) p_{23} = 0 ,\text{***)}
$$

und die ihm angehörigen Geraden werden senkrecht zu sich selbst versetzt. Es haben nämlich alle durch einen Punkt gehenden Ebenen ihren Nullpunkt in der Nullebene des Punktes, und umgekehrt geht die Nullebene von jedem Punkte einer Ebene durch den Nullpunkt dieser Ebene; allen Punkten einer Geraden des Complexes entsprechen also Nullebenen, welche durch diese Complexgerade hindurchgehen; die Charakteristik eines jeden Punktes aber geht durch den absoluten Pol der zugehörigen Nullebene, und alle diese Pole liegen wieder auf der absoluten Polare der betrachteten Complexgeraden, d. h. jene Charakteristik steht zu dieser letzteren senkrecht; also:

Die Geraden, auf welchen die Fortschreitungsrichtungen ihrer Punkte senkrecht stehen, bilden einen linearen Complex.†)

---

*) Nach Möbius: Lehrbuch der Statik. Theil I. § 84.

**) Für spec. Massbest. zuerst von Chasles gegeben: Aperçu historique, note 34. (Bruxelles 1837).

***) Ueber die Bedeutung der Coëfficienten dieses Complexes vgl. § 9.

†) Die Bedeutung dieses Complexes für die unendlich kleinen Bewegungen bei spec. Massbest. erkannte wohl zuerst Möbius (vgl. Lehrbuch der Statik

Zwei in Bezug auf einen solchen Complex conjugirte Gerade sind dadurch definirt, dass die den Ebenen des durch die eine bestimmten Büschels zugehörigen Nullpunkte auf der anderen liegen; zwischen den Coordinaten zweier Geraden der Art (p_{ik} und p'_{ik}) bestehen demnach hier die Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \varrho p_{34} = -p_{34}' & \varrho p_{12} = -p_{12}' \\ \varrho p_{13} = -p_{13}' & \varrho p_{24} = -p_{24}' \\ \varrho p_{14} = \dfrac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} p_{23}' & \varrho p_{23} = \dfrac{a_4 - a_1}{a_3 - a_2} p_{14}'. \end{cases}$$

Indem man nun mittelst der Gleichungen (3), (4) und (6) die Coordinaten der Charakteristik eines Punktes und der seiner Nullebene aufstellt, findet man, dass sie diesen Gleichungen identisch genügen, und wir haben den Satz:

Die Charakteristik einer Ebene und die ihres zugehörigen Nullpunktes sind conjugirte Gerade in Bezug auf den linearen Complex, dessen Gerade senkrecht zu sich selbst versetzt werden.

Die Bedeutung zweier solcher Geraden für die Bewegung ist auch noch eine andere; es stehen nämlich nach Obigem die Charakteristiken der Punkte der einen senkrecht zu den durch die andere gehenden Ebenen; durch eine blosse Drehung um diese kann ich also jene in die Lage bringen, welche sie in Folge der unendlich kleinen Bewegung einnimmt, und es bedarf dann nur noch einer Drehung um die letztere, um auch die andere in ihre Endlage zu bringen; also:

Eine unendlich kleine Bewegung kann immer ersetzt werden durch die Folge von zwei unendlich kleinen Rotationen um zwei in Bezug auf den erwähnten Complex einander conjugirte Gerade. (Vgl. § 4.)

Da aber eine jede solche Drehung identisch ist mit einer Verschiebung nach der absoluten Polare der Drehaxe, so ist die Bewegung auch äquivalent mit zwei Translationen nach den absoluten Polaren zweier solcher conjugirter Rotationsaxen, oder, was nach den Ausführungen in § 2. dasselbe ist:

Eine unendlich kleine Bewegung kann immer ersetzt werden durch zwei Translationen, deren Directricen einander in Bezug auf den linearen Complex conjugirt sind, welcher dem zuerst erwähnten Complexe in Bezug auf die Fundamentalfläche polar zugeordnet ist; wir wollen dem entsprechend jenen ersten Complex als *den der unendlich kleinen Bewegung zugeordneten Rotationscomplex*, den zweiten, ihm absolut con-

Leipzig 1837, Th. I. § 183), ausgesprochen wurden obige Sätze zuerst von Chasles (compt. rend. 1843, l. c.); vgl. auch Battaglini: Nota sul movimento geometrico infinitesimo di un sistemo rigido; Rendiconti dell' academia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, 1870.

jugirten als *den ihr zugeordneten Translationscomplex* bezeichnen.*) Man würde zu dem letzteren unmittelbar gelangt sein, wenn man die den obigen dualistisch gegenüberstehenden Ueberlegungen durchgeführt hätte.

In der That ist dann jedem Punkte x eine durch ihn gehende Ebene u zugeordnet, deren Charakteristik in der absoluten Polarebene von x liegt, wo die x und u durch folgende Gleichungen verbunden sind:

$$(9) \qquad \begin{cases} \varrho u_1 = x_4(a_3 - a_2) & \varrho u_3 = x_2(a_1 - a_4) \\ \varrho u_2 = x_3(a_4 - a_1) & \varrho u_4 = x_1(a_2 - a_3), \end{cases}$$

und dadurch ist ein linearer Complex:

$$(10) \qquad (a_3 - a_2)\, p_{14} + (a_4 - a_1)\, p_{23} = 0$$

bestimmt, welcher eben dem Complexe (7) absolut conjugirt ist, da in der Gleichung nur p_{14} und p_{23} vertauscht sind. Entsprechend den an jenen Complex geknüpften Betrachtungen erhalten wir hier die folgenden Sätze:

Die Bewegung eines Ebenenbündels (d. h. eines Punktes, betrachtet als Ort der ihn umhüllenden Ebenen) lässt sich in jedem Augenblicke ersetzen durch eine Verschiebung seines Mittelpunktes (Trägers) nach einem durch ihn gehenden Strahle und eine gleichzeitige Bewegung des Bündels in sich (d. h. ohne den Mittelpunkt zu ändern), bei der eine durch den Punkt gehende Ebene fest bleibt (die ihm durch den Translationscomplex entsprechende Nullebene).**)

Die Charakteristiken der Ebenen, welche durch eine dem Translationscomplexe angehörige Gerade hindurchgehen, sind normal zu dieser Geraden (d. i. schneiden deren absolute Polare).

Die Charakteristik eines Punktes und die Charakteristik der ihm in diesem Complexe zugehörigen Nullebene sind conjugirte Gerade in Bezug auf denselben. —

Nach dem Vorstehenden ist der lineare Complex für die unendlich kleine Bewegung von fundamentaler Bedeutung; um uns ein deutliches Bild von den Vorgängen bei einer solchen zu machen, ist es daher nöthig, die in Bezug auf ihn geltenden metrischen Sätze für unsere allgemeine Massbestimmung umzuformen, und wir thun dies im Folgenden, indem wir den Complex in seinen Beziehungen zu der Fundamentalfläche 2. Ordnung untersuchen.

Er hat mit jeder Schaar von Erzeugenden derselben zwei Gerade gemein; im Ganzen also giebt es vier Linien, welche gleichzeitig dem

*) Bei spec. Massbest. kann natürlich nur der erste Complex auftreten.

**) Die beiden von jenem Strahle an die Fundamentalfläche gehenden Tangentenebenen bleiben ausserdem selbstverständlich fest.

Complexe angehören und auf der Fläche liegen; sie bilden auf dieser ein windschiefes Viereck, welches durch zwei weitere Gerade zu einem Tetraëder ergänzt wird; diese letzteren sind dann conjugirte Polaren in Bezug auf die Fläche und in Bezug auf den linearen Complex, denn durch jede von ihnen gehen zwei Tangentenebenen an die Fläche, deren Berührungspunkte auf der andern liegen, und jede von ihnen schneidet vier Gerade des linearen Complexes. Diese Verhältnisse werden aber nicht geändert, wenn man statt des betrachteten linearen Complexes seinen absolut conjugirten wählt; auch in Bezug auf diesen sind also die genannten beiden Geraden einander zugeordnet; ich will sie als *Axenpaar des betreffenden linearen Complexes* bezeichnen, sie entsprechen der Hauptaxe und deren in der unendlich fernen Ebene gelegenen absoluten Polaren*) bei specieller Massbestimmung.

Der Definition nach liegen sowohl die absoluten Pole, als auch die Nullpunkte der durch die eine gehenden Ebenen auf der anderen Axe des Paares, d. h. bei der von uns zu Grunde gelegten Gleichung der Fundamentalfläche und des Complexes ((7) oder (10)) müssen die Gleichungen (5) und (6) oder (5) und (9) zusammenbestehen, was nur für die beiden Geraden

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0 \text{ und}$$
$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

möglich ist, also:

Die beiden Hauptaxen einer unendlich kleinen Bewegung bilden das Axenpaar der beiden linearen Complexe, welche derselben als Rotations- und Translations-Complex zugehören.

Wenden wir auf den Raum eine Transformation an, wie sie durch die Gleichungen (1) § 2. bestimmt ist, so bestehen zwischen zwei entsprechenden Geraden die Gleichungen

$$\varrho p_{ik} = \alpha_i \alpha_k p_{ik}',$$

und wegen der Gleichung

$$\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3$$

haben wir den Satz: *Ein linearer Complex geht durch eine Schraubenbewegung um eine Gerade seines Axenpaares in sich selbst über* (n. 37.)**).

Allen Ebenen eines Büschels, deren Schnittlinie die beiden Geraden des Axenpaares trifft, entsprechen Punkte, die auf dieser Schnittlinie liegen, denn diese gehört als Gerade, welche zwei conjugirte Polaren schneidet, dem Complexe an, d. h. sie fällt mit ihrer conjugir-

---

*) D. h. der Polare des unendlich fernen Punktes der Hauptaxe in Bezug auf den Kugelkreis.

**) Die beigesetzten Zahlen beziehen sich auf die entsprechenden Sätze für spec. Massb. bei Plücker: Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig 1868 u. 1869.

ten zusammen; also: *Die einem Punkte entsprechende Ebene geht durch diejenige gerade Linie, welche durch den Punkt senkrecht zu einer Geraden des Axenpaares gezogen werden kann. Die Nullebenen aller Punkte, welche gleichen Abstand von einer Axe des Paares haben, bilden mit dieser gleiche Winkel* (n. 41). Das letztere ergiebt sich, da diese Punkte nach § 2. auf einer Fläche des Büschels

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0$$

liegen müssen, und die zugehörigen Nullebenen dann eine Fläche desselben Büschels umhüllen; diese Ebenen gehen also in der That auch durch jede Schraubenbewegung um die Axe in einander über.

Nach § 1. giebt es zu zwei Geraden zwei andere, welche gleichzeitig auf beiden senkrecht stehen, nämlich die beiden, welche ausser den gegebenen Geraden auch deren absolute Polarlinien schneiden. Sind nun zwei Gerade einander conjugirt in Bezug auf einen linearen Complex, so sind es ihre absoluten Polaren in Bezug auf den diesem absolut conjugirten Complex, ihre gemeinschaftlichen Normalen schneiden also in jedem Complexe zwei einander conjugirte Linien, d. h. sie gehören der durch beide gebildeten Congruenz an; die Directricen dieser sind aber die beiden Geraden des den Complexen gemeinsamen Axenpaares, und somit können wir den Satz aussprechen:

Die beiden Geraden, welche gleichzeitig auf zwei in Bezug auf einen linearen Complex conjugirten Geraden senkrecht stehen, schneiden das Axenpaar des Complexes und sind also zu den beiden Linien des Paares ebenfalls normal (n. 43).*)

Die Geraden der erwähnten Congruenz sind noch in anderer Weise ausgezeichnet, *sie bilden nämlich das gemeinsame Normalensystem der Flächen 2. Ordnung des Büschels*

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0.^{**)}$$

Eine solche Fläche wird nämlich von einer Ebene u in einem Punkte x berührt, wenn

$$\begin{aligned} \mu u_1 &= x_4 & \mu u_2 &= \lambda x_3 \\ \mu u_4 &= x_1 & \mu u_3 &= \lambda x_2\,, \end{aligned}$$

und der absolute Pol von u ist bestimmt durch:

---

*) Für spec. Massb. zuerst gegeben von Chasles: Propriétés géométriques etc. Compt. rend. 1843. Vgl. Schweins: Neue Eigenschaft zweier Kräfte, durch welche ein Kraftsystem ersetzt werden kann. Crelle's J. Bd. 32. p. 227 (1846), und eine Bemerkung dazu von Möbius, ib. Bd. 36. p. 89.

**) Ebenso, wie bei spec. Massbest. die Linien, welche eine Gerade und deren in der unendlich fernen Ebene liegende absolute Polare schneiden, gleichzeitig normal sind zu allen Kreiscylindern, die jene Gerade zur Axe haben.

$$\varrho u_1 = y_4 \qquad \varrho u_2 = y_3$$
$$\varrho u_4 = y_1 \qquad \varrho u_3 = y_2\,,$$

also sind für die Coordinaten der Verbindungslinie beider Punkte, d. h. der Normalen des Punktes x:

$$p_{14} = 0 \text{ und } p_{23} = 0, \; q.\,e.\,d.$$

Besteht die unendlich kleine Bewegung in einer Rotation um eine Gerade, so werden die beiden zugehörigen Complexe specielle; z. B. bei unserer Coordinatenbestimmung für eine Rotation um die Axe

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0,$$

d. h. wenn

$$a_2 = a_3$$

ist, gehen dieselben über in:

$$p_{14} = 0 \text{ und } p_{23} = 0\,.$$

Bei einer Rotation um eine Axe werden also alle sie schneidenden Linien senkrecht zu sich selbst versetzt, bei einer Translation nach einer solchen alle Linien, welche in den Normalebenen derselben liegen.

§ 4.

Die Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen.

Die beiden linearen Complexe, auf welche wir im Vorigen geführt wurden, sind für die Natur einer unendlich kleinen Bewegung, sowie auch für die Theorie der Kraftsysteme von hoher Bedeutung; es ist daher wohl von Interesse zu verfolgen, wie sich die Coordinaten derselben aus den Coefficienten einer nicht in kanonischer Form gegebenen Transformation zusammensetzen, zumal da wir die so gewonnenen Ausdrücke geradezu zur Definition der Bewegung (resp. später eines Kraftsystems) benutzen werden.

Es sei zu dem Zwecke

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = a_x^2 = b_x^2 = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche, und die unendlich kleine Transformation durch die vier Gleichungen

$$(1) \qquad dx_i = (\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3 + \alpha_{i4} x_4)\, d\lambda$$

dargestellt. Es ist dann unter Vernachlässigung der Grössen von 2. Ordnung der Kleinheit

$$a_{x+dx}^2 = a_x^2 + 2\, a_x a_{dx}\,,$$

und damit die Fläche 2. Ordnung in sich übergeht, muss demnach die Gleichung

$$(2) \qquad M a_x^2 = a_x\, a_{dx}$$

identisch erfüllt sein, unter M einen beliebigen constanten Factor verstanden. Die Vergleichung der Coëfficienten gleicher Producte der x auf beiden Seiten nach Ausführung der Substitution (1) ergiebt dann folgende 10 Bedingungsgleichungen*) zwischen den Coëfficienten der Fläche und denen der Transformation:

$$2\,M a_{ik} = (\beta_{ik} + \beta_{ki})\, d\lambda\,,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(3)\qquad \begin{cases} \beta_{ik} = a_{i1}\alpha_{1k} + a_{i2}\alpha_{2k} + a_{i3}\alpha_{3k} + a_{i4}\alpha_{4k}, \text{ also} \\ \beta_{ki} = a_{k1}\alpha_{1i} + a_{k2}\alpha_{2i} + a_{k3}\alpha_{3i} + a_{k4}\alpha_{4i}\,. \end{cases}$$

Den Factor $2\,M$ wollen wir mit $d\lambda$ zu einer neuen Constanten J vereinigen und die Bedingungsgleichungen in der Form schreiben:

$$(4)\qquad a_{ik} = (\beta_{ik} + \beta_{ki})\, J\,.$$

Um den der Bewegung zugehörigen Rotationscomplex zu erhalten, müssen wir die Forderung stellen, dass die Charakteristik eines in der Ebene u gelegenen Punktes x durch den absoluten Pol y dieser Ebene hindurchgeht, d. h. es muss sein:

$$u_x = 0$$

und

$$y_i = \mu x_i + \nu\, d x_i\,,$$

wo y mit u durch die Gleichungen

$$\sigma u_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4$$

verbunden ist. Setzen wir in die letzteren die Werthe von y ein, so wird

$$\begin{aligned} \sigma u_i = {} & \mu\ (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4) \\ & + \nu\, d\lambda\, (a_{i1}\Sigma\alpha_{1k}x_k + a_{i2}\Sigma\alpha_{2k}x_k + a_{i3}\Sigma\alpha_{3k}x_k + a_{i4}\Sigma\alpha_{4k}x_k)\,, \end{aligned}$$

und wegen der Gleichungen (3) geht dies über in:

$$\begin{aligned} \sigma u_i = {} & \mu\ (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4) \\ & + \nu\, d\lambda\, (\beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_2 + \beta_{i3}x_3 + \beta_{i4}x_4) \\ = {} & \Sigma\ (\mu\, a_{ik} + \nu\, d\lambda\, \beta_{ik})\, x_k\,. \end{aligned}$$

Damit nun die Gleichung $u_x = 0$ identisch erfüllt wird, müssen wir

$$\nu = -\frac{2J}{d\lambda}\,\mu$$

setzen; in der That fallen dann, wie es bei einem Complexe sein muss, wegen der Gleichungen (3) und (4) die Diagonalglieder fort, da ja

---

*) Zwischen den 16 Grössen α_{ik} bestehen also 10 Bedingungsgleichungen, d. h. *es giebt fünffach unendlich viele, unendlich kleine Bewegungen des Raumes,* wie bei spec. Massbest. Die Bedingung, dass jedes System von Erzeugenden der Fläche in sich übergehe, ist bei einer unendlich kleinen Transformation von selbst erfüllt.

$$a_{kk} = 2J \cdot \beta_{kk}$$

ist, und die übrigen werden entgegengesetzt gleich:

$$a_{ik} - 2\beta_{ik} J = -(a_{ki} - 2\beta_{ki} J).$$

Die Gleichungen, welche einer Ebene u ihren Nullpunkt x zuordnen, werden alsdann, wenn man ϱ statt $\frac{\sigma}{\mu}$ schreibt:

$$\varrho u_i = \Sigma(a_{ik} - 2\beta_{ik} J)x_k = \Sigma(2\beta_{ki} J - a_{ik})x_k,$$

und setzt man hierin schliesslich noch

$$Q_{ik} = 2\beta_{ki} J - a_{ik} = a_{ik} - 2\beta_{ik} J,$$

oder

$$(5) \qquad Q_{ik} = J(\beta_{ki} - \beta_{ik}) = -Q_{ki},$$

so ist der lineare Complex bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho u_1 &= \quad\cdot\quad + Q_{12}x_2 + Q_{13}x_3 + Q_{14}x_4 \\
\varrho u_2 &= Q_{21}x_1 + \quad\cdot\quad + Q_{23}x_3 + Q_{24}x_4 \\
\varrho u_3 &= Q_{31}x_1 + Q_{32}x_2 + \quad\cdot\quad + Q_{34}x_4 \\
\varrho u_4 &= Q_{41}x_1 + Q_{42}x_2 + Q_{43}x_3 + \quad\cdot\quad ,
\end{aligned}$$

und *die Gleichung des Complexes* selbst wird:

$$(6) \qquad Q_{12}p_{12} + Q_{13}p_{13} + Q_{14}p_{14} + Q_{34}p_{34} + Q_{42}p_{42} + Q_{23}p_{23} = 0.$$

Die Coëfficienten Q_{ik} sind durch die Gleichung (5) definirt, sie enthalten also noch einen unbestimmten Factor J, welchen wir als ein *Mass für die Grösse der unendlich kleinen Bewegung* auffassen können. Denken wir uns nämlich die Coëfficienten der Gleichung der Fundamentalfläche absolut bestimmt, so brauchen wir J nur für *eine* bestimmte unendlich kleine Bewegung gleich der Einheit zu setzen, um durch Vergleichung mit ihr die Intensität anderer Bewegungen zu messen. Legen wir demgemäss den Q_{ik} absolute Werthe bei, so ist eine jede unendlich kleine Bewegung durch diese 6 Coordinaten des ihr zugehörigen Rotationscomplexes vollkommen bestimmt, und wir werden diese daher geradezu als *Coordinaten der betreffenden Bewegung**) bezeichnen.

Den hier gegebenen Ausführungen stellen sich, ebenso wie in § 3., sofort dualistische gegenüber, welche in analoger Weise zur Darstellung des der Bewegung zugeordneten Translationscomplexes führen würden. Die Coordinaten desselben, welche immer durch P_{ik} bezeichnet werden mögen, können wir mit demselben Rechte, wie die Q_{ik} *als Coordinaten der unendlich kleinen Bewegung* auffassen, und diese zwie-

---

*) Vgl. Klein: Notiz, betr. den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper, Math. Annalen Bd. IV. p. 403. — Es werden dann alle Bewegungen, deren Coordinaten sich nur um einen gemeinsamen Factor unterscheiden, durch dieselben Complexe dargestellt.

fache Darstellung derselben Bewegung wird sich durch alle folgenden Betrachtungen hindurchziehen; sie ist für die allgemeine projectivische Massgeometrie charakteristisch. Der Zusammenhang zwischen beiden Darstellungsweisen wird stets durch die Fundamentalfläche vermittelt, indem der eine Complex dem andern (nach § 3.) in Bezug auf sie polar conjugirt ist; es bestehen demnach zwischen den P_{ik} und Q_{ik} stets die Gleichungen (2) resp. (8) in § 1., in welchen wir nur $\Pi_{\alpha\beta}$ durch $Q_{\gamma\delta}$ zu ersetzen haben. Da ferner die P_{ik} und Q_{ik} nunmehr absolut gegeben sind, so müssen wir den dort vorkommenden Proportionalitätsfactoren ϱ und ϱ' bestimmte Werthe beilegen, und zwar werden wir bei der vollkommenen Gleichberechtigung beider setzen müssen:

$$\varrho = \varrho' = \sqrt{\Delta}$$

(vgl. § 1. (10)), so dass wir erhalten:

$$(7)\quad \begin{cases} \sqrt{\Delta}\, Q_{ik} = \frac{1}{2}(a_i b_k - b_i a_k)\, \Sigma(a_r b_s - b_r a_s)\, P_{rs} = \frac{1}{2}\dfrac{\partial \Phi_{PP}}{\partial P_{ik}} \\ \sqrt{\Delta}\, P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\gamma b_\delta - b_\gamma a_\delta)\, \Sigma(a_{\alpha'} b_{\beta'} - b_{\alpha'} a_{\beta'})\, Q_{\gamma'\delta'} = \frac{1}{2}\dfrac{\partial \Phi_{QQ}}{\partial Q_{\alpha\beta}} \; {}^{*)}. \end{cases}$$

Sind insbesondere die beiden Complexe specielle, d. h. ist (vgl. (13) § 1.)

$$Q_{12}Q_{34} + Q_{13}Q_{42} + Q_{14}Q_{23} = P_{12}P_{34} + P_{13}P_{42} + P_{14}P_{23} = 0,$$

so reducirt sich die Bewegung auf eine *Rotation um die Axe* Q_{ik}, oder was dasselbe ist, auf eine *Translation nach dem Strahle* P_{ik}, wie in § 3. an der kanonischen Form gezeigt wurde; wir können nämlich die dort erhaltenen Resultate sämmtlich allgemein aussprechen, da unsere Operationen durchgängig einen invarianten Charakter tragen. Von Interesse erscheint hierbei die *Frage nach der gleichzeitigen Transformation der Fundamentalfläche und der beiden Complexe in die oben benutzte kanonische Form*, eine Frage, welche mit dem bekannten Probleme der gleichzeitigen Transformation von zwei bilinearen Formen auf die kanonische Form**) zusammenfällt. Durch den Complex und

*) Ich verstehe immer unter Φ_{QQ} den Ausdruck, welcher aus Φ_{PP} entsteht, wenn man $P_{\alpha\beta}$ durch $Q_{\gamma\delta}$ ersetzt. Geht man von der Gleichung der Fundamentalfläche in Ebenencoordinaten aus:

$$0 = \Omega'_{uu} = \Sigma A_{ik} u_i u_k = \tfrac{1}{6}(a\, b\, c\, u)^2 = \Sigma B_{ik} u_i u_k$$

so würde die Gleichung derselben in Liniencoordinaten:

$$0 = \left\{\Sigma(A_i B_k - B_i A_k)\, Q_{ik}\right\}^2 = \Delta\left\{\Sigma(a_\alpha b_\beta - b_\alpha a_\beta)\, Q_{\gamma\delta}\right\}^2;$$

tritt daher Φ_{QQ} unten in Verbindung mit Ω'_{uu} auf, so müssen wir statt des letztern Ausdruckes setzen:

$$\frac{\Omega'_{uu}}{\sqrt{\Delta}}.$$

**) Vgl. Weierstrass: Berliner Monatsberichte 1868.

die Fundamentalfläche sind uns nämlich zwei lineare Verwandtschaften zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes gegeben, und solche Verwandtschaften lassen sich durch zwei simultane bilineare Formen darstellen.

Wendet man zwei oder mehrere unendlich kleine lineare Transformationen, welche die Fundamentalfläche ungeändert lassen, nach einander an, so entsteht eine neue Transformation durch Addition der den verschiedenen Transformationen entsprechenden Differentiale der Coordinaten, dargestellt durch:

$$dx_i = \Sigma(a_{ik}d\lambda + a'_{ik}d\lambda' + a''_{ik}d\lambda'' + \cdots)x_k.$$

Die Q_{ik} sind aber lineare Functionen der Transformationscoëfficienten, addiren sich also auch, und, da ganz Analoges für die P_{ik} gilt, können wir unabhängig davon, ob wir die Bewegung durch die P_{ik} oder die Q_{ik} gegeben annehmen, den Satz aussprechen:

Unendlich kleine Bewegungen setzen sich zusammen, indem sich ihre Coordinaten, die wir in obiger Weise absolut bestimmt denken, addiren.

Es ergiebt sich hieraus auch wieder die § 3. erwähnte Eigenschaft zweier in Bezug auf einen der beiden Complexe conjugirter Geraden (vergl. Klein, diese Ann. Bd. IV, S. 409), durch welche die Complexe eben als Rotations- und Translations-Complexe charakterisirt waren.

Verschwinden von den Coordinaten Q_{ik} alle bis auf eine, so ist der entsprechende Complex jedenfalls ein specieller; *eine jede der Coordinaten des Rotationscomplexes stellt also eine unendlich kleine Rotation um eine Kante des Coordinatentetraëders dar (Q_{11} um die Kante $x_1 = 0$, $x_4 = 0$), und ebenso jede Coordinate des Translationscomplexes eine unendlich kleine Translation nach einer Kante desselben*)* (z. B. P_{11} nach der Kante $x_2 = 0$, $x_3 = 0$); und dies giebt sofort:

Eine jede unendlich kleine Bewegung können wir erzeugt denken durch 6 unendlich kleine Rotationen um die Kanten eines beliebigen Tetraëders resp. durch 6 solche Translationen nach denselben, ein Satz, der für spec. Massb. zuerst von Möbius gegeben wurde**). Bei unserer Bestimmung der Bewegung durch ihre Coordinaten erscheint er als selbstverständlich.

Wir können ihn noch leicht verallgemeinern, da nach einer Bemerkung des Herrn Klein***) ein linearer Complex vollkommen durch 6 andere solche Complexe bestimmt ist, vorausgesetzt, dass man keinen linearen Complex angeben kann, der mit allen 6 zugleich in Involution

---

*) Vgl. eine andere Bedeutung dieser Coordinaten im § 13.

**) Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Crelle's J. Bd. 18. Für spec. Massbest. gilt natürlich nur der erste Theil der beiden Sätze.

***) Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. Math. Ann. Bd. II.

liegt. Als Coordinaten eines siebenten linearen Complexes definirt man dann die simultanen Invarianten desselben in Bezug auf die 6 gegebenen (d. h. nach § 1. ihre mit gewissen Constanten multiplicirten Momente in Bezug auf dieselben). Da nun jede unendlich kleine Bewegung durch einen linearen Complex dargestellt wird, so haben wir: *Eine jede unendlich kleine Bewegung kann durch dieselben sechs Schraubenbewegungen erzeugt werden, wenn von diesen keine die Folge der übrigen oder einiger unter ihnen ist.* Wäre dies Letztere der Fall, so würden nämlich die 6 Gleichungen, welche die involutorische Lage eines Complexes zu den 6 gegebenen Complexen ausdrücken, nach dem Satze über die Addition ihrer Coordinaten auflösbar werden, was wir ausgeschlossen haben. Von diesen 6 Complexen können natürlich einige specielle sein; sind sie es alle, so haben wir den Satz von Möbius:

*Ein Körper kann auf jede mögliche Weise bewegt werden, wenn er um sechs von einander unabhängige Gerade gedreht werden kann (resp. nach ihnen verschoben werden), d. h. Gerade, die so liegen, dass sie nicht alle einem siebenten linearen Complexe angehören,**) was ja die Bedingung dafür sein würde, dass sie mit ihm in Involution liegen.

§ 5.

Der Complex der Charakteristiken.

Soll eine gerade Linie Charakteristik eines Punktes sein, so müssen ihre Coordinaten nach § 3. folgenden Gleichungen genügen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho p_{12} = x_1 x_2 (a_2 - a_1) & \varrho p_{34} = x_3 x_4 (a_4 - a_3) \\ \varrho p_{13} = x_1 x_3 (a_3 - a_1) & \varrho p_{42} = x_4 x_2 (a_2 - a_4) \\ \varrho p_{14} = x_1 x_4 (a_4 - a_1) & \varrho p_{23} = x_2 x_3 (a_3 - a_2)\,. \end{cases}$$

Durch sie kann man jedes der drei Verhältnisse $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ auf zwei verschiedene Weisen mittelst der p_{ik} ausdrücken, was zu drei Gleichungen 2. Grades in ihnen Veranlassung giebt, die jedoch denselben *Complex zweiten Grades* darstellen müssen, da es dreifach unendlich viele Charakteristiken von Punkten giebt; ich kann die Gleichung des Complexes demnach in den 3 Formen schreiben:

$$(2)\qquad \begin{cases} (a_2 - a_4)\,(a_3 - a_1) p_{12} p_{34} = (a_4 - a_3)\,(a_2 - a_1) p_{13} p_{42} \\ (a_4 - a_1)\,(a_3 - a_2) p_{12} p_{34} = (a_4 - a_3)\,(a_2 - a_1) p_{23} p_{14} \\ (a_4 - a_1)\,(a_3 - a_2) p_{13} p_{42} = (a_2 - a_4)\,(a_3 - a_1) p_{23} p_{14}\,, \end{cases}$$

---

*) Vgl. Sylvester: Sur l'involution de lignes droites dans l'espace, considerées comme des axes de rotation; compt. rend. t. 52. 1861. Das bei ihm auftretende *Involutionssystem* von Geraden ist eben nach Plückers Bezeichnung ein linearer Complex.

und in der That formt man leicht mit Hülfe der beiden Identitäten:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

und

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$$

jede von ihnen in jede andere von ihnen um. Der so erhaltene Complex ist jener bekannte, dessen Geraden die Ebenen eines bestimmten Tetraëders, welches dann zugleich die Singularitätenfläche des Complexes darstellt, nach constantem Doppelverhältnisse schneiden.*) Bei uns ist dies das Coordinatentetraëder; wie man leicht verificirt, wenn man beachtet, dass die Punkte der Charakteristik eines Punktes y durch:

$$\varrho x_i = y_i - \nu d y_i = y_i(1 - \lambda a_i)$$

gegeben sind, wo $\lambda = \nu \cdot d\lambda$ ein Parameter ist. Für die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Ebenen des Tetraëders ist dann

$$\lambda = \lambda_i = \frac{1}{a_i} \, (i = 1, 2, 3, 4),$$

und das Doppelverhältniss der vier Punkte:

$$\alpha = \frac{\dfrac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}}{\dfrac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_4}} = \frac{(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)}{(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)}, \quad \text{also constant.}$$

Es ist aber der Zähler des rechts stehenden Ausdrucks die simultane Invariante der beiden der Bewegung zugeordneten linearen Complexe in der hier zu Grunde gelegten kanonischen Form: $\frac{1}{2}(Q, Q)$ oder $\frac{1}{2}(P, P)$, und der Nenner geht aus der Gleichung der Fundamentalfläche in Liniencoordinaten:

$$\Phi_{pp} = (p_{14} + p_{23})^2 + 4\, p_{12}p_{34} = 0$$

hervor, wenn man darin die p_{ik} durch die Coordinaten eines jener beiden Complexe ersetzt, denn es ist

$$(a_4 - a_1 + a_3 - a_2)^2 = [(a_4 - a_2) + (a_3 - a_1)]^2 = 2\,(a_4 - a_2)\,(a_3 - a_1),$$

wegen

$$a_4 - a_2 = a_3 - a_1.$$

Folglich haben wir allgemein für dies Doppelverhältniss:

---

*) Diesen Complex behandelt zuerst Chasles, er kommt auf ihn als gebildet von den Normalen eines Systems von confocalen Flächen 2. Ordnung (Ap. hist. note 31); Herr Reye erzeugt ihn durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte in collinearen Systemen (Geometrie der Lage, 2. Abth. p. 116); ebenso tritt er im Texte auf bei unendlich kleinen linearen Transformationen. Den Satz von der Constanz des erwähnten Doppelverhältnisses gab Herr Müller (Math. Annalen Bd. I, 1869).

$$\alpha = \frac{(Q,Q)\sqrt{\Delta}}{\Phi_{QQ}};$$

d. h. *es ist das Moment eines linearen Complexes in Bezug auf sich selbst, oder der Parameter dieses Complexes*), gleich dem Doppelverhältnisse, nach welchem die auf einer Ebene in ihrem Nullpunkte errichtete Normale die vier Ebenen des durch den Complex und die Fundamentalfläche bestimmten Tetraëders schneidet.* —

Auf denselben Complex wird man geführt, wenn man nach den Geraden fragt, welche Charakteristiken von Ebenen sind, und demnach aus den Gleichungen

$$\sigma q_{ik} = u_i u_k (a_k - a_i) \tag{3}$$

die u_i eliminirt. Wir haben also den Satz:

Ist eine Gerade Charakteristik eines Punktes, so ist sie auch Charakteristik einer Ebene, und umgekehrt.

Hierdurch ist jedem Punkte y eine Ebene v zugeordnet, und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt der Art, dass beide gemeinsame Charakteristik haben; während der Punkt auf dieser um ein unendlich kleines Stück fortschreitet, dreht sich die Ebene um sie**); zwischen den Coordinaten beider bestehen demnach die Relationen:

$$\sigma q_{12} = u_1 u_2 (a_2 - a_1) = \varrho p_{34} = x_3 x_4 (a_4 - a_3)$$
$$\sigma q_{13} = u_1 u_3 (a_3 - a_1) = \varrho p_{42} = x_4 x_2 (a_2 - a_4), \text{ u. s. f.}$$

Drückt man hieraus die Werthe von $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ durch die u aus, so findet man die betreffenden Transformationsgleichungen in der Form:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu u_1 = \dfrac{a_3 - a_2}{x_1} & \mu u_3 = \dfrac{a_4 - a_1}{x_3} \\ \mu u_2 = \dfrac{a_1 - a_4}{x_2} & \mu u_4 = \dfrac{a_2 - a_3}{x_4}, \end{array}\right. \tag{4}$$

und dies ist jene bekannte Verwandtschaft***), welche einem Punkte eine Fläche 3. Ordnung mit 4 konischen Knotenpunkten entsprechen

---

*) Wenn wir die Bezeichnung Plückers für den analogen Ausdruck bei specieller Massbest. gebrauchen wollen; vgl. Neue Geometrie n. 38. — In α musste noch $\sqrt{\Delta}$ hinzutreten, damit Zähler und Nenner von gleichem Grade in den Coëfficienten von Φ werden; man erkennt dies auch, wenn man letztere in der kanonischen Form nicht gleich Eins setzt.

**) Die Ebene ist also Osculationsebene der durch den Punkt gehenden projectivischen Schraubenlinien; vgl. § 6.

***) Vergl. zum Beispiel Lie in den Göttinger Nachrichten 1870, 1; Eckardt: Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes. Math. Annalen Bd. V, p. 30; Klein und Lie: Sur une certaine famille de courbes et de surfaces; comptes rend. 13. juin 1870.

lässt, einer Ebene eine Fläche 3. Classe mit 4 Doppelebenen; näher werden wir auf sie, sowie auf ihre Beziehungen zu den durch die beiden linearen Complexe begründeten Transformationen in § 7. eingehen. —

Durch die Gleichungen (1) und (3) ist *eine eindeutige Abbildung des Charakteristiken-Complexes auf die Punkte, resp. Ebenen des Raumes gegeben*, wie sie bei jedem Complexe zweiten Grades möglich ist.*) Es geht dabei jede Gerade durch ihren Bildpunkt und liegt in ihrer Ebene, und dadurch unterscheidet sich diese Abbildung von derjenigen, welche Herr Lie durch eine sogenannte r-Transformation für denselben Complex gegeben hat**); andererseits ist sie auch von der allgemeinern verschieden, welche den Normalen eines Systems von confocalen Flächen 2. Ordnung ihre Fusspunkte zuordnet, indem bei uns der Punkt eine ausgezeichnete Lage auf seiner zugehörigen Geraden hat. Die Ebenen des Tetraëders sind nämlich hier nicht gleichmässig benutzt, sondern theilen sich in zwei Paare ($x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$), so dass die Schnittlinie der Ebenen des einen die absolute Polare derjenigen des andern ist, und *der Bildpunkt einer Geraden des Complexes ist der eine Doppelpunkt der durch diese beiden Ebenenpaare auf ihm bestimmten Involution*, wie man durch eine einfache Rechnung nachweist. Der andere Doppelpunkt dieser Involution ist der absolute Pol der dem ersteren im Translationscomplexe zugehörigen Nullebene und gleichzeitig der Nullpunkt der absoluten Polarebene dieses anderen Doppelpunktes in Bezug auf den Rotationscomplex. Man sieht aus diesen Verhältnissen, dass man jeden *Tetraëdralcomplex****), sobald 4 Kanten des Tetraëders auf der Fundamentalfläche liegen, durch die Charakteristiken der Punkte des Raumes bei einer unendlich kleinen Bewegung erzeugt denken kann, dass dann aber einem gegebenen Complexe der Art nur zwei unendlich kleine Bewegungen zugehören, je nachdem man den einen oder den anderen der Doppelpunkte obiger Involution als Bildpunkt einer Geraden desselben auffasst; vertauscht man die Punkte mit einander, so vertauschen zugleich die zugeordneten linearen Complexe ihre Rolle†).

Die Lage des Bildpunktes auf seiner zugehörigen Geraden ist aber

---

*) Vgl. Nöther: Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln. Göttinger Nachrichten 1869, Nr. 15.

**) Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes. Göttinger Nachrichten. 1870, Nr. 4. Vgl. Reye: Geometrie der Lage, Th. II. p. 125. 1868.

***) Wenn wir darunter einen Complex 2. Grades verstehen, dessen Geraden die Ebenen eines Tetraëders nach constantem Doppelverhältnisse schneiden.

†) Ganz analoge Ueberlegungen gelten, wenn statt der auf der Geraden gelegenen Punktreihe, das durch sie bestimmte Ebenenbüschel betrachtet wird.

auch noch in anderer Weise charakterisirt. Die Schnittpunkte derselben mit je dreien der Coordinantenebenen bilden nämlich mit ihm auch ein constantes Doppelverhältniss*); die Punkte der Geraden sind gegeben durch:

$$\varrho x_i = y_i(1 - \lambda a_i),$$

also ist für den Schnittpunkt mit $x_i = 0$:

$$\lambda_i = \frac{1}{a_i},$$

und das Doppelverhältniss von y mit den 3 durch

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

bestimmten Punkten ist demnach:

$$\alpha_1 = \frac{a_4 - a_2}{a_3 - a_2},$$

und entsprechend sind die drei anderen Doppelverhältnisse

$$\alpha_2 = \frac{a_3 - a_1}{a_4 - a_1}, \quad \alpha_3 = \frac{a_4 - a_2}{a_4 - a_1}, \quad \alpha_4 = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}.$$

Wegen der Identität:

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$$

bestehen aber zwischen ihnen noch die Relationen:

$$\alpha_1 = \alpha_4 \text{ und } \alpha_2 = \alpha_3\text{**)},$$

und diese Relationen bezeichnen unsere Abbildung als eine specielle gegenüber der bei einer allgemeinen linearen Transformation auftretenden, wie sie Herr Reye behandelt.

§ 6.

Die projectivischen Schraubenlinien.

Eine jede Gerade des Charakteristiken-Complexes ist als Verbindungslinie zweier aufeinander folgender Lagen eines Punktes in diesem Tangente an die Curve, auf welcher sich der Punkt bewegt, d. h. an eine projectivische Schraubenlinie (§ 2.). Diese Curven selbst sind dadurch definirt, dass sie durch diejenige lineare Transformation, welche die betrachtete Bewegung darstellt, in sich übergeführt werden, sie sind also eine specielle Art der von den Herren Klein und Lie***)

---

*) Vgl. Klein und Lie: comptes rend. 13. juin 1870.

**) Sie sind wieder durch die verschiedene Benutzung der 4 Tetraëderebenen bei der Transformation bedingt.

***) Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. Comptes rend. 6. und 13. Juni 1870. Und: Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen, vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Ann. Bd. IV, p. 50.

näher untersuchten Gebilde. Bei einer Bewegung einer solchen Schraubenlinie in sich geht auch der Complex der Charakteristiken in sich über*), da seine Geraden jene Curven umhüllen. Während der einer solchen zugehörige Bildpunkt (§ 5.) die Curve durchläuft, bleibt die Gerade stets Tangente derselben und die zugehörige Bildebene umhüllt als Osculationsebene der Curve die von den Tangenten gebildete abwickelbare Fläche; die Schraubenlinie selbst liegt immer ganz auf der durch einen ihrer Punkte gehenden Fläche des Büschels

$$x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3 = 0,$$

da ja jeder Punkt sich auf einer solchen bewegt (§ 2.).

Bei der Bewegung geht ein Punkt x nach einander in die Punkte $x + dx$ und $x + 2dx + d^2x$ über, wo nun nach § 3:

$$dx_i = a_i x_i d\lambda, \qquad (a_1 + a_4 = a_2 + a_3)$$

also auch:

$$d^2 x_i = a_i dx_i d\lambda = a_i^2 x_i d\lambda^2 .$$

Die Integration dieser Gleichungen ergiebt *die Coordinaten eines Punktes einer Schraubenlinie als Functionen eines Parameters* λ**) in der Form:

---

*) Es giebt überhaupt dreifach unendlich viele lineare Transformationen des Complexes in sich. Eine von den Linien desselben umhüllte Complexcurve geht dabei im Allgemeinen in eine andere derselben Gattung über; der Complex kann also durch die Gesammtheit der dreifach unendlich vielen Curven derselben Gattung erzeugt angesehen werden (vgl. Lie: Göttinger Nachr. 1870). Im Texte bilden die Schraubenlinien eine solche Gattung; es sind nur zweifach unendlich viele, da eine jede von ihnen durch die betreffende Transformation in sich selbst übergeführt wird.

**) Eine Ebene

$$k x_2 - l x_3 = 0$$

schneidet eine Schraubenlinie in Punkten, welche der Bedingung

$$k c_2 \alpha_2^{\lambda} - l c_3 \alpha_3^{\lambda} = 0$$

genügen müssen; für diese Schnittpunkte ist also der Parameter λ bestimmt durch

$$\lambda = \frac{1}{a_2 - a_3} \log \frac{l c_3}{k c_2}.$$

Bei reeller geradliniger Fundamentalfläche schneidet daher die Curve jede Ebene der beiden durch das Hauptaxenpaar bestimmten Büschel nur einmal; es treten hier für $\alpha_i = \varrho^i$ Raumcurven 3. Ordnung auf, welche die Hauptaxen zweimal treffen. — Sind dagegen die von einer Hauptaxe an die Fundamentalfläche gehenden Tangentenebenen imaginär, d. h. setzen wir

$$\gamma + i\delta = k c_2 \qquad \alpha + i\beta = a_2$$
$$\gamma - i\delta = l c_3 \qquad \alpha - i\beta = a_3,$$

so wird

$$\lambda = \frac{1}{2i\beta} \lg \frac{\gamma - i\delta}{\gamma + i\delta} = -\frac{1}{\beta}\left(\operatorname{arctg} \frac{\delta}{\gamma} + 2n\pi\right),$$

wenn n eine ganze Zahl bedeutet; also *bei reeller nicht geradliniger Fundamental-*

$$\varrho x_i = c_i e^{a_i \lambda},$$

oder da

$$a_i = \log \alpha_i:$$

(1) $$\varrho x_i = c_i \alpha_i^{\lambda}.$$

Die hier auftretenden Grössen α_i müssen der Bedingung

$$\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_3$$

genügen; und die c_i sind beliebige Constante, die wir als Coordinaten eines bestimmten Punktes der Curve betrachten können. Wählen wir statt seiner irgend einen anderen Punkt derselben Curve, so werden ihre Gleichungen dadurch nicht geändert; soll demnach eine solche Schraubenlinie auf einer bestimmten Fläche:

(2) $$a x_1 x_4 + b x_2 x_3 = 0$$

des erwähnten Büschels liegen, so besteht zwischen den c_i noch die eine Gleichung:

$$a\, c_1 c_4 + b\, c_2 c_3 = 0,$$

und jedem Werthsysteme dieser Grössen entspricht eine der einfach unendlich vielen Curven auf der gegebenen Fläche. *Die Tangenten aller dieser letzteren gehören nach einer Bemerkung der Herren Klein und Lie* (comptes rend. 1870) *einem linearen Complexe an*, durch welchen dann einem Punkte der Curve seine Schmiegungsebene zugeordnet wird; dies ist aber dieselbe Relation, welche einem Punkte diejenige Ebene entsprechen lässt, die mit ihm gemeinsame Charakteristik hat, und sie ist daher durch die Gleichungen (4) § 5. gegeben. In der That, soll der Punkt y immer auf der Fläche (2) liegen, so müssen wir $y_1 y_4$ zu $-b$ und $y_2 y_3$ zu a proportional setzen, wodurch wir erhalten:

(3) $$\begin{cases} \sigma v_1 = a(a_3 - a_2) y_4 & \sigma v_3 = b(a_1 - a_4) y_2 \\ \sigma v_2 = b(a_4 - a_1) y_3 & \sigma v_4 = a(a_2 - a_3) y_1 . \end{cases}$$

Man leitet dieselben Gleichungen auch leicht direct ab, wenn man von der Gleichung der Schmiegungsebene des Punktes y ausgeht, die hier gegeben ist durch:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ dy_1 & dy_2 & dy_3 & dy_4 \\ d^2y_1 & d^2y_2 & d^2y_3 & d^2y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ a_1 y_1 & a_2 y_2 & a_3 y_3 & a_4 y_4 \\ a_1^2 y_1 & a_2^2 y_2 & a_3^2 y_3 & a_4^2 y_4 \end{vmatrix} d\lambda^3 = 0.$$

---

fläche schneiden die Schraubenlinien die Ebenen des einen Büschels (dessen Axe die Fläche in imaginären Punkten trifft) nur einmal, die des andern in regelmässigen Intervallen unendlich oft, wie bei spec. Massbestimmung. — *Bei imaginärer Fundamentalfläche* endlich werden die Ebenen beider Büschel unendlich oft getroffen.

Die Gleichung des linearen Complexes, der die Zuordnung vermittelt, wird:

$$a(a_3 - a_2)p_{14} + b(a_4 - a_1)p_{23} = 0; \tag{4}$$

die Tangenten der auf der Fundamentalfläche gelegenen Schraubenlinien ($a = b$) gehören also dem der unendlich kleinen Bewegung zugeordneten Translationscomplexe an. Aus dem Auftreten des Complexes (4) ergiebt sich sofort:

Die Schmiegungsebene der Punkte einer projectivischen Schraubenlinie, in denen sie von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, schneiden sich in einem Punkte dieser Ebene.

Die Normalenebene eines Punktes der Curve ist ihm unmittelbar durch den Rotationscomplex nach der Definition desselben zugeordnet, woraus sich der für die specielle Massbestimmung bekannte Satz*): dass *die Normalebenen einer Schraubenlinie in ihren Schnittpunkten mit einer beliebigen Ebene sich in einem Punkte dieser Ebene schneiden,* für allgemeine Massbestimmung von selbst ergiebt. Durch dies Verhältniss des linearen Complexes zu den Schraubencurven wird es selbstverständlich, dass er bei einer Bewegung dieser in sich ebenfalls ungeändert bleibt (vgl. § 3). Bei einer solchen geht aber auch jedes System von Erzeugenden der Fläche 2. Ordnung, auf welcher die Curve liegt, in sich über, und also bleibt eine metrische Relation zwischen einer solchen Erzeugenden und einer Tangente der Schraubenlinie in einem Schnittpunkte mit derselben ungeändert, d. h. *die Tangenten einer projectivischen Schraubenlinie bilden mit den beiden Schaaren von Erzeugenden der Fläche 2. Ordnung, auf welcher sie liegt, constante Winkel.* Man verificirt dies auch leicht direct in folgender Weise:

Die Gleichung einer Fläche

$$a x_1 x_4 + b x_2 x_3 = 0$$

in Liniencoordinaten ist bekanntlich:

$$(a p_{14} + b p_{23})^2 + 4ab\, p_{12} p_{34} = 0, \tag{5}$$

und die Erzeugenden der einen Schaar derselben sind durch die drei inearen Complexe:

$$p_{12} = 0, \quad p_{34} = 0, \quad a p_{14} + b p_{23} = 0$$

gegeben. Sind nun p'_{ik} die Coordinaten einer Tangente der Schraubenlinie, und

$$\Phi_{pp} = (p_{14} + p_{23})^2 + 4 p_{12} p_{34} = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche, so wird der Cosinus des von p' mit einer Erzeugenden p gebildeten Winkels, da ja p' den Gleichungen (4) und (5) genügt:

*) Vgl. Chasles: Aperçu historique p. 679.

$$= \frac{\Phi_{pp'}}{\sqrt{\Phi_{pp}\cdot\Phi_{p'p'}}} = \frac{-a^2(a_3-a_2)-b^2(a_4-a_1)+4ab(a_3-a_1)}{\sqrt{(a-b)^2\left\{a^2(a_3-a_2)^2+b^2(a_4-a_1)^2-ab(a_3-a_2)^2-ab(a_4-a_1)^2\right\}}},$$

also in der That constant. —

Ganz dualistisch entsprechend hätten wir auch von den Ebenen ausgehen können, welche die abwickelbare Fläche einer Schraubenlinie umhüllen; ihre Coordinaten stellen sich in ähnlicher Weise mittelst eines Parameters dar, wie die Punkte der Curve; die Geraden aller solcher Flächen, welche dieselbe Fläche 2. Classe des mehrfach erwähnten Büschels umhüllen, bilden wieder einen linearen Complex, u. s. f.

Artet die Fundamentalfläche in einen Kegelschnitt aus, so lassen sich die Schraubenlinien für diese specielle Massbestimmung in ganz ähnlicher Weise durch einen Parameter λ darstellen, wie dies oben bei allgemeiner Massbestimmung geschah; ist der Kegelschnitt dann insbesondere imaginär, so erscheinen also die gewöhnlichen Schraubenlinien als eine Ausartung der durch die Gleichungen (1) bestimmten Curven. In der That, sei dieser Kegelschnitt gegeben durch:

$$u_2 u_3 - u_1^2 = 0,$$

so wird eine Bewegung dargestellt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_4 y_4, & \varrho x_3 &= \alpha_3 y_3, \\ \varrho x_2 &= \alpha_2 y_2, & \varrho x_4 &= \alpha_1 y_4, \end{aligned}$$

wenn die Bedingung

$$\alpha_1^2 = \alpha_2 \alpha_3$$

erfüllt ist. Diese Transformation lässt dann auch jeden Kegelschnitt der Schaar

$$u_2 u_3 - \mu u_1^2 = 0$$

und jeden Kegel des Büschels

$$x_2 x_3 - \mu x_4^2 = 0$$

ungeändert, wo die Spitze aller dieser Kegel in dem Schnittpunkte der beiden gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnittschaar liegt. Durch λ malige Wiederholung derselben Transformation erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \alpha_1^\lambda y_1 + \lambda \alpha_4 \alpha_1^{\lambda-1} y_4, & \varrho x_3 &= \alpha_3^\lambda y_3, \\ \varrho x_2 &= \alpha_2^\lambda y_2, & \varrho x_4 &= \alpha_1^\lambda y_4, \end{aligned}$$

und wenn wir $d\lambda$ statt λ setzen, so wird die entsprechende unendlich kleine Bewegung gegeben durch:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \left(\log \alpha_1 x_1 + \frac{\alpha_4}{\alpha_1} x_4\right) d\lambda, & dx_3 &= \log \alpha_3 \cdot x_3 d\lambda \\ dx_2 &= \log \alpha_2 \cdot x_2 d\lambda & dx_4 &= \log \alpha_1 \cdot x_4 d\lambda. \end{aligned}$$

Die Integration dieser Gleichungen ergiebt die betreffenden Schraubenlinien in der Form:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= c_1 \alpha_1^{\lambda} + \lambda c_4 \alpha_4 \alpha_1^{\lambda-1} \\
\varrho x_2 &= c_2 \alpha_2^{\lambda} \\
\varrho x_3 &= c_3 \alpha_3^{\lambda} \\
\varrho x_4 &= c_4 \alpha_1^{\lambda},
\end{aligned}$$

worin die c_i die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve bedeuten. Man erhält nun sofort die gewöhnlichen Gleichungen der Schraubenlinie, wenn man den Kegelschnitt imaginär annimmt, d. h. wenn man setzt:

$$\begin{array}{lll}
\frac{x_2}{x_4} = x + iy & \frac{c_2}{c_4} = a + ib & \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = iu \\
\frac{x_3}{x_4} = x - iy & \frac{c_3}{c_4} = a - ib & \log \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = -iu \\
\frac{x_1}{x_4} = z & \frac{c_1}{c_4} = c & \frac{\alpha_4}{\alpha_1} = \alpha;
\end{array}$$

es sind hier $\log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $\log \frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ rein imaginär angenommen worden, damit die Bedingung

$$\alpha_2 \alpha_3 = \alpha_1^2$$

erfüllt bleibt. Durch diese Substitutionen gehen unsere Gleichungen über in:

$$\begin{aligned}
z &= c + \alpha \cdot \lambda \\
x &= a \cos u\lambda - b \sin u\lambda \\
y &= a \sin u\lambda + b \cos u\lambda,
\end{aligned}$$

und setzt man hierin noch:

$$z' = z - c, \qquad a^2 + b^2 = r^2, \qquad \frac{u}{\alpha} = h$$

$$x' = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad y' = \frac{ay - bx}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

so erhält man schliesslich die bekannten Gleichungen:

$$x' = r \cos \frac{z'}{h},$$

$$y' = r \sin \frac{z'}{h}.$$

Betrachten wir hierin r und z' als Parameter, so erhalten wir die zweifach unendlich vielen Schraubenlinien, deren Tangenten nunmehr den Complex der Charakteristiken bilden. Zwei Ebenen seines Fundamentaltetraëders sind in die unendlich ferne Ebene ($x_4 = 0$) zusammengefallen; die beiden anderen sind imaginär, es sind die durch die Z-Axe gehenden Tangentenebenen an den unendlich fernen Kugelkreis.

§ 7.

Geometrische Beziehungen zwischen den im Vorigen auftretenden Verwandtschaften.

Während ich bisher bemüht war, im Allgemeinen ein Bild von einer unendlich kleinen Bewegung zu geben, wie sie bei unserer Metrik stattfindet, ist es der Zweck der folgenden Untersuchungen, den Zusammenhang der verschiedenen bisher erwähnten Flächen und Complexe im Einzelnen darzustellen. Besonders werden wir uns über die Vorgänge in einer Ebene, in der Nähe eines Punktes oder einer Geraden, als den Grundgebilden der Geometrie Aufschluss zu verschaffen suchen, und so zu Sätzen gelangen, wie sie meist für specielle Massbestimmung von Chasles*) u. A. aufgestellt wurden. Unsere algebraische Behandlungsweise ergiebt dabei leicht eine Reihe von Relationen, die hier näher auszuführen nicht unser Zweck sein kann; es kommt mir vielmehr darauf an, die für specielle Massgeometrie bekannten Sätze abzuleiten und, so weit es mir möglich ist, ein anschauliches Bild des Ganzen zu geben.

Von Interesse erscheint zunächst die Frage nach denjenigen Punkten, deren Fortschreitungsrichtungen (d. h. ihre Charakteristiken) sich bei einer unendlich kleinen Bewegung in einem gegebenen Punkte y schneiden. Den Ort derselben werden wir als Durchschnitt zweier Flächen in folgender Weise bestimmen: Die Coordinaten der Verbindungslinie von y mit einem solchen Punkte x müssen zu denen der Charakteristik von x proportional sein, und somit haben wir die Gleichungen:

$$\varrho\, x_i x_k (a_k - a_i) = x_i y_k - y_i x_k .$$

Aus ihnen ergiebt sich:

$$\varrho\,(a_2 - a_1) = \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}$$

$$\varrho\,(a_4 - a_3) = \frac{y_4}{x_4} - \frac{y_3}{x_3},$$

also müssen die gesuchten Punkte x wegen der zwischen den a_i bestehenden Identität auf einer Fläche 3. Ordnung liegen, dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_4}{x_4} - \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_3}{x_3} = 0 . \tag{1}$$

*) Bulletin universel p. Férussac, Nov. 1830; Aperçu hist. Note 25 und 33; Comptes rendus t. XVI, 1843 p. 1429 und t. 52. 1861 p. 1094; vgl. Jonquières: Mélanges de géometrie pure, Paris 1856; Sylvester: Comptes rend. t. 52 p. 741; Cayley ib. p. 1039; Mannheim: Bulletin de la société math. de France, t. I, 1873, p. 106 und Journal de l'école polyt. cah. 43, 1870.

Die Fläche ist nur abhängig von der Lage der Hauptaxen der Bewegung im Raume, also dieselbe für alle Schraubenbewegungen mit demselben Axenpaare; ihre speciellen Eigenschaften sind bekannt: sie hat vier konische Knotenpunkte in den Eckpunkten des Tetraeders (ist also von der 4. Classe) und enthält ausser den Kanten dieses noch 3 in einer Ebene liegende Gerade, von denen jede zwei gegenüberliegende jener Kanten trifft. Auf eine andere Fläche 3. Ordnung mit gleichen Eigenschaften führt uns die Betrachtung derjenigen Punkte, deren Charakteristiken gleichzeitig Charakteristiken von Ebenen sind, welche durch den Punkt y gehen. Wir erhalten ihre Gleichung, indem wir eine solche Ebene:

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0$$

mittelst der Gleichungen (4) § 5. transformiren, in der Form:

$$(2) \qquad (a_3 - a_2)\left(\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_4}{x_4}\right) - (a_4 - a_1)\left(\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_3}{x_3}\right) = 0,$$

und folglich haben wir die beiden Sätze*):

*Die Punkte, welche gemeinschaftliche Charakteristik mit den Ebenen eines Bündels haben, bilden eine Fläche 3. Ordnung mit 4 konischen Knotenpunkten in den Eckpunkten des Fundamentaltetraëders, die durch das Centrum des Ebenenbündels geht.***)

Die Ebenen, welche gemeinschaftliche Charakteristik mit den Punkten einer Ebene haben, umhüllen eine Fläche 3. Classe mit 4 Berührungskegelschnitten in den Seiten des Fundamentaltetraëders (Steiner'sche Fläche), welche die gegebene Ebene berührt.

---

*) Bei der vollkommenen Gültigkeit des Dualitätsgesetzes für unsere Betrachtungen, stelle ich die den gefundenen Sätzen dual entsprechenden ihnen unmittelbar gegenüber.

**) Wir erhalten diese Fläche für spec. Massb., wenn wir beachten, dass die benutzten Transformationsgleichungen gleichzeitig einem Punkte seine Schmiegungsebene in Bezug auf die durch ihn gehende Schraubenlinie zuordnen. Ist nämlich

$$u\xi + v\eta + w\zeta + 1 = 0$$

die Gleichung des Punktes (ξ, η, ζ), so sind die Coordinaten der Schmiegungsebene eines Punktes (x, y, z) für die durch ihn gehende Schraubenlinie mit der Ganghöhe $2\pi h$:

$$u = \frac{-hy}{(x^2+y^2)z}, \qquad v = \frac{+hx}{(x^2+y^2)z}, \qquad w = \frac{-1}{z},$$

und also ist die Gleichung der betreffenden Fläche 3. Ordnung:

$$h(x\eta - y\xi) + (x^2+y^2)(z-\zeta) = 0.$$

Es sind zwei Knotenpunkte der Fläche (2) in den unendlich fernen Punkt der Centralaxe der Bewegung (z-Axe) zusammengefallen, und hier entsteht dadurch ein biplaner Knotenpunkt; das in ihm osculirende Ebenenpaar berührt den imaginären Kugelkreis, denn es ist durch die Gleichung

Unter den Punkten der Fläche (2) sind auch jedenfalls diejenigen, deren Charakteristiken durch den Punkt y selbst hindurchgehen, und nach denen wir oben fragten; den Ort derselben erhalten wir demnach als Durchdringungscurve der Flächen (1) und (2), und da diese die 6 Kanten des Tetraëders gemein haben, so kann die gesuchte Curve nur von der 3. Ordnung sein; also:

Die Punkte, deren Chrakteristiken einen bestimmten Punkt treffen, bilden eine Raumcurve 3. Ordnung; es sind die Bildpunkte der Erzeugenden des durch den betreffenden Punkt gehenden Complexkegels*) (vgl. § 5.).

Die Ebenen, deren Charakteristiken in einer bestimmten Ebene liegen, umhüllen eine abwickelbare Fläche 3. Classe; es sind die Bildebenen für die Tangenten der in der betreffenden Ebene liegenden Complexcurve*).

Es ist damit jedem Punkte eine Curve 3. Ordnung zugeordnet, und *alle diese Curven gehen durch die vier Eckpunkte des Fundamentaltetraëders***), da die Charakteristiken dieser Punkte unbestimmt sind. Eine jede von ihnen berührt natürlich in dem Punkte, zu welchem sie gehört, dessen Charakteristik und, da sie auf dem durch ihn gehenden Complexkegel liegt, hat sie die Bildebene dieser Charakteristik zur Schmiegungsebene; längs ihr wird jener Kegel nämlich von dieser Ebene berührt (vgl. unten). *Wir können somit für einen Punkt die betreffende Curve 3. Ordnung construiren****) und kennen dann von der ihm zugehörigen Fläche (2) ausser dieser Curve 7 auf ihr liegende Gerade: die 6 Kanten des Tetraëders und die durch den Punkt gehende Gerade, welche das Axenpaar trifft, und dadurch *ist die Fläche 3. Ordnung vollkommen bestimmt.* Dass der Punkt y auch auf der zuletzt erwähnten Geraden liegt, folgt aus den folgenden Ueberlegungen, die

---

$$x^2 + y^2 = 0$$

dargestellt; die andern beiden Knotenpunkte sind imaginär, es sind die Schnittpunkte der absoluten Polare der z-Axe, d. h. der unendlich fernen Geraden der Ebene $z = 0$ mit dem Kugelkreise. Ausser dieser Geraden enthält die Fläche noch die z-Axe, die beiden von dem unendlich fernen Punkte derselben an den Kugelkreis gehenden Tangenten, und die durch den Punkt (ξ, η, ζ) zur z-Axe normale Linie, bestimmt durch:

$$z - \zeta = 0 \text{ und } y\xi - x\eta = 0;$$

die beiden sonst mit dieser in einer Ebene liegenden Linien sind in die unendlich ferne Gerade der XY-Ebene hineingefallen.

*) Es ist damit im Folgenden immer Complexkegel und Complexcurve im Charakteristikencomplexe gemeint.

**) Da bei spec. Massbest. zwei dieser Punkte in den unendlich fernen Punkt der Centralaxe zusammenfallen, so ist diese Axe Asymptote für jede in obiger Weise einem Punkte zugehörige Curve 3. Ordnung; diese sind also immer *cubische Ellipsen.*

***) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, II. p. 76.

überhaupt die Lage der verschiedenen Geraden gegen einander näher charakterisiren mögen.

Wir bemerken zunächst, dass die Fläche (1) für den absoluten Pol z der dem Punkte y im Rotationscomplexe zugehörigen Nullebene dieselbe Rolle spielt, wie die Fläche (2) für den Punkt y, denn beide Punkte sind durch die Gleichungen:

$$\mu z_1 = y_1(a_1 - a_4) \qquad \mu z_3 = y_3(a_3 - a_2)$$
$$\mu z_2 = y_2(a_2 - a_3) \qquad \mu z_4 = y_4(a_4 - a_1)$$

mit einander verbunden. Wir können daher alles, was wir für die erste Fläche aussagen, auf die zweite übertragen, wenn wir die Punkte y und z mit einander vertauschen, so dass es nur nöthig ist, eine der beiden Flächen zu betrachten.

Die dreifach berührende Ebene der Fläche (1) ist durch die Coordinaten:

$$\varrho u_1 = \frac{1}{y_1}, \quad \varrho u_2 = -\frac{1}{y_2}, \quad \varrho u_3 = -\frac{1}{y_3}, \quad \varrho u_4 = \frac{1}{y_4}$$

gegeben, sie schneidet dieselbe in den 3 Geraden, von denen jede 2 Kanten des Tetraëders trifft; zwei von diesen Linien schneiden sich im Punkte y, und die dritte, y gegenüberliegende, ist diejenige, welche die beiden Hauptaxen der Bewegung trifft*).

Durch die ersteren beiden Geraden geht auch die erste Polarfläche von y in Bezug auf die Fläche 3. Ordnung, und es ist bemerkenswerth, dass diese mit der durch y gehenden Fläche des Büschels

$$x_1 x_4 - \lambda x_2 x_3 = 0$$

identisch ist; zu ihnen harmonisch liegen die beiden Geraden, in denen die Ebene u den zu y gehörigen Complexkegel schneidet. Die eine ist die Charakteristik des Punktes y und schneidet die gegenüberliegende Seite des erwähnten Dreiecks in dem Punkte z, die andere ist die Charakteristik der Ebene u und schneidet jene Seite in einem Punkte, dessen Charakteristik sie gleichzeitig ist, und in welchem sie die Fläche (2) berührt. Letzteres folgt daraus, dass der genannte Complexkegel diese Fläche überhaupt längs der dem Punkte y zugehörigen Curve 3. Ordnung berührt, wie sogleich gezeigt werden soll.

Durch jeden Punkt x der Fläche geht nämlich im Allgemeinen nur eine Gerade (seine Charakteristik), deren Bildebene den Punkt y in sich enthält; denn eine zweite solche Gerade müsste auf dem zu x gehörigen

*) Auf dieser dritten Seite liegt auch der Nullpunkt von u (im Rotationscomplexe), und durch sie geht die absolute Polarebene von y. — Die hier ohne Beweis angeführten Sätze ergeben sich durch einfache Combination der verschiedenen Transformationsgleichungen.

Complexkegel liegen; die Bildebenen der Erzeugenden dieses Kegels schneiden aber (wie in § 8 gezeigt werden wird) alle die Charakteristik von x; die betreffende Gerade müsste daher in der durch y und die Charakteristik von x gehenden Ebene liegen und diese zur Bildebene haben, d. h. sie würde mit der Charakteristik von x zusammenfallen.

Es geht also durch jeden Punkt der Fläche nur eine der betrachteten Charakteristiken, und doch muss jede die Fläche in 3 Punkten schneiden; dies wird dadurch möglich, dass unsere Schlussweise für die Punkte der zu y gehörigen Curve 3. Ordnung ungültig ist. Denn die Charakteristik eines solchen Punktes geht durch y selbst, und die durch sie und y gehende Ebene wird also unbestimmt.

Da dies auch die einzigen Punkte sind, für welche diese Unbestimmtheit eintritt, so schneidet eine jede der Charakteristiken der Punkte der Fläche dieselbe noch in zwei auf der Curve 3. Ordnung gelegenen Punkten; also:

Die Charakteristiken der Ebenen eines Bündels bilden das vollständige Secantensystem der dem Mittelpunkte des Bündels zugeordneten Curve 3. Ordnung, und eine jede solche Secante hat ihren Bildpunkt auf der ihm zugehörigen Fläche 3. Ordnung (2).

Die Charakteristiken der Punkte einer Ebene bilden das vollständige Schnittliniensystem der Ebenen, welche die der gegebenen Ebene zugeordnete abwickelbare Fläche 3. Classe umhüllen, und die Bildebene einer jeden solchen Linie berührt die jener Ebene zugehörige Steiner'sche Fläche.

Die Charakteristiken der Punkte der Curve selbst, welche deren Verbindungslinien mit y sind, können also die Fläche nur in Punkten der Curve treffen; da sie aber die Fläche 3. Ordnung doch in 3 Punkten schneiden müssen, so schliessen wir:

Der durch einen Punkt gehende Complexkegel des Charakteristikencomplexes berührt die dem Punkte zugehörige Fläche 3. Ordnung längs der ihm zugeordneten Curve 3. Ordnung.

Die in einer Ebene liegende Complexcurve des Charakteristikencomplexes liegt auf der ihr zugehörigen Steiner'schen Fläche; die dieser längs dieser Curve umschriebene abwickelbare Fläche 3. Classe ist die der Ebene zugeordnete.

Dieser Kegel schneidet dagegen die Fläche (1) noch in einer zweiten Curve 3. Ordnung, welche zu dem Punkte z in derselben Beziehung steht, wie die erste zu y; längs ihr wird also diese Fläche von dem Complexkegel von z berührt, u. s. f.

Jedem der gegebenen und auch der noch folgenden Sätze kann man ferner einen neuen gegenüberstellen, wenn man bemerkt, dass die Beziehung zwischen einem Punkte und der Normalebene seiner Charakteristik in ihm durch einen linearen Complex, den Rotationscomplex, vermittelt wird; man hat also z. B.:

Die Normalebenen der Charakteristiken der Punkte einer Fläche (2) *umhüllen eine Steiner'sche Fläche; die Charakteristiken dieser Ebene liegen in der Normalebene der Charakteristik von y.* Und analoge Sätze könnte man durch Benutzung des Translationscomplexes ableiten, wie hier jedoch nicht weiter durchgeführt werden soll.

§ 8.

Fortsetzung. Congruenzen der auftretenden Complexe.

Die mehrfach erwähnte Curve 3. Ordnung können wir auch als theilweisen Durchschnitt des Complexkegels mit einer anderen Fläche 2. Ordnung erhalten; diese letztere bestimmt sich in folgender Weise: Wir fragen nach dem Orte der Punkte, deren Charakteristiken eine gewisse Gerade (p'_{ik}) schneiden; die Coordinaten p_{ik} jener genügen dann der Gleichung:

$$p_{12}'p_{34} + p_{13}'p_{42} + p_{14}'p_{23} + p_{34}'p_{12} + p_{42}'p_{13} + p_{23}'p_{14} = 0,$$

und wegen

$$\varrho p_{ik} = x_i x_k (a_k - a_i)$$

liegen die Bildpunkte der Linien p auf der Fläche:

$$(3) \ldots (a_4 - a_3)(p_{12}'x_3x_4 + p_{34}'x_1x_2) + (a_1 - a_3)(p_{13}'x_2x_4 - p_{42}'x_1x_3) + (a_4 - a_1)p_{23}'x_1x_4 + (a_3 - a_2)p_{14}'x_2x_3 = 0$$

Also haben wir den Satz:

Die Punkte, deren Charakteristiken eine bestimmte Gerade schneiden, liegen auf einer Fläche 2. Ordnung.	*Die Ebenen, deren Charakteristiken eine bestimmte Gerade schneiden, berühren eine Fläche 2. Classe.*

Auf dieser Fläche 2. Ordnung liegen dann alle die Curven 3. Ordnung, welche den Punkten jener festen Geraden in obiger Weise zugeordnet sind; und den Geraden, die durch einen bestimmten Punkt y gehen, entsprechen in dieser Weise Flächen 2. Ordnung, welche alle die dem Punkte zugehörige Curve 3. Ordnung enthalten (in der That gehen auch alle diese Flächen durch die 4 Eckpunkte des Fundamentaltetraëders). Wir werden sehen, dass unter ihnen auch der Complexkegel von y enthalten ist, indem dieser mit der der Charakteristik von y durch die Gleichung (3) entsprechenden Fläche identisch ist; und auch die Curve 3. Ordnung werden wir von einem neuen Gesichtspunkte betrachten. Es führen dazu die folgenden Erörterungen:

Nehmen wir zwei auf einander folgende Lagen einer Geraden, so sind die Punktreihen derselben durch die linearen Gleichungen, welche die unendlich kleine Bewegung darstellen, projectivisch auf einander bezogen, und somit erzeugen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Fläche 2. Ordnung. Fassen wir nun diese Geraden als Schnittlinien aufeinander folgender Lagen von Ebenen auf, so müssen diese Ebenen gleichzeitig alle Flächen 3. Classe der Schaar berühren, welche den Ebenen des durch die betrachtete Gerade bestimmten Büschels in der Weise zugeordnet sind, dass die Punkte einer solchen Ebene gemeinschaftliche Charakteristik mit den die Fläche umhüllenden Ebenen haben (vgl. § 7.). Die gemeinsame Developpable dieser Flächen besteht aber aus den 6 Kanten des Fundamentaltetraëders, die für uns keine Bedeutung haben, und einer Developpablen 3. Classe. Es folgt also:

Die Charakteristiken der Punkte einer Geraden sind die Erzeugenden einer Fläche 2. Ordnung; jede ist wieder Charakteristik einer Ebene, und alle diese Ebenen umhüllen eine abwickelbare Fläche 3. Classe, und entsprechend: *Die Charakteristiken der Ebenen eines Büschels erzeugen eine Fläche 2. Ordnung; jede ist wieder Charakteristik eines Punktes, und alle diese Punkte liegen auf einer Raumcurve 3. Ordnung*).*

Hierdurch ist jeder Geraden eine solche Curve zugeordnet; ausserdem entspricht auch jedem Punkte derselben eine solche in der oben angegebenen Weise (§ 7.), und die Secanten dieser letzteren sind die Charakteristiken der durch den Punkt gehenden Ebenen. Unter diesen sind nun jedenfalls, wo auch der Punkt auf der Geraden liegen mag, die Ebenen des durch dieselbe bestimmten Büschels, und ihre Charakteristiken müssen daher alle den Punkten der Geraden entsprechende Curven 3. Ordnung schneiden. Alle diese Curven liegen aber auf der Fläche 2. Ordnung, welche der Geraden durch die Gleichung (3) zugeordnet ist; folglich liegen die betreffenden Charakteristiken ganz auf dieser Fläche, d. h.:

Die durch die Charakteristiken der Ebenen eines Büschels erzeugte Fläche 2. Ordnung ist identisch mit derjenigen, welche von den Punkten gebildet wird, deren Charakteristiken die Axe des Büschels schneiden. Diese Axe gehört der anderen Schaar von Erzeugenden der Fläche an; die ihr zugehörige Curve 3. Ordnung schneidet die Charakteristiken der Ebenen des Büschels nur einmal, während die letzteren von den den Punkten der Axe zugehörigen Curven zweimal geschnitten werden. Analoges gilt für die von den Charakteristiken der Punkte eines Strahles erzeugte Fläche.

---

*) Für eine Gerade, welche beide Hauptaxen der Bewegung schneidet, zerfällt die Curve in diese Gerade und einen Kegelschnitt, da alle den Punkten einer solchen entsprechenden Flächen 3. Ordnung diese Gerade selbst enthalten.

Ist eine Gerade Charakteristik eines ihrer Punkte, so schneiden sich offenbar ihre beiden successiven Lagen in diesem Punkte, und da diese beiden Linien wieder projectivisch auf einander bezogen sind, so haben wir:

Gehört eine Gerade dem Charakteristiken-Complexe an,

so umhüllen die Charakteristiken ihrer Punkte einen Kegelschnitt in der Ebene, deren Charakteristik sie ist (Schmiegungsebene der durch den Punkt gehenden Schraubenlinie).

so bilden die Charakteristiken der durch sie gehenden Ebenen einen Kegel 2. Ordnung, dessen Spitze im Bildpunkte der Geraden liegt.

Die der Geraden entsprechende Curve 3. Ordnung fällt dann mit der ihrem Bildpunkte zugehörigen zusammen, und der durch diesen gehende Complexkegel wird mit der Fläche identisch, die seiner Charakteristik durch die Gleichung (3) entspricht, d. h. die Charakteristiken der Punkte des Kegels schneiden die Charakteristik seiner Spitze, und ebenso: Die Charakteristiken der einen Complexkegelschnitt umhüllenden Ebenen schneiden die Charakteristik seiner Ebene. Ein solcher Kegelschnitt und die Schnittcurve seiner Ebene mit der Fundamentalfläche haben 4 Tangenten gemein; *zwei von diesen schneiden sich in dem der Ebene durch den Rotationscomplex zugeordneten Nullpunkte,* (und man sieht so, wie der Kegelschnitt bei spec. Massbestimmung in eine Parabel übergeht, deren Brennpunkt mit dem Nullpunkte der Ebene zusammenfällt). Die Nullebene eines Punktes nämlich schneidet den von ihm an die Fundamentalfläche gehenden Berührungskegel in 2 Linien, welche dem Rotationscomplexe angehören; die Charakteristiken der Punkte dieser Linien schneiden daher deren absolute Polaren, die selbst wieder von den Linien (im Berührungspunkte) getroffen werden; folglich liegen die Charakteristiken der Punkte einer jeden von ihnen in einer Ebene, und desshalb müssen die beiden Linien selbst dem Charakteristiken-Complexe angehören, d. h. in der betrachteten Ebene den Complexkegelschnitt berühren. Ebenso beweist man, dass *die beiden anderen gemeinsamen Tangenten der beiden erwähnten Kegelschnitte sich in dem ihrer Ebene durch den Translationscomplex zugehörigen Nullpunkte schneiden;* man hat dabei zu zeigen, dass die Charakteristiken der durch eine jede von ihnen gelegten Ebenen sich in ihrem Berührungspunkte mit der Fundamentalfläche schneiden. Diese Beziehungen können wir nun auch in folgender Weise aussprechen:

Die durch den Charakteristiken-Complex und den Tangenten-Complex der Fundamentalfläche bestimmte Congruenz 4. Ordnung und Classe zerfällt in zwei Congruenzen 2. Ordnung und Classe, von denen jede einem der beiden der unendlich kleinen Bewegung zugehörigen linearen Complexe angehört.

Wir haben uns hier darauf beschränkt, die von den Charakteristiken der Punkte einer Ebene und Punktreihe oder der Ebenen eines Bündels und Büschels erzeugten Gebilde zu untersuchen; man könnte natürlich auch weiter gehen und die Bewegung anderer Flächen betrachten; die neue Lage einer solchen steht dann immer in linearer Beziehung zu der alten. Man erhält so z. B.:

Die Charakteristiken der einen Kegel 2. Ordnung berührenden Ebenen bilden eine windschiefe Fläche 4. Ordnung mit einer Doppelcurve 3. Ordnung; ist der Kegel ein Complexkegel des Charakteristikencomplexes, so fällt diese Curve mit dem Orte der Punkte zusammen, deren Charakteristiken durch seine Spitze hindurchgehen, und die windschiefe Fläche geht in die dieser Curve zugehörige abwickelbare über.

Da alle Tangenten einer solchen Curve 3. Ordnung dem Charakteristiken-Complex angehören, so können wir diesen auch durch jene Curven, als Complexcurven, entstanden denken; wir können so den ganzen Complex behandeln, indem wir diese Curven statt der geraden Linie als Raumelement einführen*). Dabei ergiebt sich, dass alle durch einen Punkt gehenden Curven unserer Art auf dem Complexkegel dieses Punktes liegen.

§ 9.

Ueber einige metrische Relationen.

Während wir bisher unsere Aufmerksamkeit wesentlich auf die geometrischen Verhältnisse richteten, und bei der Zusammensetzung, resp. Zerlegung unendlich kleiner Bewegungen nur die gegenseitige Lage der verschiedenen Gebilde berücksichtigten, stellen wir uns jetzt die Aufgabe, die Zusammensetzung der Bewegungen auch der Grösse nach zu bestimmen und die metrischen Relationen festzustellen, welche für die Vorgänge im Raume bei einer unendlich kleinen Bewegung charakteristisch sind, oder welche zwischen verschiedenen Bewegungen bestehen müssen, damit sie vereinigt eine bestimmte hervorrufen. Wir führen dabei alle Operationen zunächst in der in § 2. gegebenen kanonischen Form der Transformation aus, ohne dadurch der Allgemeinheit der erhaltenen Resultate Abbruch zu thun; denn alle unsere Ausdrücke tragen einen *absolut invarianten Charakter* gegenüber einer Transformation der Fundamentalfläche in sich und werden daher durch eine Verlegung des Coordinatensystems nicht geändert. In dieser Weise leiten wir für eine einzelne allgemeine Schraubenbewegung besonders die Sätze ab, welche den von Chasles für spec. Massbestimmung ge-

---

*) Vgl. Lie: Göttinger Nachrichten, 1870.

gebenen (a. a. O.) entsprechen; es kommt dabei wieder nicht so sehr darauf an, ihm in allen Einzelheiten zu folgen, als zu zeigen, wie derartige Fragen bei unserer projectivischen Auffassung sich gestalten.

Bei einer unendlich kleinen Bewegung schreitet jeder Punkt auf einer gewissen Geraden fort und jede Ebene dreht sich um eine solche; für jeden Punkt wird die Grösse seiner Verschiebung im Allgemeinen eine andere, für jede Ebene ihr Drehungswinkel ein anderer sein. Betrachten wir jedoch die Bewegung eines Punktes und die einer Ebene, welche mit ihm gemeinsame Charakteristik hat, so besteht zwischen beiden eine gewisse Relation.

Das von einem Punkte zurückgelegte Streckenelement ist nämlich (vgl. Klein, Math. Ann. IV, p. 618):

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\Omega^2_{x,\,dx} - \Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx}}}{\Omega_{xx}}\,.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes ist aber die linke Seite der Gleichung der Fundamentalfläche in Liniencoordinaten, geschrieben in den Coordinaten p_{ik} der Charakteristik von x; es ist also

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\Phi_{pp}}}{\Omega_{xx}}\,, \tag{1}$$

wo wir uns die p_{ik} aus den x und den Coordinaten des benachbarten Punktes, in den x übergegangen ist, berechnet denken müssen. Nehmen wir nun die Transformation in der kanonischen Form an, so ist bis auf einen unendlich kleinen Factor:

$$p_{ik} = x_i x_k\,(a_k - a_i)$$

und

$$\Omega_{xx} = 2\,(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 2\,\left(\frac{p_{14}}{a_4 - a_1} + \frac{p_{23}}{a_3 - a_2}\right).$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in (1) erhalten wir also:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(p_{14} + p_{23})^2 + 4\,p_{12}\,p_{34}}}{(a_4 - a_1)\,p_{23} + (a_3 - a_2)\,p_{14}}\,(a_4 - a_1)\,(a_3 - a_2)\,, \tag{2}$$

und entsprechend ist die unendlich kleine Rotation der zugehörigen Ebene u gegeben durch:

$$\begin{aligned} \omega &= \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(q_{14} + q_{23})^2 + 4\,q_{12}\,q_{34}}}{(a_4 - a_1)\,q_{23} + (a_3 - a_2)\,q_{14}}\,(a_3 - a_2)\,(a_4 - a_1) \\ &= \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(p_{14} + p_{23})^2 + 4\,p_{12}\,p_{34}}}{(a_4 - a_1)\,p_{14} + (a_3 - a_2)\,p_{23}}\,(a_3 - a_2)\,(a_4 - a_1)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Im Nenner von (2) steht hier die linke Seite der Gleichung des der Bewegung zugeordneten Translationscomplexes, und in der That kann dieselbe von Ω_{xx} nur um einen Factor verschieden sein, da die

Charakteristiken der Punkte der Fundamentalfläche dem Complexe angehören (vgl. § 6., Gl. (4)). Ebenso tritt dann in (3) der Rotationscomplex auf.

Besonders charakteristisch für eine unendlich kleine Bewegung sind nun die Werthe von ε und ω, gebildet für eine der Hauptaxen der Bewegung (für die andere vertauschen sich dann nur beide), d. h. die Grösse der Verschiebung einer solchen in sich und die der Drehung des bez. Ebenenbüschels um sie. Bezeichnen wir erstere für die Axe $x_1 = 0,\ x_4 = 0$, d. h.

$$p_{12} = 0,\ p_{34} = 0,\ p_{14} = 0$$

mit e und die Grösse der zugehörigen Drehung mit v, so wird:

$$e = \tfrac{1}{2}(a_3 - a_2),\quad v = \tfrac{1}{2}(a_4 - a_1), \tag{4}$$

und damit haben wir eine unmittelbare *Deutung für die Coefficienten der beiden linearen Complexe in ihrer kanonischen Form. Das Vorzeichen dieser Grössen bestimmt uns in Folge dieser Bedeutung den Sinn der Bewegung*; ändere ich dasselbe in beiden, so bewegen sich alle Punkte auf denselben Schraubenlinien, wie vorhin, nur in entgegengesetzter Richtung, und in der That bleiben dann die beiden linearen Complexe ungeändert; ändere ich dagegen das Vorzeichen von e oder v allein, so bewegen sich alle Punkte auf Schraubenlinien, die den vorhin auftretenden gleich, aber entgegengesetzt gewunden sind*); die zugehörigen linearen Complexe liegen mit den obigen in Involution.

Das Product der Ausdrücke ε und ω können wir nun leicht durch e und v ausdrücken. Es ist nämlich, da die Linie p dem Charakteristikencomplexe angehört, also den Gleichungen (2) § 5. genügt:

$$\begin{aligned}\Phi_{pp} &= p_{23}^2 + p_{14}^2 + 2\,(p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42})\\ &= p_{23}^2 + p_{14}^2 + 2\,\frac{(a_4 - a_2)(a_3 - a_1) - (a_3 - a_4)(a_2 - a_1)}{(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)}\,p_{14}\,p_{23},\end{aligned}$$

oder wegen:

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3:$$

$$\Phi_{pp} = p_{23}^2 + p_{14}^2 + p_{14}\,p_{23}\,\frac{(a_4 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^2}{(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

Das Product der beiden Nenner in ε und ω findet man aber gleich demselben Ausdrucke, noch multiplicirt mit $(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)$; folglich ist

$$\varepsilon \cdot \omega = e \cdot v = \text{Const.} \tag{5}$$

---

*) Mit e und v steht nach § 5. der *Parameter des betreffenden Complexes* in einfachem Zusammenhange, er wechselt sein Vorzeichen mit dem Producte ev. Je nachdem er also positiv oder negativ ist, können wir die linearen Complexe als *links* oder als *rechts gewundene* unterscheiden, wie es Plücker bei spec. Massbest. that, vgl. „Neue Geometrie" n. 48.

Also: *Bei einer unendlich kleinen Bewegung steht die Grösse der Rotation einer Ebene um ihre Charakteristik in umgekehrtem Verhältnisse zu der Translation des Bildpunktes derselben auf ihr**).

Bezeichnen wir nach Gleichung (3) durch ω die Grösse der Rotation einer Ebene um ihre Charakteristik p, durch ω' die entsprechende Grösse, die sich auf diejenige Gerade p' bezieht, welche p vermöge des Rotationscomplexes als conjugirte Polare zugeordnet ist, so finden wir unter Anwendung der Gleichungen (8) § 3:

$$\omega^2 + \omega'^2 = e^2 + v^2 \text{ **)},$$

und ebenso, wenn wir von zwei Linien ausgehen, die einander durch den Translationscomplex conjugirt sind:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = e^2 + v^2 .$$

Es geben hier ω und ω' die Grösse der beiden Rotationen, durch welche die Bewegung eines jeden ebenen Punktsystems ersetzt werden kann (vgl. § 3.), nämlich Drehung um die Charakteristik der Ebene und Rotation der Ebene in sich um ihren Nullpunkt; entsprechend geben ε und ε' die Grösse der beiden Bewegungen, durch welche die eines jeden Ebenenbündels ersetzt werden kann, und so haben wir den Satz:

Bei einer unendlich kleinen Bewegung ist die Summe der Quadrate der beiden Bewegungen, welche dabei einem ebenen Punktsystem oder einem Ebenenbündel ertheilt werden, constant.

Für die *Zusammensetzung verschiedener Bewegungen* betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wo sich die Axen zweier Rotationen oder die Directricen zweier Translationen in einem Punkte schneiden. Wir ertheilen also einem Punkte x gleichzeitig zwei verschiedene Verschiebungen mit den Coordinaten P_{ik} und P'_{ik}, von denen

---

*) Die Ebene ist hier Schmiegungsebene des Punktes in Bezug auf die durch diesen gehende Schraubenlinie, also können wir diesen Satz auch so aussprechen: *Das Product des Bogenelementes in den Torsionswinkel ist dasselbe für alle projectivischen Schraubenlinien desselben Systems*, d. h. für alle, die durch dieselbe lineare Transformation in sich übergehen.

**) Für spec. Massb. lautet die entsprechende Gleichung (vgl. Chasles und Jonquières a. a. O.), indem e im Vergleiche zu v unendlich klein wird:

$$\omega^2 + \omega'^2 = v^2;$$

es tritt hier also recht deutlich hervor, wie bei allgem. Massb. die Dualität in jeder Weise gewahrt wird, indem bei letzterer e und v vollkommen gleichberechtigt auftreten. — Diese Quadratsumme, in welcher e und v gleichmässig vorkommen, können wir als ein Mass für die Intensität der unendlich kleinen Bewegung betrachten; und in der That werden wir dazu in § 13. von einem andern Ausgangspunkte aus geführt werden.

die eine ihn in den Punkt $x + dx$, die andere in den Punkt $x + dx'$ zu bringen sucht. Die Quadrate der Entfernungen der Anfangslage von diesen beiden Punkten sind dann nach (1):

$$(6)\quad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{\Omega^2_{x,\,dx} - \Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx}}{\Omega^2_{xx}} = \dfrac{\Phi_{PP}}{\Omega^2_{xx}} \\[2ex] ds'^2 = \dfrac{\Omega^2_{x\,dx'} - \Omega_{xx}\,\Omega_{dx'\,dx'}}{\Omega^2_{xx}} = \dfrac{\Phi_{P'P'}}{\Omega^2_{xx}}\,. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit Π_{ik} die Coordinaten der resultirenden Bewegung, so dass also (§ 4.):

$$\Pi_{ik} = P_{ik} + P'_{ik}$$

ist, so folgt, dass auch

$$(\Pi, \Pi) = 0$$

wird; diese Bewegung besteht also wieder in einer Translation, und ihre Grösse ist gegeben durch

$$d\sigma^2 = \frac{\Phi_{\Pi\Pi}}{\Omega^2_{xx}}\,.$$

Setzt man andererseits in dem Ausdrucke für ds^2 die Summe $dx + dx'$ statt dx, so ist

$$d\sigma^2 = ds^2 + ds'^2 - 2\,\frac{\Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx'} - \Omega_{x\,dx}\,\Omega_{x\,dx'}}{\Omega^2_{xx}}\,.$$

Der Zähler des letzten Gliedes ist nun gleich $\Phi_{PP'}$, und da

$$\cos(ds, ds') = \frac{\Phi_{PP'}}{\sqrt{\Phi_{PP}\cdot\Phi_{P'P'}}}\,,$$

so ergiebt sich wegen der Gleichungen (6):

$$(7)\qquad d\sigma^2 = ds^2 + ds'^2 - 2\,ds\,ds'\cos(ds, ds')\,.$$

Ebenso erhält man unter Berücksichtigung von (6) leicht das Resultat:

$$\frac{\Omega_{xx}\cdot\sqrt{\Phi_{PP}\,\Phi_{P'P'} - \Phi^2_{PP'}}}{\sqrt{\Phi_{PP}\cdot\Phi_{P'P'}\cdot\Phi_{\Pi\Pi}}}$$

$$(8)\qquad = \frac{\sin(ds, ds')}{d\sigma} = \frac{\sin(d\sigma, ds)}{ds'} = \frac{\sin(ds', d\sigma)}{ds}\,,$$

und ganz analoge Relationen folgen, wenn man statt der P die Coordinaten zweier Rotationen einsetzt; also:

Für die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen oder Translationen, deren Axen, resp. Directricen sich schneiden, gelten ganz dieselben Gesetze, wie für die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen bei specieller Massbestimmung. Es ist dies eigentlich selbstverständlich, da wir in der Nähe des Punktes x unsere allgemeine

Massbestimmung durch eine sie in ihm berührende specielle ersetzen können*). *Die geometrische Construction der Resultante mit Hülfe des Parallelogramms dürfen wir jedoch nicht anwenden*, da dieselbe nicht mehr eindeutig ist und überdies voraussetzt, dass bei einer Translation sich alle Punkte auf parallelen Geraden bewegen.

Schneiden sich die betrachteten Geraden nicht, so ergiebt die Addition ihrer Coordinaten, wenn man diese als Coordinaten einer Rotation (resp. Translation) auffasst, nach § 4. einen linearen Complex, und die resultirende Bewegung besteht in einer Schraubenbewegung um eine seiner Hauptaxen, welche man in gleicher Weise durch die Aufeinanderfolge von zwei unendlich kleinen Rotationen um zwei in Bezug auf den Complex conjugirte Gerade erhalten kann (resp. durch die von zwei unendlich kleinen Translationen). Zwischen den Grössen zweier solcher Bewegungen besteht dann immer eine constante Relation, wie man auch die beiden conjugirten Geraden wählen mag, und diese soll hier noch abgeleitet werden.

Sind nämlich Q_{ik} und Q'_{ik} die Coordinaten zweier Rotationen der Art, ω und ω' bez. die Grössen derselben, so ist**)

$$\omega = \frac{\sqrt{\Phi_{QQ} \cdot \Delta}}{\Omega'_{uu}} \qquad \omega' = \frac{\sqrt{\Phi_{Q'Q'} \cdot \Delta}}{\Omega'_{u'u'}},$$

wenn u eine durch Q gehende Ebene und u' eine solche durch Q' bedeutet. Das Product dieser Grössen in das gegenseitige Moment der beiden Geraden Q und Q' ist dann (vgl. § 1)

$$M_{(QQ')} \cdot \omega \cdot \omega' = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}(Q, Q')}{\Omega'_{uu} \cdot \Omega'_{u'u'}}.$$

Für unsere kanonische Form wird aber wegen der Gleichungen (8) § 3. (in denen wir $\varrho = 1$ zu setzen haben, damit die Addition der Coordinaten die des verlangten Complexes ergiebt):

$$\begin{aligned}(Q, Q') &= -2\,Q_{12}Q_{31} - 2\,Q_{13}Q_{42} + Q_{14}'\,Q_{23} + Q_{23}'\,Q_{14}\\ &= Q_{14}Q_{23} + Q_{14}'\,Q_{23}' + Q_{14}'\,Q_{23} + Q_{23}'\,Q_{14}\\ &= (Q_{14} + Q_{14}')\,(Q_{23} + Q_{23}').\end{aligned}$$

Ferner können wir setzen:

$$Q_{ik} + Q'_{ik} = K_{ik} + K'_{ik},$$

wenn K_{ik} und K'_{ik} die Coordinaten von irgend zwei anderen Rotationen sind, die die verlangte Bewegung hervorrufen. Die Axe K kön-

*) Vgl. Klein: Nicht-Euklid. Geometrie (Math. Ann. IV), § 14.

**) Nach einer in § 4. gemachten Bemerkung muss hier im Zähler $\sqrt{\Delta}$ als Factor hinzutreten.

nen wir speciell so wählen, dass sie Charakteristik der Ebene u wird, alsdann schneiden sich Q' und K' im Nullpunkte von u, und wir können als Ebene u' die durch diese beiden Geraden bestimmte Ebene nehmen. Drehen wir schliesslich u noch so um Q, dass K' Charakteristik von einer Ebene u' des durch Q' bestimmten Büschels wird, so haben wir:

$$K_{ik} = (a_k - a_i)\, u_i u_k\,, \qquad K'_{ik} = (a_k - a_i)\, u_i' u_k'$$

und wegen (8) § 3.:

$$Q_{23} + Q_{23}' = K_{23} + K_{23}' = K_{23} + \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} K_{14} = (a_3 - a_2)(u_2 u_3 + u_1 u_4)\,,$$

$$Q_{14} + Q_{14}' = K_{14} + K_{14}' = K_{14}' + \frac{a_4 - a_1}{a_3 - a_2} K_{23}' = (a_1 - a_1)(u_2' u_3' + u_1' u_4')\,.$$

Hier stehen aber rechts die Ausdrücke für Ω'_{uu} und $\Omega'_{u'u'}$, multiplicirt mit e resp. v, und folglich wird:

$$M_{(QQ')} \cdot \omega \cdot \omega' = e \cdot v\,,$$

und ebenso entsprechend:

$$M_{(PP')} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon' = e \cdot v\,,$$

wenn P und P' die Coordinaten einander conjugirter Translationen sind, welche dieselbe Bewegung wie Q und Q' hervorbringen, und ε, ε' die Grössen dieser Translationen bedeuten. Also:

Wie man auch eine unendlich kleine Bewegung durch 2 Rotationen (resp. Translationen) ersetzen mag, es hat immer das Product, gebildet aus dem gegenseitigen Momente ihrer beiden Axen (resp. Directricen) und der Grösse der beiden Rotationen (resp. Translationen) denselben Werth.

Für specielle Massbestimmung ist dies der bekannte, von Chasles*) zuerst gegebene Satz von der *Constanz des durch die beiden Rotationen bestimmten Tetraëders.* Wir können ihn hier jedoch nicht in dieser geometrischen Form aussprechen; denn tragen wir auf den beiden Axen den Rotationswinkeln gleiche, unendlich kleine Strecken ab, so ist der Inhalt des so bestimmten Tetraëders noch von der gegenseitigen Entfernung dieser Streckenelemente, also einer endlichen Grösse abhängig, und würde sich demnach durch obiges Product nur ebenso wie bei gewöhnlicher Massbestimmung ausdrücken lassen, wenn wir eine specielle Massbestimmung construiren könnten, welche die gegebene allgemeine längs jener Verbindungslinie berührt. Das letztere ist aber nicht möglich.

---

*) Comptes rend. 1843.

§ 10.

Specielle Arten unendlich kleiner Bewegungen.

Lässt die Transformation ausser der Fundamentalfläche noch einen Punkt des Raumes ungeändert, so besteht die Bewegung in einer *Rotation um diesen Punkt*; es geht dabei natürlich auch der von ihm an die Fläche gehende Tangentenkegel, die Berührungscurve dieses und die absolute Polarebene des Punktes in sich über. *Jede Rotation um einen Punkt ist also identisch mit einer Bewegung, bei der eine Ebene fest bleibt*, und wir brauchen nur die eine Art der Bewegung zu betrachten; die entsprechenden Sätze für die andere ergeben sich dann einfach durch dualistische Uebertragung. In der Ebene kann man nun auch bei unserer allgemeinen Massbestimmung eine Bewegung in jedem Augenblicke ersetzen durch eine Rotation um einen Punkt*), folglich *besteht auch eine Rotation des Raumes um einen Punkt in jedem Augenblicke in einer Drehung um eine durch den Punkt gehende Axe***) (= Verschiebung längs einer in der absoluten Polarebene des Punktes gelegenen Geraden), eine Bewegung, welche wir schon oben näher betrachtet haben. *Die beiden linearen Complexe wurden für sie specielle, und der Charakteristikencomplex zerfällt in diese****). Nur die Geraden der durch sie bestimmten Congruenz sind noch gleichzeitig Charakteristiken von Punkten und Ebenen, im Allgemeinen dagegen bilden erstere den Translations-, letztere den Rotationscomplex, und für die Ebenen des durch die Axe des Translationscomplexes bestimmten Büschels, sowie für die Punktreihe ihrer absoluten Polare werden die Charakteristiken unbestimmt.

Zu anderen Specialfällen der Bewegung werden wir gelangen, wenn das fest bleibende Tetraëder unbestimmt wird, oder wenn gewisse Kanten desselben zusammenfallen. Es zeigt sich dies abhängig von dem Verhalten der Erzeugenden der Fundamentalfläche bei der Transformation, und wir können die verschiedenen hier möglichen Fälle demnach schematisch durch die Zeichen

$$[1, 2], \quad [1, 1], \quad [\infty, 2], \quad [\infty, 1]$$

darstellen, wenn $[\alpha, \beta]$ bedeutet, dass α Erzeugende der einen und β der andern Art bei der Transformation fest bleiben. Wir wollen diese

---

*) Vgl. F. Klein: Nicht-Eukl. G., § 9., Math. Ann. IV. Für spec. Massb. zuerst gegeben von Joh. Bernoulli: De centro spontaneo rotationis; opera t. IV. 1742.

**) Für spec. Massb. zuerst von d'Alembert: Traité de la précession des équinoxes. 1749.

***) Wie man sofort erkennt, wenn man in den Gleichungen (2) § 5. etwa $a_4 = a_1$ setzt.

Fälle nun im Folgenden im Einzelnen durchgehen und dabei besonders auf das Verhalten der auftretenden Complexe achten.

I. *Es fallen 2 Erzeugende derselben Art zusammen*, [1, 2]; die beiden andern bleiben getrennt. Das Tetraëder reducirt sich auf 2 Ebenen, von denen jede die doppelt zählende Erzeugende und eine der beiden anderen enthält. Bei der Transformation geht also auch das so bestimmte Ebenenbüschel in sich über, und ich kann die Bewegung gleichzeitig als Rotation um die Axe dieses Büschels und als Translation nach derselben auffassen.

Lege ich das Coordinatentetraëder so, dass diese Axe die Schnittlinie der Ebenen $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ wird, und in diesen die beiden anderen fest bleibenden Erzeugenden durch ihren Schnitt bez. mit $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ bestimmt werden, so ist die Gleichung unserer Fundamentalfläche von der Gestalt:

(1) $$\tfrac{1}{2}\, a_x^2 = a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{24} x_2 x_4 = 0\,,$$

und die betreffende unendlich kleine Transformation können wir in der Form annehmen:

(2) $$\begin{cases} dx_1 = \alpha_1 x_1 d\lambda & dx_2 = (\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2)\, d\lambda \\ dx_4 = \alpha_4 x_4 d\lambda & dx_3 = (\alpha_4 x_3 + \alpha_3 x_4)\, d\lambda\,. \end{cases}$$

Soll dieselbe die Fläche (1) in sich überführen, d. h. soll die Gleichung

$$M a_x^2 = a_x \cdot a_{dx}$$

bestehen (vgl. § 4.), so müssen die Coëfficienten der Gleichungen (2) der Bedingung

(3) $$a_{13}\alpha_3 + a_{24}\alpha_2 = 0$$

genügen. Die so bestimmte Transformation führt aber auch jede Fläche des Büschels:

(4) $$a_{13} x_1 x_3 + a_{24} x_2 x_4 + \mu x_1 x_4 = 0$$

in sich über, wenn μ ein Parameter ist, d. h. des Büschels von Flächen, deren gemeinsame Durchdringungscurve sich auf obige 3 Erzeugende reducirt. Unter den letzteren zählt eine doppelt, und in diese fällt auch das Axenpaar der beiden zugehörigen linearen Complexe zusammen; *beide haben in Folge dessen eine specielle Congruenz gemein.* In der That wird die Gleichung des Translationscomplexes:

$$\Psi = a_{13}(\alpha_4 - \alpha_1) p_{13} + (a_{13}\alpha_3 - a_{24}\alpha_2 + a_{14}(\alpha_4 - \alpha_1)) p_{14} + a_{24}(\alpha_4 - \alpha_1) p_{24} = 0$$

und die des absolut conjugirten:

$$\Psi + 2\, a_{14}\, (\alpha_4 - \alpha_1)\, p_{14} = 0\,.$$

Man erkennt, dass die Leitlinien der so bestimmten Congruenz in die Gerade $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ zusammenfallen.

Die Gleichung des Charakteristikencomplexes wird in diesem Falle:

(5) $$\alpha_2\alpha_3 p_{14}^2 + (\alpha_4 - \alpha_1)^2 p_{12}p_{34} = 0\,,$$

auch er wird also particularisirt, denn seine Singularitätenfläche besteht nunmehr aus den beiden fest bleibenden Ebenen*). Die Geraden des Complexes umhüllen natürlich noch die projectivischen Schraubenlinien, und ein Punkt dieser letzteren drückt sich jetzt in Function eines Parameters λ aus durch die Gleichungen:

(6) $$\begin{cases} \varrho x_1 = c_1 e^{\alpha_1\lambda} & \varrho x_2 = e^{\alpha_1\lambda}(c_2 + \lambda c_1 \alpha_2) \\ \varrho x_4 = c_4 e^{\alpha_4\lambda} & \varrho x_3 = e^{\alpha_4\lambda}(c_3 + \lambda c_4 \alpha_3)\,, \end{cases}$$

wo die c, damit die Curve auf einer bestimmten Fläche des Büschels (4) liegt, noch der Bedingung:

$$a_{13}c_1 c_3 + a_{21}c_2 c_4 + \mu c_1 c_4 = 0$$

genügen müssen. Verstehe ich also unter den c die Coordinaten eines Punktes dieser Fläche, so geben die Gleichungen (6) die durch ihn gehende Schraubenlinie. *Alle diese Curven berühren die Hauptaxe der Bewegung,* da für $\lambda = -\infty$ x_1 und x_4 verschwinden, während $\frac{x_2}{x_3}$ einen endlichen Werth behält.

II. *Es fallen die beiden Erzeugenden eines jeden Systems zusammen,* [1, 1]. Alsdann fallen auch alle 4 Ebenen unseres Tetraëders in eine zusammen; diese möge durch $x_1 = 0$ gegeben sein, und die beiden in ihr liegenden Erzeugenden der Fundamentalfläche durch ihre Schnittlinien mit den Ebenen $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$. Die Gleichung dieser Fläche erhält dann die Form:

$$a_x^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 = 0\,,$$

und die Transformationsgleichungen für eine unendlich kleine Bewegung, die jene Ebene fest lässt, werden:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \alpha_{11}x_1\,d\lambda \\ dx_2 &= (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{11}x_2)\,d\lambda \\ dx_3 &= (\alpha_{31}x_1 + \alpha_{11}x_3)\,d\lambda \\ dx_4 &= (\alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{11}x_4)\,d\lambda\,. \end{aligned}$$

Damit wieder die Gleichung

$$M a_x^2 = a_x a_{dx}$$

identisch erfüllt ist, müssen die Transformationscoëfficienten folgenden Bedingungen genügen:

---

*) Nr. 18 in der Aufzählung des Herrn Lie (Ueber partielle Differentialgleichungen und Complexe § 23.; Math. Ann. Bd. V) und Nr. 14 in der des Herrn Weiler im vorliegenden Bande der Math. Ann.

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{21} a_{21} + \alpha_{31} a_{31} + \alpha_{41} a_{41} &= 0 \\ \alpha_{31} a_{32} + \alpha_{42} a_{41} &= 0 \\ \alpha_{21} a_{32} + \alpha_{43} a_{41} &= 0, \end{aligned} \right.$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt wieder:

$$(8) \qquad \alpha_{31}\alpha_{43} - \alpha_{21}\alpha_{42} = 0 .$$

Durch eine solche Transformation gehen auch alle Flächen des Büschels:

$$(9) \qquad a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + \mu x_1^2 = 0$$

in sich über, d. h. alle, welche die Fundamentalfläche längs der beiden festen Erzeugenden berühren. Eine solche Fläche aber können wir auffassen als Kugel, deren Centrum auf der Fundamentalfläche liegt, so dass dessen absolute Polarebene zur Tangentenebene wird, und somit können wir die Bewegung als eine *Rotation um einen unendlich fernen Punkt betrachten*; als solche wird sie in den räumlichen Vorgängen eine gewisse Analogie mit der Bewegung parallel einer Ebene bei specieller Massbestimmung zeigen.

Bei der Transformation bleiben aber auch alle Ebenen des Büschels:

$$(10) \qquad \alpha_{31}x_2 - \alpha_{21}x_3 + \mu x_1 = 0$$

fest und folglich auch ihre ebenen Schnitte mit den Flächen des Büschels (9). Die Punkte des Raumes bewegen sich also in Ebenen, welche sich in einer Tangente der Fundamentalfläche schneiden, und *jeder in seiner Ebene auf einem Kegelschnitte, welcher den unendlich fernen Kegelschnitt derselben vierpunktig berührt, d. h. auf einem Kreise mit unendlich grossem Radius**). Für die Punkte der Tangentenebene der Fundamentalfläche in dem gemeinsamen Berührungspunkte gehen die Curven in die Geraden des durch diesen Punkt bestimmten Strahlbüschels über, und in der That muss jede solche Gerade fest bleiben, da dies für 3 Strahlen des Büschels der Fall ist: für die beiden Erzeugenden der Fundamentalfläche und die Axe des Ebenenbüschels (10).

Wir können demnach die Bewegung auch *als Translation nach dieser letzteren oder als Rotation um deren absolute Polare*, die dann in demselben Punkte Tangente der Fläche ist, auffassen. Dem entsprechend *zerfällt auch der Complex der Charakteristiken in 2 specielle lineare Complexe*, die einander absolut conjugirt sind: der eine wird gebildet von allen Linien, welche als Charakteristiken von Punkten die Directrix der Translation schneiden, der andere von allen, welche als Charakteristiken von Ebenen die Rotationsaxe treffen. Für die Charakteristik eines Punktes ist nämlich:

---

*) Vgl. Klein: Ueber die sog. Nicht-Eukl. Geom. § 12., Math. Ann. IV.

$$\varrho p_{12} = \alpha_{21} x_1^2, \quad \varrho p_{13} = \alpha_{31} x_1^2,$$

und daher die Gleichung des einen Complexes:

$$\alpha_{31} p_{12} - \alpha_{21} p_{13} = 0.$$

Vermöge der die Bewegung repräsentirenden Formeln ist ferner:

$$du_2 = (\alpha_{11} u_2 + \alpha_{42} u_4)\, d\lambda$$
$$du_3 = (\alpha_{11} u_3 + \alpha_{43} u_4)\, d\lambda,$$

und also die Gleichung des anderen Complexes:

$$\alpha_{43} p_{13} + \alpha_{42} p_{12} = 0,$$

und diese geht, mit α_{21} multiplicirt, wegen (8) über in:

$$\alpha_{31} p_{12} + \alpha_{21} p_{13} = 0,$$

stellt also in der That die vierte harmonische Gerade zu der Axe des ersten Complexes und den beiden festen Erzeugenden der Fundamentalfläche dar.

III. *Alle Erzeugenden eines Systems bleiben fest, und zwei des andern*, $[\infty, 2]$. Wir können hier die in § 2. gegebene kanonische Form der Transformation beibehalten. Sind nämlich die Geraden $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die beiden festen Erzeugenden der einen Art, so haben wir nur die Bedingung hinzuzufügen, dass jede Ebene der beiden Büschel

$$x_1 + \lambda x_2 = 0$$
$$x_3 - \lambda x_4 = 0,$$

welche auf der Fläche

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0$$

die Erzeugenden der andern Art ausschneiden, in sich übergeht; d. h. wir müssen setzen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \text{ und } \alpha_3 = \alpha_4.$$

Für die Charakteristiken der Punkte und Ebenen ist jetzt gleichzeitig:

$$p_{12} = 0 \text{ und } p_{34} = 0,$$

es giebt also nur noch 2-fach unendlich viele Linien der Art; jede Gerade, welche der durch die beiden festen Erzeugenden bestimmten linearen Congruenz angehört, ist zugleich Charakteristik aller ihrer Punkte und aller durch sie gehenden Ebenen, d. h. *jede Gerade dieser Congruenz wird bei der Bewegung in sich verschoben, während sich das durch sie bestimmte Ebenenbüschel um sie dreht, und zwar ist die Verschiebung immer gleich dieser Drehung.* Denn es wird auch

$$a_4 - a_1 = a_3 - a_2,$$

d. h.

$$v = e$$

und folglich auch nach § 9.:

$$\varepsilon = \omega ,$$

wo ω den Torsionswinkel der durch einen beliebigen Punkt gehenden projectivischen Schraubenlinie und ε das Bogenelement derselben in diesem Punkte bedeutete. Je mehr also diese beiden Grössen bei einer Schraubenlinie sich demselben Werthe nähern, um so flacher wird die Windung derselben, bis sie, wenn $\varepsilon = \omega$, in eine Gerade übergegangen ist, die man dann als eine nicht gekrümmte, aber tordirte Curve aufzufassen hat.

Die beiden einer unendlich kleinen Bewegung dieser Art zugehörigen linearen Complexe fallen hier in einen zusammen, dessen Gleichung wird:

$$p_{14} + p_{23} = 0 ;$$

er enthält alle Erzeugenden des fest bleibenden Systems der Fundamentalfläche und ist sich selbst in Bezug auf diese polar conjugirt. Jeder Linie der erwähnten Congruenz entspricht in Bezug auf ihn und die Fläche dieselbe Gerade, und *man kann demnach die Bewegung des Raumes ersetzen durch eine unendlich kleine Verschiebung nach einer Geraden jener Congruenz*) und eine ihr gleiche Drehung um dieselbe.*

Es folgt aber auch, dass, sobald dies der Fall, d. h. $e = v$ ist, die Bewegung immer von der hier betrachteten Art ist, denn wegen

$$a_4 + a_1 = a_3 + a_2$$

folgt dann wieder:

$$a_2 = a_1 \text{ und } a_3 = a_4 .$$

Hätten wir $e = - v$ gesetzt, so würde die andere Schaar von Erzeugenden bei der Bewegung fest geblieben sein (§ 5.); *durch die Wahl des Erzeugendensystems wird der Torsionssinn der Bewegung bestimmt.*

IV. *Alle Erzeugenden der einen Art bleiben fest, und die beiden fest bleibenden der andern Art fallen zusammen*, $[\infty, 1]$. Die eine solche Bewegung darstellende Transformation erhalten wir aus der im Falle $[1, 2]$ gegebenen, wie die vorige aus der allgemeinen Form. Es muss hier jede Ebene des Büschels:

$$x_1 + \lambda x_4 = 0$$

in sich übergehen, also

$$a_1 = a_4$$

sein. Der *Charakteristikencomplex* (5) geht dadurch über in

$$p_{14} = 0 ;$$

da ich die Bewegung aber auch als Grenzfall von $[\infty, 2]$ auffassen kann, so müssen die Charakteristiken der Punkte und Ebenen auch

*) Mit Ausnahme der ihr angehörigen einen Schaar von Erzeugenden der Fundamentalfläche.

hier eine lineare Congruenz bilden; und in der That erhalte ich diese, da die Coordinaten p_{13} und p_{42} einer solchen Charakteristik hier durch

$$\varrho p_{13} = \alpha_3 x_1 x_4 \qquad \varrho p_{42} = \alpha_2 x_1 x_4$$

gegeben sind, und diese Geraden also auch dem Complexe angehören:

$$(11) \qquad \alpha_2 p_{13} - \alpha_3 p_{42} = 0\,.$$

Alle Punkte einer Geraden der Congruenz bleiben daher, wie im vorigen Falle bei der Bewegung auf dieser Geraden, alle durch sie gehenden Ebenen werden um sie gedreht. Der Complex (11) ist identisch mit dem Complexe:

$$a_{42} p_{42} + a_{13} p_{13} = 0\,,$$

welcher die Schaar der festen Erzeugenden enthält, seine Gleichung fällt mit dieser wegen der Identität (3) zusammen.

Die beiden letzten Arten der Bewegung, bei denen alle Punkte des Raumes auf Geraden fortschreiten, können wir gewissermassen als Uebergang zu der gewöhnlichen Translationsbewegung auffassen, während dieser Uebergang andererseits, insofern die letztere als Drehung um eine unendlich ferne Gerade zu betrachten ist, durch den Fall [1, 1] vermittelt wird. Ueberhaupt ist es für die Natur der allgemeineren Massbestimmung charakteristisch, dass die Uebergänge gestaltlicher Gebilde zu specielleren Formen, wie sie durch ihr Verhältniss zu den unendlich fernen Elementen bedingt werden, reichhaltiger und mannigfacher sind, während wir bei specieller Massbestimmuug mehrere, sonst verschiedene Schritte gleichzeitig ausführen.

§ 11.

Ueber Begriff und Mass der Kraft.

Wenn wir den Begriff der Kraft für unsere allgemeine Massbestimmung genau feststellen wollen, kommt es darauf an, das ihm bei der gebräuchlichen Vorstellung nur in Folge der speciellen Natur unserer Massgeometrie Anhaftende von ihm zu trennen und so *die* Seiten des Kraftbegriffes zu kennzeichnen, welche unabhängig davon bestehen bleiben, eine Aufgabe, deren Lösung uns die bisher gewonnenen Anschauungen über unendlich kleine Bewegungen ermöglichen werden.

Wir stellen uns die Kräfte in der Regel geometrisch durch Strecken von endlicher Länge dar, welche an eine bestimmte Gerade geknüpft sind, auf ihr aber beliebig verschoben werden können. Es ist dies besonders von Nutzen, um die Regeln für die Zusammensetzung derselben durch einfache Constructionen veranschaulichen zu können, zumal, um der Theilung des Winkels von zwei convergirenden Kraftrichtungen in dem Satze vom Parallelogramme der Kräfte einen einfachen Ausdruck zu geben; dieser bildet dann weiterhin, als Axiom an die Spitze gestellt, die Grundlage für die Lehren der Statik. Nach demselben Gesetze aber geschieht auch die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen um sich schneidende Axen, und es ist dadurch jene Analogie zwischen der Theorie der Kräfte und der der Elementarrotationen begründet, die schon in der Einleitung hervorgehoben wurde.

Da nun alle auf Drehungen oder überhaupt auf Winkelrelationen bezüglichen Sätze bei unserer Verallgemeinerung der Massbestimmung wenig oder gar nicht geändert werden, so bestimmen wir auch bei dieser die Resultante verschiedener Kräfte ebenso wie die verschiedener Elementarrotationen. Schneiden sich insbesondere die *Directricen* zweier Kräfte, d. h. die Geraden, nach denen sie wirken, so werden wir demnach den von ihnen gebildeten Winkel in demselben Verhältnisse theilen, wie dies bei specieller Massbestimmung geschieht; denn diese Beziehung blieb ja auch für unendlich kleine Rotationen bestehen. Wir dürfen diese Theilung jedoch nicht mit Hülfe der Construction des Parallelogramms ausführen; eine solche ist vielmehr nur noch für unendlich kleine Streckenelemente erlaubt. Demgemäss werden wir *uns eine Kraft geometrisch auch nur durch eine unendlich kleine, ihr proportionale und auf ihrer Directrix vom Angriffspunkte aus abgetragene Strecke darstellen*, die wieder, wie wir unten sehen werden, beliebig auf der Directrix verschoben werden kann. Bei dieser Vorstellung stellen wir nunmehr obiges Princip der Analogie in folgender Form auch für unsere Betrachtungen als Grundsatz an die Spitze:

Die Zusammensetzung der Kräfte geschieht nach denselben Gesetzen wie die der unendlich kleinen Rotationen. Die letzteren sind bei allgemeiner Massbestimmung dieselben, wie die für unendlich kleine Translationen, was in der thatsächlich gegebenen Geometrie nicht der Fall ist; sondern in ihr besteht ein wesentlicher Unterschied, indem z. B. zwei Translationen nach beliebigen Geraden im Raume immer wieder eine neue Translation hervorrufen. Es liegt dies daran, dass bei einer solchen alle Punkte des Raumes sich gleichzeitig auf parallelen Geraden bewegen, und wir von diesen eine jede als Directrix der Bewegung betrachten können. Dadurch steht die Translation dem *Kräftepaare* ebenso coordinirt gegenüber, wie die unendlich kleine Rotation der einzelnen Kraft. In der That schliesst der Begriff des Kräftepaares gleich dem der Translation ein gewisses Mass der Beweglichkeit ein, indem die Ebene des Paares beliebig parallel zu sich selbst verschoben werden kann, ohne die Wirkung desselben zu ändern. Denn diese besteht ja in dem Streben, eine Drehung um eine zu dieser Ebene senkrechte Axe hervorzurufen, wobei jedoch keine aller dieser Parallellinien als Drehaxe vor den übrigen ausgezeichnet ist. Bei allgemeiner Massbestimmung dagegen tritt ebenso eine bestimmte Directrix der Translation auf, wie eine Axe der Rotation, und demgemäss werden wir auch den der Translation coordinirten Begriff des Kräftepaares fallen lassen und dafür *den einer Dreh- oder Rotations-Kraft einführen, welcher nunmehr eine bestimmte Axe zukommt**); ihr gegenüber werden wir die bei spec. Massbestimmung allein auftretenden Kräfte, welche nach einer Geraden wirken, als *Translationskräfte* unterscheiden Diese wirken auf einen Punkt ihrer Directrix; *als Angriffsobject einer Drehkraft haben wir dagegen eine durch ihre Axe gehende Ebene aufzufassen*, die wir im Folgenden als *Angriffsebene***) bezeichnen werden. Eine Drehkraft steht einer Translationskraft dann ebenso dualistisch gegenüber, wie eine Rotation einer Translation, und dem entsprechend gilt der Satz: *Eine um eine Axe wirkende Rotationskraft ist identisch mit einer nach der absoluten Polare dieser Axe wirkenden Translationskraft.*

In Folge dessen ist die Zusammensetzung für beide Arten von Kräften genau dieselbe, und wir können unseren Fundamentalsatz nunmehr auch allgemeiner folgendermassen aussprechen:

Rotations- und Translationskräfte setzen sich zusammen wie unendlich kleine Translationen oder Rotationen.

Ebenso wie die Translationskräfte durch Streckenelemente, werden wir uns *die Rotationskräfte durch ihnen proportionale, unendlich kleine, um ihre Axen gemessene Winkel geometrisch darstellen*; und diese geometrische Repräsentation giebt uns dann ein Mass für die *Intensität* einer Kraft, sobald wir eine bestimmte Kraft als Einheit zu Grunde gelegt haben; diese Intensität selbst ist natürlich stets eine endliche

---

*) Vgl. Klein: Zur Mechanik starrer Körper; Math. Ann. Bd. IV, p. 403.

**) Für spec. Massb. fällt dieser Begriff durch die Unbestimmtheit der Axe des Kräftepaares vollkommen fort; ein solches wirkt nicht unmittelbar auf ein einzelnes Raumelement, wie die einzelne Kraft auf einen Punkt, sondern kann nur in seiner Wirkung auf einen festen Körper, oder wenigstens 2 mit einander fest verbundene Punkte gedacht werden. Mit Recht vermisst daher Hr. Dühring (Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin 1873, p. 424 ff.) eine unmittelbar anschauliche, völlig klare Vorstellung von der Bewegungswirkung eines Paares in dem Poinsot'schen Systeme; aber man darf bei der Beurtheilung desselben auch nicht vergessen, dass in der Begründung und Veranschaulichung der Theorie der Kräftepaare wegen des undualistischen Charakters unserer Massbest. nicht mehr gefordert werden kann, als Poinsot und Möbius (Crelle's J. Bd. VII, p. 205 und Statik I, Cap. 2) gegeben haben. Das Kräftepaar soll eben nur, *soweit es möglich ist*, den nothwendig fehlenden, an ein bestimmteres Object gebundenen Begriff der Drehkraft ersetzen.

Grösse und nur *proportional* jenen unendlich kleinen Winkeln und Strecken, gleichwie auch die Intensität einer unendlich kleinen Bewegung als eine endliche aufgefasst werden konnte, sobald eine bestimmte Bewegung der Art als Einheit gewählt war.

Der weitere Ausbau der Theorie der Kräfte geschieht nunmehr, indem wir unser Princip der Analogie weiter verfolgen. Demnach werden wir *eine Kraft bestimmen durch die 6 Coordinaten* (P_{ik} *resp.* Q_{ik}) *ihrer Directrix resp. Axe*, welche wir dann als *Coordinaten der Kraft**) bezeichnen, und denen wir absolute Werthe beilegen. Wir messen *die Intensität einer Translationskraft* P durch ein auf ihr vom Angriffspunkte x aus abgetragenes Streckenelement, d. h. es ist (vgl. § 9.):

$$P^2 = \frac{\Phi_{PP}}{\Omega^2_{xx}},$$

und entsprechend messen wir die *Intensität einer Rotationskraft* Q durch einen um sie von der Angriffsebene u aus angetragenen unendlich kleinen Winkel, d. h. es ist:

$$Q^2 = \frac{\Phi_{QQ} \cdot \Delta}{\Omega'^2_{uu}}.$$

Verschieben wir das betreffende Linienelement auf der Directrix, so geschieht dies durch eine Transformation der Fundamentalfläche in sich selbst; und gegen eine solche zeigt der Ausdruck für P einen absolut invarianten Charakter, also (da Analoges für Q gilt):

Die Wirkung einer Kraft ist unabhängig von der Lage ihres Angriffspunktes auf der durch ihre Directrix gegebenen Punktreihe, resp. von der Lage ihrer Angriffsebene in dem durch ihre Axe bestimmten Ebenenbüschel.

Der Umstand, dass in obigen Ausdrücken für P und Q stets die Coordinaten des Angriffspunktes, resp. der Angriffsebene der Kraft vorkommen, zeigt, dass die Zusammensetzung der Kräfte ihrer Grösse nach nur einfach lösbar ist, wenn ihre Directricen gegen einen Punkt convergiren, resp. ihre Axen in einer Ebene liegen. Dem entspricht das Verfahren von Poinsot, wenn er die allgemeine Zusammensetzung von Kräften ermöglicht, indem er sie sich selbst parallel in denselben Angriffspunkt verlegt und die dadurch entstandene Aenderung im Kraftsysteme durch Hinzufügung von Kräfte-

---

*) Vgl. für spec. Massbest. Plücker: Phil. Transact. 1866; Battaglini: Sulla composizione delle forze. Rendiconti della r. accademia delle scienze fis. e mat. di Napoli. Febr. 1869. Die bez. Arbeit von Cayley (On the six coordinates of a line. Cambridge Transactions. Vol. XI 1868) war mir nicht zugänglich. — Ueber die Bedeutung der einzelnen Coordinaten vgl. § 13.

paaren wieder aufhebt. Die Einfachheit dieses Verfahrens beruht aber nur in dem grösseren Masse von Beweglichkeit, welches dem Begriffe eines Kräftepaares eigenthümlich ist, indem es dadurch möglich wird, zu beliebig vielen, beliebig gegebenen Kräftepaaren stets ein resultirendes Paar zu finden. Es gelingt jedoch bei unseren oben angenommenen Drehkräften*) ebensowenig, wie bei den thatsächlich vorhandenen Translationskräften, stets eine einzige resultirende Kraft anzugeben, und deshalb können wir die Methode von Poinsot in unseren folgenden Untersuchungen *nicht* anwenden.

§ 12.

Kraftsysteme. Theorie der Momente.

Nachdem wir die Kräfte durch ihre Coordinaten definirt haben, können wir unser Pincip der Analogie auch in folgender Gestalt aussprechen:

Kräfte setzen sich zusammen, indem sich ihre Coordinaten addiren, wobei natürlich nur Coordinaten gleichartiger Kräfte mit einander vereinigt werden dürfen; und insbesondere haben wir:

Kräfte, welche an demselben Punkte (derselben Ebene) angreifen,

---

*) Poinsot weist auf die Möglichkeit hin, die Kraft nicht „als Ursache einer Translation, sondern als die einer Rotation“ aufzufassen und so die Statik in neuer Form aufzubauen (vgl. seine Théorie nouvelle de la rotation des corps, chap. I.), ähnlich wie es ihm gelungen war, von der Drehung als selbständigem Begriffe ausgehend, die Theorie der Rotationen zuerst in einfacher Weise darzustellen. Die wirkliche Durchführung dieses Gedankens aber war nach den im Texte gegebenen Erörterungen nicht möglich; und aus diesem Grunde leiden auch die Betrachtungen Plücker's an einer gewissen Unklarheit (vgl. den Schluss der Abhandlung: On a new geometrie of space, Phil. Transact. 1865; Fundamental views regarding mechanics, ib. 1868; Neue Geometrie etc., Leipzig 1868, 69, n. 25. Vgl. auch hierüber Klein Math. Ann. Bd. IV, p. 403). Ausgehend von Vorstellungen der neueren Geometrie, setzt er allenthalben vollkommene Dualität voraus und kommt so naturgemäss zum Begriffe einer Drehkraft, die an einer Ebene angreift. Er zerstört diesen aber wieder, indem er eine solche Kraft mittelst einer Translationskraft, welche an einem Hebelarme mit festem Punkte wirkt, zu definiren sucht. Andererseits nähert er sich den Forderungen unserer allgemeinen Massbest., indem er für Drehkräfte eine Massbest. voraussetzt, die auf den Kegel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

bezüglich ist, und so die Intensität derselben durch einen Ausdruck

$$\sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2 + (w - w_1)^2}$$

misst, also in einer solchen Massbest. durch eine Winkelgrösse, wie auch wir es im Texte thaten.

haben eine durch diesen Punkt gehende (in dieser Ebene liegende) Resultante. Bei zwei Kräften P und P' ist dieselbe gegeben durch:

$$R^2 = P^2 + P'^2 - 2\,PP' \cos(P, P'), \tag{1}$$

und es gilt die Relation:

$$\frac{\sin(P, P')}{R} = \frac{\sin(R, P)}{P'} = \frac{\sin(P', R)}{P}. \tag{2}$$

Diese Gleichungen gelten ebensowohl für Translations- wie für Rotationskräfte. — Sind die Directricen, resp. Axen der Kräfte beliebig im Raume vertheilt, so können wir, indem wir eine Rotationskraft durch eine Translationskraft nach der absoluten Polare ihrer Axe ersetzen, alles auf Translationskräfte allein zurückführen, und die *Addition ihrer Coordinaten* ergiebt dann 6 Grössen, welche wir als *Coordinaten des Kraftsystems* bezeichnen wollen, und die wir als Coordinaten eines linearen Complexes auffassen können. *Das Kraftsystem ist dann äquivalent mit zwei Translationskräften, welche nach zwei in Bezug auf den Complex conjugirten Geraden wirken, oder, was dasselbe ist, mit zwei Rotationskräften um zwei in Bezug auf den absolut conjugirten Complex einander zugeordnete Gerade.* Auf den letzteren linearen Complex werden wir unmittelbar geführt, wenn das Kraftsystem durch lauter Rotationskräfte gegeben ist; wir werden ihn *den dem Kraftsysteme zugehörigen Rotationscomplex* und den andern *den ihm zugehörigen Translationscomplex**) nennen und wieder die Coordinaten des ersteren durch Q_{ik}, die des letzteren durch P_{ik} bezeichnen. Allen Kraftsystemen, deren Coordinaten sich nur um einen gemeinsamen Factor unterscheiden, gehören hiernach dieselben linearen Complexe zu. *Sind dieselben specielle, so ist das Kraftsystem ersetzbar durch eine einzelne Kraft.*

Da die Coordinaten eines Kraftsystems durch Addition der Coordinaten einzelner Kräfte gewonnen sind, so gilt auch der Satz:

Kraftsysteme setzen sich zusammen, indem sich ihre Coordinaten addiren.

Auch für die Grössenverhältnisse zweier einem solchen Systeme äquivalenter Kräfte gelten analoge Sätze, wie für unendlich kleine Bewegungen; also: *Das Product des Momentes zweier conjugirter Kraft-Directricen oder -Axen in die Intensitäten der bez. Kräfte ist constant, und gleich dem Producte der um eine Hauptaxe des Complexes wirkenden Drehkraft in die nach ihr wirkenden Translationskraft,* wenn man

---

*) Bei spec. Massbest. kann natürlich nur der letztere auftreten. — Insofern dieser dann zur Repräsentation des Kraftsystems dient, wird er auch als *Dyname* bezeichnet; vgl. Plücker a. a. O. und Battaglini: Sulle diname in involuzione, Atti della r. accad. di Napoli, vol. IV, 1869.

diese beiden Kräfte, was ja stets möglich ist, ebenfalls dem Systeme äquivalent nimmt*).

Je nach der Lage der den beiden linearen Complexen gemeinsamen Hauptaxen haben wir ebensoviele *specielle Arten von Kraftsystemen* zu unterscheiden, wie oben von unendlich kleinen Bewegungen (vgl. § 10.): die Hauptaxen können in eine Erzeugende der Fundamentalfläche zusammenfallen (Fall I), die Fläche beide in demselben Punkte berühren (II) (wo dann die Complexe specielle sind), oder endlich unbestimmt werden (III und IV). Während wir also bei spec. Massbestimmung nur zwischen Kraft (resp. Kräftepaar) und Kraftsystem zu unterscheiden hatten, ist uns hier eine Reihe von Uebergangsfällen gegeben; ähnlich wie wir oben (§ 10.) die Fälle [1, 1], [∞, 2] und [∞, 1] als Uebergang zur gewöhnlichen Translation auffassen konnten. Ein Beispiel für die Verwerthung solcher besonderer Kraftsysteme wird uns sogleich die *Theorie der Momente* bieten, welche gleichzeitig die statische Bedeutung der den beiden zugehörigen Complexen angehörenden Geraden erkennen lassen wird.

Als *Drehmoment einer Kraft in Bezug auf eine Axe* definiren wir gewöhnlich die Grösse, um welche die Kraft den Körper, an dem sie angebracht ist, um die Axe, wenn diese festgehalten wird, zu drehen strebt. Vollkommen dualistisch entsprechend müssen wir nun auch ein *Verschiebungsmoment einer Kraft in Bezug auf einen Strahl* einführen; dies drückt dann die Grösse aus, um welche die Kraft den bez. Körper nach dem Strahle zu verschieben strebt, wenn er festgehalten wird. Das Verschiebungsmoment einer Translationskraft in Bezug auf eine Gerade tritt demnach an Stelle der *Projection der Kraft* auf diese bei specieller Massbestimmung. Um einen analytischen Ausdruck für die Grösse dieses Momentes zu gewinnen, führen wir zunächst die entsprechenden Betrachtungen für unendlich kleine Bewegungen durch; von da ist es uns dann erlaubt, unmittelbar wieder zu den Kräften zurückzukehren**).

---

*) Für spec. Massbest. geg. von Chasles: Bulletin des sciences de Férussac, Sept. 1828, p. 187, und comptes rend. 1843. Vgl. auch Möbius: Crelle's J. Bd. IV, 1829.

**) Ebenso hätten wir schon oben Verschiebungs- und Drehmomente von unendlich kleinen Rotationen oder Translationen betrachten und alle die folgenden Sätze für diese aufstellen können, wie es Möbius für spec. Massbest. gethan hat (vgl. Crelle's J. Bd. XVIII, p. 189). Ich glaubte diese Begriffe aber besser erst hier bei den Kräften einführen zu sollen, um mich der gebräuchlichen Darstellungsweise möglichst anzuschliessen. Im Folgenden können wir nunmehr mit den absolut bestimmten Coordinaten eines linearen Complexes gleichmässig den Begriff eines Kraftsystems oder den einer unendlich kleinen Bewegung verbinden.

Die Projection einer Translation auf eine Gerade π kann man bei specieller Massbestimmung folgendermassen definiren. Man ersetze die Translation durch zwei andere, von denen die eine (p') parallel, die andere senkrecht zu der gegebenen Geraden π geschieht. Dann ist die fragliche Projection durch die Intensität der ersten Theilbewegung dargestellt. Diese Construction beruht wesentlich darauf, dass man eine Translation angeben kann, welche die parallelen Linien p' und π gleichzeitig in sich übergehen lässt. Ebenso müssen wir bei allgemeiner Massbestimmung die gegebene Translation P, um eine der Projection entsprechende Function zu erhalten, in zwei Bewegungen zerlegen, der Art, dass die Directrix der einen gleichzeitig mit dem gegebenen Strahle π in sich verschoben werden kann, während die der anderen zu dieser senkrecht steht. Die beiden Directricen derselben müssen sich dann in einem Punkte der Directrix p der gegebenen Translation schneiden. Eine Bewegung, welche zwei Gerade zugleich in sich verschiebt, ist nun aber nicht eine Translation, sondern eine solche Bewegung, wie sie im Falle $[2, \infty]$ in § 10 *) behandelt wurde, bei der also 2 Erzeugende der Fundamentalfläche ungeändert bleiben, und welche durch eine Translation nach einer Geraden der durch die 2 Erzeugenden bestimmten Congruenz und eine gleichzeitige Rotation um diese ersetzt werden kann. Wir machen daher die folgende Construction: der Strahl π schneidet die Fundamentalfläche in 2 Punkten; unter den 4 durch diese bestimmten Erzeugenden wählen wir 2 derselben Schaar angehörige aus**) und ziehen durch einen beliebigen***) Punkt der Directrix von P die Linie p', welche jene beiden Erzeugenden schneidet. Wir können dann stets eine unendlich kleine Bewegung (mit den Coordinaten Π_{ik}) von der Art $[2, \infty]$ angeben, welche die Linien p' und π zugleich in sich übergehen lässt. Die Torsion, welche dabei jede dieser Geraden in sich erleidet, brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da es uns hier nur auf die Bewegung der mit ihnen gleichbedeutenden Punktreihen in sich ankommt. Fügen wir der translatorischen Componente P' dieser Bewegung Π eine Translation nach einer zu p' senkrechten Linie π', welche in der Ebene von p und p' liegt hinzu, so wird aus beiden wieder die Bewegung P resultiren. — Zerlegen wir daher umkehrt P in eine Translation P'

---

*) Der Fall $[1, \infty]$ ist ein Specialfall hiervon und würde anwendbar sein, wenn die Directrix P die Fundamentalfläche berührt.

**) Würden wir die beiden anderen wählen, so würde das resultirende Verschiebungsmoment nur entgegengesetztes Vorzeichen erhalten, da die fest bleibende Schaar von Erzeugenden den Sinn der Bewegung bestimmt.

***) Die Wirkung einer Translationskraft ist ja unabhängig von der Lage des Angriffspunktes auf der Directrix.

nach p' und in eine andere nach π', so stellt uns die Grösse P' das gesuchte Verschiebungsmoment dar; denn wir können dieselbe als translatorische Componente einer Bewegung Π von der Art $[2, \infty]$ nach p' und π auffassen. Die Intensität von P' folgt aus § 9. (7) und (8); sie wird:

$$P' = P \cdot \cos(p, p') \,. \tag{1}$$

Wenden wir nun für den Augenblick die in § 10. gegebene kanonische Form an, seien also die beiden ausgezeichneten Erzeugenden durch

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0 \text{ und } x_3 = 0, \; x_4 = 0$$

gegeben; die Linie p' falle mit der Kante $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ zusammen und ihre absolute Polare mit $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, so dass die Gleichungen gelten:

$$p_{14} = 0$$

$$\pi_{12} = 0 \,, \qquad \pi_{34} = 0 \,.$$

Hierdurch erhält man dann:

$$\cos(p, p') = \frac{\Phi_{pp'}}{\sqrt{\Phi_{pp} \cdot \Phi_{p'p'}}} = \frac{p_{23}}{\sqrt{\Phi_{pp}}}$$

$$\cos(p, \pi) = \frac{\Phi_{p\pi}}{\sqrt{\Phi_{pp} \cdot \Phi_{\pi\pi}}} = \frac{p_{23}}{\sqrt{\Phi_{pp}}} = \cos(p, p') \,, \tag{2}$$

d. h. *Alle Geraden, welche dieselben beiden Erzeugenden desselben Systems der Fundamentalfläche schneiden, haben gegen eine beliebige andere Gerade dieselbe Neigung.*

P' ist nun aber zugleich das gesuchte Verschiebungsmoment $V(P, \pi)$, denn es ist die translatorische Componente, welche mit einer gleich grossen rotatorischen zusammen die Bewegung Π hervorbringt, welche π und p' gleichzeitig in sich überführt*), also:

$$V(P, \pi) = P \cdot \cos(P, p') = \frac{\Phi_{Pp'}}{\Omega_{x'x'} \sqrt{\Phi_{p'p'}}} \,,$$

wo x' irgend einen Punkt auf p' bedeutet**); da wir diese Grösse aber auch ebensowohl auf π messen können, so ist wegen (2), wenn wir den Begriff der Bewegung wieder durch den der Kraft ersetzen,

---

*) Aehnliches findet auch bei specieller Massbestimmung statt, denn die Projection von P auf π wird erst äquivalent mit der Componente von P nach p', wenn man ein Kräftepaar hinzufügt. Es ist dieses aber nicht eine directe Specialisirung des im Texte erwähnten Vorganges.

**) Zunächst würde der Schnittpunkt von p und p' zu wählen sein; dieser kann aber wieder beliebig auf p' verschoben werden. Deutlicher werden wir diese Unabhängigkeit vom Angriffspunkte noch in § 13. erkennen.

das gesuchte Verschiebungsmoment einer Translationskraft P nach einem Strahle π:

$$V(P, \pi) = P \cdot \cos(P, \pi) = \frac{\Phi_{P\pi}}{\Omega_{xx}\sqrt{\Phi_{\pi\pi}}}, \tag{3}$$

wo nun x einen Punkt der Geraden π bezeichnet. Offenbar ist $V(P, \pi)$ gleich dem Drehmomente der Kraft in Bezug auf die absolute Polare π' der gegebenen Geraden, also wird wegen:

$$\frac{\Phi_{P\pi}}{\sqrt{\Phi_{\pi\pi}}} = \frac{\sqrt{\Delta}\,(P, \pi')}{\sqrt{\Phi_{\pi'\pi'}}} \qquad \text{(vgl. § 1.)}$$

das Drehmoment einer Translationskraft P um eine Axe π' *) gegeben durch:

$$D(P, \pi') = \frac{\sqrt{\Delta}\cdot(P, \pi')}{\Omega_{xx}\sqrt{\Phi_{\pi'\pi'}}}, \tag{4}$$

wo x ein Punkt der absoluten Polare von π' ist. *Das Drehmoment einer Translationskraft um eine Axe ist also gleich dem geometrischen Momente derselben gegen die Directrix der Kraft, multiplicirt mit der Intensität der letzteren.* Der Ausdruck (4) entspricht nach den Ausführungen in § 1. auch vollkommen dem bei specieller Massbestimmung gebräuchlichen. — Ganz analog werden die entsprechenden Grössen für eine *Rotationskraft* gebildet: es ist das *Drehmoment einer solchen* um die Axe q:

$$D(Q, q) = Q \cdot \cos(Q, q) = \frac{\sqrt{\Delta}\cdot\Phi_{Qq}}{\Omega'_{uu}\sqrt{\Phi_{qq}}}, \tag{5}$$

wo u eine durch q gehende Ebene bedeutet, und das Verschiebungsmoment nach q:

$$V(Q, q) = \frac{\Delta\cdot(Q, q)}{\Omega'_{uu}\sqrt{\Phi_{qq}}}. \tag{6}$$

Ist insbesondere die durch die Coordinaten Q_{ik} dargestellte Kraft identisch mit der durch die P_{ik} gegebenen, d. h. ist:

$$2\sqrt{\Delta}\cdot Q_{ik} = (a_i b_k - b_i a_k)\,\Sigma\,(a_r b_s - b_r a_s)\,P_{rs},$$

so werden die Ausdrücke (3), (4) und (6), (5) respective einander gleich.

Wenn mehrere Kräfte gleichzeitig wirken, so addiren sich ihre Drehmomente in Bezug auf dieselbe Gerade nach der Definition der-

---

*) Vgl. Battaglini: Sulla teorica dei momenti; Rendiconti, Mai 1869, wo die folgenden Sätze für die gewöhnliche Statik in homogenen Liniencoordinaten entwickelt sind. — An die hieraus folgende Bedeutung der Kraftcoordinaten lässt sich eine Definition der Liniencoordinaten knüpfen, vgl. Zeuthen: Note sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace. Math. Ann. Bd. I. p. 432.

selben, und da sich die Coordinaten der Kräfte ebenfalls addiren, so können wir den Ausdruck (4) als das *Drehmoment eines Kraftsystems um eine Axe* π' auffassen, sobald wir unter den P_{ik} nicht die Coordinaten einer einzelnen Kraft, sondern die eines Kraftsystems verstehen*). Lassen wir diesen Ausdruck verschwinden, so haben wir den Satz:

*Das Drehmoment eines Kraftsystems verschwindet für alle Geraden des zugehörigen Translationscomplexes**).*

Das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems verschwindet für alle Geraden des zugehörigen Rotationscomplexes.

Es ist dies auch evident, da alle Geraden, welche 2 Directricen von Kräften, die das System ersetzen können, schneiden, dem Translationscomplexe angehören, und 2 solche Kräfte um diese Geraden kein Drehmoment haben können.

Kennen wir das Moment des Systems P in Bezug auf eine Normale p' zu einer Geraden p des Translationscomplexes, so können wir daraus die Momente für alle Linien π des durch diese beiden bestimmten Strahlbüschels berechnen.

Es ist nämlich:

$$(P, p) = 0, \qquad \Phi_{pp'} = 0$$
$$\varrho \pi_{ik} = p'_{ik} + \lambda p_{ik},$$

also

$$D(P, \pi) = \frac{\sqrt{\Delta}\,(P, p')}{\sqrt{\Phi_{p'p'} + \lambda^2 \Phi_{pp}}} = D(P, p') \cdot \cos(\pi, p'), \tag{6}$$

denn es ist:

$$\cos(\pi, p') = \frac{\Phi_{p'p'} + \lambda \Phi_{pp'}}{\sqrt{\Phi_{p'p'} \cdot \Phi_{\pi\pi}}} = \frac{\sqrt{\Phi_{p'p'}}}{\sqrt{\Phi_{p'p'} + \lambda^2 \Phi_{pp}}}.$$

Von allen durch einen Punkt gehenden Geraden liegen nun diejenigen, für welche das Moment verschwindet, in einer Ebene, und es ist also das Drehmoment des Kraftsystems für irgend eine durch den Punkt gehende Gerade gleich dem Momente in Bezug auf die Normale dieser Ebene in dem Punkte, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels der Geraden gegen diese Normale; in Bezug auf letztere hat demnach das Moment des Systems den grössten Werth gegenüber den andern durch den Punkt gehenden Linien***). Diese Normalen bil-

---

*) Wir gehen im Folgenden immer von Translationskräften aus, und können dann die entsprechenden Sätze für Rotationskräfte ohne Beweis aussprechen.

**) Für spec. Massbest. machte Möbius auf die Bedeutung dieses Complexes aufmerksam: Crelle's J. Bd. X, p. 317. 1833.

***) Vgl. für spec. Massbest. Poinsot: Mémoire sur la composition des moments et des aires dans la mécanique, 1804, auch als Anhang zu den neueren Ausgaben der Eléments de statique; und Möbius: Statik, Th. I, p. 126 ff.

deten aber bei einer unendlich kleinen Bewegung den Complex der Charakteristiken; alle für die Charakteristiken gefundenen Sätze können wir demnach auf die Linien der Maximalmomente übertragen. Wir haben somit:

Jedem Punkte ist eine durch ihn gehende Gerade zugeordnet, für welche das Drehmoment des Kraftsystems grösser ist als für jede andere durch den Punkt gehende Gerade; und in jeder Ebene liegt eine Gerade, für welche das Verschiebungsmoment des Systems grösser ist, wie in Bezug auf jede andere in der Ebene liegende Gerade. Alle diese Linien bilden einen Tetraëdralcomplex, von dessen Fundamentaltetraëder 2 Paare von gegenüberliegenden Kanten auf der Fundamentalfläche liegen. Durch Uebertragung der anderen Sätze würden wir z. B. erhalten:

Die Punkte, für welche die Geraden eines Complexkegels dieses Tetraëdralcomplexes Linien grösster Drehmomente sind, liegen auf einer Raumcurve 3. Ordnung; längs ihr berührt der Kegel eine Fläche 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten, zu deren Punkten Linien grösster Drehmomente gehören, welche gleichzeitig Linien grösster Verschiebungsmomente für die durch die Spitze des Kegels gehenden Ebenen sind.

Das Product des Drehmomentes eines Kraftsystems in Bezug auf eine Gerade des Tetraëdralcomplexes in das Verschiebungsmoment bezüglich derselben Geraden ist constant. U. s. w.*)

Je nach der speciellen Natur des Kraftsystems, d. h. nach der Lage der zugehörigen linearen Complexe gegen die Fundamentalfläche wird auch der Complex der Linien grösster Momente einen speciellen Charakter zeigen, wie es für unendlich kleine Bewegungen in § 10. ausgeführt wurde.

§ 13.

Intensität eines Kraftsystems. Verallgemeinerung des Vorhergehenden.

Wir haben nur für die Intensität einer *einzelnen* Kraft einen Ausdruck aufgestellt, entsprechend dem, wie er gewöhnlich in der

*) Beim Uebergange zur spec. Massbest. bleiben die Sätze über die Linien grösster Drehmomente im Wesentlichen bestehen; die Linie des grössten Verschiebungsmomentes in einer Ebene wird dagegen diejenige Gerade in ihr, für welche die *Projection des Kraftsystems*, d. h. die Summe der Projectionen der einzelnen Kräfte auf die Gerade, den grössten Werth annimmt. Diese Projection wird dann:

$$= \frac{Xp_{12} + Yp_{13} + Zp_{14}}{\sqrt{p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2}},$$

wo die p_{ik} wie in § 1. bestimmt sind. Für die *Linien der grössten Projectionen* gelten dann analoge Sätze, wie für die Charakteristiken von Ebenen bei unendlich kleinen Bewegungen.

Statik auftritt; in ihm war der Nenner von dem Angriffspunkte resp. der Angriffsebene der Kraft abhängig, und dieser Umstand erschwerte wiederholt den Gang unserer Untersuchungen, während wir andererseits erkannten, dass dieser Punkt noch beliebig auf der Directrix der Kraft verschoben, resp. die Ebene beliebig um ihre Axe gedreht werden kann. Eine schon oben (§ 9.) bei der Berechnung der Grössen ε und ω gemachte Bemerkung wird uns nunmehr dazu dienen, die Intensität allein in ihrer Abhängigkeit von den Coordinaten der Kraft darzustellen. Indem wir dann diese von einander unabhängig annehmen, d. h. sie als die Coordinaten eines Kraftsystems ansehen, ergeben sich unter Anwendung der in § 1. eingeführten Begriffe der gegenseitigen Neigung von linearen Complexen hieraus weitere Verallgemeinerungen. Wir gehen zunächst von unendlich kleinen Bewegungen aus.

In dem Ausdrucke für ε trat im Nenner die linke Seite des der Bewegung zugeordneten Translationscomplexes auf, wenn wir in Ω_{xx} die x als Function der Coordinaten der zugehörigen Charakteristik einsetzen. Um die dabei etwa auftretenden Factoren deutlich zu erkennen, leiten wir das Resultat in einer andern kanonischen Form ab, schlagen dabei aber den umgekehrten Weg ein. Es sei

$$\Sigma\, a_i x_i^2 \doteq 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche, oder in Liniencoordinaten

$$\Sigma\, a_i a_k p_{ik}^2 = 0\,,$$

so dass zwischen den Coordinaten P, Q der Bewegung die Gleichungen bestehen:

$$\text{(1)} \qquad \sqrt{\Delta}\; P_{\alpha\beta} = a_\gamma a_\delta Q_{\alpha\beta}\,,$$

wo nach § 4.:

$$\text{(2)} \qquad Q_{ik} = J\,(\beta_{ki} - \beta_{ik}) = J\,(a_k \alpha_{ki} - a_i \alpha_{ik})\,,$$

unter den α_{ik} die Coëfficienten der die unendlich kleine Transformation darstellenden Gleichungen verstanden. Zwischen diesen bestehen dann die Bedingungsgleichungen:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} 0 = \beta_{ki} + \beta_{ik} = a_i \alpha_{ik} + a_k \alpha_{ki} \\ a_k = 2\,\beta_{kk} J\,. \end{cases}$$

Wenden wir nun die Substitution*)

$$2\,M p_{ik} = x_i dx_k - x_k dx_i = (x_i\,\Sigma\,\alpha_{kr} - x_k\,\Sigma\,\alpha_{ir})\,d\lambda$$

*) In ε waren die p_{ik} absolut bestimmt angenommen, da sie zur Messung eines Streckenelementes dienten; letzteres ist aber gleich dem Verschiebungsmomente von P in Bezug auf p; es ist deshalb im Texte der Proportionalitätsfactor so gewählt, dass rechts der Factor $J = \dfrac{d\lambda}{2\,M}$ (vgl. § 4.) auftritt.

auf die Gleichung des Translationscomplexes:

$$(P, p) = 0$$

an, so findet man unter Berücksichtigung der Gleichungen (1), (2), (3) in der That, dass die Coefficienten von $x_i x_k$ verschwinden, während die von x_i^2 proportional zu den a_i werden. Es wird z. B. der Coefficient von x_4^2:

$$\frac{a_4 \cdot J^2}{\sqrt{\Delta}} \left\{ \alpha_{24} a_2 (a_3 \alpha_{31} - a_1 \alpha_{13}) - \alpha_{34} a_3 (a_2 \alpha_{21} - a_1 \alpha_{12}) - \alpha_{14} a_1 (a_3 \alpha_{32} - a_2 \alpha_{23}) \right\},$$

oder wegen (2) und (3):

$$= \frac{a_4}{4\sqrt{\Delta}} (Q, Q) .$$

Wir haben demnach:

$$4\sqrt{\Delta}\, (P, p) = \Omega_{xx} \cdot (Q, Q) .$$

Der Ausdruck für die Grösse der Verschiebung eines Punktes x auf seiner Charakteristik p wird daher

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\Phi_{pp}}}{4\sqrt{\Delta}\,(P, p)} (Q, Q) .$$

Verschwindet hier (Q, Q), so besteht die Bewegung in einer Rotation um eine Axe mit den Coordinaten Q_{ik}, alsdann gehört aber die Linie p nach § 10. dem Translationscomplexe an, auch (P, p) verschwindet identisch, und ε behält einen endlichen Werth. Besteht die Bewegung dagegen in einer Translation, deren Directrix p ist, so werden die p_{ik} zu den P_{ik} proportional; ferner ist (§ 4.):

$$(P, P) = (Q, Q) = 0 ,$$

und folglich haben wir für *die Intensität einer unendlich kleinen Translation mit den Coordinaten* P_{ik}, *also auch für die einer Translationskraft mit denselben Coordinaten:*

$$P = \frac{\sqrt{\Phi_{PP}}}{4\sqrt{\Delta}},$$

und ebenso für *die Intensität einer Rotationskraft:*

$$Q = \frac{\sqrt{\Phi_{QQ}}}{4\sqrt{\Delta}},$$

wo $Q = P$ wird, wenn die Q_{ik} und P_{ik} den Gleichungen (7) in § 4. genügen. Beide Ausdrücke sind unabhängig von dem Angriffspunkte bez. von der Angriffsebene, und beide sind absolut invariant gegen eine Transformation der Fundamentalfläche in sich.

Mit Hülfe derselben können wir unsere früheren Untersuchungen leicht umformen; wir erhalten die gewonnenen Resultate aber in noch allgemeinerer Form, wenn wir nunmehr auch als *Intensität eines Kraftsystems mit den Coordinaten* P_{ik} *resp.* Q_{ik} *den Ausdruck:*

$$(4) \qquad R = \frac{\sqrt{\Phi_{PP}}}{4\sqrt{\Delta}} = \frac{\sqrt{\Phi_{QQ}}}{4\sqrt{\Delta}} \; *)$$

definiren; und in der That ist dieser zu der in § 4. benutzten Grösse J proportional.

Für die Grösse einer unendlich kleinen Bewegung erschienen uns oben die Ausdrücke e und v besonders charakteristisch, d. h. die Grösse der Verschiebung einer Hauptaxe der Bewegung in sich und die der Drehung des Raumes um sie; zu diesen Grössen steht in der That auch die durch (4) als Intensität definirte Function in enger Beziehung. Sind nämlich p_{ik} und π_{ik} die Coordinaten der beiden Hauptaxen, so dass

$$\varrho\, \pi_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,(a_\gamma b_\delta - b_\gamma a_\delta)\, \Sigma\,(a_i b_k - b_i a_k)\, p_{ik};$$

so können wir diesen Grössen derartig absolute Werthe beilegen, dass sie die Coordinaten zweier einzelnen Translationskräfte bedeuten, welche mit dem gegebenen System äquivalent sind, d. h. dass:

$$P_{ik} = p_{ik} + \pi_{ik}.$$

Setzen wir diese Werthe in (4) ein, so erhalten wir wegen

$$\Phi_{p\pi} = 0$$

die Relation:

$$(5) \qquad R^2 = \frac{\Phi_{pp}}{16\sqrt{\Delta}} + \frac{\Phi_{\pi\pi}}{16\sqrt{\Delta}} = e^2 + v^2;$$

es ist also *das Quadrat der Intensität eines Kraftsystems gleich der Summe der Quadrate der beiden mit ihm äquivalenten, nach den Hauptaxen, resp. um sie wirkenden Kräfte* (vgl. eine Anmerkung zu § 9.).

Betrachten wir hier e als die Grösse der nach p wirkenden Translationskraft, so ist v die der um p wirkenden Drehkraft, also eine Winkelgrösse, und beide sind nur bei unserer allgemeinen Massbestimmung direct mit einander vergleichbar, während sie bei specieller Massbestimmung einen wesentlich verschiedenen Charakter tragen. In der

---

*) Ein Kraftsystem hat also keine Intensität, wenn sein Translationscomplex mit dem absolut conjugirten, d. h. mit dem Rotationscomplexe in Involution liegt, denn die Bedingung hierfür ist eben:

$$\Phi_{PP} = 0.$$

Wir behalten im Texte den Factor $\frac{1}{4}$ bei, damit diese Definition mit unserer obigen für eine einzelne Kraft völlig übereinstimmt.

That müssen wir hier die Grössen e und v trennen und nur die eine (v) als Intensität bezeichnen, so dass allen Systemen mit demselben v dieselbe Intensität zukommt. Die Grösse e wird nämlich beim Uebergange von allgemeiner zu specieller Massbestimmung im Vergleiche zu v unendlich klein. Es findet dieser Umstand auch seinen Ausdruck in der Form, in welcher die Gleichung des imaginären Kugelkreises auftritt; denn diese hat zur Folge, dass man durch Einsetzen der Coordinaten des Kraftsystems in sie einen von den nach den Coordinatenaxen wirkenden Kraftcomponenten allein abhängigen Ausdruck:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

erhält, während die Drehmomente L, M, N um die Axen darin nicht verwerthet sind. Es lassen sich deshalb auch die folgenden Erörterungen nicht unmittelbar auf unsere specielle Massbestimmung übertragen (wenigstens würde dazu eine Umsetzung derselben erforderlich sein), während sie geeignet sind, die allgemeine Gestaltung mechanischer Probleme bei der von uns concipirten Massgeometrie zu kennzeichnen.

Mit Einführung obiger Function R haben wir das Kraftsystem ebenso als einheitliches Ganze hingestellt, wie bisher eine einzelne Kraft; wir werden dadurch genöthigt, auch den jenes darstellenden linearen Complex ebenso als Raumelement aufzufassen, wie die Gerade, an welche der Begriff der Kraft geknüpft ist. Demgemäss werden wir die Beziehungen des Systems zu den zugehörigen oder anderen linearen Complexen ebenso untersuchen, wie oben die einer Kraft zu ihrer Axe, resp. Directrix, oder zu anderen Geraden.

Wir stellen zu dem Zwecke zunächst nach Analogie des Vorhergehenden die folgenden Definitionen auf, deren Bedeutung sogleich hervortreten wird:

Als Verschiebungsmoment eines Kraftsystems in Bezug auf einen linearen Complex P' bezeichnen wir das Product der Intensität des Systems in den Cosinus der Neigung des gegebenen Complexes gegen den dem Kraftsysteme zugehörigen Translationscomplex oder in das Moment desselben gegen den zugehörigen Rotationscomplex, d. h. es ist:

$$(6) \qquad V(P, P') = \frac{\Phi_{PP'}}{4\sqrt{\Delta}\sqrt{\Phi_{P'P'}}} = \frac{\Sigma Q_{ik} P'_{ik}}{4\sqrt{\Phi_{P'P'}}}.$$

Reciprok entsprechend sei das Drehmoment eines Kraftsystems in Bezug auf einen linearen Complex gleich der Intensität multiplicirt in das Moment des Translationscomplexes gegen denselben oder in den Cosinus der Neigung des Rotationscomplexes gegen ihn; d. h. es ist

$$(7)\qquad D(P, P') = \frac{(P, P')}{4\sqrt{\Phi_{P'P'}}} = \frac{\frac{1}{2}\Sigma \frac{\partial \Phi_{QQ}}{\partial Q_{\alpha\beta}} P'_{\gamma\delta}}{4\sqrt{\Delta}\sqrt{\Phi_{P'P'}}}.$$

Sind hier die P'_{ik} Coordinaten einer einzelnen Geraden, so gehen die Ausdrücke (6), (7) in die entsprechenden in § 12. über. Lassen wir in diesem Falle alle Coordinaten P'_{ik} bis auf eine verschwinden, so wird das Verschiebungsmoment des Systems in Bezug auf die Kante

$$x_\alpha = 0, \quad x_\beta = 0$$

des Coordinatentetraëders:

$$= \frac{Q_{\gamma\delta}}{4\sqrt{a_{\gamma\gamma}a_{\delta\delta} - a_{\gamma\delta}^2}},$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werthe 1, 2, 3, 4 in cyklischer Vertauschung annehmen können; und das Drehmoment in Bezug auf dieselbe Kante wird

$$= \frac{P_{\alpha\beta}}{4\sqrt{a_{\gamma\gamma}a_{\delta\delta} - a_{\gamma\delta}^2}}.$$

Die Coordinaten eines Kraftsystems sind also bis auf gewisse constante Factoren als Coordinaten des Rotationscomplexes die Verschiebungsmomente nach den Kanten des Coordinatentetraëders, als solche des Translationscomplexes gleich den Drehmomenten um diese Kanten, eine Definition, welche ebenso für unendlich kleine Bewegungen gilt (vgl. § 4.).

Die Gleichungen (6) und (7) ergeben nun sofort die Sätze:

Es giebt vierfach unendlich viele lineare Complexe, in Bezug auf welche das Drehmoment eines Kraftsystems verschwindet; dieselben liegen in Involution mit dem Translationscomplexe des Systems, d. h. sind normal zum Rotationscomplexe.

Es giebt vierfach unendlich viele lineare Complexe, in Bezug auf welche das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems verschwindet; dieselben liegen in Involution mit dem Rotationscomplexe des Systems, d. h. sind normal zum Translationscomplexe.

Von der mechanischen Bedeutung der hier eingeführten Ausdrücke können wir uns eine Vorstellung machen, wenn wir von den Hauptaxen des betreffenden Complexes P' ausgehen. Sind nämlich p'_{ik} und π'_{ik} die Coordinaten dieser beiden Axen, so dass wieder

$$\varrho \pi'_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(a_\gamma b_\delta - b_\gamma a_\delta)\,\Sigma(a_i b_k - b_i a_k)\,p'_{ik},$$

so können wir die Coordinaten des Complexes mittelst derselben ausdrücken durch die Gleichungen:

$$P'_{ik} = p'_{ik} + \lambda \varrho \pi'_{ik},$$

und es wird:

$$V(P, P') = \frac{\Phi_{Pp'} + \lambda\varrho\Phi_{P\pi'}}{4\sqrt{\Delta}\sqrt{\Phi_{p'p'} + 2\lambda\varrho\Phi_{p'\pi'} + \lambda^2\varrho^2\Phi_{\pi'\pi'}}}. \tag{8}$$

Berücksichtigen wir ferner die Relationen (vgl. § 1.):

$$\Phi_{p'\pi'} = 0 \qquad \varrho\Phi_{P\pi'} = \Delta(P, p')$$

$$\varrho^2\Phi_{\pi'\pi'} = \Delta\Phi_{p'p'} \qquad \varrho(p', \pi') = \Phi_{p'p'},$$

so erhalten wir für Neigung und Moment des Complexes gegen seine Hauptaxen die Werthe:

$$\cos(P', p') = \cos(P', \pi') = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2\Delta}}$$

$$M(P', p') = M(P', \pi') = \frac{\lambda\sqrt{\Delta}}{\sqrt{1 + \lambda^2\Delta}}.$$

Hieraus folgt aber:

$$\cos^2(P', p') + M^2(P', p') = 1, \tag{9}$$

d. h.: *Das geometrische Moment eines linearen Complexes gegen eine seiner Hauptaxen ist gleich dem Sinus seiner Neigung gegen diese Axe.*

Wenden wir diese Gleichung auf (8) an, so wird endlich:

$$\begin{aligned} V(P, P') &= \frac{\Phi_{Pp'}}{4\sqrt{\Delta\cdot\Phi_{p'p'}}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2\Delta}} + \frac{(P, p')}{4\sqrt{\Phi_{p'p'}}}\cdot\frac{\lambda\sqrt{\Delta}}{\sqrt{1 + \lambda^2\Delta}} \\ &= V(P, p')\cos(P', p') + D(P, p')\sin(P', p')\ ^{*)}, \end{aligned} \tag{10}$$

also: *Das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems in Bezug auf einen linearen Complex ist gleich dem Verschiebungsmomente nach einer Hauptaxe desselben multiplicirt in den Cosinus der Neigung derselben gegen den betreffenden Complex, vermehrt um das Product des Drehmomentes um diese Axe in den Sinus jener Neigung*; ein Satz, den man unter Benutzung der auf die Fundamentalfläche gegründeten Polarität noch in verschiedenen anderen Formen aussprechen kann. Reciprokes gilt für die Drehmomente; es ist:

$$D(P, P') = D(P, p')\cos(P', p') + V(P, p')\sin(P', p'). \tag{11}$$

---

*) Das Verschwinden dieses Ausdruckes giebt eine lineare Gleichung in λ; es giebt also bei gegebenem Hauptaxenpaare (wie überhaupt in einer zweigliedrigen Gruppe) nur einen linearen Complex, welcher mit einem bestimmten anderen in Involution liegt. — Indem man auf beiden Seiten der Gleichung durch $\sqrt{\Phi_{PP}}$ dividirt, erhält man $\cos(P, P')$ *ausgedrückt durch Neigung und Moment der Hauptaxen* (p *und* p') *gegen einander und gegen ihre zugehörigen Complexe*; es ist:

$$\cos(P, P') = \cos(P, p')\cos(P', p') + M(P, p')\sin(P', p'),$$

wo nun weiter:

$$\cos(P, p') = \cos(p, p')\cos(P, p) + M(p, p')\sin(P, p).$$

Für alle Complexe mit demselben Hauptaxenpaare sind also diese Momente nur durch Neigung, resp. Moment des Complexes gegen die Axen bestimmt. Gehört die Axe p' insbesondere dem Translationscomplexe an, so verschwindet $D(P, p')$; das Verschiebungsmoment in Bezug auf den Complex wird gleich dem in Bezug auf diese Hauptaxe, multiplicirt in $\cos(P', p')$; und es folgt:

$$V(P, P')^2 + D(P, P')^2 = V(P, p')^2 = D(P, \pi')^2,$$

d. h.: *In Bezug auf alle Complexe mit gemeinsamem Axenpaare ist, wenn eine der Hauptaxen dem Translations- (resp. Rotations-)Complexe angehört, die Summe der Quadrate von Verschiebungs- und Drehmoment gleich dem Quadrate des Verschiebungs- (resp. Dreh-)Moments in Bezug auf diese Axe.*

Besonders ausgezeichnet sind diejenigen linearen Complexe, in Bezug auf welche Verschiebungs- und Drehmoment gleichzeitig verschwinden; die Gleichungen (10) und (11) zeigen, dass die Hauptaxen derselben diejenigen des Kraftsystems treffen, denn $\cos(P', p')$ und $\sin(P', p')$ können im Allgemeinen nicht verschwinden*); es muss also gleichzeitig sein

$$V(P, p') = 0 \text{ und } D(P, p') = 0,$$

d. h. p' der durch die beiden dem System zugehörigen Complexe bestimmten Congruenz angehören. In ähnlicher Weise lassen sich auch andere Sätze über die Momente übertragen; so ergeben die Gleichungen (6) in § 12. z. B.:

Kennt man das Drehmoment eines Kraftsystems in Bezug auf einen linearen Complex, welcher normal zu einem mit dem Translationscomplexe in Involution liegenden Complexe ist, so kann man daraus das Moment für jeden Complex der durch diese beiden bestimmten zweigliedrigen Gruppe berechnen. —

Bilden wir insbesondere noch die Momente des Systems in Bezug auf den zugehörigen Translations- und Rotationscomplex, so erhalten wir: *Das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems in Bezug auf seinen Translationscomplex ist gleich der Intensität des Systems; das Drehmoment in Bezug auf denselben Complex ist gleich dem Momente des Complexes in Bezug auf sich selbst, multiplicirt in die Intensität des Systems.*

Für die Zusammensetzung verschiedener Kraftsysteme, die ja durch Addition der Coordinaten geschieht, gelten in Bezug auf die *Intensität des resultirenden Systems* nunmehr ähnliche Sätze, wie für einzelne convergirende Kräfte; es ist dieselbe z. B. für das aus zwei Systemen P' und P'' resultirende System bestimmt durch

*) Dies könnte nur eintreten, wenn p' dem Complexe P' selbst angehörte, d. h. mit der andern Axe π' in eine Erzeugende der Fundamentalfläche zusammenfiele (vgl. den Fall $[1, \infty]$ in § 10.).

$$R^2 = P'^2 + P''^2 + 2P'P'' \cos(P, P'),$$

und zwar ist diese Gleichung unabhängig von der gegenseitigen Lage der Complexe P und P', während die entsprechende Gleichung nur für sich schneidende Gerade bewiesen war.

Das System R ist geometrisch vollständig bestimmt, wenn wir die Lage seiner Hauptaxen kennen, da es dann nur noch einen Complex giebt, welcher der durch die Complexe P'_{ik} und P''_{ik} bestimmten zweigliedrigen Gruppe angehört; wir werden daher zunächst den Ort der Hauptaxen aller Complexe dieser Gruppe bestimmen. Die Coordinaten P_{ik} eines solchen können wir, wenn p'_{ik}, p''_{ik} die der Directricen der betreffenden Congruenz sind, in der Form darstellen:

$$\varrho P_{ik} = p'_{ik} + \lambda p''_{ik}. \tag{12}$$

Sind ferner p_{ik} und π_{ik} die Coordinaten der Hauptaxen des Complexes P, so ist auch

$$\varrho P_{ik} = p_{ik} + \mu \pi_{ik}, \tag{13}$$

wo zwischen den p_{ik} und π_{ik} wieder obige Gleichungen bestehen; aus diesen beiden Gleichungen haben wir ϱ, μ und λ zu eliminiren, zu welchem Zwecke wir das Coordinatensystem passend wählen. Es gilt nämlich der Satz:

*In jeder Congruenz einer zweigliedrigen Gruppe von linearen Complexen giebt es zwei bestimmte einander absolut conjugirte Gerade, „das Axenpaar der Congruenz", welche von den Hauptaxen sämmtlicher Complexe der Gruppe getroffen werden**).

Die vier Linien der Hauptaxenpaare von irgend zwei Complexen der Gruppe bestimmen nämlich zwei gemeinsame Transversalen, welche einander absolut conjugirt sind, da sie je zwei in dieser Beziehung stehende Gerade schneiden, und welche der Congruenz angehören, da eine jede zwei in Bezug auf den einen und zwei in Bezug auf den andern Complex conjugirte Gerade trifft. Als Linien der Congruenz werden sie aber auch von den Directricen derselben geschnitten, und als einander absolut conjugirte Gerade von den absoluten Polaren der letzteren. Da diese beiden Linien also nur von den Directricen der Congruenz abhängen, so ist unser Satz bewiesen, und *das Axenpaar einer linearen Congruenz besteht aus den gemeinschaftlichen Transversalen der Directricen und der absoluten Polaren derselben.* Sei nun dies Axenpaar gegeben durch die Kanten

$$x_1 = 0,\ x_4 = 0 \text{ und } x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

des Coordinatentetraeders, dessen übrige Kanten auf der Fundamentalfläche liegen mögen, so ist für alle Complexe der Gruppe:

---

*) Vgl. für spec. Massbest. Plücker: Neue Geometrie etc. n. 54 und 58.

$$P_{14} = 0, \qquad P_{23} = 0,$$

und für alle ihre Hauptaxen:

$$(14) \qquad p_{14} = 0, \qquad p_{23} = 0.$$

Ist ferner wieder

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0$$

die Gleichung der Fundamentalfläche, so bestehen zwischen den Coordinaten zweier absoluter Polaren die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \varrho p_{14} = \pi_{23} & \varrho p_{13} = \pi_{13} & \varrho p_{34} = -\pi_{34} \\ \varrho p_{23} = \pi_{14} & \varrho p_{42} = \pi_{42} & \varrho p_{12} = -\pi_{12}, \end{array}$$

und unter Berücksichtigung dieser Relationen ergiebt die Elimination von ϱ, μ, λ aus (12) und (13) die Bedingung:

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} p_{12} & 0 & p_{12}' & p_{12}'' \\ 0 & p_{13} & p_{13}' & p_{13}'' \\ 0 & p_{42} & p_{42}' & p_{42}'' \\ p_{34} & 0 & p_{34}' & p_{34}'' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Hauptaxen gehören also noch einem Complexe zweiten Grades an; dieser ist sich selbst absolut conjugirt, was darin seinen Grund hat, dass jedes Hauptaxenpaar aus zwei absoluten Polaren besteht, und die beiden Linien des Axenpaares sind Doppellinien*) desselben. Da die Hauptaxen gleichzeitig der durch (14) bestimmten Congruenz angehören, *so müssen sie eine windschiefe Fläche 4. Ordnung bilden;* ihre Gleichung ergiebt sich, wenn wir in (15)

$$\sigma p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k$$

setzen, wo dann wegen (14) x_1, x_4 zu y_1, y_4 und x_2, x_3 zu y_2, y_3 proportional sind. Die Gleichung wird somit:

$$\begin{vmatrix} x_1 x_2 & 0 & p_{12}' & p_{12}'' \\ 0 & x_1 x_3 & p_{13}' & p_{13}'' \\ 0 & x_2 x_4 & p_{42}' & p_{12}'' \\ -x_3 x_4 & 0 & p_{34}' & p_{34}'' \end{vmatrix} = 0,$$

sie stellt in der That eine geradlinige Fläche 4. Ordnung mit 2 Doppelgeraden**) dar; die letzteren bilden gleichzeitig das Axenpaar der

*) Vgl. Plücker: Neue Geometrie n. 300 und 313; und A. Weiler: Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades, Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, 1873.

**) Gattung XI nach der Eintheilung von Cremona: Sulle superficie gobbe di quarto grado, Memorie dell' Accad. di Bologna, t. VIII, serie 2. — Für spec. Massbestimmung zerfällt diese Fläche in die unendlich ferne Ebene und in eine windschiefe Fläche 3. Ordnung; vgl. Plücker: Neue Geometrie, n. 86. Herr

Congruenz; und die Fläche wird umhüllt von den absoluten Polarebenen ihrer Punkte. Durch diese Reciprocität entspricht jeder auf ihr liegenden Linie eine zweite; beide fallen insbesondere zusammen für die vier Erzeugenden, welche sie mit der Fundamentalfläche gemein hat; *es giebt daher in einer zweigliedrigen Gruppe von linearen Complexen vier, welchen Bewegungen, bez. Kraftsysteme von der Art* [1, 2] *entsprechen* (vgl. §. 10.).

Wollte man bei specieller Massbestimmung entsprechende Sätze aufstellen, so müsste man den Ausdruck

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

für die Intensität eines Kraftsystems zu Grunde legen. Das Verschiebungsmoment in Bezug auf einen Complex mit den Coordinaten $\mathsf{\Xi}, \mathsf{H}, \mathsf{Z}, \mathsf{\Lambda}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ würde alsdann

$$= \frac{X\mathsf{\Xi} + Y\mathsf{H} + Z\mathsf{Z}}{\sqrt{\mathsf{\Xi}^2 + \mathsf{H}^2 + \mathsf{Z}^2}},$$

also dasselbe für alle Complexe mit derselben Hauptaxe und gleich der Projection von R auf diese Axe. Das Drehmoment in Bezug auf den Complex würde

$$= \frac{1}{2} \frac{X\mathsf{\Lambda} + Y\mathsf{M} + Z\mathsf{N} + L\mathsf{\Xi} + M\mathsf{H} + N\mathsf{Z}}{\sqrt{\mathsf{\Xi}^2 + \mathsf{H}^2 + \mathsf{Z}^2}}$$
$$= \frac{1}{2} R \left\{ \Delta \sin \varphi + (K + K') \cos \varphi \right\} {}^{*)},$$

d. h. gleich dem Drehmomente von R um die Hauptaxe des Complexes vermehrt um das Product der Projection von R auf dieselbe in die Summe der Parameter beider Complexe.

§ 14.

Bedingungen des Gleichgewichtes. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Aus der Definition des Momentes erhellt unmittelbar, dass, wenn Gleichgewicht Statt finden soll, sowohl das Drehmoment des Kraftsystems in Bezug auf jede beliebige Axe, als auch das Verschiebungsmoment desselben in Bezug auf jeden beliebigen Strahl verschwinden muss, und dass diese Bedingungen gleichzeitig nothwendig und hinreichend sind. Sie werden aber dargestellt (wegen (3) und (4) in

---

Ball benutzt die letztere zur Construction der Axe einer aus zwei gegebenen resultirenden Schraubenbewegung: The theorie of screws, Transactions of the R. Irish Acad., vol. XXV, 1872, p. 157. Es findet sich hier auch die Abbildung eines Modells der Fläche, welche er mit dem Namen *Cylindroid* belegt.

*) Es ist hier Δ die kürzeste Entfernung der beiden Axen, φ ihre gegenseitige Neigung; K und K' bedeuten die Parameter beider Complexe (vgl. § 1.).

§ 12.) durch die für specielle Massbestimmung bekannten 6 Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} P_{12}=0 & P_{13}=0 & P_{14}=0 \\ P_{34}=0 & P_{42}=0 & P_{23}=0\,, \end{cases}$$

oder, was dasselbe ist, durch die Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} Q_{12}=0 & Q_{13}=0 & Q_{14}=0 \\ Q_{34}=0 & Q_{42}=0 & Q_{23}=0\,. \end{cases}$$

Zu einem allgemeineren Ausdrucke dieser Gleichgewichtsbedingungen, dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten, gelangen wir durch Betrachtung der *Elementararbeit*, welche eine Kraft bei einer unendlich kleinen Bewegung leistet, d. h. des Productes einer Translationskraft in das Verschiebungsmoment der Bewegung nach ihrer Directrix, resp. einer Rotationskraft in das Drehmoment der Bewegung um ihre Axe. Sind nämlich P_{ik} die Coordinaten einer einzelnen Translationskraft P, Π_{ik} die einer unendlich kleinen Verschiebung ihres Angriffspunktes x, so ist das Verschiebungsmoment der Bewegung Π nach der Directrix der Kraft P:

$$V(P,\Pi)=\Pi\cdot\cos(P,\Pi)\,,$$

und also die bei der Verschiebung von der Kraft geleistete Arbeit:

$$A=P\cdot\Pi\cdot\cos(P,\Pi)\,.$$

Wirken mehrere Kräfte $P', P'', \cdots,$ gleichzeitig an einem festen Körper, und sind $\Pi', \Pi'' \cdots$ bez. die Verschiebungen ihrer Agriffspunkte, so muss die Summe aller von den Kräften bei den bezüglichen Bewegungen geleisteten Arbeiten rerschwinden, wenn das System von Kräften im Gleichgewichte sein soll, und zwar muss dies der Fall sein, wie auch die Verschiebungen Π gewählt sein mögen; d. h. *die Bedingungen des Gleichgewichtes* (1) *lassen sich in die eine Gleichung*

$$(3)\qquad \Sigma\Pi\cdot P\cdot\cos(\Pi,P)=0$$

zusammenfassen, wenn man unter den Π *virtuelle Verschiebungen versteht*, und diese Gleichung stellt dann das *Princip der virtuellen Geschwindigkeiten* (zunächst nur für frei bewegliche, starre Körper) dar. Die Ueberlegungen, welche eine solche Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen als berechtigt erscheinen lassen, sind unabhängig von der Natur unserer thatsächlich gegebenen Massgeometrie und brauchen daher hier nicht wiederholt zu werden, es kommt mir hier vielmehr nur darauf an, unter Annahme des Princips die verschiedenen analytischen Formen aufzustellen, in denen es bei unserer allgemeinen Massbestimmung auftritt.

Unsere Gleichung (3) stimmt aber auch mit der gebräuchlichen

$$\Sigma P dp=0$$

vollkommen überein, denn es wird für diese eben $V(P, \Pi) = dp$, gleich der Projection der Bewegung auf die Richtung der Kraft. — Ganz ähnliche Erörterungen gelten für Rotationskräfte, und wir können das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nun in den folgenden beiden äquivalenten Formen aussprechen:

Zum Gleichgewichte von Translationskräften an einem unveränderlichen, frei beweglichen Punktsysteme ist nöthig und hinreichend, dass für jeden virtuellen Bewegungszustand die Summe der Kräfte, jede multiplicirt mit dem Verschiebungsmomente der Verschiebung ihres Angriffspunktes nach der Directrix der Kraft, verschwinde.

Zum Gleichgewichte von Rotationskräften an einem unveränderlichen, frei beweglichen Ebenensysteme ist nöthig und hinreichend, dass für jeden virtuellen Bewegungszustand die Summe der Kräfte, jede multiplicirt in das Drehmoment der Drehung ihrer Angriffsebene in Bezug auf die Axe der Kraft, verschwinde.

Die von einem Kraftsysteme bei einer unendlich kleinen Bewegung geleistete Arbeit können wir noch in einer anderen Form schreiben, welche uns die Analogie zwischen Kräften und unendlich kleinen Translationen oder Rotationen als eine *dualistische* erkennen lassen wird. Zu dem Zwecke gehen wir zunächst von rechtwinkligen Coordinaten aus, d. h. wir wählen ein Polartetraëder in Bezug auf die Fundamentalfläche zum Coordinatentetraëder. Die Gleichung dieser Fläche sei also durch

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 0$$

gegeben; dann ist sie in Liniencoordinaten dargestellt durch:

$$\Sigma \alpha_\iota \alpha_k p_{\iota k}^2 = 0 .$$

Sind nun P_{ik} resp. Q_{ik} die Coordinaten eines Kraftsystems, P'_{ik} resp. Q'_{ik} die einer unendlich kleinen Bewegung, wo sich die P, P' auf den zugehörigen Translations-, die Q, Q' auf den zugehörigen Rotationscomplex beziehen, so ist nach (7) § 13. das Drehmoment des Kraftsystems in Bezug auf die Kante $x_1 = 0$, $x_4 = 0$.

$$= \frac{P_{14}}{4\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}}$$

und das der unendlich kleinen Bewegung in Bezug auf dieselbe Kante:

$$= \frac{P_{14}'}{4\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}} .$$

Also wird die von der um diese Geraden wirkenden Componente des Systems geleistete Arbeit

$$= \frac{P_{14} P_{14}'}{16\, \alpha_2 \alpha_3} ;$$

ebenso drücken sich die von den andern Componenten geleisteten Arbeiten aus, und es wird daher die Gesammtarbeit*)

$$A = \frac{1}{16\Delta} \Sigma \alpha_i \alpha_k P_{ik} P'_{ik} = \frac{\Phi_{PP'}}{16\Delta}$$

und dies ist ein invarianter Ausdruck. Gehen wir nunmehr wieder zu einem allgemeinen Coordinatentetraëder zurück, so wird daher auch hier

(4) $$A = \frac{\Phi_{PP'}}{16\Delta} = \frac{1}{32\Delta} \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial P_{ik}} P'_{ik}.$$

Nach § 1. und § 4. ist aber

$$\Phi_{PP'} = \sqrt{\Delta}\, \Sigma P_{ik} Q'_{ik} = \sqrt{\Delta}\, \Sigma P'_{ik} Q_{ik};$$

und daher können wir *die von dem Kraftsysteme P bei der unendlich kleinen Bewegung P' geleistete Arbeit* auch in folgenden beiden Formen schreiben:

(5) $$A = \frac{1}{16\sqrt{\Delta}} \cdot \Sigma Q_{ik} P'_{ik},$$

(6) $$A = \frac{1}{16\sqrt{\Delta}} \cdot \Sigma P_{ik} Q'_{ik},$$

und endlich erhalten wir, wegen

$$\Phi_{PP'} = \Phi_{QQ'}$$

noch eine vierte Form für dieselbe, nämlich

(7) $$A = \frac{\Phi_{QQ'}}{16\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{32\sqrt{\Delta}} \frac{\partial \Phi_{QQ}}{\partial Q_{ik}} Q'_{ik},$$

wo Φ_{QQ} aus Φ_{PP} entsteht, indem man $Q_{\alpha\beta}$ statt $P_{\gamma\delta}$ setzt. Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den in § 13. aufgestellten ergiebt dann:

*Die bei einer unendlich kleinen Bewegung von einem Kraftsysteme geleistete Arbeit ist gleich der Intensität der Bewegung multiplicirt in das Verschiebungsmoment des Systems in Bezug auf den der Bewegung zugeordneten Translationscomplex, oder in das Drehmoment des Systems in Bezug auf den der Bewegung zugeordneten Rotationscomplex***); ein Satz, den man auch in anderer Form aussprechen kann, wenn man die Worte: Kraftsystem und unendlich kleine Bewegung vertauscht.

---

*) Da nämlich eine jede Kante normal zu den übrigen ist, so verschwindet die von der um sie wirkenden Kraftcomponente bei den Drehmomenten der Bewegung um die anderen Kanten geleistete Arbeit; deshalb wurden auch rechtwinklige Coordinaten gewählt.

**) Dies Letztere würde auch noch für spec. Massbest. gelten, wenn man den am Schlusse von § 13. aufgestellten Ausdruck als Drehmoment des Systems betrachtet und die Intensität der Bewegung

$$= \sqrt{\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2}$$

setzt.

Ist nun das Kraftsystem im Gleichgewichte, so muss die Grösse A verschwinden, sobald die Bewegung als virtuelle gedacht wird, und *wir erhalten alsdann in den Gleichungen* (4), (5), (6), (7) *vier verschiedene, gleich berechtigte Ausdrücke für das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten*, aus denen sofort wieder die Gleichungen (1) und (2) folgen. Von besonderem Interesse sind hier jedoch die Gleichungen (5) und (6), sie sagen nämlich durch ihr Verschwinden aus:

Für eine gegebene unendlich kleine Bewegung giebt es vierfach unendlich viele Kraftsysteme, welche bei Eintritt derselben keine Arbeit leisten). Den letzteren sind dann diejenigen vierfach unendlich vielen linearen Complexe als Translationscomplexe zugeordnet, welche mit dem Rotationscomplexe der gegebenen Bewegung in Involution liegen**), und als Rotationscomplexe diejenigen vierfach unendlich vielen linearen Complexe, welche mit dem Translationscomplexe der Bewegung in Involution liegen.*

Durch diese Verhältnisse ist nun *die Analogie zwischen unendlich kleinen Bewegungen und Kraftsystemen als eine dualistische* gekennzeichnet; wir können diese Dualität folgendermassen aussprechen:

Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten eines Kraftsystems ist eine unendlich kleine Bewegung dargestellt, und zwar stehen sich dabei die Rotations- und Translationscoordinaten beider kreuzweise gegenüber. (Bei specieller Massbestimmung existiren, wenn man von Kräftepaaren und Translationen absieht, nur noch die Translations-Coordinaten der Kräfte und die Rotations-Coordinaten der Bewegung.) Aehnliche Bemerkungen gelten natürlich auch, wenn man umgekehrt ein Kraftsystem als gegeben annimmt und die vierfach unendlich vielen unendlich kleinen Bewegungen betrachtet, bei deren Eintritt das Kraftsystem keine Arbeit leistet***).

Ist das betrachtete Punkt- resp. Ebenen-System nicht frei, so treten gewisse Bedingungsgleichungen hinzu, und man wird das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ebenso, wie in der gewöhnlichen Mechanik, auch auf diese Fälle ausdehnen; es wird aber dafür ebensowenig ein strenger Beweis erbracht werden können†). Ist das gegebene Punkt- oder Ebenen-System nicht unveränderlich, so hat man noch die negative virtuelle Arbeit der innern Kräfte der der äussern hinzu-

*) Diejenigen als identisch betrachtet, deren Coordinaten sich nur hinsichtlich ihrer absoluten Werthe unterscheiden.

**) Soweit gilt der Satz auch für spec. Massbest. und wurde für diese von Herrn Klein gegeben: Math. Annalen, Bd. IV, p. 413.

***) Es würde sich so für spec. Massbest. ein *Princip der virtuellen Rotationen* ergeben, wie es Chasles aufgestellt hat: Aperçu historique, note 34.

†) Vgl. Jakobi: Vorlesungen über Dynamik, p. 15.

zufügen; es würde jedoch über den Zweck der vorliegenden Arbeit hinausgehen, wenn wir diese Verhältnisse hier im Einzelnen näher besprechen wollten.

Es möge nur noch angedeutet werden, wie die Untersuchungen von **Möbius***) über die gegenseitige Lage von Linien, wenn sich Kräfte sollen angeben lassen, die, nach ihnen wirkend, im Gleichgewichte sind, sich durch unsere liniengeometrische Betrachtungsweise auf das Einfachste erledigen. Es seien z. B. drei Kraftsysteme mit den Coordinaten P'_{ik}, P''_{ik}, P'''_{ik} gegeben; man soll ein viertes (P_{ik}) bestimmen, das mit ihnen im Gleichgewichte ist; d. h. es sollen die 6 Gleichungen bestehen:

$$P'_{ik} + P''_{ik} + P'''_{ik} + P_{ik} = 0\,.$$

Denken wir uns die P_{ik} als Coordinaten des zugehörigen Translationscomplexes; alsdann können wir immer einen Complex mit den Coordinaten Π_{ik} bestimmen, so dass

$$(P', \Pi) = 0, \quad (P'', \Pi) = 0, \quad (P''', \Pi) = 0;$$

dann ist aber auch wegen der gestellten Bedingungsgleichungen

$$(P, \Pi) = 0;$$

also: Soll ein Kraftsystem mit drei anderen im Gleichgewichte sein, so muss jeder lineare Complex, welcher mit den für diese 3 Systeme charakteristischen Complexen in Involution liegt, auch mit dem zum vierten Systeme gehörigen in Involution liegen, oder, was dasselbe ist, *die vier linearen Complexe müssen die eine Schaar von Erzeugenden einer Fläche 2. Ordnung mit einander gemein haben.* Sind 3 einzelne Kräfte gegeben, so erhalten wir daraus den Satz:

Halten sich vier Kräfte das Gleichgewicht, so gehören ihre Directricen derselben Schaar von Erzeugenden einer Fläche 2. Ordnung an.

Analog ergeben sich die folgenden Sätze**):

Sollen 5 Kraftsysteme im Gleichgewichte sein, so müssen die zugehörigen linearen Complexe dieselben zwei Geraden gemein haben.

Sollen 6 Kraftsysteme im Gleichgewichte sein, so müssen die zugehörigen linearen Complexe mit demselben siebenten Complexe in Involution liegen.

Sind die Kraftsysteme durch einzelne Kräfte ersetzbar, so haben wir:

Halten sich 5 Kräfte das Gleichgewicht, so werden ihre Directricen von denselben 2 Geraden geschnitten.

---

*) **Möbius**: Lehrbuch der Statik, Th. I, p. 181 ff.

) Ganz analoge Sätze gelten natürlich, wenn man von den Rotationscomplexen ausgeht; sowie auch für unendlich kleine Bewegungen, die sich gegenseitig aufheben. Vgl. für spec. Massbest.: **Ball, the theory of screws, Transactions of the R. Irish academy, vol. XXV, 1872, p. 183.

*Halten sich 6 Kräfte das Gleichgewicht, so gehören ihre Directricen demselben linearen Complexe an**).

Sind dagegen 6 Kraftsysteme gegeben, so lässt sich stets ein siebentes finden, das mit ihnen im Gleichgewichte ist, vorausgesetzt, dass keines der 6 Systeme aus einigen unter ihnen resultirt, ein Satz, der einem oben über unendlich kleine Bewegungen gegebenen entspricht (vgl. § 4.)**).

Erlangen, im Juli 1873.

---

*) Vgl. für spec. Massbest. Sylvester: Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considerées comme des axes de rotation. Comptes rend. t. 52, 1861, p. 741; Cayley: Note relative aux droites en involution de M Sylvester, ib. p. 1039 und Chasles: Sur les six droites, qui peuvent être les directions de six forces en équilibre, ib. p. 1094.

**) Dieser Satz wurde oben durch eine allgemeinere Coordinatenbestimmung gewonnen, welche wir nunmehr so aussprechen können, dass statt der Momente der Bewegung resp. des Kraftsystems in Bezug auf die Kanten eines Tetraeders die in Bezug auf sechs lineare Complexe als Coordinaten angenommen werden. Eine solche Coordinatenbestimmung würde im Wesentlichen mit derjenigen übereinstimmen, welche Herr Ball einer brieflichen Mittheilung zufolge benutzt.

Nachschrift.

Erst nach Vollendung dieses Aufsatzes wurde ich mit den gleichzeitigen Arbeiten des Herrn Ball bekannt, welche, an die Voraussetzungen der speciellen Massbestimmung anknüpfend, sich auf ähnliche Verallgemeinerungen statischer Sätze beziehen, wie ich sie in § 13. und 14. angedeutet habe. Ich konnte daher nur noch einzelne auf sie bezügliche Bemerkungen hinzufügen. Diese Verallgemeinerungen beruhen im Wesentlichen darauf, dass man statt der geraden Linie den linearen Complex als Raumelement zu Grunde legt, sei es, dass man mit ihm zunächst die geometrische Vorstellung eines Liniengebildes, oder direct die mechanische einer unendlich kleinen Bewegung, resp. eines Kraftsystems verbindet. Vgl. eine Mittheilung des Herrn Ball in den Proceedings of the R. Society, No. 145, 1873. Ausführlicher soll dieselbe demnächst in den Phil. Transactions der R. Society erscheinen.

Erlangen, im November 1873.