SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1874
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0007
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0011
LOG Titel: Periodical issue
LOG Typ: issue

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Giessen, Prof. F. KLEIN zu Erlangen,
Prof. A. MAYER zu Leipzig, Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Carl Neumann,
Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

VII. Band. 2. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1874.

Soeben ist in meinem Verlage erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Vorlesungen

über

analytische Mechanik

mit Einschluss

der Hydrodynamik und der Theorie der Elastizität fester Körper

von

Dr. Gustav Kirchhoff,

Professor an der Universität zu Heidelberg.

1. Lieferung. gr. 8. geh. Preis 4 Mark.

Leipzig im Februar 1874.

B. G. Teubner.

Im Verlage von **Georg Reimer** in Berlin ist soeben erschienen und durch jede Buchhandlung zu beziehen:

Die

Fortschritte der Physik

im Jahre 1869.

Dargestellt

von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

XXV. Jahrgang. II. Abtheilung.

Redigirt von Dr. R. Schwalbe.

Preis: 3 Thlr. 15 Sgr.

Vor einiger Zeit ist erschienen:

Tageblatt der 46. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Wiesbaden

Nr. 8 (Schlussband).

Dieser Schlussband wird an die **Mitglieder und Theilnehmer der Versammlung gratis abgegeben** und wollen sich die Interessenten wegen der Zusendung an die unterzeichnete Buchhandlung wenden. Der Ladenpreis des **vollständigen** Tageblattes, das durch alle Buchhandlungen bezogen werden kann, beträgt Thlr. 2. 20 Sgr.

Buchhandlung von **Feller & Gecks** in **Wiesbaden.**

INHALT.

Seite

Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Von Adolf Weiler in Stäfa bei Zürich. 145

Ueber die Plücker'sche Complexfläche. Von Felix Klein in Erlangen. 208

Untersuchung über den Zusammenhang der Flächen im Sinne Riemann's. Von F. Lippich in Prag. 212

Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne. Par J. P. Gram à Copenhague. 230

Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen. Von Paul du Bois-Reymond in Freiburg i. Br. 241

Ueber die allgemeine Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche. Von Siegmund Günther in Erlangen. 262

Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Von A. Brill und M. Nöther. 268

Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben. Von W. Göring in Rudolstadt. 311

Verantwortliche Redaction: **C. Neumann.**

Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades.

Von Adolf Weiler in Stäfa bei Zürich.

Bei einem Complex sind die zugehörige Singularitätenfläche und die Congruenz seiner singulären Linien von ganz besonderem Interesse. Bekanntlich sind für die Complexe zweiten Grades beide von der vierten Ordnung und vierten Classe.

Der allgemeinste Complex zweiten Grades, sowie eine Reihe von Ausartungen desselben, sind bereits eingehend untersucht. Ein bekanntes Beispiel ist der Tetraëdral-Complex, dessen Gerade ein Tetraeder unter einem bestimmten Doppelverhältniss schneiden. Als Punktgebilde besteht seine Singularitätenfläche aus den vier Tetraëderebenen, als Ebenengebilde aus den vier Tetraëderecken. Die Congruenz der singulären Linien hat sich aufgelöst in eine Congruenz vierter Ordnung, nullter Classe und in eine nullter Ordnung, vierter Classe. Erstere umfasst alle durch die Tetraëderecken gehenden Geraden; letztere besteht aus allen Geraden in den Tetraëderebenen.

Eine Reihe anderweitiger Complexe zweiten Grades betrachtet Lie gelegentlich seiner Untersuchung über die Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum (diese Annalen Bd. V. S. 233); es sind alle diejenigen, welche in einer bestimmten Gleichungsform mit 17 Constanten enthalten sind; ihre Singularitätenflächen sind Linienflächen.

Bis jetzt indess sind diese specielleren Complexe noch nicht *systematisch* untersucht worden, wie diess im Folgenden geschehen soll. Indem ich von der Discussion der allgemeinsten Gleichung ausgehe, bei der im Ganzen 58 verschiedene Fälle zu unterscheiden sind, erhalte ich eine allmähliche und doch übersichtliche Abstufung.

Die meisten Flächen, die als Singularitätenflächen auftreten, sind allgemein bekannt. In vielen Fällen ist aber ihr Verhalten als Ordnungsfläche, Classenfläche und Brennfläche der singulären Linien sehr interessant.

Die Grundlagen und Hülfsmittel der Arbeit finden sich im ersten Theil eingehend auseinandergesetzt. Ich wende mich sodann (II—XII)

zur näheren Betrachtung der einzelnen Fälle in der Reihenfolge, wie sie sich aus dem im ersten Theile entwickelten algebraischen Eintheilungsprincipe ergeben. Sodann gebe ich noch im letzten Theile (XIII.) neben einigen allgemeinen Sätzen tabellarische Zusammenstellungen der Complexe nach verschiedenen Gesichtspunkten. Die eine, welche nach den auftretenden Singularitätenflächen ordnet, ist besonders eingehend ausgeführt.

I.

Grundlage der Arbeit, insbesondere die Eintheilung der Complexe.

Allgemeine Uebersicht.

In der Plücker-Cayley'schen Coordinatenbestimmung der Raumgerade wird diese als die Verbindungslinie zweier ihrer Punkte, resp. als die Schnittlinie zweier durch sie gehender Ebenen aufgefasst. Wenn in homogenen Coordinaten $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ und $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ zwei Punkte darstellen, so werden der durch sie bestimmten Geraden die folgenden sechs (homogenen) Coordinaten ertheilt:

$$p_{12} = y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad p_{13} = y_1 z_3 - y_3 z_1, \quad p_{14} = y_1 z_4 - y_4 z_1,$$
$$p_{34} = y_3 z_4 - y_4 z_3, \quad p_{42} = y_4 z_2 - y_2 z_4, \quad p_{23} = y_2 z_3 - y_3 z_2.$$

Der folgende Ausdruck:

$$P \equiv p_{12} \cdot p_{34} + p_{13} \cdot p_{42} + p_{14} \cdot p_{23}$$

ist identisch Null, wenn für die p die oben stehenden Werthe eingeführt werden.

Diese Coordinatenbestimmung bietet oft grosse Vortheile, doch tritt in ihr nicht hervor, dass die Gerade als Raumelement angesehen wird. Das letztere erreichen wir sofort, wenn wir von den Gleichungen ganz absehen, welche die p mit den Punktcoordinaten verbinden. In diesem Falle ertheilen wir der Geraden sechs solche Grössen p, welche die Gleichung $P = 0$ erfüllen, als Coordinaten. — Das Gebiet der Grössen p ist ein fünffach unendliches, die Bedingungsgleichung $P = 0$ sondert aus demselben eine (quadratische) vierfach unendliche Mannigfaltigkeit aus, die geometrisch durch die Gesammtheit der Raumgeraden dargestellt ist.

Ein Complex wird dann bestimmt durch eine weitere (zu $P = 0$ hinzutretende) Gleichung in den p:

$$\Omega = 0.$$

Er besteht aus dreifach unendlich vielen Geraden.

Ist nun Ω in den p insbesondere vom zweiten Grad, so nennen wir den dadurch definirten Complex ebenfalls vom zweiten Grad. Da dieser der Gegenstand unserer Untersuchung ist, so haben wir zunächst von zwei simultanen homogenen und quadratischen Gleichungen $P = 0$,

$\Omega = 0$ zwischen sechs Variabeln auszugehen. Da wir uns durchaus auf projectivischem Standpunkt befinden, so dürfen wir die Coordinaten p beliebig so linear transformiren, dass die Form P in ein Multiplum ihrer selbst übergeht. Denn in seiner Inauguraldissertation*), fernerhin auch im zweiten Band dieser Annalen (S. 203 u. f.) hat Klein gezeigt, dass eine solche Transformation einer Collineation resp. einer dualistischen Umformung des Raumes entspricht (und umgekehrt). Wird diese Transformation auf alle möglichen Formen P, Ω angewandt gedacht, so ergiebt sich eine natürliche Eintheilung der Complexe. Wir werden weiter unten hierauf zurückkommen und merken uns einstweilen nur, dass Klein die Discussion der in der allgemeinen Gleichung $\Omega = 0$ enthaltenen Complexe auf ein algebraisches Problem zurückgeführt hat: *Es sollen zwei Formen zweiten Grades, homogen in sechs Variabeln, gleichzeitig auf eine kanonische Form gebracht werden.* Dieses Problem ist für den allgemeinsten Fall schon sehr frühe gelöst, zuerst wohl von Jacobi (im 2. Band von Crelle's Journal). Durch lineare Transformation bringt derselbe beide Formen auf *rein* quadratische; die Möglichkeit dessen setzt aber eben den allgemeinsten Fall voraus.

Sylvester**) geht von zwei *beliebigen* quadratischen Formen aus und betrachtet mit ihnen die Lagenbeziehungen der damit zusammenhängenden Orte zweiten Grades. Eine Determinantenbetrachtung führt ihn zu einer erschöpfenden Eintheilung, bei beliebiger Zahl von Variabeln. In dem allgemeinsten Fall hat man die von Jacobi entwickelte kanonische Form; in den speciellen Fällen gewinnt er sie dadurch geometrisch, dass er das Coordinatensystem passend wählt; für das binäre, ternäre und quaternäre Gebiet giebt er alle an. Für mehr Dimensionen giebt er nur noch die Anzahl der möglichen Fälle; dieselbe ist indess nur noch bei fünf Dimensionen richtig, bei mehr Dimensionen ist sie zu klein***). — Die Ableitung der kanonischen Formen in diesen Fällen wäre wohl nach seiner Methode nicht einfach.

Weierstrass†) löst das Problem in voller Allgemeinheit. Er geht von zwei bilinearen Formen mit n Variabeln aus und giebt für alle Fälle die kanonische Form. Die Gesetze wendet er dann auf die quadratischen Formen an. Er führt die Determinantenbetrachtungen von Sylvester weiter durch.

---

*) „*Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine kanonische Form.*“ Bonn, 1868.

**) Phil. magazine 1851 pag. 119, 295, 415

***) Vrgl. a. a. O. pag. 139. Auch Lüroth hat in einer Arbeit, die wir noch weiter nennen werden (S. 153), einen Fall nicht aufgezählt.

†) Berliner Monatsberichte 1858, 1868.

Klein erörtert in seiner Inauguraldissertation, unter Zusammenfassung der Hauptresultate, insbesondere den Fall von sechs homogenen Variabeln und verwerthet ihn für die Eintheilung der Complexe zweiten Grades. Er betrachtet sodann ausführlicher den allgemeinsten Fall.

Bevor wir näher auf diese Eintheilung eingehen, sei noch Etwas erwähnt, was den geometrischen Vorgang der Transformation anbetrifft. — Unser altes Coordinatensystem, in der Coordinatenbestimmung der p, besteht aus den sechs speciellen Complexen $p = 0$, deren Directricen die Kanten eines „Fundamental-Tetraeders" bilden. Da eine lineare Verbindung von speciellen linearen Complexen aber in der Regel einen allgemeinen linearen erzeugt, so wird nach der Coordinatentransformation das Coordinatensystem aus sechs linearen Complexen bestehen, die nicht ausschliesslich specielle sein werden. Diese sechs Complexe, welche das Coordinatensystem bilden, wollen wir mit Klein die *„Fundamentalcomplexe"* nennen*).

Ueber die Transformation und die Eintheilung.

Werden die neuen Variabeln mit $x_1, x_2, \cdots x_6$ bezeichnet, so seien die Formen P und Ω in die folgenden übergegangen:

$$P_1 = \Sigma a_{ik} x_i x_k, \qquad \Omega_1 = \Sigma b_{ik} x_i x_k,$$

(wo $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$ sein möge). Die Determinante von $\Omega_1 + \lambda P_1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} + \lambda a_{11} & \cdots & b_{16} + \lambda a_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{61} + \lambda a_{61} & \cdots & b_{66} + \lambda a_{66} \end{vmatrix}$$

ist es nun, auf die es ankommt; sie ist eine Invariante des betreffenden Complexes. Δ ist eine ganze rationale Function sechsten Grades in λ, also identisch mit:

$$A \cdot (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} \cdots$$

wo A die Determinante von P, λ_i aber eine $\nu_i$fache Wurzel von λ in $\Delta = 0$ bedeutet, so dass $\Sigma \nu_i = 6$ ist.

Es ist nothwendig, auch die Unterdeterminanten von Δ zu betrachten. Mit Δ' wollen wir irgend eine erste (fünfreihige) Unterdeterminante, mit Δ'' eine zweite (vierreihige) etc. bezeichnen. Diese $\Delta', \Delta'' \cdots$ sind zwar keine Invarianten, dagegen ist das simultane Verschwinden aller Δ', aller Δ'' etc., etwas Invariantes.

Der Factor $\lambda - \lambda_i$ von Δ soll nun in allen Δ' ν_i'mal, in allen Δ'' ν_i''mal etc. enthalten sein. Für diese Grössen gilt das Gesetz:

---

*) Vgl.: Diese Annalen, Bd. II. a. a. O.

$$\nu_i > \nu_i' > \nu_i'' > \cdots$$

Die Differenzen dieser Grössen:

$$e_i = \nu_i - \nu_i', \quad e_i' = \nu_i' - \nu_i'', \quad e_i'' = \nu_i'' - \nu_i''', \ \cdots$$

sind für uns von ganz besonderer Wichtigkeit. Für dieselben gilt, wie Weierstrass zeigt, zunächst das Folgende:

$$e_i \geqq e_i' \geqq e_i'' \geqq \cdots;$$

sie sind in dieser Reihenfolge der Grösse nach geordnet. Insbesondere ist:

$$(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} = (\lambda - \lambda_i)^{e_i} \cdot (\lambda - \lambda_i)^{e_i'} \cdots$$

In der ganzen Determinante ist nun $\lambda - \lambda_i$ $\nu_i$mal enthalten, in den Δ' noch ν_i'mal etc. Beim Uebergang von Δ zu den Δ' geht von $(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}$ der Factor $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ verloren. Es ist das ein Factor, der in gewissem Sinne an der Determinante Δ haftet. Geht man weiterhin von den Δ' zu den Δ'', so löst sich der Factor $(\lambda - \lambda_i)^{e'}$ als etwas nur an den Δ' haftendes ab, etc. — Dieses ist eine natürliche Zerlegung des $(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}$ in Factoren, und diese Factoren nennt man nach Weierstrass *„Elementartheiler"*.

Die Bedeutung der Elementartheiler wird durch das Folgende klar gestellt: Sind zwei Formenpaare P_1, Ω_1 und P_2, Ω_2, das eine durch lineare Transformation aus dem andern abgeleitet —, oder, soll das eine linear in das andre transformirbar sein, so müssen in beiden Paaren die Elementartheiler übereinstimmen. In unserer projectivischen Auffassung stellen die Formenpaare P_1, Ω_1 und P_2, Ω_2 demnach denselben Complex vor (diese Formen gleich Null gesetzt gedacht), wenn in den Determinanten beider die Vertheilung der Wurzeln und Elementartheiler dieselbe ist, und die absoluten Invarianten, das heisst also die Verhältnisse der Wurzeln, übereinstimmen. — Oder, mit andern Worten: Wir erhalten eine erschöpfende Aufzählung aller Complexe zweiten Grades, wenn wir in der Determinante Δ die Vertheilung der Wurzeln, und weiterhin die der Elementartheiler, auf alle möglichen Weisen annehmen.

Es ist nun nach dem Vorangehenden offenbar gleichgültig, ob wir erst die Vertheilung der Wurzeln λ_i in $\Delta = 0$ und dann innerhalb dessen die der Elementartheiler auf alle möglichen Weisen vornehmen, — oder ob wir das Umgekehrte thun. In jedem der beiden Fälle wird dieselbe Eintheilung erzielt. Für die Darstellung des Folgenden ist das letztere vortheilhafter.

Wir fanden vorhin, dass $\Sigma\nu_i = 6$, ferner dass $e_i + e_i' + \cdots = \nu_i$ ist. Hieraus ergiebt sich sofort: $\Sigma e_i^{(k)} = 6$. Die Zahl 6 lässt sich aber auf 11 verschiedene Weisen in Summanden zerlegen, und wir haben demnach vorerst 11 Gruppen von Complexen, dargestellt durch:

[111111], [11112], [1113], [1122], [114], [123], [222], [15], [24], [33], [6]*);

[123] z. B. will sagen, es sei ein einfacher, ein zweifacher und ein dreifacher Elementartheiler vorhanden.

Hierauf denken wir die Elementartheiler entweder als zu sämmtlich verschiedenen, oder als zu theilweise gleichen Wurzeln, oder endlich als zu einer einzigen (sechsfachen) Wurzel gehörig. Zur Unterscheidung dessen empfiehlt sich die folgende Bezeichnung: Wenn ein $m$facher, ein $n$facher etc. Elementartheiler zu derselben Wurzel gehören, so klammern wir die betreffenden Zahlen ein und schreiben: $(m, n \cdots)$. Der Fall [123] z. B. wird also die folgenden 5 Möglichkeiten enthalten:

[123], [(12)3], [2(13)], [1(23)], [(123)].

Der Fall [2(13)] z. B. sagt uns, die Determinante Δ habe zunächst einen Factor $(\lambda - \lambda_1)$ zweimal, ferner einen weiteren Factor $(\lambda - \lambda_2)$ viermal, die Unterdeterminanten Δ' aber $(\lambda - \lambda_1)$ nicht mehr, dagegen $(\lambda - \lambda_2)$ noch einmal, die Δ'' etc. schliesslich keinen von beiden mehr.

Wenden wir in allen den elf oben angegebenen Fällen das an dem Beispiel [123] gegebene Verfahren in gleicher Weise an, so erhält man 58 wesentlich verschiedene Fälle, d. h.: *Im Sinne der projectivischen Geometrie giebt es 58 wesentlich verschiedene Complexe zweiten Grades.*

Eine vollständige Gleichung zweiten Grades zwischen sechs Variabeln enthält 21 Glieder. Mit Hülfe von $P = 0$ kann man in der eigentlichen Complexgleichung im Allgemeinen nur ein Glied fortschaffen. Mit Hülfe der Coordinatentransformation erreicht man jedoch eine weit stärkere Reduction der Gliederzahl. Das Problem, solche kurze, also bequeme Gleichungsformen für jeden Fall zu finden, ist, wie bereits angegeben, allgemein von Weierstrass gelöst. Wir wollen im Folgenden die Resultate dieser Transformationen in eine *„kanonische Form"* kurz zusammenstellen.

Zunächst hängt die kanonische Form lediglich ab von der Vertheilung der Elementartheiler; es giebt also ihrer 11. Aus den 11 Fällen, bei denen die Elementartheiler sämmtlich zu verschiedenen Wurzeln gehören, leiten wir alle andern durch Gleichsetzen der Wurzeln ab. Um aber die kanonischen Formen P und Ω für die erstern Fälle zu erhalten, behandeln wir zunächst jeden einzelnen Elementartheiler für sich.

Die Transformation von P, Ω machen wir uns an der Determinante Δ von $\lambda P - \Omega$ deutlich; sie ist ersichtlich damit identisch, die Hori-

*) Vgl. Klein, S. 37 der Inauguraldissertation.

zontal- und Verticalreihen von Δ gleichzeitig vermöge derselben Multiplicatoren zusammenzufügen, wobei sich der Werth der Determinante höchstens um einen Factor ändert. Die kanonische Form spiegelt sich dann in einer kanonischen Form von Δ ab*). Wir wollen diese Verhältnisse an einem einfachen Beispiel beleuchten. Betrachten wir den Fall [321]. In der Determinante nehmen wir das Quadrat, dessen Glieder den ersten drei Horizontal- und den ersten drei Verticalreihen gemein sind, für den ersten Elementartheiler. Das Quadrat, gebildet aus den gemeinsamen Gliedern der vierten und fünften Horizontal- und Verticalreihen, theilen wir dem zweifachen Elementartheiler, und das letzte Glied der Diagonale dem einfachen zu. Dann füllen wir in der folgenden Weise aus:

$$\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & -1 & \lambda-\lambda_1 & & & \\ -1 & \lambda-\lambda_1 & 0 & & & \\ \lambda-\lambda_1 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 1 & \lambda-\lambda_2 & \\ & & & \lambda-\lambda_2 & 0 & \\ \hline & & & & & \lambda-\lambda_3 \end{array}$$

Alle nicht besonders hingeschriebenen Glieder sind durch Nullen zu ersetzen. — Wir haben hier die kanonische Form der Determinante von $\lambda P - \Omega$; sie repräsentirt die kanonische Darstellung:

$$P \equiv 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_4x_5 + x_6^2$$
$$\Omega \equiv \lambda_1(2x_1x_3 + x_2^2) + 2\lambda_2x_4x_5 + \lambda_3x_6^2 + 2x_1x_2 + x_4^2.$$

Das Verfahren in jedem andern Fall ist dem hier eingeschlagenen ganz analog. Man theilt jedem $k$fachen Elementartheiler ein in der Diagonale von Δ stehendes, $k$reihiges Quadrat zu und füllt dasselbe stets in derselben Weise aus. Wir unterlassen jede weitere Ausführung, indem wir auf die spätern Theile verweisen.

Zur geometrischen Interpretation.

Die Form P giebt uns sofort das Coordinatensystem resp. die sechs Fundamentalcomplexe. Nach Klein besitzt nämlich ein linearer Complex $\Sigma\alpha_ix_i = 0$ eine Invariante, die mit den α geränderte Determinante von P. Wird in einem unserer kanonischen Fälle diese Ränderung ausgeführt, so erhält man stets für unsere Invariante eine solche Function in den α_i, wie es P in den x_i ist, also hat die Invariante für uns den Werth $P(\alpha)$. Ist dieser Ausdruck insbesondere Null, so

*) Wir geben also hier eine einfache Lösung des „chess board"-Problems von Sylvester. Vgl. a. a. O. S. 140, Note. Die im Texte entwickelte Darstellung wurde mir von Klein mitgetheilt.

kann man die α_i, da sie $P = 0$ genügen, als Coordinaten einer Geraden auffassen. Der Complex ist dann ein specieller, indem seine Geraden sämmtlich die Gerade α treffen. Dies giebt die Entscheidung, ob ein Fundamentalcomplex ein allgemeiner oder ein specieller ist; für $x_k = 0$ sind alle α bis auf α_k Null. Da nun ein beliebiges der x in P, die kanonische Form vorausgesetzt, nur einmal, also entweder als Quadrat oder im Doppelproduct vorkommt, so hat man die Regel: *Die Fundamentalcomplexe, die in P in Doppelproducten stehen, sind specielle, die andern allgemeine.*

Die Bedingung der *involutorischen Lage* zweier linearer Complexe ist ebenfalls von P abhängig. Seien $\Sigma\alpha_i x_i = 0$, $\Sigma\beta_i x_i = 0$ zwei solche, so haben sie eine simultane Invariante und zwar die einerseits mit den α, anderseits mit den β geränderte Determinante von P. Verschwindet diese Invariante, so liegen die Complexe in Involution; insofern insbesondre beide specielle sind, schneiden sich ihre Directricen. Als Anwendung auf die *Fundamentalcomplexe* ergiebt sich, dass ein solcher, der in P im Quadrat vorkommt, mit allen andern in Involution liegt. Kommt er im Doppelproduct vor, ist er also ein specieller, so liegt er uur mit dem nicht in Involution, der mit ihm im Doppelproduct vereinigt ist, resp. seine Directrix gehört allen andern Fundamentalcomplexen, ausser diesem einen, an.

Die singulären Linien des Complexes $P = 0$, $\Omega = 0$ werden bekanntlich aus ihm durch einen Complex $\Omega' = 0$, der ebenfalls vom zweiten Grad ist, ausgeschnitten. Diese Form, Ω', soll auch im allgemeinen Fall angegeben werden; sie hängt von Ω sowohl als auch von P ab und ist:

$$\Omega' \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1\partial x_6} & \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_6\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_6\partial x_6} & \frac{\partial P}{\partial x_6} \\ \frac{\partial P}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P}{\partial x_6} & 0 \end{vmatrix} .$$

Diese Bezeichnung als Ω' soll beibehalten werden. — Die Complexe $\Omega + \mu\Omega' = 0$ bilden insbesondere ein Büschel; alle haben die Congruenz der singulären Linien gemein. Bei Untersuchungen über diese sind also alle von ihnen gleichwerthig; die Anwendung dessen ist überall von grossem Vortheil. — Klein hat weiterhin aus dem Complex $P = 0$, $\Omega = 0$ alle diejenigen abgeleitet*), die mit ihm dieselbe Singularitätenfläche und das nämliche Verhalten der singulären Linien zu dieser überhaupt besitzen. Aus seiner Darstellung geht aber hervor,

*) Vgl. diese Annalen Bd. II., S. 224 (9).

dass alle diese Complexe dieselbe Elementartheiler- und Wurzelvertheilung haben, was die Zweckmässigkeit der von uns eingehaltenen Eintheilung hervortreten lässt.

Ein Complex zweiten Grades wird durch zwei simultane quadratische Gleichungen, also als Schnitt von zwei quadratischen Mannigfaltigkeiten (in einem „Raum von fünf Dimensionen") dargestellt. Ein solcher lässt sich daher in gewissem Sinn mit einer Raumcurve vierter Ordnung des gewöhnlichen Punktraumes vergleichen. In der That ist auch die Terminologie so weit ausgebildet, dass man den Complex zweiten Grades als Schnitt von zwei Flächen zweiten Grades in einem Raum von fünf Dimensionen bezeichnen kann. Von diesem Standpunkte aus stellt sich diese Arbeit neben diejenige von Lüroth: „Ueber Schnittcurven und gemeinsame Polartetraeder zweier Flächen zweiten Grades."*) An Stelle der dort betrachteten, den beiden Flächen gemeinsamen Polarquadrupel, tritt hier das System der sechs Fundamentalcomplexe auf.

Mit der vorliegenden Untersuchung kann man noch folgende Ueberlegung verknüpfen, welche die Uebersicht bedeutend erleichtert. Kommen nämlich höhere als einfache Elementartheiler vor, so treten mit ihnen vielfache Complexgerade und vielfache Linien der Singularitätenfläche auf. Dasselbe tritt ein, wenn mehrere Elementartheiler zu einer Wurzel gehören. Dieselben höhern Elementartheiler und dieselben Verbindungen einfacher oder höherer ziehen aber in jedem Fall dieselben Folgerungen nach sich. Es entspringt hieraus eine wichtige, berechtigte Schlussweise, die an einem Beispiel erläutert werden soll. In dem Fall [1111(11)] werden zwei Doppelgerade, die sich nicht schneiden, auftreten. Dann hat man im Fall [11(11)(11)] nothwendig zwei Paare von Doppelgeraden, im Fall [(11)(11)(11)] drei solcher etc. Im zweiten Fall hat man ein windschiefes Vierseit, also im dritten Fall die sechs Kanten eines Tetraeders.

Diese Schlussweise wird durch den folgenden Satz vervollkommnet: *Eine mehrfache Complexgerade rechnet stets mehrfach als Axe und Strahl auf der Singularitätenfläche.* Nach Plücker**) ist nämlich eine Doppellinie des Complexes eine solche singuläre Linie, deren Punkte und (hindurchgehende) Ebenen sämmtlich singulär sind. Eine solche Linie liegt also auf der Singularitätenfläche; wir nehmen an, als μfacher Strahl, νfache Axe, ferner mögen zu ihr δ Doppelpunkte und τ stationäre Ebenen gehören. Der Grad der Singularitätenfläche ist 4, es ist also $\mu + \delta + \nu + \tau = 4$. Es ist aber auch $\mu = \nu$, $\delta = \tau$, wenn sich,

*) Schlömilch's Zeitschrift 1867. Vgl. auch L. Painvin: Nouv. Annales de Math. 1868 (p. 103) und Sylvester a. a. O.

**) Vgl. Neue Geometrie, II., n. 307.

was meist eintritt, die Punkte und Ebenen der Geraden zum Complexe genau gleich verhalten. Es giebt das die Möglichkeiten $\mu = \nu = 1$, $\delta = \tau = 1$ und $\mu = \nu = 2$, $\delta = \tau = 0$ (oder umgekehrt). Man vergl. hierzu die einzelnen Fälle.

In den Coordinaten x kann man den zu einem Raumpunkt gehörigen Complexkegel nicht direct ausdrücken, wir erreichen dies durch Coordinatentransformation. Geht man nämlich zu den p_{ik}, also zu speciellen Fundamentalcomplexen zurück, so erhält man statt

$$\Omega_x = 0 : \Omega_p{}^* \equiv \Omega^*(y_i z_k - y_k z_i) = 0$$

wo y, z Punktcoordinaten sind. Hält man insbesondere den Punkt y fest, so giebt $\Omega^* = 0$ eine quadratische Gleichung in z, geometrisch einen Kegel 2. Ordnung vom Mittelpunkt y. Es ist dies der zu y gehörige Complexkegel. Zerfällt derselbe, so liegt y auf der Singularitätenfläche, und man erhält also die Punkte dieser Fläche durch Uebergang zu den p. Dieser Uebergang ist aber für alle, in einer kanonischen Form enthaltenen Fälle der nämliche. Er ist später für jede kanonische Form angegeben.

Bezüglich der angewandten Bezeichnung diene das Folgende. Die x bedeuten stets Liniencoordinaten, wenn nicht ausdrücklich eine andere Definition beigegeben ist. Die y und z werden stets Punktcoordinaten darstellen; die Ecken des zugehörigen Fundamentaltetraeders sind A_1, A_2, A_3, A_4, die Gegenseiten $y_1 = 0$ etc. Es ist dann $A_1 A_2$ eine Kante, die auch $y_3 = y_4 = 0$ genannt werden kann und welche Directrix des speciellen Complexes $p_{34} = 0$ ist.

II.

Erste kanonische Form.

$$P \equiv x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 + x_5{}^2 + x_6{}^2 = 0.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1{}^2 + \lambda_2 x_2{}^2 + \lambda_3 x_3{}^2 + \lambda_1 x_4{}^2 + \lambda_5 x_5{}^2 + \lambda_6 x_6{}^2 = 0.$$

Die Elementartheiler sind alle gleich und zwar einfach. — In der oben stehenden Form von Ω gehören sie zu sämmtlich verschiedenen Wurzeln. Es ist das der Fall [111111] nach der angenommenen Bezeichnung, also der allgemeinste Complex zweiten Grades überhaupt. Seine Singularitätenfläche ist bekanntlich die „*Kummer'sche Fläche*" mit 16 Knotenpunkten und 16 Doppelebenen. Dieser Complex ist, besonders durch Klein, genau untersucht; wir gehen hier nicht weiter auf ihn ein*).

*) Zu diesem allgemeinen Fall gehört auch der Complex, dessen Singularitätenfläche eine Fresnel'sche Wellenfläche (Tetraedroid) bildet. Er hat keine Doppelgerade, während alle unsere Fälle solche besitzen. Für diesen Complex vgl. Battaglini: Giorn. di Mat. 1866, Aschieri: ebenda 1868, L. Painvin: Nouvelles Annales 1872. Er ist nach Klein dadurch charakterisirt, dass die 6 Wurzeln λ eine Involution bilden.

Indem die λ auf alle möglichen Weisen einander gleichgesetzt werden, erhält man alle die weiteren Fälle dieser Form. Die folgenden führen jedoch auf solche Complexe, die in zwei lineare zerfallen: [11(1111)], [1(11111)], [(11)(1111)], [(111111)], und zerfallende Complexe schliessen wir ein für allemal aus. Für den letzten Fall ist sogar $\Omega \equiv \lambda_1 P$, es ist also gar kein eigentlicher Complex.

Nach Ausschluss dieser fünf Complexe bleiben noch die folgenden *sechs:*

[1111(11)], [111(111)], [11(11)(11)], [1(11)(111)], [(11)(11)(11)], [(111)(111)]

Sie sollen in ebendieser Reihenfolge behandelt werden. — Die Form P geht offenbar in ein vielfaches der früheren in den Coordinaten p über bei folgender Substitution, wo $i = \sqrt{-1}$:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}, \qquad x_3 = p_{13} + p_{42}, \qquad x_5 = p_{14} + p_{23},$$
$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}), \quad x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42}). \quad x_6 = \frac{1}{i}(p_{14} - p_{23}).$$

Diese Transformation, resp. die Auswahl eines solchen Coordinatentetraeders, ist auf 15 verschiedene Arten möglich. Eine genaue Darstellung giebt Klein*).

1. Den Fall *[1111(11)]* erhalten wir aus dem allgemeinsten dadurch, dass wir zwei der λ gleich setzen, z. B. $\lambda_2 = \lambda_1$. P hat immer noch die obige Form, dagegen ist jetzt:

$$\Omega \equiv \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0.$$

Da nun die Complexe $\Omega + \mu \cdot P = 0$ mit $\Omega = 0$ identisch sind, so können wir auch aus diesen, nur formal verschiedenen Complexen denjenigen herausgreifen, für welchen $\mu = -\lambda_1$. Wir haben dann die einfachere Darstellung:

$$\Omega \equiv \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0.$$

wo die λ gleich den um λ_1 verringerten, früheren λ sind.

Vier lineare Complexe haben bekanntlich im Allgemeinen zwei sich nicht schneidende Gerade gemein. So haben $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ die Geraden gemein, für welche $x_1 = 1$, $x_2 = \pm i$ ist**). Es sind das die Leitgeraden der Complexgruppe $x_1 \pm i x_2 = 0$, resp. von $p_{34} = 0$, $p_{12} = 0$. Diese beiden Geraden sind, wie die Form von Ω zeigt, doppelte Complexgeraden, nnd überhaupt ergiebt sich: *Zur Verbindung von zwei einfachen Elementartheilern gehören stets zwei sich nicht schneidende doppelte Complexgerade, die der Congruenz der singulären Linien vierfach zählend angehören.*

---

*) Vgl. insbesondere: Diese Annalen, Bd. II, S. 206.

**) Vgl. Klein, a. a. O., S. 206.

Das Verhalten einer solchen Doppelgeraden zum Complex ersieht man wohl am deutlichsten, wenn man die Complexfläche bildet, welche sie als Leitgerade hat. Wir fassen diese auf als gebildet durch alle Complexkegelschnitte in den Ebenen durch diese Gerade. Jeder dieser Kegelschnitte zerfällt nach Plücker in ein Punktepaar auf der Geraden. Für vier der Ebenen wird sich ein Doppelpunkt ergeben und diese vier Punkte geben die Complexfläche als Klassenfläche. Die vier, in gleicher Weise auftretenden Doppelebenen geben die Fläche als Punktgebilde*).

Die singulären Linien befriedigen neben $\Omega = 0$ auch noch die folgende Gleichung:

$$\Omega' \equiv \lambda_3{}^2 x_3{}^2 + \lambda_4{}^2 x_4{}^2 + \lambda_5{}^2 x_5{}^2 + \lambda_6{}^2 x_6{}^2 = 0.$$

Wir machen von ihr erst in späteren Fällen Gebrauch. Die Congruenz der singulären Linien zerfällt hier nicht.

Es handelt sich nun um die Singularitätenfläche. Dieselbe enthält zwei Doppelgerade, doch ist das Verhalten derselben zur Fläche nicht ohne Weiteres vorauszusagen, sondern es muss die Gleichung der Fläche abgeleitet werden. — Indem man zu den p_{ik} zurückgeht, wird aus $\Omega = 0$:

$$\lambda_3(p_{13}+p_{42})^2 - \lambda_4(p_{13}-p_{42})^2 + \lambda_5(p_{14}+p_{23})^2 - \lambda_6(p_{14}-p_{23})^2 = 0.$$

Fasst man die p_{ik} auf als $y_i z_k - y_k z_i$, so giebt diese Gleichung sofort den Complexkegel vom Punkte y in laufenden (Punkt-) Coordinaten z. Für den gesuchten Ort zerfällt dieser Kegel, also auch jeder ebene Querschnitt desselben. Als Schnittebene sei $z_1 = 0$ benutzt, die Coefficienten der Gleichung dieses Schnittes setzen sich quadratisch aus den y zusammen. Seine Discriminante ist also eine Function vom sechsten Grad in y, d. h.: Unser Ort ist eine Fläche sechsten Grades. — Der Complexkegel zerfällt für die Punkte der Ebene $z_1 = 0$ im Allgemeinen nicht. Doch besteht der betreffende Schnitt aus einem Geradenpaar. Diese Ebene ist desshalb von der oben angegebenen Fläche sechsten Grades auszuschliessen, und zwar doppelt zählend. In der That hat die oben bestimmte Gleichung den Factor $y_1{}^2$**). — Dieser Factor wird auch später immer wieder auftreten bei analoger Bestimmung des Ortes der singulären Punkte. — Indem wir ihn herausziehen, erhalten wir die eigentliche Singularitätenfläche:

$$\lambda_5\lambda_6(\lambda_3-\lambda_4)(y_1{}^2y_3{}^2+y_4{}^2y_2{}^2) + \lambda_3\lambda_4(\lambda_5-\lambda_6)(y_1{}^2y_4{}^2+y_2{}^2y_3{}^2)$$
$$+2\{\lambda_5\lambda_6(\lambda_3+\lambda_4) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_5+\lambda_6)\}y_1y_2y_3y_4 = 0.$$

---

*) Neben Plücker vgl. die Habilitationsschrift von Pasch.

**) Vgl. Plücker a. a. O. n. 315, 186.

Das Coordinatensystem ist so gewählt, dass zwei seiner Kanten, $y_1 = y_2 = 0$ und $y_3 = y_4 = 0$ in die Doppelgeraden fallen. — Es ergiebt sich aus dieser Gleichung: *Die Singularitätenfläche ist die XI^te Gattung von Cremona's Linienflächen vierten Grades**). — Es ist leicht zu zeigen, dass sie auch die allgemeine Fläche dieser Art ist. — Auf jeder Doppelgeraden hat die Fläche vier Cuspidalpunkte, sie liegen hier paarweise harmonisch zu den Coordinatenecken. Durch solche vier Cuspidalpunkte sind drei Involutionen bestimmt, also ist diese Wahl des Coordinatensystems auf dreierlei Weise möglich. (Die vier Cuspidalpunkte der einen Doppelgeraden und die vier der andern sind einander auf bestimmte Weise zugeordnet, so dass die Wahl der Involution auf der einen Geraden auch die auf der andern nach sich zieht.) Und in der That kann man auch die vier Grössen x_3, x_4, x_5, x_6 dreimal in analoger Weise durch die p ausdrücken, wie es eben geschah. — Zu jeder Doppelgeraden gehören sowohl vier Cuspidalpunkte, als auch vier Cuspidalebenen. Die Doppelverhältnisse aus beiden sind für beide Doppelgeraden gleich. Insbesondere ist dies Doppelverhältniss gleich dem charakteristischen Doppelverhältniss jeder ebenen Curve dritter Ordnung der Fläche. Sie repräsentirt eine absolute Invariante der Singularitätenfläche und des Complexes überhaupt.

In jedem Punkt einer Doppelgeraden hat man zwei Büschel von Complexgeraden, die mit den dort stattfindenden Tangentenebenen der Fläche im Allgemeinen nicht übereinstimmen. Für jede Doppelgerade wird es viermal eintreten, dass eine der Tangentenebenen mit einer der Büschelebenen zusammenfällt. — Es giebt also unter den Erzeugenden der Fläche keine singulären Linien.

Beim Uebergang von der Kummer'schen Fläche zu dieser speciellen rücken die 16 Doppelebenen der ersteren paarweise in die Cuspidalebenen der letzteren, da die Cuspidalebenen die einzigen, nach (zerfallenden) Kegelschnitten berührenden Ebenen sind. Ebenso vereinigen sich je zwei Doppelpunkte der Kummer'schen Fläche hier in einen Cuspidalpunkt**).

Der allgemeinste Complex zweiten Grades hat *19 Constante*, dieser aber nur noch *17*, seine Singularitätenfläche 16. Dieser Fall geht also aus dem allgemeinsten durch zweifache Particularisation hervor.

Wenn man hier die Constanten λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 so verändert, dass

---

*) Man vergleiche hierzu die bekannte Abhandlung: „*Sulle superficie gobbe di quarto grado*", memorie dell' Accademia delle scienze, tomo VIII (serie 2ª).

**) Es mag hier ein für alle Mal auf die Arbeit von Kummer: „*Ueber die algebraischen Strahlensysteme etc.*", Abh. d. Berl. Akad., hingewiesen werden. Hier vgl. man insbesondere S. 71.

nie zwei einander gleich, und nie eine gleich Null wird, so erhält man stets Complexe, die zu [1111(11)] gehören. Die absolute Invariante von vorhin wird sich verändern. Ist z. B.

$$\lambda_5\lambda_6(\lambda_3+\lambda_4)=\lambda_3\lambda_4(\lambda_5+\lambda_6),$$

so fällt das Glied mit $y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot y_4\cdot$ weg. Bei der Singularitätenfläche fallen für jede Doppelgerade zwei Cuspidalstellen zusammen. Diese Fläche ist bestimmt durch die folgenden Linien als Leitlinien: Zwei Gerade und eine ebene Curve dritter Ordnung (ohne Doppelpunkt), die von den beiden Geraden in zweien ihrer Wendepunkte getroffen wird*).

2. Indem wir uns dem Fall *[111(111)]* zuwenden, setzen wir im vorigen Fall am einfachsten eines der λ, z. B. λ_3, Null. Es ergiebt sich dann:

$$\Omega\equiv\lambda_4x_4^2+\lambda_5x_5^2+\lambda_6x_6^2=0$$
$$\Omega'\equiv\lambda_4^2x_4^2+\lambda_5^2x_5^2+\lambda_6^2x_6^2=0.$$

Wir haben hier eine Regelschaar $x_4=x_5=x_6=0$ von doppelten Complexlinien. Jede derselben ist Doppellinie der Singularitätenfläche. Wir finden damit das Resultat: *Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zählende Fläche zweiter Ordnung, deren eine Erzeugung aus doppelten Complexgeraden resp. vierfachen singulären Linien besteht.*

Das Verhalten der *singulären Linien* ist in diesem Fall ein sehr eigenthümliches. *Die von ihnen gebildete Congruenz zerfällt in vier lineare.* Aus $\Omega=0$, $\Omega'=0$ ergeben sich nämlich die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{x_4^2}{x_5^2}=\frac{\lambda_5\lambda_6(\lambda_5-\lambda_6)}{\lambda_6\lambda_4(\lambda_6-\lambda_4)},\quad \frac{x_5^2}{x_6^2}=\frac{\lambda_6\lambda_4(\lambda_6-\lambda_4)}{\lambda_4\lambda_5(\lambda_4-\lambda_5)},\quad \frac{x_6^2}{x_4^2}=\frac{\lambda_4\lambda_5(\lambda_4-\lambda_5)}{\lambda_5\lambda_6(\lambda_5-\lambda_6)}.$$

Indem wir die Bezeichnung einführen:

$$\lambda_5\lambda_6(\lambda_5-\lambda_6):\lambda_6\lambda_4(\lambda_6-\lambda_4):\lambda_4\lambda_5(\lambda_4-\lambda_5)=\alpha^2:\beta^2:\gamma^2,$$

erhalten wir:

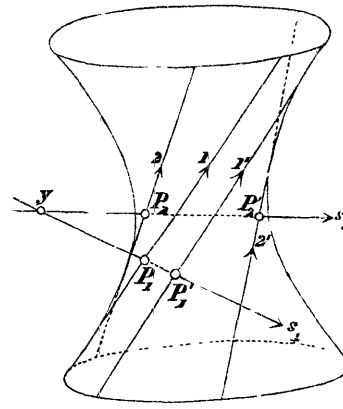
$$\frac{x_4}{\pm\alpha}=\frac{x_5}{\pm\beta}=\frac{x_6}{\pm\gamma}.$$

Es treten vier wesentlich verschiedene Zeichencombinationen auf, welche unsere vier Congruenzen ergeben.

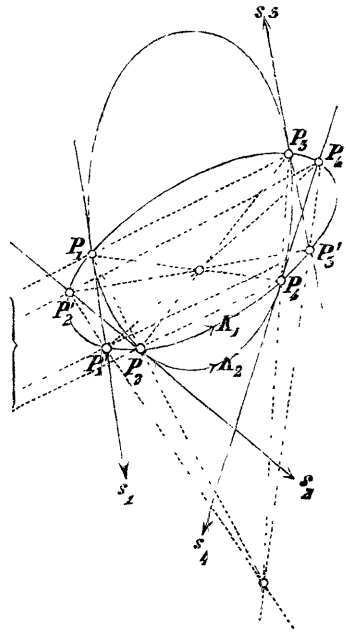
Die zu einer linearen Congruenz gehörigen, zweifach unendlich vielen Linien treffen stets zwei bestimmte Raumgerade, welche man die Directricen der Congruenz nennt. (Diese Directricen können auch unendlich nahe zu einander sein, oder sich schneiden.) In unserm Fall erhalten wir 8 Directricen, die paarweise eine Congruenz ergeben; insbesondere aber liegen sie sämmtlich auf der Singularitätenfläche,

*) Vgl. Cremona, a. a. O. § 12.

gehören jedoch nicht der Erzeugung an, die aus doppelten Complexgeraden besteht. Von ihnen fallen keine zwei zusammen. 1, 1′ seien die Directricen der ersten; 2, 2′; 3, 3′; 4, 4′ die der übrigen Congruenzen. Durch einen beliebigen Raumpunkt y geht an 11′ etc. je eine Transversale, es sind das die vier singulären Linien des Punktes y. Die Directricen 1, 2, 3, 4 sollen von diesen singulären Linien in den Punkten P_1, P_2; P_3, P_4 getroffen werden, die vier andern in P_1', P_2', P_3', P_4'. Von den Punkten P_1, P_1' etc. ist je einer der singuläre, es seien dies P_1, P_2, P_3, P_4. Dann sind die Ebenen durch diese singulären Linien und die Directricen 1′, 2′, 3′, 4′ die zugehörigen singulären Ebenen. Diese Trennung der 8 Directricen ist für alle Raumpunkte dieselbe. Wir sehen also, dass die *Brennfläche der singulären Linien sich in 8 Gerade aufgelöst hat, wovon vier erfüllt sind von singulären Punkten, die andern vier aber umhüllt von singulären Ebenen.*



In der obenstehenden Figur sind zwei Directricenpaare und die zugehörigen singulären Linien für den Punkt y verzeichnet. — In P_1 wird die singuläre Linie der ersten Congruenz die Singularitätenfläche berühren; die Fläche zweiten Grades wird dort durchsetzt (da sie aber doppelt zu zählen ist, kann man dies doch als Berührung auffassen). — Liegt der Punkt y insbesondere auf der Singularitätenfläche, so fallen die vier singulären Linien in eine zusammen. Wir sehen jetzt deutlich, dass die eine Erzeugung der Fläche aus vierfachen singulären Linien besteht*).



*) Vgl. die Habilitationsschrift von Pasch, insbesondere § 5. In unserm Fall würde die Fläche zweiter Ordnung, welche Singularitätenfläche ist, doppelt zählend als Brennfläche der (gesammten) singulären Linien auftreten.

In einer beliebigen Ebene habe man die vier singulären Linien s_1, s_2, s_3, s_4, diese Ebene treffe die 8 Directricen in P_1, P_2, P_3, P_4; P_1', P_2', P_3', P_4'; s_1 ist dann die Verbindungslinie von P_1 mit P_1', P_1 ihr singulärer Punkt. Der Kegelschnitt der 8 Punkte P: K_1 ist der Schnitt unserer Ebene mit der Singularitätenfläche; der Complexkegelschnitt K_2 derselben Ebene geht dann durch P_1, P_2, P_3, P_4 und tangirt in ihnen die Linien s. (Vgl. die Figur auf der vorstehenden Seite.) Die 8 Punkte P gruppiren sich in zwei Vierecke $P_1 P_2 P_3 P_4$ und P_1', P_2', P_3', P_4', welche dasselbe Diagonaldreieck haben. (Umgekehrt bilden stets die acht Ecken von zwei Vierecken mit gemeinsamem Diagonaldreieck eine dem entsprechende Figur.)

Wie für den Complexkegelschnitt erhält man auch für einen Complexkegel acht Elemente. Der Mittelpunkt sei y, so sind vier Erzeugende des Kegels die Transversalen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ an die Directricenpaare 11′, 22′, 33′, 44′. Die Tangentialebenen längs diesen vier Erzeugenden (den vier singulären Geraden des Complexkegels) gehen ausserdem durch die Directricen 1′, 2′, 3′, 4′.

Dieser Complex ist durch dreifach unendlich viele Raumtransformationen in sich selbst überführbar. Jede solche Transformation muss die Singularitätenfläche (zweiten Grades) in sich überführen, insbesondere aber diejenige Erzeugung ganz unverändert lassen, welcher die acht Directricen angehören. Die Geraden der zweiten Erzeugung (die vierfach singulären Linien) schieben sich so fort, dass die von ihnen gebildete Erzeugung als Ganzes bestehen bleibt. Und das ist eben auf dreifach unendlich viele Weisen zu erreichen: je drei Geraden der Erzeugung können drei beliebige andere zugeordnet werden, und dann ist allemal eine Transformation völlig bestimmt. — Dass aber hiebei der Complex durchaus nicht verändert wird, folgt ganz einfach daraus, dass nach wie vor die Complexkegelschnitte und die Complexkegel für alle Ebenen, bez. Punkte des Raumes auf dieselbe Weise construirt werden, also identisch sind. — Der Complex hat *14 Constante.* Zwei von ihnen sind *absolute Invarianten*, da der Complex dreifach unendlich viele Transformationen in sich hat. Dieses sind die beiden absoluten Invarianten, welche den fünf Erzeugenden zukommen, die den Complex bestimmen.

3. Werden im ersten Fall (S. 155) irgend zwei der Grössen λ gleichgesetzt, so erhält man den durch *[11(11)(11)]* dargestellten Fall. Es sei $\lambda_4 = \lambda_3$ gewählt, so hat man:

$$\Omega \equiv \lambda_3 (x_3^2 + x_4^2) + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0 .$$
$$\Omega' \equiv \lambda_3^2 (x_3^2 + x_4^2) + \lambda_5^2 x_5^2 + \lambda_6^2 x_6^2 = 0 .$$

Der Vergleich mit dem Fall [1111(11)] (S. 155) zeigt, dass zwei

Paare von sich nicht schneidenden Doppelgeraden auftreten. Die Geraden des ersten Paares werden jedoch die des zweiten treffen. Die Formeln ergeben nämlich durchgehends die Regel: *Ist p_i eine doppelte Complexgerade, herrührend von einer vielfachen Wurzel λ_i, p_k eine solche, die mit einer weiteren vielfachen Wurzel λ_k auftritt, so schneidet die Gerade p_i die Gerade p_k.*

Der Rückblick auf [1111(11)] sagt weiter, dass die Geraden unseres doppelten windschiefen Vierseits für die Singularitätenfläche gewöhnliche Doppelstrahlen und Doppelaxen sind. Dann hat man aber nothwendig das Folgende:

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiter Ordnung, die zwei Linien jeder Erzeugung (ein windschiefes Vierseit) gemein haben.

Unser Resultat wird bestätigt durch die Gleichung der Singularitätenfläche. Indem wir die Grösse $\frac{2\lambda_5\lambda_6 - \lambda_3(\lambda_5+\lambda_6)}{\lambda_3(\lambda_5-\lambda_6)}$ mit C bezeichnen, ergiebt sich für dieselbe:

$$(1)\quad \left(y_1y_4+(C+\sqrt{C^2-1})y_2y_3\right)\left(y_1y_4+(C-\sqrt{C^2-1})y_2y_3\right)=0.$$

Die beiden Flächen bezeichnen wir mit F_1 und F_2. Die ihrer Unterscheidung entsprechende Trennung der singulären Linien ergiebt sich folgendermassen. Aus den beiden Gleichungen

$$\Omega = 0, \qquad \Omega' = 0$$

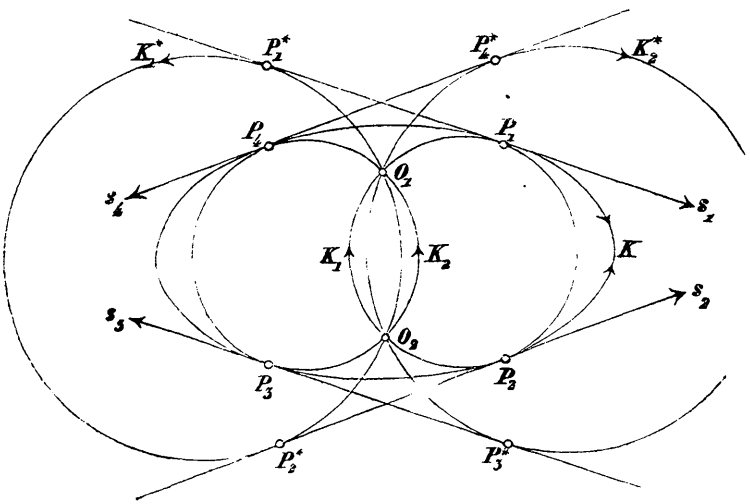
lässt sich insbesondere die zerfallende ableiten:

$$(2)\qquad \Omega' - \lambda_3\Omega \equiv (x_5 + \alpha x_6)(x_5 - \alpha x_6) = 0,$$

(wo $\alpha = i\sqrt{\frac{\lambda_6(\lambda_6-\lambda_3)}{\lambda_5(\lambda_5-\lambda_3)}}$). *Die singulären Linien bilden also zwei Congruenzen zweiten Grades.* — Es ist einleuchtend, dass die eine Congruenz den Tangenten von F_1, die andere denen von F_2 angehört.

Aber in diesem Falle können wir auch die *vollständige Brennfläche* der Congruenz der singulären Linien angeben, für welche die Singularitätenfläche nur einen Theil bildet. Ersichtlich besteht dieselbe überdiess noch aus denjenigen beiden Flächen zweiten Grades F_1^* und F_2^*, welche aus F_1 und F_2 durch die dualen Umformungen hervorgehen, welche durch die mit ihnen bez. zusammengehörigen linearen Complexe (2) gegeben sind. *Diese beiden Flächen enthalten ebenfalls die vier Doppelgeraden des zu untersuchenden Complexes; die Congruenz vierten Grades der singulären Linien besteht aus einem quadratischen Theile derjenigen Congruenz vierten Grades, welche F_1 und F_1^* umhüllt, und aus einem eben solchen Theile der Congruenz vierten Grades, welche F_2 und F_2^* umhüllt.*

Die nebenstehende Figur soll diese Verhältnisse durch einen ebenen Schnitt zur Anschauung bringen. K_1, K_2, K_1^*, K_2^* gehören F_1, F_2, F_1^*, F_2^* an. Die Grundpunkte des Büschels, dem diese vier Kegelschnitte angehören, sind O_1, O_2 und die Kreispunkte der Ebene; s_1, s_2, s_3, s_4 sind die singulären Geraden der Ebene, K der Complex-

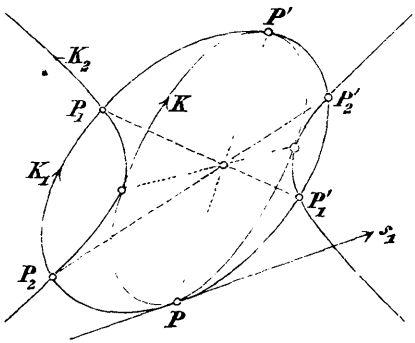


kegelschnitt. Die andern Tangenten, die K_1 und K_1^* gemein sind, gehören der quadratischen Congruenz $(F_1\,F_1^*)$ an, die hier nicht in Frage kommt etc. — Die Figur zeigt deutlich, wie K_1 und K_2 vor K_1^*, K_2^* bevorzugt sind und zwar dadurch, dass sie vom Complexkegelschnitt berührt werden. *Ebenso sind die Flächen F_1 und F_2 dadurch vor F_1^* und F_2^* bevorzugt, dass nur sie von den Complexkegelschnitten berührt werden.*

Wie der vorige Complex kann auch dieser auf eine ganz einfache Weise erzeugt werden. — Die Singularitätenfläche F_1, F_2 bestimmt den Complex nicht, sondern erst einfach unendlich viele Complexe. Nimmt man eine beliebige Raumgerade als Complexgerade hinzu, so erhält man noch vier Complexe. Denn in einer beliebigen Ebene durch diese Gerade giebt es noch vier Kegelschnitte, welche sie und den Schnitt mit F_1 und F_2 je zweimal berühren. Wählt man einen von ihnen als Complexkegelschnitt aus, so finden sich weitere Complexkegelschnitte eindeutig durch Drehung um eine seiner Tangenten, resp. um eine der schon bekannten Complexlinien.

Ist insbesondere eine singuläre Complexgerade s_1 gegeben, die F_1 berühren mag, so ist der Complex eindeutig bestimmt und seine Construction viel einfacher. Man lege wieder durch s_1 eine Ebene (vgl. neben-

stehende Figur), sie schneide F_1 in K_1, F_2 in K_2. Die Schnittpunkte von K_1 mit K_2: P_1, P_1', P_2, P_2' sind die Schnittpunkte der Ebene mit dem Vierseit, das F_1 und F_2 gemein ist. (Dabei seien P_1 und P_1' die Schnittpunkte mit zwei Gegenseiten dieses Vierseits, ebenso P_2 und P_2'.) Es giebt zunächst drei Kegelschnitte, welche K_1 im Berührungspunkt P mit s_1 und einem weitern Punkt, ebenso K_2 in zwei Punkten berühren; von ihnen ist jedoch nur einer als Complexkegelschnitt der Ebene zulässig. Verbinde ich nämlich P mit einem Diagonalpunkt des Vierecks $P_1 P_1' P_2 P_2'$ und schneide K_1 mit dieser Linie, so giebt es je einen Kegelschnitt, welcher K_1 in P und in diesem Schnittpunkt,



so wie auch K_2 zweimal berührt. Aber es ist einer der Diagonalpunkte ausgezeichnet, nämlich der Schnittpunkt der Geraden $\overline{P_1 P_1'}$, $\overline{P_2 P_2'}$ (weil P_1, P_1' die Schnittpunkte mit dem einen, P_2, P_2' die mit dem andern Gegenseitenpaar des windschiefen Vierecks sind). Wird er bei der Construction verwandt, so erhält man den Complexkegelschnitt. — Durch Drehung der Ebene um alle Tangenten dieses eben construirten Kegelschnittes erhält man durch diese, resp. die vorige Construction alle Complexgeraden.

Es lässt dieser Complex einfach unendlich viele Transformationen in sich selbst zu. Eine Abzählung würde in der That ergeben, dass er *15 Constante* hat, aus denen sich eine absolute Invariante zusammensetzen lässt. Diese Transformationen sind besonders einfach und geben eine directe Anschauung von den singulären Linien.

Für den allgemeinen Complex zweiten Grades hat Klein*) die Aufgabe gelöst, in der Congruenz der singulären Linien je einfach unendlich viele (consecutive) zu Developpabeln zusammenzufassen. Jede singuläre Gerade wird nämlich von zwei andern, unendlich nahen, geschnitten**). Geht man also von einer beliebigen aus, so erhält

*) Diese Annalen Bd. V, S. 296.

**) Vgl. die schon erwähnten Arbeiten von Kummer und Pasch.

man diese Developpabeln durch Aneinandersetzung solcher sich schneidender, consecutiver. Um die endliche Gleichung herzustellen, ist eine Differentialgleichung zu integriren, die auf hyperelliptische Integrale führt. — In diesem speciellen Fall gestaltet sich diese Sache etwas anders, jedenfalls aber bedeutend einfacher. Den Uebergang von einer solchen singulären Linie zur nächsten können wir nämlich als eine unendlich kleine Raumtransformation*) auffassen resp. darstellen, welche den ganzen Complex in sich selbst überführt. Die auftretenden Integrationen sind besonders einfach.

Um später die Gleichung der Developpabeln, resp. deren Rückkehrgeraden, in Punktcoordinaten schreiben zu können, soll zunächst unser Problem in den Coordinaten p_{ik} gelöst werden. (Klein benutzt n seiner Arbeit andere Coordinaten, die wir weiterhin ebenfalls anwenden wollen.) — Für die singulären Linien haben wir die Gleichungen (2) abgeleitet. Die dort auftretenden linearen Complexe schreiben wir in der Form:

$$ap_{14} + bp_{23} = 0 \tag{3}$$

(wo $a = 1 \pm \frac{\alpha}{i}$, $b = 1 \mp \frac{\alpha}{i}$). In der Annahme dieser Form liegt enthalten, dass wir uns nur mit der einen und nicht gleichzeitig mit beiden Congruenzen zweiten Grades beschäftigen. Es ist das erlaubt, da sich beide genau gleich verhalten. — Ausser der Gleichung (3) genügen die singulären Linien auch noch $\Omega = 0$, oder $\Omega' + \lambda\Omega = 0$. Indem man zu den p_{ik} übergeht und λ in der richtigen Weise wählt, erhält man insbesondere die Gleichung:

$$2\lambda_5\lambda_6 p_{12}p_{31} + (2\lambda_5\lambda_6 + \lambda_3(\lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_3))p_{13}p_{42} = 0$$

oder

$$\alpha p_{12}p_{34} + \beta p_{13}p_{42} = 0.$$

Dieser Complex ist ein *tetraedraler*; er ist auf S. 169 behandelt als Fall [(11)(11)(11)]. — Für die singulären Linien (für die eine Congruenz) haben wir also:

$$ap_{14} + bp_{23} = 0, \quad \alpha p_{12}\cdot p_{34} + \beta p_{13}\cdot p_{42} = 0. \tag{4}$$

Sei y ein Punkt der Singularitätenfläche, so geht durch ihn eine bestimmte singuläre Linie. Dieselbe verbindet ihn mit dem ihm unendlich nahen Punkte $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$, der in der Tangentialebene der Singularitätenfläche liegt und dessen Coordinaten die Werthe haben:

$$\varrho z_1 = y_1, \quad \varrho z_2 = y_2(1 + \sqrt{\beta}d\sigma), \quad \varrho z_3 = y_3(1 - \sqrt{\alpha}d\sigma),$$
$$\varrho z_4 = y_4(1 + (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})d\sigma),$$

*) Ueber solche unendlich kleine Transformationen von Gebilden in sich selbst vergleiche man „*sur une certaine famille de courbes et de surfaces*“ par Klein et Lie, Comptes rendus, 1870; sowie diese Annalen t. IV, S. 50 ff.

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor, $d\sigma$ eine unendlich kleine Strecke. — Die Zunahmen der Coordinaten sind also bezüglich:

$$dy_1 = 0\,, \quad dy_2 = \sqrt{\beta}\, d\sigma\,, \quad dy_3 = -\sqrt{\alpha}\, d\sigma\,, \quad dy_4 = (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})\, d\sigma\,.$$

Durch sie gelangen wir zu z, von z gehen wir zu $z + dz$ etc. Die Zusammensetzung dieser Punkte giebt die continuirliche Curve:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A : B\lambda^{\sqrt{\beta}} : C\lambda^{-\sqrt{\alpha}} : D\lambda^{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\,,$$

deren sämmtliche Tangenten singuläre Complexgeraden sind. — Die Constanten $A : B : C : D$ unterliegen einer Bedingungsgleichung, welche aussagt, dass diese Curve auf der richtigen Fläche $y_1 y_4 + \mu\, y_2 y_3 = 0$ liege. (Am einfachsten setzt man dabei $\lambda = 1$, nimmt also den Punkt $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A : B : C : D$ als Anfangspunkt der Raumtransformationen, die alle die Flächen μ in sich transformiren.)

Ersichtlich ist die Art der Curven nur von α und β abhängig. Aendern sich dann noch die A, B, C, D, so erhält man nur zweifach unendlich viele, im Allgemeinen gleich beschaffene Curven, von denen durch jeden Raumpunkt eine geht. — Ist das Verhältniss

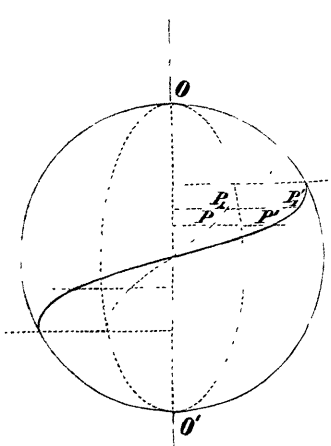
$$1 : \sqrt{\beta} : -\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$$

rational, so sind die Curven *algebraisch*. Ist das Verhältniss dagegen *incommensurabel*, so sind sie *transcendent*. So erhält man z. B. für $\beta = 1$, $\alpha = 4$ die Raumcurven dritter Ordnung, dargestellt durch $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A\lambda^2 : B\lambda^3 : C : D\lambda$.

Wenn eine gewisse metrische Specialisirung, welche der Allgemeinheit durchaus keinen Eintrag thut, angewandt wird, erhält man eine bequeme Anschauung der gemachten Transformationen, sowie der Curven. Für F_1 und F_2 nehmen wir nämlich zwei Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe und vereinigten Polen. (Dieselben mag man sich entstanden denken durch Rotation von zwei Kegelschnitten, die eine ihrer Axe vollständig, Grösse und Lage nach, vereinigt haben.) In den Polen O und O' gehen für beide Flächen die Erzeugenden nach den Kreispunkten der dort gemeinsamen Tangentialebenen. Die Flächen haben also vier gemeinsame Erzeugende, die sich paarweise in O, O' und in zwei Kreispunkten treffen.

Wir denken OO' vertical (vgl. die Figur), die eine Fläche als Ellipsoid, die andere als Kugel. Die Transformationen dieser Flächen in sich selbst setzen sich aus Rotationen um die gemeinsame Axe OO' und um deren in Bezug auf die Flächen conjugirte Gerade, die unendlich ferne Horizontale, zusammen. Im erstern Fall hat man, wenn man nur reelle Ebenen in's Auge fasst, weiter keine Einschränkung, jedoch im letztern. Diese verschieben nämlich alle

Horizontalebenen unter sich, dürfen aber unter ihnen die durch O und O' gehenden nicht verändern. Man überzeugt sich, dass hiebei auch das Vierseit der gemeinsamen Erzeugenden unverändert bleibt.



Ein Punkt P der innern Fläche sei fixirt. Dreht man seinen Meridian unendlich wenig, so bewegt er sich horizontal auf seinem Parallelkreis. Unsere Curvengleichung giebt dann für ihn eine Bewegung in dem neuen Meridian, so dass er nach P_1 kommen möge. Dann bewegen sich alle Raumpunkte analog. Jeder dreht sich um denselben Winkel horizontal wie P und stellt sich dann in dieselbe Verticalebene ein wie P_1 (ferner bleibt er in der Fläche des Büschels, die durch ihn bestimmt ist). Der Punkt P' z. B. auf der Kugel, der mit P in derselben Parallelkreis- und Meridianebene liegt, bewegt sich nach P_1', so dass diese Beziehung zu P_1 dieselbe ist wie vorhin die von P' zu P. Beschreibt P eine von den singulären Linien umhüllte Curve, so thut das auch P'; die Figur giebt hiervon ein Bild.

Sind unsere Curven algebraische Raumcurven von ungerader Ordnung, so werden sie in diesem Fall stets imaginär. Sind dieselben transcendent, so werden sie sich im Allgemeinen um die Punkte O und O' unendlich oft herumwinden. Ein bekanntes Beispiel einer solchen ist die Loxodrome auf der Kugel, welche überall die Meridiane unter constantem Winkel trifft (vgl. hier insbesondere die angeführte Arbeit von Klein und Lie, sowie auch Plücker, Neue Geometrie, S. 61. Note).

Sehr einfach stellen sich diese Loxodromen in Liniencoordinaten dar. Wir nehmen wieder die eine Congruenz der singulären Linien und schreiben sie in der Form:

$$p_{13} \cdot p_{42} = K p_{14} p_{23}$$
$$p_{14} = A p_{23}$$

(vgl. die Formeln (4)). Wir führen jedoch statt der p_{ik} andere Coordinaten ein. Es ist nämlich möglich, eine Gerade durch vier Parameter auszudrücken, die wir mit A, B, C, K bezeichnen mögen und welche zu den p_{ik} in der folgenden Beziehung stehen:

$$A = \frac{p_{14}}{p_{23}}, \quad B = \frac{p_{12}}{p_{34}}, \quad C = \frac{p_{13}}{p_{42}}, \quad K = \frac{p_{13} \cdot p_{42}}{p_{14} \cdot p_{23}}.$$

Ist eine Gerade p gegeben, so sind die Grössen A, B, C, K eindeutig bestimmt, dagegen ist das Umgekehrte nicht der Fall. Sind nämlich die Werthe der vier Parameter bekannt, so ist die gesuchte Gerade der Schnitt von drei linearen Complexen und einem tetraedralen, oder der Schnitt des tetraedralen mit der Erzeugung (A, B, C) einer Fläche zweiten Grades. Es werden also vier sich nicht schneidende Gerade dargestellt, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen.

Eine solche Coordinatenbestimmung wurde zuerst von Klein eingeführt*). Die einfach unendliche Complexschaar, die dazu verwandt wird, nennt man ein *Involutionssystem* (das unsrige ist nicht das allgemeine). Seine wesentlichen Eigenschaften sind die folgenden: Eine jede Raumgerade wird durch einen Parameter im vierten Grad bestimmt, so dass also durch sie vier Complexe der Schaar gehen. Diese vier liegen paarweise in Bezug auf die Gerade in Involution.

In unserm Fall sind nun A und K zwei constante Grössen, und die zweifach unendlich vielen Geraden der Congruenz sind durch zwei Parameter, B und C, dargestellt. — Es ist nothwendig, die p_{ik} durch die vier Parameter auszudrücken. Es ergiebt sich:

$$p_{12} = \pm\sqrt{-AB(1+K)}\,, \qquad p_{34} = \pm\sqrt{-\frac{A}{K}(1+K)}\,,$$

$$p_{13} = \pm\sqrt{AKC}\,, \qquad p_{42} = \pm\sqrt{\frac{A}{K}C}\,,$$

$$p_{14} = A\,, \qquad p_{23} = 1\,.$$

Die Vorzeichen in p_{12} und p_{34} ändern sich zusammen, ebenso in p_{13} und p_{42}. — Es sind alle Linien singulär, für welche A und K die gegebenen Werthe haben. Wir sehen daher A und K fortan als constant an. — Zunächst ist die Bedingung, dass die Gerade p_{ik} und die unendlich nahe $p_{ik} + dp_{ik}$ sich schneiden, die folgende:

$$dp_{12} \cdot dp_{34} + dp_{13} \cdot dp_{42} + dp_{14} \cdot dp_{23} = 0\,.$$

Nun benutzen wir die obigen Formeln zwischen den p und den vier Parametern und drücken aus, dass die Geraden A, B, C, K und A, $B + dB$, $C + dC$, K sich schneiden. Es ergiebt sich ohne Weiteres:

$$(1+K)\left(\frac{dB}{B}\right)^2 - K\left(\frac{dC}{C}\right)^2 = 0\,.$$

Indem wir integriren, fassen wir unendlich viele singuläre Linien zusammen, die eine Developpable bilden. In unseren neuen Coordinaten hat diese die Gleichung:

---

*) Vgl. „*Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*" diese Annalen Bd. V, S. 272.

$$B = cC^{\pm\sqrt{\frac{K}{1+K}}},$$

wo c eine willkürliche Constante. Für jeden Werth c hat man eine Developpable dargestellt; man erhält sie alle, wenn man c von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändert.

4. In dem Falle [111(111)], S. 158, bestand die Singularitätenfläche doppelt zählend aus einer Fläche zweiten Grades, und die singulären Linien bildeten vier lineare Congruenzen etc. Wenn noch zwei einfache Elementartheiler zu einer Wurzel gehören, also für *[1(11)(111)]*, so treten noch zwei Doppelgerade auf. Es fallen dann je zwei Congruenzen in eine specielle zusammen, wie wir sehen werden*). — Wir haben zunächst:

$$\Omega \equiv \lambda_4 (x_4^2 + x_5^2) + \lambda_6 x_6^2 = 0,$$
$$\Omega' \equiv \lambda_4^2 (x_4^2 + x_5^2) + \lambda_6^2 x_6^2 = 0.$$

Die Regelschaar $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ besteht aus doppelten Complexgeraden, die vierfache singuläre Linien sind. — Die Congruenz singulärer Linien ist:

$$(x_4 + ix_5)(x_4 - ix_5) = x_6 = 0.$$

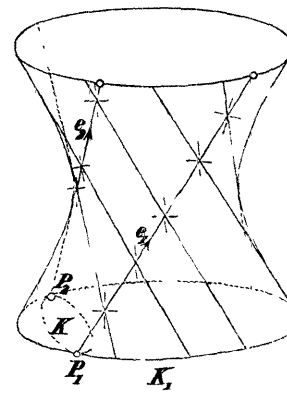
Die Complexe $x_4 + ix_5 = 0$ und $x_4 - ix_5 = 0$ sind aber specielle, nämlich: $p_{23} = 0$ und $p_{14} = 0$. Ihre Directricen schneiden die vorige Regelschaar von doppelten Complexgeraden. Mit $x_6 = 0$ ergeben diese Complexe offenbar zwei specielle lineare Congruenzen. Auf diese Weise finden wir: *Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zu zählende Fläche zweiter Ordnung. Ihre eine Erzeugung besteht aus vierfachen singulären Linien. Von der andern Erzeugung sind zwei: e_1, e_2, ausgezeichnet, indem alle Tangenten der Fläche, welche irgend eine von ihnen treffen, doppelte singuläre Linien sind.*

Die Fläche als Brennfläche der singulären Linien hat sich in zwei Erzeugende der Singularitätenfläche zusammengezogen. In denselben berühren Complexkegel und Complexkegelschnitte diese Fläche. In der Figur auf S. 169 sind diese einfachen Verhältnisse dargestellt. In einer Schnittebene ist K der Complexkegelschnitt, K_1 der Schnitt mit der Fläche zweiter Ordnung.

Sind die Singularitätenfläche F und die beiden Erzeugenden e_1 und e_2, welche die Directricen der beiden Congruenzen singulärer Linien sind, gegeben, so ist der Complex noch nicht bestimmt, sondern es sind noch unendlich viele möglich. Ich lege nämlich eine

*) Es ist sehr leicht, den Vergleich weiter zu führen, besonders an der Hand der Figuren auf S. 159. Man stelle sich vor, die Geraden s_1 und s_2 fallen zusammen, anderseits auch s_3 und s_4.

Schnittebene (vgl. die Figur), welche aus F den Kegelschnitt K, aus e_1 und e_2 die Punkte P_1 und P_2 schneidet. Dann habe ich in dieser Ebene ein Kegelschnittbüschel (mit den doppelten Grundpunkten P_1 und P_2); jeder Kegelschnitt desselben kann als Complexkegelschnitt gewählt werden. Die Wahl desselben entspricht der Festsetzung des Werthes einer absoluten Invariante des Complexes. Ist der Kegelschnitt gewählt, so ist *die Erzeugung des Complexes* sehr einfach. Ich drehe eine Ebene je um eine der Tangenten dieses Kegelschnittes und habe in jeder Ebene für den darin liegenden Complexkegelschnitt fünf Tangenten gegeben. Hierdurch wird auch eine gewisse Anschauung des Complexes erzielt. — Ferner ergiebt sich aus der Construction, dass der Complex 12 Constante hat, von denen eine absolute Invariante ist. Hieraus ergiebt sich, dass der Complex durch vierfach unendlich viele Transformationen in sich übergeht.



5. Für den Fall *[(11)(11)(11)]* kann man die Gestalt der Singularitätenfläche leicht übersehen. Im Vergleich mit früheren Fällen (n. 1. und 3.) zeigt es sich, dass sechs Doppelgerade vorhanden sind, nämlich die Kanten eines Tetraeders. *Dieses Tetraeder ist selbst die Singularitätenfläche* und dann folgt auch sofort: *Die Seitenflächen des Tetraeders sind gebildet von singulären Punkten und seine Ecken umhüllt von singulären Ebenen.* Es ist dies der bekannte *tetraedrale Complex**).

Die Ecken und Seitenflächen des Tetraeders sind Ausnahme-Punkte und Ebenen etc. — Die allgemeine Gleichung eines solchen Complexes in den Coordinaten p_{ik} ist:

$$\Omega \equiv a p_{12} \cdot p_{34} + b p_{13} \cdot p_{42} + c p_{14} \cdot p_{23} = 0 ,$$

Die Complexgeraden treffen das Tetraeder unter constantem Doppelverhältniss, welches eine absolute Invariante des Complexes ist. Das Tetraeder selbst hat 12 Constante, der Complex ist durch dasselbe und durch die absolute Invariante völlig bestimmt, hat also 13 Constante. Dreifach unendlich viele *Raumtransformationen führen den Complex in sich selbst über.* (In Punktcoordinaten sind diese Transformationen: $y_i' = a_i y_i$) **).

---

*) Vgl. Chasles, Reye, Müller, Lie.

**) Dieser Complex kann insbesondere (vgl. Lie in den Göttinger Nachrich-

6. Der letzte Fall in dieser kanonischen Form, den wir betrachten, ist *[(111)(111)]*. Er ist dargestellt durch:

$$\Omega \equiv \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_4 (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) = 0 .$$

Mit Hülfe von $P = 0$ kann man in $\Omega = 0$ das eine oder das andere Glied fortschaffen und sieht, dass von einer Fläche zweiten Grades beide Erzeugungen vierfache singuläre Linien sind. Diese Fläche bildet doppelt zählend die Singularitätenfläche. Jeder ihrer Punkte ist Doppelpunkt des Complexes; es gehören alle ihre Tangenten dem Complexe an: *Der Complex besteht aus allen Tangenten einer Fläche zweiten Grades**); *er ist ein specieller. Die Erzeugenden sind doppelte Complexgeraden; er hat 9 Constante.*

Ein specieller Complex besteht immer aus den Geraden, die eine Fläche umhüllen**), wobei Curven und Developpable gleichmässig mit zu den Flächen gezählt werden müssen. Jede seiner Geraden ist singulär etc.

III.

Zweite kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2 x_5 x_6 = 0$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + 2 \lambda_5 x_5 x_6 + x_5^2 = 0.$$

In dieser kanonischen Form kommen *vier einfache und ein zweifacher Elementartheiler* vor. Mit dem doppelten Elementartheiler tritt eine Doppelgerade auf. In dem allgemeinsten Fall [11112] ist sie die einzig vorhandene; dieser Complex steht von unsern 48 Complexen

---

ten 1870) auf folgende Weise erzeugt werden: Man wendet auf eine bestimmte Raumgerade dreifach unendlich viele lineare Raumtransformationen an, die unter sich vertauschbar sind und die ein vollständiges Tetraeder in sich überführen; der Ort der Geraden ist ein tetraedraler Complex. Dieser Process giebt auch dann noch irreducible Complexe zweiten Grades, wenn von den Tetraederebenen beliebig welche zusammenfallen. Wir erhalten auf diese Weise *vier directe Ausartungen des tetraedralen Complexes.* — Fallen *zwei* Ebenen zusammen, so hat man den Fall [(11)(22)], n. 29. Sind *drei* vereinigt, so wird [(33)], n. 47. erzeugt; bei *vier* zusammengefallenen [(123)], n. 38. Sind endlich die vier Ebenen *paarweise* identisch, so erscheint [(11)(112)], n. 14. Der erste Fall kommt in der That in der Mechanik als Ausartung des tetraedralen vor. — Das Tetraeder ist auch bei den ausgearteten Fällen immer noch die Singularitätenfläche.

Auf diese letzteren Complexe wurden Klein und Lie bei Gelegenheit von Untersuchungen über unendlich kleine Transformationen von Gebilden in sich selbst geführt, die sie im Auszuge in den Comptes rendus 1870 veröffentlicht haben. Von Herrn Klein erhielt ich auch die Gleichungen der betr. Complexe.

*) Vgl. Klein Math. Annalen II. S. 209.

**) Vgl. Pasch a. a. O. § 9.

dem allgemeinsten am nächsten. — Indem wir die 3 zerfallenden Complexe ausschliessen, kommen hier noch die folgenden *neun Fälle* vor:

[11112], [111(12)], [11(11)2], [11(112)], [1(11)(12)], [1(111)2], [(11)(11)2], [(11)(112)], [(111)(12)].

Von den Fundamentalcomplexen sind zwei, $x_5 = 0$ und $x_6 = 0$, speciell. Ihre Directricen gehören den andern an. — Beim Uebergang zu den p_{ik} benutzen wir die folgende Substitution:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = p_{13} + p_{42}\,, \qquad x_5 = p_{14}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42})\,, \qquad x_6 = 2\,p_{23}\,.$$

7. Der Complex *[11112]* ist dargestellt durch:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \lambda_3^2 x_3^2 + \lambda_4^2 x_4^2 \qquad = 0\,.$$

Die Doppelwurzel λ_5, die zum doppelten Elementartheiler gehört, ist als Null angenommen. — In dieser Darstellung ist ferner der Fundamentalcomplex $x_5 = 0$ vor dem ursprünglich gleichberechtigten $x_6 = 0$ ausgezeichnet. Seine Directrix gehört allen in Ω (und Ω') vorkommenden Fundamentalcomplexen an und ist in Folge dessen *Complex-Doppelgerade* (und vierfache singuläre Linie). Eine weitere Doppelgerade kommt nicht vor.

Die Singularitätenfläche hat die Gleichung:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)(y_1^4 + y_4^4)$$
$$- 4\lambda_3\lambda_4(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) - 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_4)(y_1^2 y_3^2 + y_4^2 y_2^2)$$
$$+ 2\left\{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) - 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4)\right\} y_1^2 y_4^2$$
$$+ 8\left\{\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_2)\right\} y_1 y_2 y_3 y_4 = 0\,.$$

Es ist $y_1 = y_4 = 0$, die Directrix von $p_{14} = 0$, resp. $x_5 = 0$, Doppelgerade. Um die Fläche zu untersuchen, lege man durch dieselbe die Ebene $y_4 = \mu y_1$. Die Betrachtung der dabei auftretenden Kegelschnitte ergiebt die folgenden Resultate:

Jeder Kegelschnitt ergiebt für die Doppelgerade $(A_2\,A_3)$ einen Pol, dessen Ort eine Gerade $(A_1 A_4$, Kante unsers Tetraeders) ist. Diese Gerade sei hier und im Folgenden als die *„adjungirte Gerade"* (zur Doppelgeraden) bezeichnet.

Unter den Kegelschnitten sind vier, die in Punktepaare zerfallen etc.

Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Plücker'sche Complexfläche). — Der Complex hat 18 Constante.*

---

*) Kummer giebt diese Particularisation seiner allgemeinen Fläche selbst

Diese Fläche steht zwischen der Kummer'schen Fläche (111111) und der Singularitätenfläche von [1111(11)] in der Mitte. Sie geht aus der ersteren hervor, wenn in jener 8 Doppelpunkte paarweise in einer Geraden zusammen fallen. Diese Punkte sind die Cuspidalpunkte der Complexfläche. Fallen die übrigen 8 von den 16 Knotenpunkten der Kummer'schen Fläche ebenso paarweise in einer weiteren Geraden (in der adjungirten) zusammen, so hat man die Linienfläche des Falles [1111(11)] mit ihren 8 Cuspidalpunkten.

Das Coordinatensystem hat zu der Fläche eine möglichst einfache Lage. Eine Kante desselben ist die Doppelgerade, ihre gegenüberliegende die adjungirte. Auf beiden hat man die vier Schnittpunkte mit den einfachen Geraden der Fläche paarweise harmonisch zu den Coordinatenecken gelegen. Letztere sind also die Doppelpunkte je einer durch die resp. vier Punkte bestimmten Involution. Da sich aber die Punkte beider Geraden in bestimmter Weise (durch die einfachen Geraden) zugeordnet sind, so ist diese Wahl auf drei verschiedene Weisen möglich. Dem entsprechend kann man auch die Liniencoordinaten x in die p_{ik} auf drei wesentlich verschiedene Weisen so transformiren, wie es eben geschah.

8. In dem Fall *[111(12)]* gehören ein einfacher und der doppelte Elementartheiler zu derselben dreifachen Wurzel. — Wir wollen diesen Fall dadurch aus dem vorigen ableiten, dass wir λ_4 Null setzen. Wir erhalten insbesondere die folgende Singularitätenfläche:

$$\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)(y_1^4+y_4^4) - 4\lambda_1\lambda_2\lambda_3(y_1y_3-y_4y_2)^2 + 2(\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)-2\lambda_1\lambda_2)y_1^2y_4^2 = 0.$$

An Stelle der früheren Doppelgeraden $y_1 = y_4 = 0$ ist hier eine *Selbstberührungsgerade* der Fläche aufgetreten. Dieselbe hat (für den Complex) die Bedeutung von *zwei unendlich nahen Complexgeraden.* — Cayley betrachtete bei Linienflächen zuerst solche zwei unendlich nahe Doppelgerade, er nennt sie in der Regel *„doppelte Doppelgeraden“**). Wir wollen uns nur merken, dass eine solche (für den Complex und die Singularitätenfläche) auftritt, wenn ein einfacher und ein doppelter Elementartheiler zu derselben Wurzel gehören.

Wir erhalten ein deutliches Bild von der Gestalt der Singularitätenfläche in der Nähe dieser Geraden, wenn wir die Fläche zweiter Ordnung hinzunehmen:

$$y_1y_3 - y_4y_2 = 0.$$

---

an. Vgl. a. a. O. S. 70. — Eine eingehende Behandlung giebt Plücker in der *„Neuen Geometrie“*.

*) Vgl. Cayley: „On skew surfaces, otherwise scrolls“. Phil. Trans. 1863, 64.

Längs $y_1 = y_4 = 0$ fallen die Fortschreitungsrichtungen dieser Fläche und unserer Singularitätenfläche zusammen.

Dass unsere Gerade Selbstberührungsgerade und nicht etwa dreifache Gerade ist, erkennt man aus dem Vorhergehenden in Verbindung damit, dass eine Ebene durch sie aus der Fläche noch zwei Gerade ausschneidet. Wir erhalten auf diese Weise:

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierten Grades mit einer Cayley'schen doppelten Doppelgeraden, die Gattung XII von Cremona. Der Complex hat 16 Constante.

Es ist leicht zu beweisen, dass dies die allgemeine Fläche der genannten Cremona'schen Gattung ist. — Beim Uebergang von der allgemeinen Complexfläche zu dieser rückt die adjungirte Gerade an die Doppelgerade unendlich nahe heran. Die noch vorhandenen 8 Doppelpunkte rücken paarweise in Cuspidalpunkte zusammen.

9. Für die Verbindung *[11(11)2]* der Elementartheiler lässt sich die Gestalt der Singularitätenfläche sofort angeben. Neben der Doppelgeraden und ihrer adjungirten hat man hier noch zwei Doppelgerade, die von der ersteren geschnitten werden. — In dem Fall [1111(11)] hatte man eine Linienfläche mit zwei doppelten Leitgeraden, hier tritt ausserdem eine doppelte Erzeugende auf. Von Cremona XI kommen wir also zu V. Es ist jedoch besonders zu beweisen, dass wir hier die allgemeine Gattung V vor uns haben. Wir sehen hier nämlich, dass der Ort der Pole der Doppelerzeugenden in Bezug auf die Kegelschnitte der Fläche eine Gerade ist, welche die doppelten Leitgeraden trifft. Cayley und Cremona geben aber für ihre allgemeinen Flächen eine solche Eigenschaft nicht an.

In dem allgemeinsten Fall einer solchen Fläche hat man in jeder Ebene durch die Doppelerzeugende einen Kegelschnitt und seinen Pol P. Dieser Punkt P beschreibt eine Raumcurve bei der Drehung der Ebene des Kegelschnittes; es soll deren Ordnung bestimmt werden. Die Frage nach der Ordnung ist identisch mit der Frage nach der Anzahl der Punkte P, die auf der Doppelerzeugenden liegen. Liegen n darauf, so ist die Ordnung $n + 1$. — In unserm allgemeinen Fall aber wird die Doppelerzeugende nie von einem Kegelschnitt berührt*) als im uneigentlichen Sinn von den beiden zerfallenden, den Doppelgeraden. Suchen wir also die Pole für diese zerfallenden Kegelschnitte. Indem wir uns ihnen als Gränzlage annähern, finden wir, dass das Paar der Cuspidalpunkte auf jeder Doppelgeraden die Scheitel des ausgearteten Kegelschnitt's vorstellt. Diese Cuspidalpunkte sind aber im allgemeinen Fall verschieden und keiner liegt auf der Doppelerzeugenden. Der Pol

*) Vgl. Cremona a. a. O. §§ 6., 7.

in dieser Ebene liegt also keinesfalls auf der Doppelerzeugenden. — Es ist also $n = 0$, die Ordnung unserer Curve 1, d. h. *der Ort der Pole ist auch im allgemeinen Fall eine Gerade, welche die doppelten Leitgeraden in zwei bekannten Punkten trifft**). — Wir finden überhaupt:

Der Complex hat drei Doppelgerade. Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Fläche der Gattung V von Cremona's Linienflächen. Der Complex hat 16 Constante.

10. Der nun zu behandelnde Fall *[11(112)]* ist ganz analog [111(111)] (S. 158) der ersten kanonischen Form. Wir haben:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + x_3^2 = 0 .$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 \qquad = 0 .$$

Die Congruenz der singulären Linien zerfällt auch hier in die folgenden vier linearen:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \pm i\lambda_2 : \pm \lambda_1 : \pm \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} .$$

Wir werden unten die Directricen aufsuchen und uns jetzt zur Singularitätenfläche wenden. — Die Leitgerade von $x_5 = 0$ gehört $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ an, sie erleidet durch dieselben zwei projectivische Zuordnungen ihrer Punkte und Ebenen. Zweimal hat man für beide Fälle dieselbe Zuordnung von zwei Elementen. Wir erhalten auf diese Weise die beiden Büschel $x_1 = x_2 = x_5 = 0$, bestehend aus *doppelten Complexgeraden*. Daraus folgt: *Der Complex hat zwei Büschel von Doppelgeraden, deren Mittelpunkte und Ebenen doppelt zählend die Singularitätenfläche bilden.*

Wie wir sehen werden, geht dieser Fall aus [111(111)] direct hervor, wenn die dort auftretende Fläche zweiten Grades in zwei Ebenen und zwei Punkte ihrer Schnittlinie zerfällt. Diese sind an unserm Coordinatentetraeder $y_1 = 0$, $y_4 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ (A_2, A_3). Als Erzeugende der zerfallenden Fläche sind die vier Büschel $(y_1 = 0, u_2 = 0)$, $(y_1 = 0, u_3 = 0)$ etc. aufzufassen. Zwei von ihnen, $(y_1 = 0, u_2 = 0)$ und $(y_4 = 0, u_3 = 0)$ bilden die *„eine Erzeugung", die aus Doppelgeraden besteht*, die anderen beiden bilden die zweite Erzeugung der zerfallenen Fläche (die dem Complex nicht angehört).

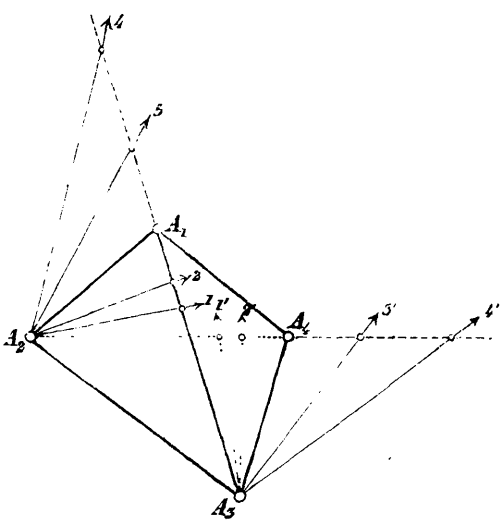
Die Directricen der vier Congruenzen singulärer Linien finden sich wieder beim Uebergang zu den p_{ik}. Sie seien bezeichnet mit 1, 1′; 2, 2′; 3, 3′; 4, 4′ (wo allemal k, k' zu derselben Congruenz gehören). Dann hat man für die Coordinaten die Tabelle:

---

*) In dem allgemeinsten Fall einer Doppelgeraden auf einer Fläche vierter Ordnung wäre dieser Ort eine *Raumcurve fünfter Ordnung* mit der Doppelgeraden als vierfacher Secante.

	p_{12}	p_{34}	p_{13}	p_{42}	p_{14}	p_{23}
1	-2α	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
1′	0	-2α	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
2	$+2\alpha$	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
2′	0	$+2\alpha$	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
3	-2α	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
3′	0	-2α	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
4	$+2\alpha$	0	0	0	0	$\lambda_2\left(i-\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$
4′	0	$+2\alpha$	0	0	0	$\lambda_2\left(i+\frac{\alpha}{\lambda_1}\right)$

Es ist dabei α eine der Grössen $\pm\sqrt{\lambda_4\lambda_2(\lambda_2-\lambda_4)}$. — Die nebenstehende Figur giebt ein Bild von der Lage dieser Directricen im Raume. 1234 liegen in $y_4=0$ und gehen darin durch A_2. Ferner liegen sie paarweise harmonisch zu A_2A_1 und A_2A_3. Analog verhalten sich 1′2′3′4′ in $y_1=0$ durch A_3.



Diese Directricen gehören also derjenigen Erzeugung der „Fläche zweiten Grades“ an, die nicht aus doppelten Complexgeraden besteht, ganz wie bei [111(111)]. Die Construction des Complexes ist wie in jenem allgemeineren Fall. — Seien $iklm$ die Zahlen 1 2 3 4, so bedeuten $i, i', k, k', l, l', m, m'$ unsere Directricen. Wie bei [111(111)] sind von ihnen *vier erfüllt mit singulären Punkten, die andern vier mit singulären Ebenen. Erstere seien i, k, l′, m′, letztere sind dann i′, k′, l, m.* Wir werden später diese Bezeichnung oft anwenden. — In $ikl'm'$ durchsetzen die Complexkegelschnitte die Ebenen $y_1=0$ und $y_4=0$, und berühren dort die singulären Linien ihrer Ebenen; $i'k'lm$ geben

die Tangentialebenen der Complexkegel an den betreffenden singulären Geraden etc.

Die Brennfläche der singulären Geraden hat sich in 8 Strahlen zusammengezogen, von denen je vier in einer Ebene durch einen Punkt gehen. Vier von den 8 Geraden enthalten die singulären Punkte der singulären Linien, die andern vier die singulären Ebenen. Zwei Büschel von Geraden treffen alle Directricen, sie bestehen aus doppelten Complexgeraden. — Der Complex hat 13 Constante.

11. Die Complexe unter der Form *[1(11)(12)]* gestalten sich sehr einfach. Die Verbindung (12) veranlasst eine „doppelte Doppelgerade", ferner (11) zwei Doppelgerade, welche erstere treffen. *Der Complex hat vier Doppelgerade, die ein windschiefes Vierseit bilden, von denen zwei Gegenseiten benachbart sind. Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades, die sich nach einer Erzeugenden berühren, und die noch zwei verschiedene (der andern Erzeugung) gemein haben. Der Complex hat 14 Constante.*

Das übrige Verhalten des Complexes ist wie bei [11(11)(11)] (S. 160). Die Construction ist ganz so wie dort; dabei gelten die benachbarten Doppelgeraden als ein Gegenseitenpaar des Vierseits der Doppelgeraden, die nicht consecutiven bilden das andere. — Der frühere Complex hatte 15 Constante, darunter eine absolute Invariante; er erlaubte also einfach unendlich viele Transformationen in sich selbst. Hier hat man 14 Constante, wovon eine absolute Invariante ist; dieser Complex erlaubt also zweifach unendlich viele Transformationen in sich selbst.

12. Für *[1(111)2]* haben wir die Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + 2\,\lambda_5 x_5 x_6 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + 2\,\lambda_5 x_5\,(\lambda_5 x_6 + x_5) = 0\,.$$

Es ist hier, im Gegensatz zu den vorigen Fällen, λ_5 nicht als Null angenommen, dafür aber die dreifache Wurzel λ_2. — Die singulären Linien erfüllen insbesondere die Gleichung $\Omega' - \lambda_1\,\Omega = 0$, also:

$$x_5\,\{2\,\lambda_5\,(\lambda_5 - \lambda_1)\,x_5 + (2\,\lambda_5 - \lambda_1)\,x_6\} = 0\,.$$

$x_5 = 0$ ist ein specieller Complex, dessen Directrix der Regelschaar $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ angehört. Die Regelschaar $x_1 = x_5 = x_6 = 0$, welche die eben genannte schneidet, besteht aus doppelten Complexgeraden und vierfachen singulären Linien, d. h.:

Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zu zählende Fläche zweiten Grades. Alle ihre Tangenten, welche eine bestimmte Erzeugende treffen, sind doppelte singuläre Linien. Die Erzeugung unserer Fläche, die sich unter dieser befindet, besteht aus doppelten Complexgeraden. Ausserdem hat man noch zwei allgemeine lineare Congruenzen singulärer

Linien, deren Directricen derselben Erzeugung angehören, wie die schon ausgezeichnete Erzeugende. — Der Complex hat 13 Constante.

Wir haben hier eine directe Degeneration des Falles [111(111)] (S. 158) vor uns. Vier von den 8 dort vorkommenden Directricen, z. B. 1, 1′, 2, 2′, fallen zusammen, also in der zweiten Figur auf S. 159, die Punkte P_1, P_1', P_2, P_2'. Die Kegelschnitte K_1 und K_2 berühren sich. Wie von jenem Complex, haben wir also auch von diesem eine directe Anschauung und wir können auch diesen einfach erzeugen. Sind nur die ausgezeichnete Erzeugende $e = (1\,1'\,2\,2')$ und drei der noch übrigen gegeben, so ist die Construction entweder durch Complexkegelschnitte (wenn gegeben sind e, 3, 3′, 4) oder durch Complexkegel (wenn e, 3, 3′, 4′ gegeben) sehr einfach. (Dabei sollen auch hier 3 und 4 Reihen singulärer Punkte, 3′ und 4′ Axen singulärer Ebenen sein.) — Die Transformationen des Complexes in sich selbst sind noch wie bei [111(111)].

Unser Fall giebt als Degeneration den Fall [1(111)(11)] (S. 168), es fallen dann auch noch 3, 3′, 4, 4′ zusammen.

13. Bei der Verbindung *[(11)(11)2]* der Elementartheiler werden wir nebst der ursprünglichen Doppelgeraden noch vier weitere haben, welche diese schneiden. Die Geraden (11)(11) bilden ein windschiefes Vierseit, die Gerade 2 soll alle treffen, verbindet also 2 Ecken dieses Vierseits. Die Doppelgeraden haben demnach eine Gruppirung wie fünf Kanten eines Tetraeders. Wir finden das folgende Resultat:

Die Singularitätenfläche löst sich in eine Fläche zweiten Grades mit zweien ihrer Punkte und den Tangentialebenen in diesen auf. Die Punkte liegen nicht auf derselben Erzeugenden. Neben diesen Punkten und Ebenen hat man noch eine irreducible Congruenz zweiten Grades von singulären Linien, die aus den Tangenten unserer Fläche durch einen allgemeinen linearen Complex ausgeschnitten werden, welcher die Kanten des windschiefen Vierseits enthält.

Die irreducible Congruenz singulärer Linien kann auch als Schnitt eines allgemeinen linearen mit einem tetraedralen Complex dargestellt werden, dessen Tetraeder durch die fünf Doppelgeraden bezeichnet ist.

Der Complex erlaubt zweifach unendlich viele Transformationen in sich selbst, er ist durch *14 Constanten* bestimmt (unter denen eine absolute Invariante vorkommt).

Wir wollen diesen Complex noch mit [11(11)(11)] (S. 160) vergleichen. Eine der dort auftretenden Flächen zweiten Grades zerfällt in zwei Ebenen und zwei Punkte. Der Vergleich giebt ohne Weiteres die Construction dieses Complexes; auf S. 162 löst sich der Kegelschnitt K_2 in zwei Gerade auf. — Aus unserm Fall erhalten wir dagegen durch Specialisirung den tetraedralen. Es löst sich dann die vorhandene Fläche zweiten Grades auch noch in ein Ebenen- bez. Punktepaar auf.

14. Der Fall [(11)(112)] verhält sich analog mehreren schon betrachteten Fällen. Wir haben die Darstellung:

$$\Omega \equiv \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 \equiv 4 \lambda_1 \, p_{12} \cdot p_{34} + p_{14}^2 = 0,$$
$$\Omega' \equiv \lambda_1^2 (x_1^2 + x_2^2) \qquad \equiv 4 \lambda_1^2 p_{12} \cdot p_{34} \cdot$$

Für die singulären Linien hat man $p_{12} = p_{14} = 0$ und $p_{14} = p_{34} = 0$. Es sind das zwei doppeltzählende zerfallende Congruenzen. Ihnen sind zwei Büschel doppelter Complexgeraden gemeinsam.

Der Complex hat zwei Büschel doppelter Complexgeraden. Ihre Mittelpunkte und Ebenen (deren Axe durch die Mittelpunkte geht) bilden doppelt zählend die Singularitätenfläche; als Liniengebilde geben sie, ebenfalls doppelt zählend, die singulären Linien. Der Complex besitzt 11 Constante.

Dieser Complex geht aus [1(11)(111)] (S. 168) hervor, wenn die dort auftretende Fläche zweiten Grades in ein Ebenen- resp. Punktepaar sich auflöst. — Aus [11(112)] (S. 174) geht dieser Fall hervor, wenn i und k in $A_1 A_2$, $i' k'$ in $A_2 A_3$, l und m in $A_2 A_3$, l' und m' in $A_3 A_4$ hineinfallen. Die Construction des Complexes ändert sich dem entsprechend. — Einen ähnlichen Fall werden wir ferner später betrachten, nämlich [2(112)] (S. 187); die dort auftretenden Directricen fallen hier theilweise zusammen.

Die Singularitätenfläche kann auch hier als zerfallende Fläche zweiten Grades aufgefasst werden. Eine Erzeugung, in Gestalt von zwei Büscheln, besteht aus doppelten Complexgeraden. Die Complexkegelschnitte berühren die beiden Ebenen an zwei bestimmten Geraden (p_{12} und p_{34}) etc.

15. Der letzte Fall dieser kanonischen Form *[(111)(12)]* ist dargestellt durch die folgenden Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_4 (x_1^2 + 2 x_5 x_6) + x_5^2 = 0, \quad \Omega' \equiv \lambda_4^2 (x_4^2 + 2 x_5 x_6) + 2 \lambda_4 x_5^2 = 0.$$

Wir erhalten als Resultat:

Die Singularitätenfläche ist eine doppelt zählende Fläche zweiten Grades. Alle ihre Tangenten längs einer bestimmten Erzeugenden sind vierfache singuläre Linien. Die unter ihnen vorkommenden Erzeugenden zweiter Art, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, sind doppelte Complexgeraden. Der Complex hat 11 Constante.

In [111(111)] (S. 159) fallen alle Directricen 1, 1' · · zusammen. Wir erhalten als Folge dessen: *Die Complexkegelschnitte osculiren die Singularitätenfläche vierpunktig an der ausgezeichneten Erzeugenden.* Ebenso verhalten sich die Complexkegel. — Sind die Fläche zweiten Grades und die ausgezeichnete Erzeugende gegeben, so kennt man für jeden Complexkegelschnitt vier Punkte; eine absolute Invariante be-

stimmt ihn. Wir sehen so, dass der Complex fünffach unendlich viel Transformationen in sich erlaubt. — Ich unterlasse es, an die Zwischenstufen von [111(111)] und diesem Fall zu erinnern.

IV.

Dritte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + 2\,x_4 x_6\,,$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4\,(x_5^2 + 2\,x_4 x_6) + 2\,x_4 x_5 = 0\,.$$

In dieser kanonischen Form hat man einen *dreifachen Elementartheiler*. — Bei einem zweifachen Elementartheiler trat eine Doppelgerade und eine adjungirte auf; hier fallen beide zusammen; man erhält eine *Rückkehrgerade*.

Von den 7 Fällen dieser kanonischen Form zerfällt einer und es bleiben die folgenden *sechs* zu untersuchen:

[1113], [11(13)], [1(11)3], [1(113)], [(11)(13)], [(111)3].

Als Uebergang von den Linien-Coordinaten x zu den p_{ik} hat man das Folgende:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = \tfrac{1}{i}\,(p_{13} - p_{42})\,, \qquad x_4 = p_{14}\,,$$
$$x_2 = \tfrac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_5 = p_{13} + p_{42}\,, \qquad x_6 = 2\,p_{23}\,.$$

16. Der erste Fall *[1113]* besitzt folgende Singularitätenfläche:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1^4 + y_4^4) - \lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1^3 y_2 - y_3 y_4^3) - 4\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3(y_1 y_3 - y_4 y_2)^2$$
$$- 4(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 - 2\,\lambda_1\lambda_2)\,y_1 y_4 (y_1 y_3 - y_4 y_2) + 2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\,\lambda_3) y_1^2 y_4^2 = 0.$$

Die dreifache Wurzel λ_4 ist dabei als Null angenommen. — Die Gerade $y_1 = y_4 = 0$ ist Rückkehrgerade, denn sie gehört dem Schnitt von $y_1 y_3 - y_4 y_2 = 0$ mit unsererer Fläche dreifach an. Diese Fläche zweiten Grades giebt die Zuordnung der Punkte und Tangentialebenen an der Rückkehrgeraden.

Eine nähere Betrachtung der Kegelschnitte der Fläche (welche die Doppelgerade berühren) ergiebt das Resultat, *dass die Fläche eine Complexfläche ist, deren Leitgerade eine Complexgerade ist**).

Es ist eine deutliche Abstufung von [111111], [11112] zu diesem Fall sichtbar. — Dieser Complex hat *17 Constante*.

17. Beim Uebergang zu [11(13)] wollen wir im vorigen Fall λ_3 Null setzen. Die Singularitätenfläche wird:

---

*) Vgl. Plücker, Neue Geometrie.

$$(\lambda_1-\lambda_2)(y_1^4+y_4^4)+8\lambda_1\lambda_2 y_1y_4(y_1y_3+y_4y_2)+2(\lambda_1+\lambda_2)y_1^2y_4^2=0.$$

$y_1=y_4=0$ ist hier *dreifach* auf der Fläche, diese also eine Linienfläche. — Die dreifache Gerade ist einfache Axe, hat aber zwei stationäre Tangentialebenen, ferner ist sie einfacher Strahl und hat zwei stationäre Punkte. Es sind also auf der einfachen Leitgeraden zwei Erzeugende zusammengefallen. Der dritte Mantel der Fläche an der Doppelgeraden, der nicht überall gleiche Richtung hat, ist wie vorhin bestimmt durch $y_1y_3-y_4y_2=0$. — Wir haben:

Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Gattung X von Cremona's Linienflächen). Der Complex hat 15 Constante.*

Die dreifache Linie der Fläche ist natürlich nicht dreifache Gerade des Complexes, sondern ist *als die Vereinigung von drei Doppelgeraden des Complexes* aufzufassen. Diese kann man kurz bezeichnen als die Leitgerade und die beiden singulären Erzeugenden der Linienfläche (die der ersteren unendlich nahe sind und sie schneiden).

Dieser Complex hat also drei Doppelgerade, die unendlich nahe sind und wo die eine von den beiden andern geschnitten wird.

Der Beweis dessen liegt darin, dass bei [(11)(13)] S. 182) dieselben Doppelgeraden auch auftreten, nebst solchen, die von (11) herrühren, welch letztere aber bekannt sind.

Unsere stationären Ebenen sind $y_1=0$ und $y_4=0$, sie sind verschieden, d. h. man hat hier die allgemeine Fläche X von Cremona.

18. Auch bei [1(11)3] tritt, wie man voraussehen kann, eine Linienfläche auf. Zwei Doppelgerade schneiden eine Rückkehrgerade, d. h.

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche mit zwei doppelten Leitgeraden und einer Rückkehrerzeugenden, also ein Specialfall von Cremona's Gattung V. Der Complex besitzt 15 Constante.

Cremona giebt diesen Specialfall ebenfalls an. Es entsteht, wenn in seiner Construction der Fläche die doppelte Erzeugende den Leitkegelschnitt berührt. — Es mag hier noch auf [11(11)2] (S. 173) hingewiesen werden, dort hatte man die allgemeine Fläche V von Cremona.

19. Bei *[1(113)]* ist gegenüber dem ersten Fall $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_5=0$, was die Gleichungen ergiebt:

$$\Omega\equiv\lambda_1x_1^2+2x_4x_5=0,\qquad \Omega'\equiv\lambda_1^2x_1^2+x_1^2=0.$$

Die Congruenz der singulären Linien zerfällt in $x_1=x_4=0$ doppelt zählend, ferner in: $(\lambda_1x_1+ix_4)(\lambda_1x_1-ix_4)=2\lambda_1x_5-x_4=0$. Die erste Congruenz ist speciell, die andern beiden sind allgemeine

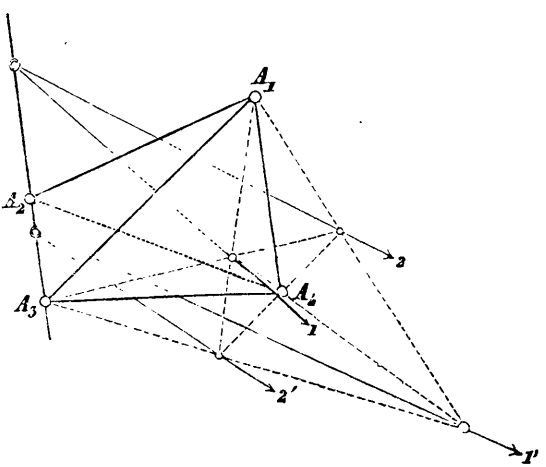
*) Carl Eichler behandelt in seiner Inauguraldissertation: *„Uebertragung eines Steiner'schen Problems von der Ebene auf den Raum"*, Göttingen 1871, besonders die Abbildung dieser Fläche.

lineare. Ihre Directricen liegen in den Ebenen $y_1 + iy_4 = 0$, $y_1 - iy_4 = 0$ (welche doppelt zählend zur Singularitätenfläche gehören). Ferner verlaufen je die beiden, in derselben Ebene liegenden, durch einen und denselben Punkt der Schnittlinie beider Ebenen. Diese Punkte sind $u_2 + iu_3 = 0$, $u_2 - iu_3 = 0$.

Die untenstehende Figur veranschaulicht die Lage der Directricen und die nachfolgende Tabelle giebt ihre Coordinaten.

	p_{12}	p_{34}	p_{13}	p_{42}	p_{14}	p_{23}
1	1	1	$+i$	$+i$	0	$\frac{3i}{2\lambda_1}$
1′	1	1	$-i$	$-i$	0	$\frac{i}{2\lambda_1}$
2	1	1	$+i$	$+i$	0	$-\frac{i}{2\lambda_1}$
2′	1	1	$-i$	$-i$	0	$-\frac{3i}{2\lambda_1}$

1, 1′ sind die Directricen der einen, 2, 2′ der andern Congruenz. Die Directrix der doppelten speciellen ist A_2A_3. Wir haben wieder i und k' erfüllt mit singulären Punkten, i' und k als Axen von singulären Ebenen etc.



Zwei Ebenen E_1, E_2 und zwei Punkte P_1, P_2 ihrer Schnittlinie bilden doppelt zählend die Singularitätenfläche. Die Congruenz singulärer Linien zerfällt in eine doppelt zählende, specielle lineare, deren Directrix die Linie $\overline{E_1 E_2}$ ist, ferner in zwei allgemeine lineare, deren Directricen durch P_1 und P_2 in E_1 und E_2 verlaufen.

Für die Construction des Complexes verweise ich auf [11(112)] (S. 174). Man lasse dort i, k, i', k' unverändert, lasse aber l, m, l', m' an A_2A_3 heran rücken. Dann hat man auch eine Anschauung der speciellen Congruenz A_2A_3. — Die Construction wird dadurch etwas modificirt, bleibt aber im Wesentlichen dieselbe. — Wir können auch hier die zwei Ebenen und Punkte als *zerfallene Fläche zweiten Grades auffassen, deren eine Erzeugung aus doppelten Complexgeraden*

besteht. — Diesen Fall erhält man ferner als eine directe Degeneration von [1(111)2] (S. 176).

Der Complex hat 12 Constante.

20. Den Fall *[(11)(13)]* haben wir schon bei [11(13)] erwähnt. Man hat hier an der Singularitätenfläche fünf Doppelgerade. Ein ebener Schnitt besteht aus einem Kegelschnitt und zwei Geraden, die sich auf demselben schneiden. Wir haben:

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Fläche zweiten Grades F_2 mit zweien ihrer Ebenen E_1 E_2, welche eine Erzeugende e gemein haben, und den Berührungspunkten P_1, P_2 dieser Ebenen. Neben den zerfallenden linearen Congruenzen singulärer Linien hat man noch eine irreducible Congruenz zweiten Grades, die aus den Tangenten von F_2 durch einen allgemeinen linearen Complex ausgeschieden wird. Der Complex hat 13 Constante.

Dass man hier *fünf doppelte Complexgerade* hat, ist evident. Die dreifache Gerade der Singularitätenfläche ist als drei unendlich nahe doppelte aufzufassen. Das sieht man sehr deutlich bei der Ableitung dieses Falles aus dem Fall [(11)(11)2] (S. 177). Dort hat man fünf Doppelgerade, von denen drei in unendliche Nähe rücken, wenn die dort auftretenden beiden Punkte der Singularitätenfläche in eine Erzeugende von F_2 rücken. Dieser Uebergang giebt auch deutlich die Gruppirung der drei unendlich nahen Doppelgeraden, ferner die Construction dieses Complexes. Man erhält z. B. das Resultat, *dass alle Complex-Kegelschnitte und Kegel die F_2 an der Erzeugenden e berühren* (und weiterhin natürlich in noch einem Punkt, die beiden Ebenen E_1 und E_2 aber nur noch uneigentlich).

21. Der Fall *[(111)3]* stellt sich zwischen [(111)12] und [(11$\bar{1}$1)(12)] in die Mitte. Wir haben hier:

Die Singularitätenfläche ist eine Fläche zweiten Grades F_2, doppelt zählend. Alle ihre Tangenten, die eine bestimmte Erzeugende e treffen, sind dreifach singulär. Die Erzeugenden unter ihnen sind vierfache singuläre Linien und doppelte Complexgerade. Es kommt noch eine allgemeine lineare Congruenz singulärer Linien vor, die ebenfalls zwei Erzeugende von F_2, und zwar von derselben Schaar wie e, zu Directricen hat. Der Complex hat 12 Constante.

Gegenüber dem oft genannten Fall [111(11$\bar{1}$)] (S. 158) fallen hier drei Congruenzen zusammen, also z. B. die Directricen $11'$, $22'$, $33'$. Wir sehen, *dass die Complexkegelschnitte und Complexkegel F_2 sämmtlich an e dreipunktig osculiren.* Für alles Weitere sei auf [111(111)] verwiesen.

V.

Vierte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3x_4 + 2\,x_5x_6 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\,\lambda_3 x_3 x_4 + 2\,\lambda_5 x_5 x_6 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,.$$

In dieser kanonischen Form haben wir *zwei einfache und zwei doppelte Elementartheiler.* In allen Fällen treten also zwei sich schneidende Doppelgerade auf, welche adjungirte Gerade besitzen. — Es kommen neun Fälle vor, einer zerfällt, es bleiben für die Behandlung die folgenden *acht:*

[1122], [11(22)], [12(12)], [(11)22], [(12)(12)], [(112)2], [1(122)], [(11)(22)]

Es sind hier nur noch zwei allgemeine Fundamentalcomplexe vorhanden. Die Directricen x_3, x_4, x_5, x_6 der speciellen bilden ein windschiefes Vierseit, von dem x_3 und x_4 das eine, x_5 und x_6 das andere Gegenseitenpaar sind. Die beiden Geraden, welche das Vierseit zum Tetraeder ergänzen, sind die Directricen der Complexe $x_1 + ix_2 = 0$, $x_1 - ix_2 = 0$. — Bei dem Uebergang von den x zu den p_{ik} wollen wir setzen:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = p_{13}\,, \qquad x_5 = p_{14}\,,$$
$$x_2 = \frac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_4 = 2\,p_{42}\,, \qquad x_6 = 2\,p_{23}\,.$$

22. In dem allgemeinen Fall [*1122*] hat man:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\,\lambda_3 x_4 x_5 + x_3^2 + x_5^2 = 0$$

und für die Singularitätenfläche:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,y_1^4 - 4\,\lambda_3^2\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) - 4\,\lambda_1\lambda_2 y_1^2 y_3^2$$
$$+ 4\,(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2) y_1^2 y_1^2 - 8\,\lambda_3\,\{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\,\lambda_1\lambda_2\}\,y_1 y_2 y_3 y_4 = 0.$$

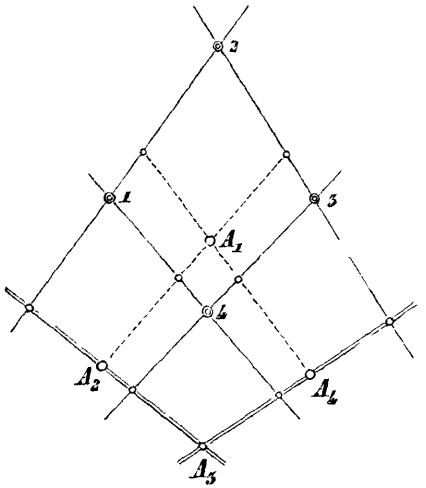
Die Kanten A_2A_3, A_3A_4 sind Doppelgerade der Fläche, A_1A_2 und A_1A_4 deren adjungirte. Unter den durch eine Doppelgerade gelegten Ebenen enthalten, ausser $y_1 = 0$, noch je zwei zerfallende Kegelschnitte der Fläche. Sie bestehen aus Punktepaaren, resp. Doppelgeraden. Im Vergleich mit [11112] (S. 171) haben wir:

Die Singularitätenfläche besitzt vier (konische) Knoten und vier Doppelebenen. Vier Verbindungslinien der ersteren sind einfache Geraden der Fläche, sie besitzen stationäre Tangentialebenen. Zwei Doppelgerade der Fläche, die sich schneiden, treffen je ein Gegenseitenpaar des Vierseits der einfachen Geraden. Diese Doppelgeraden besitzen adjungirte Gerade etc.). Der Complex hat 17 Constante.*

---

*) Plücker nennt diese Fläche a. a. O. S. 339, II. Sie findet sich weiterhin bei Sturm, diese Annalen, Bd. IV, S. 269, u. *c.*

Die nebenstehende Figur soll hier der Anschauung zu Hülfe kommen. Es ist $A_1 A_2 A_3 A_4$ das Coordinatentetraeder. Die Doppelgeraden sind doppelt gezogen. Die Punkte 1234 sind Doppelpunkte, 12, 34, 14, 23 sind die Geraden der Fläche, welche constante Tangentialebenen haben, welch letztere insbesondere auch durch die Doppelgeraden gehen. Aus den harmonischen Punktgruppen der Figur sieht man sofort, dass die Geraden $A_2 A_3$, $A_1 A_4$, 14, 23 vier harmonische Erzeugende einer Fläche zweiten Grades sind. Dasselbe gilt für $A_3 A_4$, $A_1 A_2$, 34, 12, d. h. *alle Geraden der Fläche und auch die beiden adjungirten der Doppelgeraden sind auf einer Fläche zweiten Grades als zwei Gruppen von vier harmonisch liegenden Erzeugenden gelegen.*



Diese Fläche kann leicht aus der allgemeinen Complexfläche (S. 172) abgeleitet werden. Die letztere habe die Knotenpunkte 11′, 22′, 33′, 44′, wo allemal $\overline{ii'}$ die Doppelgerade und die adjungirte trifft und i, i' zu diesen Schnittpunkten harmonisch liegen. Man lasse 3 mit 4 und anderseits 3′ mit 4′ zusammenfallen in Punkte der Geraden 12, 1′2′, so dass die Verbindungslinie dieser beiden neuen Punkte die vorhandene Doppelgerade trifft. Auf diese Weise erhält man gerade das Singularitätensystem, welches bei unserer Fläche vorhanden ist. Um die Abstufung von der Kummer'schen Fläche zu der allgemeinen Complexfläche und zu diesem Fall noch deutlicher zu sehen, muss man auf die Gruppirung der 16 Knotenpunkte der erstgenannten Fläche zurückgehen, was indess nicht geschehen soll.

23. Der Fall [*11(22)*] ist der erste vorkommende einer Reihe von ganz eigenthümlichen Complexen. Wir haben die Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0 .$$
$$\Omega' \equiv (\lambda_1 x_1 + i\lambda_2 x_2)(\lambda_1 x_1 - i\lambda_2 x_2) = 0 .$$

Die singulären Linien bilden zwei nicht zerfallende Congruenzen zweiten Grades. Dem entsprechend treten zwei Flächen zweiten Grades als Singularitätenfläche auf. In Punktcoordinaten heissen sie:

$$y_1^2 \{(\lambda_1 - \lambda_2) y_1^2 - 4 \lambda_1 \lambda_2 (y_3^2 + y_4^2)\} = 0 .$$

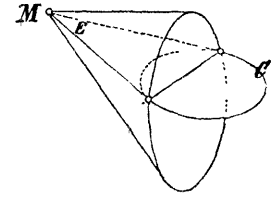
Es ist dies ein Kegel, dessen Mittelpunkt A_2 ist, und eine Ebene durch diesen, welche doppelt zählt.

Indem wir die Enveloppe der singulären Ebenen aufsuchen, finden wir:

$$v_2^2 \{(\lambda_1 - \lambda_2) v_2^2 - 4 \lambda_1 \lambda_2 (v_3^2 + v_4^2)\} = 0 .$$

Der erste Factor ergiebt den Kegel in Ebenencoordinaten, der zweite aber einen Kegelschnitt in der vorhin aufgetretenen Doppelebene. Wir finden so:

Die Singularitätenfläche ist ein Kegel K und ein Kegelschnitt C, dessen Ebene E durch den Mittelpunkt M von K geht. Der Kegelschnitt berührt die beiden Erzeugenden, die E aus K ausschneidet. Die nebenstehende Figur giebt ein Bild dieser Verhältnisse. — Kegel und Kegelschnitt haben zunächst zwei Erzeugende gemein, die für den Schnitt doppelt zu zählen sind. Doch sieht man aus der Gleichung des Complexes, dass man hier *ein ganzes Büschel von Complex-Doppelgeraden* hat. Dieses Büschel heisst in Liniencoordinaten: $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$; *es besteht aus den Geraden in der Ebene von C durch M.*



Die *Congruenz der singulären Linien* entsteht nun auf die folgende Weise. Zunächst ist dem Kegel K ein linearer Complex zugeordnet, der mit seinen Tangenten die eine quadratische Congruenz ergiebt. Ein weiterer linearer Complex, der mit dem vorigen in Involution liegt, schneidet aus den Treffgeraden von C die zweite Congruenz. — Die singulären Linien sind also nicht etwa die gleichzeitigen Tangenten an K und C (welche auch zwei irreducible quadratische Congruenzen bilden). Wir können sie vielmehr durch folgende Construction erzeugen: Zu K gehört in dem ersten linearen Complex ein Kegelschnitt in E durch M. Die Congruenz zweiten Grades seiner Treffgeraden, die K berühren, besteht aus singulären Linien. Die zweite Congruenz erhält man auf duale Weise aus C und einem (im zweiten Complexe zugeordneten) Kegel, dessen Mittelpunkt M ist*). — Diese Construction zeigt, wie die Geraden, die in E durch M verlaufen, aus vierfach singulären Linien bestehen (womit sie ohne Weiteres doppelte Complexgerade sind). — Man vergleiche auch diese Construction mit der des Falles [11(11)(11)] (S. 164); sie ist im Wesentlichen dieselbe. Eine beliebige Ebene trifft K in einem Kegelschnitt Q' und C in den zwei

*) Vgl. Kummer a. a. O., Sätze XIII und XIV.

Punkten P_1, P_2. Die Complexkegelschnitte gehen durch P_1 und P_2 und berühren den Kegelschnitt C' zweimal etc.

Der Complex hat *14 Constante.*

24. In dem Fall *[12(12)]* treten drei Doppelgerade auf, wovon zwei, (12), unendlich nahe liegen, die dritte, 2, aber beide trifft. Wir kommen also hier wieder auf Linienflächen, und zwar auf Cremona's Gattung VI. Gegenüber dem Fall [111(12)] (S. 172) ist hier einfach eine doppelte Erzeugende aufgetreten. Wir finden zu ihr wieder eine adjungirte Gerade, welche beide doppelte Leitgeraden trifft. Es wäre also auch hier wieder der Beweis zu führen, dass man hier die allgemeine Gattung VI hat. Der Beweis ist aber ganz derselbe wie bei [11(11)2] (S. 173).

Die Singularitätenfläche ist die allgemeine Linienfläche, die Cremona als seine VI^te Gattung anführt. Sie hat eine Selbstberührungsgerade und eine doppelte Erzeugende. Der Complex hat 15 Constante.

25. Der Complex *[1(122)]* ist dargestellt durch die folgenden Gleichungen:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 = 0\,.$$

Die Congruenz der singulären Linien besteht augenscheinlich aus zwei doppelt zählenden speciellen linearen Congruenzen, deren Directricen $(x_3 + ix_5,\ x_3 - ix_5)$ sich schneiden. In Punktcoordinaten sind diese Directricen $y_1 = y_3 + iy_4 = 0$ und $y_1 = y_3 - iy_4 = 0$. — Wir haben hier die directe Degeneration des Falles [11(22)] (S. 184). Der Kegelschnitt C artet in den doppeltzählenden Punkt M, der Kegel K in die doppelte Ebene E aus.

Die singulären Linien bilden zwei doppelt zählende, specielle lineare Congruenzen, deren Directricen sich schneiden. Ihr Schnittpunkt ist vierfach zählend die Enveloppe der singulären Ebenen und die ihnen gemeinsame Ebene vierfach zählend die Fläche der singulären Punkte. Der Complex besitzt 12 Constante.

Dieser Fall kann auch als directe Specialisirung von [11(112)] (S. 174) angesehen werden. Man stelle sich vor, es fallen dort die beiden Ebenen der Directricen, $y_1 = 0$ und $y_4 = 0$, ebenso die Schnittpunkte A_2 und A_3 je unendlich nahe zusammen. In der einen Ebene seien ik, ferner lm je vereinigt, ebenso in der zweiten einerseits $i'k'$, anderseits $l'm'$. Diese Vereinigung geschieht so, dass (ik) und $(i'k')$ selbst unendlich nahe verlaufen etc. — Indem wir so die Grenzlage auffassen, können wir diese Singularitätenfläche wieder ansehen *als degenerirte Fläche zweiten Grades, von der eine Erzeugung aus Doppelgeraden des Complexes besteht.*

26. Der Fall [*(11)22*] ist durch die Gruppirung seiner vier Doppelgeraden bemerkenswerth. — Indem wir an Stelle der Gleichung $\Omega = 0$ nehmen: $\Omega - \lambda_1 P = 0$, erkennt man, dass die Geraden $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, also A_1A_2 und A_3A_4 Complexdoppelgerade sind. Ebenso führt $\Omega - \lambda_5 P = 0$ auf A_2A_3, $\Omega - \lambda_3 P = 0$ auf A_2A_1. *Die Doppelgeraden A_3A_4, A_4A_2, A_2A_3 bilden ein Dreieck, A_1A_2 geht durch eine seiner Ecken.* — Bis jetzt bildeten allemal vier Doppelgerade ein windschiefes Vierseit.

Die Congruenz der singulären Linien zerfällt in eine lineare, deren Gerade eine Ebene und einen darin liegenden Punkt erfüllen, und eine vom dritten Grad. — Dem entsprechend löst sich die Singularitätenfläche auf in eine allgemeine Linienfläche dritten Grades mit einer ihrer Doppeltangentialebenen und dem in derselben liegenden Doppelpunkt. — Der Complex hat 15 Constante.

Beim Uebergang von [(11)112] zu diesem Fall mögen wir uns vorstellen, dass dort die Ebene der Doppelerzeugenden (der Cremona'schen Gattung V) mit der einen doppelten Leitgeraden und der Schnittpunkt der doppelten Erzeugenden mit der andern doppelten Leitgeraden sich als Fläche ersten Grades absondern.

27. In dem Fall [*(112)2*] wollen wir ausgehen von:

$$\Omega \equiv 2\,\lambda_3 x_3 x_4 + x_3^2 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega' \equiv 2\,\lambda_3 x_3\,(x_3 + \lambda_3 x_1) = 0\,.$$

Zunächst haben wir doppelt als singuläre Linien zählend die Congruenz $x_3 = x_5 = 0$, resp. $p_{13} = p_{14} = 0$. Diese bilden ein Strahlbündel und ein Strahlfeld. Eine weitere Congruenz zweiten Grades ist: $(x_5 + c\,x_4)\,(x_5 - c\,x_4) = x_3 + \lambda_3 x_4 = 0$, also das Product von zwei speciellen linearen Congruenzen, deren Directricen sich treffen. — Doppelte Complexgeraden sind $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Sie bilden zwei Büschel.

Der Complex besitzt eine doppelte Ausnahmeebene und einen in ihr liegenden doppelten Ausnahmepunkt. Beide bilden doppelt zählend einen Theil der Singularitätenfläche, ebenso doppelt zählend eine Congruenz zweiten Grades von singulären Linien. In der Ausnahmeebene durch den Ausnahmepunkt geht eine Gerade, welche sowohl die singulären Punkte, als auch die singulären Ebenen dieser singulären Geraden bestimmt. — In einer weiteren Ebene durch den Ausnahmepunkt hat man zwei Gerade, Directricen von zwei speciellen linearen Congruenzen singulärer Linien, die durch einen Punkt der Ausnahmeebene gehen. Dieser neue Punkt und diese neue Ebene gehören ebenfalls doppelt zählend zur Singularitätenfläche etc. Der Complex hat 12 Constante.

Die Complexkegelschnitte berühren die Ebene (x_3x_5) an x_3 und

durchsetzen $(x_4 x_5)$ an den beiden genannten Directricen. Man vergleiche diesen Fall mit [11(112)] (S. 174). Man lasse dort die Directricen i und k in $A_1 A_2$ hineinfallen, ferner i' und k' in $A_2 A_3$ rücken. Die andern bleiben ungeändert.

28. Eine einfache Abstufung ist: [11(11)(11)], [1(11)(12)], [*(12)(12)*]. Zuerst ist die Singularitätenfläche das Product von zwei Flächen zweiten Grades, die ein windschiefes Vierseit gemein haben. Dann rücken in diesem zwei Gegenseiten zusammen. Bei dem nun zu betrachtenden Complexe [(12)(12)] thun das beide Paare:

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades, die sich nach zwei sich schneidenden Erzeugenden berühren. Der Complex hat 13 Constante.

Die singulären Linien verhalten sich sehr einfach. Für sie finden wir das Folgende:

Die singulären Linien bilden zwei irreducible Congruenzen zweiten Grades. Die erste wird aus den Tangenten der einen F_2 durch einen speciellen linearen Complex ausgeschnitten, dessen Directrix durch den Schnittpunkt der beiden doppelten Doppelgeraden in deren Ebene verläuft. Die zu diesen drei Geraden harmonische ist ebenfalls Directrix eines speciellen Complexes, der mit den Tangenten der zweiten Fläche die zweite Congruenz ergiebt.

Man erkennt, dass beide Congruenzen ein Büschel gemein haben. Dasselbe hat als Mittelpunkt und Ebene den Schnittpunkt und die Ebene der beiden Erzeugenden, nach denen sich die F_2 berühren. Dasselbe ist *Büschel von doppelten singulären Linien, die einfache Complexgerade sind.*

29. In dem Fall [*(11)(22)*] hat man:

$$\Omega \equiv \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_5^2 = 0\,, \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Die singulären Linien werden aus den speciellen Complexen $x_3 + i x_5 = 0$, $x_3 - i x_5 = 0$, deren Directricen sich schneiden, durch $x_1 + i x_2 = 0$, $x_1 - i x_2 = 0$, die ebenfalls speciell sind, ausgeschnitten. Drei dieser Directricen liegen in einer Ebene und drei gehen durch einen Punkt etc. — *Wir erhalten eine doppelte und zwei einfache Ausnahmeebenen, ferner je damit vereinigt einen doppelten und zwei einfache Ausnahmepunkte.* — Damit hat man die singulären Linien und die Singularitätenfläche vollständig.

Man vergleiche mit [11(22)] (S. 184). Der dort genannte Kegelschnitt zerfällt hier in ein Punktepaar, der Kegel in ein Ebenenpaar. Der Complex ist wie jener zu construiren. Die Complexkegelschnitte berühren die doppelte Ausnahmeebene an einer bestimmten Geraden,

nämlich an der Verbindungslinie der beiden einfachen Ausnahmepunkte etc. *Der Complex hat 12 Constante. Das Büschel der Geraden in der Doppelebene durch den Doppelpunkt besteht auch hier aus doppelten Complexgeraden. Eine weitere doppelte Complexgerade in der doppelten Ausnahmeebene, die nicht durch den doppelten Ausnahmepunkt geht, ist die Verbindungslinie der einfachen Doppelpunkte. Ebenso gehört die Schnittlinie der einfachen Ausnahmeebenen doppelt dem Complexe an.*

Das Letztere ergiebt sich sofort, wenn man in Ω die zweifache Wurzel λ_1 gleich Null setzt und die vierfache λ_3 als von Null verschieden annimmt.

VI.

Fünfte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3 x_6 + 2\,x_4 x_5 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\,x_3 x_5 + x_4^2 = 0\,.$$

In dieser kanonischen Form kommt ein *vierfacher Elementartheiler* vor. Die vierfache Wurzel, die zu ihm gehört, ist hier als Null angenommen.

Es kommen keine zerfallenden Complexe vor; wir haben die folgenden *vier* Möglichkeiten:

$$[114],\ [1(14)],\ [(11)4],\ [(114)].$$

Die Form P geht in die Bedingungsgleichung der Coordinaten p_{ik} über bei folgender Substitution:

$$x_1 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = p_{13}\,, \qquad x_4 = 2\,p_{14}\,,$$
$$x_2 = \tfrac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_6 = 2\,p_{12}\,, \qquad x_5 = p_{23}\,.$$

30. In dem Fall *[114]* haben wir die Singularitätenfläche:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) y_3^4 - 4\,y_3^2 y_1^2 + 8\,\lambda_1 \lambda_2\, y_3^2 y_1 y_2 + 4\,(\lambda_1 + \lambda_2) y_3 y_1^2 y_4 - 8\,(\lambda_1 - \lambda_2) y_1^3 y_2 + 16\,\lambda_1 \lambda_2 y_1^2 y_4^2 = 0\,.$$

$y_1 = y_3 = 0$ ist Doppelgerade, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ dreifacher Punkt. Die Kegelschnitte berühren die Doppelgerade im dreifachen Punkte etc.

Die Singularitätenfläche ist die Complexfläche, deren Leitgerade (im allgemeinen Complex zweiten Grades) eine singulüre Complexgerade ist. Diese Gerade ist die einzige Doppelgerade des Complexes, der 16 Constante besitzt.

31. Für $\lambda_2 = 0$ erhält man aus dem vorigen Fall *[1(14)]*. Die Singularitätenfläche ist:

$$y_3^2(\lambda_1 y_3^2 - 4\, y_1^2) + 8\, \lambda_1 y_1^2 (y_3 y_4 - y_1 y_2) = 0\,.$$

Die Gerade $y_1 = y_3 = 0$ ist dreifach geworden, die Fläche also eine Linienfläche. Es ergiebt sich:

Die Singularitätenfläche ist derjenige Specialfall von Cremona's Gattung X, bei dem die beiden stationären Tangentenebenen zusammenfallen. Der Complex hat 14 Constante.

Cremona erzeugt die allgemeine Gattung X durch eine ebene Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt und eine Gerade, welche durch den Doppelpunkt geht. In diesem Fall ist aus dem Doppelpunkt eine Spitze geworden.

Wie [11(13)] (S. 179) hat auch dieser Complex *drei unendlich nahe Doppelgerade.* Sie sind dargestellt wie bei [11(13)] durch die Leitgerade und die singulären Erzeugenden der Linienfläche. (Nur die gegenseitige Lage ist anders, da hier diese beiden Erzeugenden zusammenfallen).

32. In dem Fall *[(11)4]* hat man:

Die Singularitätenfläche besteht aus der allgemeinen Linienfläche dritten Grades und einer ihrer Cuspidalebenen mit dem darin liegenden Cuspidalpunkt. Der Complex hat 14 Constante.

Die *vier Doppelgeraden des Complexes* haben eine Anordnung wie bei [(11)22] (S. 187). Zwei sind in einer Ebene unendlich benachbart, eine dritte liegt in ihrer Ebene und geht nicht durch den Schnittpunkt, die vierte thut das Umgekehrte.

33. Für *[(114)]* hat man:

$$\Omega \equiv 2\, x_3 x_5 + x_1^2 = 0\,, \qquad \Omega' \equiv 2\, x_3 x_4 = 0\,.$$

Die singulären Linien bestehen aus der dreifach zählenden zerfallenden Congruenz $x_3 = x_4 = 0$ und aus der allgemeinen linearen $x_1 = x_5 = 0$. Die beiden Büschel $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ bestehen aus doppelten Complexgeraden, sie geben doppelt zählend die Singularitätenfläche. Der Complex hat 11 Constante.

Vergleichen wir mit [1(113)] (S. 180). Die Congruenz 2, 2′ falle dort in die doppelt zählende specielle hinein; 1, 1′ lasse man unverändert. Man findet so, dass die Complexkegelschnitte die Ebene, welche dreifache singuläre Linien enthält, an der Schnittlinie unserer beiden Ebenen berühren, die andere aber an einer bestimmten Geraden in bekannter Richtung durchsetzen. Das Duale gilt für die Complexkegel.

VII.

Sechste kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + 2\,x_2x_3 + 2\,x_4x_6 + x_5^2 = 0\,.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + 2\,\lambda_2 x_2x_3 + x_2^2 + 2\,x_4x_5 = 0\,.$$

Man hat hier *einen einfachen, einen doppelten und einen dreifachen Elementartheiler.* Die dreifache Wurzel ist in Ω als Null angenommen. Es kommen die folgenden *fünf Fälle* vor, von denen keiner einen zerfallenden Complex ergiebt:

$$[123],\ [1(23)],\ [2(13)],\ [(12)3],\ [(123)].$$

Durch die folgende Substitution wollen wir in die p_{ik} transformiren:

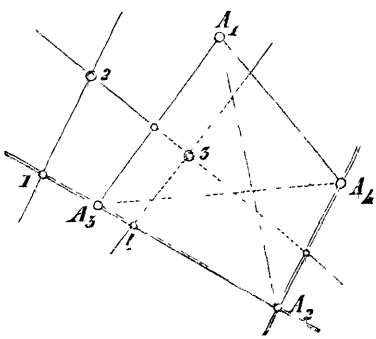
$$x_1 = \frac{1}{i}\,(p_{12} - p_{34})\,, \qquad x_2 = p_{13}\,, \qquad x_4 = p_{14}\,,$$
$$x_5 = p_{12} + p_{34}\,, \qquad x_3 = 2\,p_{42}\,, \qquad x_6 = 2\,p_{23}\,.$$

34. Die Singularitätenfläche des Falles [*123*] hat die folgende Gleichung:

$$-y_1^4 - 4\,\lambda_1 y_1^3 y_3 + 4\,\lambda_1\lambda_2^2 (y_1y_2 - y_3y_4)^2 + 8\,\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) y_1y_4(y_1y_2 - y_3y_4) + 4\,(\lambda_1 - \lambda_2) y_1^2 y_4^2 = 0\,.$$

Wir sehen, dass $y_1 = y_3 = 0$ Doppelgerade, $y_1 = y_2 = 0$ die zu ihr adjungirte, $y_1 = y_4 = 0$ endlich Rückkehrgerade ist. Wir suchen wieder die zerfallenden Kegelschnitte und finden:

Die Singularitätenfläche besitzt eine Doppelgerade mit adjungirter Geraden und eine Rückkehrgerade, welche die adjungirte trifft. Die Verbindungslinie der zwei conischen Knoten der Fläche trifft die Doppelgerade und gehört der Fläche an; ferner gehen durch die Knoten noch zwei Geraden der Fläche, die wie die eben genannte Gerade constante Tangentialebene haben. Der Complex hat 16 Constante.



Die Lagenbeziehung der Geraden der Fläche ist durch die nebenstehende Figur deutlich gemacht. A_2A_3 ist die Rückkehrgerade, A_2A_4 die Doppelgerade, A_1A_3 die adjungirte. 2 und 3 sind conische Knoten. $\overline{23}$ ist eine einfache Gerade der Fläche, sie trifft Doppelgerade und adjungirte Gerade, ihre constante Tangentialebene geht durch A_2A_4. — Die Geraden A_2A_1, 24, A_1A_3, 13 sind vier harmo-

nische Erzeugende einer Fläche zweiten Grades, der auch A_2A_3 und $\overline{23}$ angehören. — Man stelle sich in [1122] (S. 183) vor, dass die Punkte 1 und 4 in A_2A_3 fallen. Die adjungirte von A_2A_3 rückt mit heran und macht die Doppelgerade zur Rückkehrgeraden.

35. In dem Fall *[1(23)]* haben wir:

$$\Omega \equiv \lambda_1 x_1^2 + x_2^2 + 2 x_4 x_5 , \qquad \Omega' \equiv \lambda_1^2 x_1^2 + x_4^2 = 0 .$$

Die Geraden $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$ bilden in $y_1 = 0$ ein Büschel durch den Punkt A_2, bestehend aus doppelten Complexgeraden. — Aus $\Omega = 0$ werden die singulären Linien durch zwei allgemeine, in Involution liegende lineare Complexe ausgeschieden. Dem entsprechend zerfällt auch die Singularitätenfläche. In Punkt- und Ebenencoordinaten erhalten wir:

$$y_1^2 (y_1^2 + 4 \lambda_1 y_1 y_3 - 4 \lambda_1 y_4^2) = 0 ,$$
$$v_2^2 (v_2^2 - 4 \lambda_1 v_4 v_2 - 4 \lambda_1 v_{32}) = 0 .$$

Die Singularitätenfläche zerfällt in einen Kegel und einen Kegelschnitt, welch' letzterer in einer Tangentialebene des ersteren liegt und die Erzeugende des Kegels, die in seiner Ebene liegt, an der Kegelspitze berührt. Dem Kegel und dem Kegelschnitt sind lineare, in Involution liegende Complexe zugeordnet, die aus ihren Treffgeraden, bez. Tangenten die singulären Linien ausschneiden. Der Complex besitzt 13 Constante.

Dieser Complex verhält sich wie [11(22)] (S. 184). Die Construction ist noch genau dieselbe, nur die gegenseitige Lage von C und K hat sich verändert.

36. In dem Fall *[2(13)]* tritt wegen 2 eine Complexdoppelgerade, wegen (13) aber treten drei solche auf, die unendlich benachbart sind. Wir finden das Folgende:

Die Singularitätenfläche ist die Cayley'sche Linienfläche dritten Grades mit einer Ebene ihrer Doppeldeveloppabeln und dem zu dieser gehörenden Punkt der Doppelgeraden. Der Complex hat vier Doppelgerade, er hat 14 Constante.

Die Doppelgeraden bilden augenscheinlich zunächst in der Doppeltangentialebene ein ausgeartetes Dreieck und die vierte geht durch eine seiner Ecken. Man vergleiche die Fälle: [(11)22] (S. 187) und [(11)4] (S. 190).

37. Für den Fall *[(12)3]* ergiebt sich das folgende Resultat:

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche mit einer Selbstberührungsgeraden und einer Rückkehrerzeugenden, also ein Unterfall von der Gattung Cremona VI. Der Complex hat drei Doppelgerade und 14 Constante.

38. Sehr einfache Verhältnisse sind bei *[(123)]*. Es ist:

$$\Omega \equiv x_2^2 + 2x_4x_5 = 0, \qquad \Omega' \equiv x_4^2 = 0.$$

Die Geraden $x_2 = x_4 = 0$ bilden den *Ausnahmepunkt* A_2 und die *Ausnahmeebene* $y_1 = 0$. Diese Linien sind doppelte singuläre. Diejenigen von ihnen, die in $y_1 = 0$ durch A_1 gehen, sind vierfach singulär.

Der Complex besitzt ein Büschel von doppelten Complexgeraden: sein Mittelpunkt ist vierfach zählend die Enveloppe der singulären Ebenen und seine Ebene ebenfalls vierfach zählend der Ort der singulären Punkte. Die Zahl der Constanten ist 11.

Vergleichen wir hiermit [1(122)] (S. 186). Es rücken dort die Directricen der speciellen Congruenzen in eine Gerade g zusammen. Sei E die Ausnahmeebene, P in ihr der Ausnahmepunkt, so liegt g in E und geht durch P. Alle Complexkegelschnitte berühren E an g, die Complexkegel g in P.

VIII.

Siebente kanonische Form.

$$P \equiv x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}\cdot p_{42} + p_{14}\cdot p_{23} = 0$$
$$\Omega \equiv 2\lambda_1x_1x_2 + 2\lambda_2x_3x_4 + 2\lambda_3x_5x_6 + x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0.$$

Es sind *drei zweifache Elementartheiler* vorhanden. Damit treten *drei Doppelgerade* auf, die sich alle schneiden, die also entweder in einer Ebene ein Dreieck bilden, oder durch einen Punkt gehend ein Trieder bilden. Das sehen wir auch bei Ω. Ersetzen wir dort die drei quadratischen Glieder durch p_{12}^2, p_{13}^2, p_{14}^2, so tritt der erstere Fall ein, da die Directricen p_{12} etc. diese Doppelgeraden sind. Setzen wir dagegen p_{34}^2, p_{12}^2, p_{23}^2 hin, so haben wir den zweiten Fall. Weiterhin werden wir überall diese zwei dual gegenüberstehenden Möglichkeiten auseinanderhalten.

Es gehören die folgenden *drei* Gattungen hieher:

$$[222], \qquad [2(22)], \qquad [(222)].$$

39. In dem ersten Fall, *[222]*, haben wir:

(A.) *Die Doppelgeraden liegen in einer Ebene.* Es ist:

$$\Omega \equiv 2\lambda_1p_{12}p_{34} + 2\lambda_2p_{13}p_{42} + p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0.$$

Die Directricen von $p_{12} = 0$ etc. sind Complexdoppelgerade. Sie machen die Ebene $y_1 = 0$, in der sie liegen, zur *Ausnahmeebene*. Die noch bleibende Fläche dritter Ordnung, vierter Klasse hat die Gleichung:

$$y_1\{y_1^2 - \lambda_2y_2^2 - \lambda_1y_3^2 - (\lambda_2-\lambda_1)^2y_4^2\} - 2\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)y_2y_3y_4 = 0.$$

Die Untersuchung der Kegelschnitte der Fläche, deren Ebenen durch $y_1 = y_2 = 0$ etc. gehen, ergiebt das Resultat:

Die Singularitätenfläche ist die bekannte Fläche dritter Ordnung vierter Klasse mit vier conischen Knotenpunkten (deren 6 Verbindungslinien einfache Geraden der Fläche mit constanter Tangentialebene sind). Als ergänzende Ebene kommt die Ebene der drei Doppelaxen (die im Pentaeder der Fläche ausgezeichnete Ebene) hinzu.

(B.) *Die drei Doppelgeraden gehen durch einen Punkt.* Es ist:

$$\Omega \equiv 2\lambda_1 p_{12} \cdot p_{34} + 2\lambda_2 p_{13} \cdot p_{42} + {p_{31}}^2 + {p_{42}}^2 + {p_{23}}^2 = 0 .$$

Wir haben hier vollständig den dualen Fall des Vorigen.

Die Singularitätenfläche besteht aus einem Punkt und einer Fläche vierter Ordnung, dritter Klasse, welche drei Doppelgerade besitzt, die sich in einem dreifachen Punkt treffen. Sie besitzt ausserdem vier Doppelebenen etc. und ist die sog. „Steiner'sche Fläche" („römische Fläche von Steiner"). Ihr dreifacher Punkt ist der ergänzende Complex-Ausnahmepunkt.

In beiden Fällen, A. und B., hat der Complex *16 Constante.*

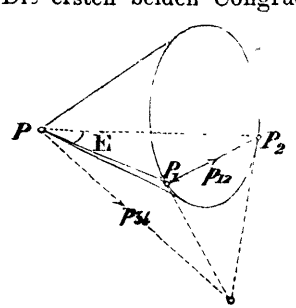
40. Setzen wir im vorigen Fall eines der λ Null, oder beide einander gleich, so erhalten wir für den Fall *[2(22)]:*

(A.) *Die Singularitätenfläche ist ein Kegel zweiter Ordnung K mit einer doppelt zählenden Ebene* E *durch seine Spitze P. Als Klassenfläche hat man zu betrachten: P doppelt zählend und zwei Punkte P_1, P_2 der in* E *liegenden Erzeugenden von K. Das Büschel von Geraden durch P in* E *besteht aus doppelten Complexgeraden.*

Die *singulären Linien* sind:

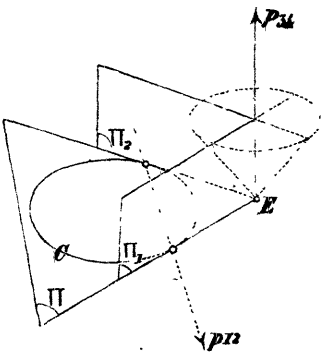
$$\begin{cases} p_{12} = (p_{13} + ip_{14})(p_{13} - ip_{14}) = 0 . \\ p_{34} = {p_{12}}^2 + {p_{13}}^2 + {p_{14}}^2 = 0 . \end{cases}$$

Die ersten beiden Congruenzen geben P_1, P_2 und doppelt die Ebene E. (Die Geraden in E sind also doppelte singuläre Linien, einfache Complexgerade, ausgenommen das Büschel durch *P.*) Die zweite Congruenz besteht aus den Geraden des speciellen Complexes $p_{34} = 0$, welche die Ebene E $(y_1 = 0)$ in einem Kegelschnitt $({y_2}^2 + {y_3}^2 + {y_4}^2 = 0)$ treffen (s. Fall [(222)]). Die Construction des Complexes ist sehr einfach.



(B.) *Die Singularitätenfläche besteht doppelt zählend aus der Ebene* Π *und zwei Ebenen* Π_1, Π_2. *Als Klassengebilde hat man dagegen einen Kegelschnitt C in* Π, *den* Π_1 *und* Π_2 *berühren, ferner einen Punkt E, in dem sich die drei Ebenen* Π *schneiden, letzteren doppelt zählend.*

Die *singulären Linien* bestehen aus den Geraden in Π_1 und Π_2, ferner aus denen in Π doppelt zählend. Eine weitere Congruenz zweiten Grades (eine irreducible) wird gebildet durch die Geraden, welche die Verbindungslinie der Berührungspunkte von Π_1 und Π_2 mit C treffen, und ausserdem einen Kegel $(v_2^2+v_3^2+v_4^2=0)$ berühren. Die Mitte dieses Kegels ist E. Die Ebene Π ist die auf ihn bezügliche Polarebene für die Gerade (Π_1, Π_2). Er berührt ferner die Geraden $\Pi\Pi_1$ und $\Pi\Pi_2$ in den Berührungspunkten derselben mit C etc.



Der Complex hat ein *Büschel von Doppelgeraden*. Diese liegen im Fall (A) in E und gehen durch P, bei (B) gehen sie durch E und liegen in Π. Die Geraden $\overline{P_1 P_2}$ und $(\Pi_1 \Pi_2)$ sind ebenfalls Doppelgerade des Complexes und der Singularitätenfläche. — *Der Complex hat 13 Constante.*

Man vergleiche die Complexe mit [11 (22)] (S. 184). Bei (A) zerfällt dort der Kegelschnitt in zwei Büschel, bei (B) der Kegel. Nimmt man im letzteren Fall C als imaginären Kugelkreis, so stehen in unserm gewöhnlichen Raum Π_1 und Π_2 zu einander senkrecht. Diese Specialisirung kommt in der Mechanik vor*). Der Complex hat die Beweglichkeit des tetraedralen, er lässt dreifach unendlich viel Transformationen in sich zu.

41. Der noch einzig zu behandelnde Fall ist *[(222)]*.

$$\text{(A.)} \qquad \Omega \equiv p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2 = 0, \qquad \Omega' = 0.$$

Da $\Omega' \equiv 0$ ist, so ist jede Complexgerade singulär, *der Complex ist speciell.* — Eine Raumgerade p_{ik} trifft bekanntlich die Coordinatenebene $y_1 = 0$ in dem Punkt:

$$y_2 : y_3 : y_4 = p_{12} : p_{13} : p_{14}.$$

$\Omega = 0$ sagt also, dass alle Complexgerade die Ebene $y_1 = 0$ in Punkten des Kegelschnittes $y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$ $(y_1 = 0)$ treffen. D. h.:

Der Complex besteht aus allen Treffgeraden eines Kegelschnittes. Derselbe bildet doppelt zählend die Singularitätenfläche. Alle zweifach unendlich vielen Geraden in der Ebene des Kegelschnittes sind Complex-Doppelgerade. (Die Tangenten des Kegelschnitts sind unter ihnen nicht weiter ausgezeichnet.)

(B.) Durch duale Uebersetzung des Vorigen erhalten wir:

*) Man vergleiche u. A. Chasles, Comptes rendus, 1843.

Der Complex besteht aus allen Tangenten eines Kegels. Alle Geraden durch den Mittelpunkt desselben sind doppelte Complexgerade.

Diese beiden Complexe haben 8 Constante.

IX.

Achte kanonische Form.

$$P \equiv x_1^2 + 2x_2x_6 + 2x_3x_5 + x_4^2 = 0.$$
$$\Omega \equiv \lambda x_1^2 + 2x_2x_5 + 2x_3x_4 = 0.$$

Es kommt ein *fünffacher Elementartheiler* vor. Wir haben hier die folgenden *zwei Fälle.*

$$[15], \qquad [(15)].$$

Als Substitution der x in die p_{ik} wählen wir die folgende:

$$x_1 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}), \qquad x_2 = p_{13}, \qquad x_3 = p_{14}$$
$$x_4 = (p_{12} + p_{34}), \qquad x_6 = 2p_{42}, \qquad x_5 = 2p_{23},$$

42. Der Fall *[15]* wird uns über den Einfluss eines fünffachen Elementartheilers Aufschluss geben. — Die Singularitätenfläche wird:

$$\lambda_1 y_3^4 - 2y_3^3 y_1 - 2\lambda_1 y_3^2 y_1 y_4 - 4\lambda_1 y_3 y_1^2 y_2 + y_3 y_1^2 y_4 - y_1^3 y_2 + \lambda_1 y_1^2 y_4^2 = 0.$$

$y_1 = y_3 = 0$ ist doppelt auf der Fläche, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ dreifach. $y_1 = 0$ ist stationäre Tangentialebene an der Doppelgeraden. Dieses Verhalten ist noch wie bei [114] (S. 189). Es giebt jedoch hier nur noch einen conischen Knoten. In [114] lasse man einfach einen Knoten in den dreifachen Punkt hineinrücken, so hat man diese Fläche.

Die Singularitätenfläche ist eine Fläche vierter Ordnung. Dieselbe besitzt eine Doppelgerade, auf ihr einen dreifachen Punkt, längs ihr eine stationäre Tangentialebene. Es kommt noch ein conischer Knoten vor, dessen Verbindungslinien mit dem dreifachen Punkt einfache Gerade der Fläche mit stationärer Tangentialebene ist. Diese letztere Ebene enthält auch die Doppelgerade etc. — Der Complex besitzt 15 Constante.

43. Für *[(15)]* ist oben $\lambda_1 = 0$ und es tritt das Folgende ein:

Die Singularitätenfläche ist eine Cayley'sche Linienfläche dritten Grades mit deren stationärer Ebene und deren stationärem Punkte. Der Complex besitzt 13 Constante.

Der Complex besitzt *vier unendlich nahe liegende Doppelgerade.* Sie bilden ein Dreieck, die vierte geht durch eine seiner Ecken. Dies Verhalten ist wie bei [(1)14] (S. 189); nur rückt die eine dort unterschiedene Doppelgerade den drei andern unendlich nahe, da man hier die Cayley'sche Linienfläche hat.

X.

Neunte kanonische Form.

$$P \equiv x_1 x_2 + x_3 x_6 + x_4 x_5 \equiv p_{14} \cdot p_{23} + p_{42} \cdot p_{13} + p_{12} \cdot p_{34} = 0.$$
$$\Omega \equiv 2\lambda_1 x_1 x_2 + x_1^2 + 2 x_3 x_5 + x_4^2 = 0.$$

Es kommen hier *ein zweifacher und ein vierfacher Elementartheiler* vor. (Die zum letztern gehörige vierfache Wurzel ist hier als Null angenommen.) — Wir haben die *zwei Möglichkeiten:*

$$[24], \qquad [(24)]$$

44. In dem Fall *[24]* hat man einen *Ausnahmepunkt.* Er ist: $x_4 = x_1 = x_3 = 0$, resp. $p_{12} = p_{14} = p_{42} = 0$. Eine Ausnahmeebene tritt jedoch nicht auf. Wir erhalten also auch hier zwei sich dual gegenüberstehende Complexe. Zunächst erhalten wir bei obenstehendem Ω die Singularitätenfläche:

$$(A.)\quad \lambda_1 y_1^2 y_2^2 - 2\lambda_1 y_1 y_2^2 y_4 + 2\lambda_1^2 y_2 y_3 y_4^2 + y_2^2 y_4^2 + y_4^4 = 0.$$

Die Singularitätenfläche ist vierter Ordnung, dritter Klasse, sie hat zwei Doppelgerade, die sich in einem dreifachen Punkt schneiden. Eine von ihnen besitzt eine stationäre Tangentialebene, die zweite hat eine adjungirte Gerade, welche die Vorige trifft. Der ergänzende Theil nullter Ordnung erster Klasse ist der dreifache Punkt.

Man sieht deutlich, wie diese Fläche zwischen [114] (S. 189) und [(11)4] in der Mitte steht. Sie ist eine der Plücker'schen Meridianflächen*).

(B.) *In dem dualen Fall* des vorigen erhalten wir für die Singularitätenfläche in Ebenencoordinaten v eben die vorige Gleichung, statt y_i überall v_i gesetzt. In Punkt-Coordinaten dagegen schreibt sie sich:

$$y_3 \{y_3(y_1 - \lambda_1 y_4)^2 + 2 y_2(\lambda_1^2 y_1^2 - y_3^2)\} = 0.$$

Die Discussion dieser Gleichung giebt:

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Ebene und einer Fläche dritter Ordnung, vierter Klasse. Letztere besitzt einen biplanaren Knoten und zwei conische. Die Seiten des durch diese gebildeten Dreiecks sind einfache Geraden der Fläche mit stationären Tangentialebenen. Eine Gerade durch den biplanaren Knoten ist ebenfalls einfache Gerade, nullfache Axe der Fläche. Eine fünfte Gerade endlich trifft diese letztere und die Verbindungslinie der conischen Knoten und ist einfacher Strahl und Doppelaxe der Fläche. Die ergänzende Ebene geht durch den biplanaren Knoten und die viertgenannte Gerade.

---

*) Unter den Modellen von Eigel, Sohn, in Cöln („*Modelle der Plücker'schen Flächen*") ist sie die Nr. 24.

Macht man alle Knoten zu Coordinatenecken, so erhält man als kürzere Gleichungsform dieser Fläche:

$$(y_1 - y_3)y_4^2 + 4y_1y_2y_3 = 0.$$

Diese Fläche kann kurz bezeichnet werden als *Gattung VIII von Schläfli's Flächen dritter Ordnung.**)

Der Complex hat 15 Constante. In beiden Fällen erhält man aus $\Omega = 0$ die beiden Doppelgeraden, wenn man das eine Mal die vierfache Wurzel λ_3, das andere Mal die doppelte λ_1 als Null annimmt.

45. Für *[(24)]* ist im vorigen Fall $\lambda_1 = 0$ zu nehmen. Wir erhalten für die Singularitätenfläche

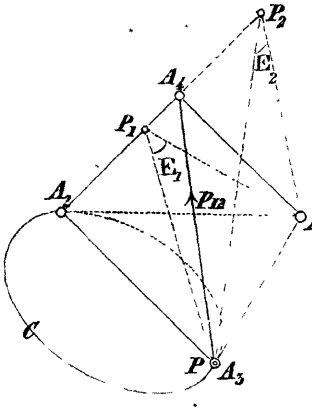
(A.) $y_4^2(y_2^2 + y_4^2) = 0$ und: $v_3^2(v_1^2 - 2v_2v_3) = 0$.

Das ist ein Kegelschnitt C mit einem seiner Punkte P doppelt zählend, und mit zwei seiner Tangentialebenen E_1, E_2 *durch P.*

Für *die singulären Linien* erhält man:

$$p_{12} = p_{14}^2 + 2p_{12} \cdot p_{34} = 0, \quad p_{42} = (p_{14} + ip_{12})(p_{14} - ip_{12}) = 0.$$

Die erste Congruenz besteht aus denjenigen Treffgeraden unseres Kegelschnitts C, welche die Gerade A_3A_4 *(s. die Figur) treffen. Die zweite besteht aus den zwei Ebenen* E_1, E_2, *ferner doppelt zählend aus den Geraden durch P. — Das Büschel der Geraden durch P in der Ebene von C besteht aus doppelten Complexgeraden.* (Die Ebenen E_1, E_2, die Kegelschnittebene und $y_2 = 0$ liegen harmonisch.)



Die Complexkegelschnitte werden von den Geraden der ersten Congruenz an C berührt. In jeder Ebene hat man, wenn die Singularitätenfläche bekannt ist, für den Complexkegelschnitt sechs bekannte Tangenten, nämlich die vier singulären Linien und von zweien die Berührungspunkte. Der Complex ist damit sehr einfach construirbar. — Man erkennt die Aehnlichkeit mit früheren Fällen z. B. mit [11(22)] (S. 184).

(B.) Die duale Uebersetzung des Vorigen giebt:

Die Singularitätenfläche besteht aus einem Kegel K mit einer seiner Tangentialebenen Π *doppelt zählend und mit zwei Punkten* E_1, E_2 *der Erzeugenden in* Π.

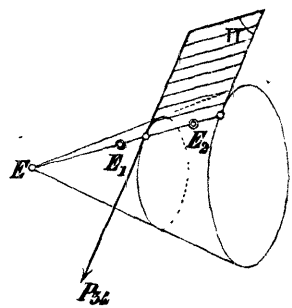
---

*) Vgl. die Abhandlung von Schläfli in den Phil. Transactions 1863, vol. 153.

Die *singulären Linien* sind:

$$p_{34} = p_{23}^2 + 2\,p_{12}\cdot p_{13} = 0, \quad p_{13} = (p_{23} + ip_{34})(p_{23} - ip_{34}) = 0.$$

Die erste Congruenz besteht aus denjenigen Tangenten unseres Kegels K, welche eine feste Tangente p_{34} treffen. Diese Tangente liegt in Π und trifft die Erzeugende $E_1 E_2$ des Kegels in einem Punkt, der zur Kegelspitze in Bezug auf E_1 und E_2 harmonisch liegt. Die zweite Congruenz besteht aus allen Geraden, die in Π liegen (dieselben zählen doppelt), sowie aus denjenigen, die durch P_1 oder P_2 gehen.



Wie vorhin die Geraden durch P sind hier die Geraden in Π dreifache singuläre Linien und einfache Complexgerade. Das Büschel der Geraden in Π, die durch den Berührungspunkt von p_{34} mit K gehen, besteht aus doppelten Complexgeraden.

Die Construction dieses Complexes aus Complexkegeln ist die duale Uebersetzung der oben angeführten Construction. Die Complexkegelschnitte berühren den Kegel K zweimal, erstens an $E_1 E_2$ und noch in einem Punkt, dem Berührungspunkt der einfach-singulären Linie der betreffenden Ebene mit K. Der Kegelschnitt ist also durch die Singularitätenfläche nicht direct bestimmt, während der Complexkegel überbestimmt wäre. (Derselbe geht nämlich durch E_1 und E_2, berührt ferner K an den singulären Geraden der oben zuerst angeführten Congruenz.

Der Complex hat 12 Constante.

XI.

Zehnte kanonische Form.

$$P \equiv 2\,x_1 x_3 + x_2^2 + 2\,x_4 x_6 + x_5^2 = 0.$$
$$\Omega \equiv \lambda_1(2\,x_1 x_3 + x_2^2) + 2\,x_1 x_2 + 2\,x_4 x_5 = 0.$$

Man hat hier *zwei dreifache Elementartheiler*. Es treten nur die folgenden *zwei Fälle* auf:

$$[33], \qquad [(33)].$$

Als Uebergang zu den p_{ik} haben wir:

$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} + p_{34}), \qquad x_1 = ip_{13}, \qquad x_4 = p_{14}$$
$$x_5 = p_{12} - p_{34}, \qquad x_3 = 2\,ip_{42}, \qquad x_6 = -2p_{23}.$$

46. Die Singularitätenfläche des Falles *[33]* ist:

$$\lambda_1^3(y_1 y_2 + y_3 y_4)^2 + \lambda_1 y_1^2(y_1 y_2 - y_3 y_4) + y_1^3(y_3 + y_4) = 0.$$

$y_1 = y_3 = 0$ und $y_1' = y_4 = 0$ sind die Rückkehrgeraden, die man von vorne herein zu erwarten hatte. Ihr Schnittpunkt ist uniplanar. Die projectivische Zuordnung an *beiden* Rückkehrgeraden ist gegeben durch $y_1 y_2 + y_3 y_4 = 0$. Dadurch erkennt man den uniplanaren Knoten deutlich. — Unsere Fläche zweiten Grades schneidet neben den Rückkehrgeraden noch einen Kegelschnitt aus, der nicht zerfällt. — Es giebt eine Schaar von Flächen zweiten Grades, die alle unsere Fläche an beiden Rückkehrgeraden berühren und ausserdem Kegelschnitte ausschneiden. Sie heissen:

$$y_1^2 + \mu(y_1 y_2 + y_3 y_4) = 0.$$

Eine einzige von ihnen, abgesehen von $\mu = 0$, giebt einen zerfallenden Kegelschnitt. Er besteht aus Geraden der Fläche, die ihrer ganzen Länge nach constante Tangentialebenen besitzen etc. Wir finden so:

Die Singularitätenfläche besitzt zwei Rückkehrgerade, die sich in einem uniplanaren Knoten schneiden. Ferner hat sie einen conischen Knoten, von dem aus zwei einfache Gerade an die Rückkehrgeraden gehen, die constante Tangentialebenen besitzen. Eine covariante Fläche zweiten Grades berührt nach den Rückkehrgeraden und enthält ausserdem diese einfachen Geraden der Fläche. — Der Complex hat 15 Constante.

Man möge hier die Abstufung betrachten von [1122] (S. 183) zu [123] (S. 191) und diesen Fall. Bei [123] stelle man sich vor, die ganze Gerade 13 falle in $A_1 A_2$ hinein.

47. Setzt man im vorigen Fall $\lambda_1 = 0$, so hat man *[(33)]*, dargestellt durch:

$$\Omega \equiv x_1 x_2 + x_1 x_5 = 0, \qquad \Omega' \equiv x_1^2 + x_4^2 = 0.$$

Die Singularitätenfläche besteht dreifach zählend aus einem Punkt P, mit einer durch ihn gehenden Ebene E. Als Ergänzung hat man eine weitere Ebene durch P und einen weiteren Punkt in E. — Die singulären Linien bestehen aus zwei speciellen linearen Congruenzen, deren Directricen in E durch P gehen und aus der doppelt zu zählenden, zerfallenden Congruenz, deren Geraden E und P erfüllen. — Der Complex hat 12 Constante.

Das Büschel (EP) besteht aus *doppelten Complexgeraden.*

Es seien E, P und die beiden Directricen d_1, d_2 beliebig angenommen. Eine zu d_1 unendlich nahe Gerade d_1' (die nicht in E verläuft) treffe d_2. Dasselbe thue die Gerade d_2' gegenüber d_2, resp. d_1. In einer beliebigen Ebene des Raumes hat man dann von dem Complexkegelschnitt zwei Tangenten, die Verbindungslinien der Schnittpunkte mit d_i, d_i' und deren Berührungspunkte, die an d_i liegen, gegeben.

Eine absolute Invariante bestimmt einen solchen Kegelschnitt. Man erhält zweifach unendlich viele Kegelschnitte, wenn man um seine Tangenten die Ebene dreht. Jeder ist durch fünf Gerade gegeben. Die Construction dieses Complexes ist also wieder besonders einfach, im Uebrigen ganz ähnlich wie bei gewissen früheren Fällen.

XII.

Elfte kanonische Form.

$$P \equiv x_1 x_6 + x_2 x_5 + x_3 x_4 = 0 .$$
$$\Omega \equiv 2 x_1 x_5 + 2 x_2 x_4 + x_3^2 = 0 .$$

Hier ist *ein sechsfacher Elementartheiler* vorhanden. Die sechsfache Wurzel ist Null gesetzt. — Alle Fundamentalcomplexe sind speciell und wir dürfen setzen:

(A.) $x_1 = p_{34}$, $x_2 = p_{14}$, $x_3 = p_{12}$, $x_4 = p_{13}$, $x_5 = p_{23}$, $x_6 = p_{12}$
(B.) $x_1 = p_{12}$, $x_2 = p_{23}$, $x_3 = p_{13}$, $x_4 = p_{42}$, $x_5 = p_{14}$, $x_6 = p_{31}$.

48. Der Fall *[6]* ist der einzige hier vorkommende.

(A.) $$\Omega \equiv 2 p_{34} \cdot p_{23} + 2 p_{14} \cdot p_{13} + p_{42}^2 = 0 .$$

$p_{14} = p_{24} = p_{31}$ ist *Ausnahmeebene*, ein Ausnahmepunkt tritt nicht auf. Die Singularitätenfläche ist:

$$y_4 [y_1^2 y_1 + 2 y_2 y_3 y_1 - 2 y_3^3] = 0 .$$

Diese Fläche dritter Ordnung vierter Klasse besitzt den biplanaren Knoten A_2 und den conischen A_1. Ihre Verbindungslinie hat die constante Tangentialebene $y_3 = 0$. Eine weitere Gerade $A_1 A_2$, die durch den conischen Knoten geht, hat eine stationäre dreifache Tangentialebene $y_4 = 0$, an der jeder ebene Schnitt der Fläche eine Wendung hat. Andere Singularitäten kommen nicht vor. — Wir finden durch Vergleich:

Die Singularitätenfläche besteht aus der Gattung XIX der Flächen dritter Ordnung, vierter Klasse von Schläfli, mit ihrer stationären dreifachen Tangentialebene.

Schläfli hat die Fläche auf dasselbe Coordinatensystem bezogen. — *Der Complex hat drei Doppelgerade, die in einer Ebene unendlich nahe liegen.*

(B.) In dem dualen Fall hat man.

$$\Omega \equiv 2 p_{12} \cdot p_{14} + 2 p_{23} \cdot p_{42} + p_{13}^2 = 0 .$$

Der Punkt $p_{12} = p_{23} = p_{13}$ ist hier *Ausnahmepunkt*. — Die Gleichung der Singularitätenfläche in Ebenencoordinaten ist die obenstehende, wenn man statt der y die v setzt; in Punktcoordinaten lautet sie:

$$y_1^4 + 2 y_1^2 y_2 y_3 + 2 y_3^3 y_4 + y_2^2 y_3^2 = 0 .$$

Ein Punkt und eine Fläche vierter Ordnung, dritter Klasse bilden die Singularitätenfläche. Letztere hat einen dreifachen Punkt, der uniplanar ist und durch den eine Doppelgerade der Fläche geht, die eine zweifache stationäre Tangentialebene hat. Die Ergänzung ist der dreifache Punkt.

Der Complex hat 14 Constante.

XIII.

In diesem letzten Abschnitt soll es sich darum handeln, eine Uebersicht über die 48 nunmehr einzeln untersuchte Complexe zu bekommen. Zuerst sollen allgemein geltende Sätze für sich ausgesprochen werden und nachher werden die einzelnen Fälle durch Tabellen verbunden.

Es treten in allen Fällen Gerade auf, die dem Complex doppelt angehören. Für jede solche ist sowohl $\Omega = 0$ als auch $\Omega' = 0$ doppelt erfüllt und wir haben:

In allen den 48 Fällen treten Complexdoppelgerade auf, welche der Congruenz der singulären Linien je vierfach zählend angehören.

Die Bedeutung der Doppelgeraden für den Complex ist die folgende:

Jede Doppelgerade des Complexes ist Doppelgerade der Singularitätenfläche. Umgekehrt ist auch jede Doppelgerade der Singularitätenfläche eine doppelte Complexgerade.

Den ersten dieser Sätze haben wir früher bewiesen, der zweite ist einstweilen Erfahrungssatz. — Für diese Doppelgeraden gilt weiterhin der folgende Satz:

Ist die Zahl der Doppelgeraden discret, so gruppiren sie sich wie eine entsprechende Anzahl von Kanten eines Tetraeders. Mehr als sechs, ausser unendlich viele, kommen nicht vor.

Die Tetraederkanten kann man z. B. auf drei wesentlich verschiedene Weisen zu je drei gruppiren. Entweder liegen sie in einer Seitenfläche, oder sie gehen durch eine Ecke oder endlich zwei von ihnen sind Gegenkanten und werden von der dritten getroffen. Alle diese drei Gruppen (wovon die beiden ersten linien-geometrisch gleichwerthig sind) kommen auch wirklich vor*).

Ist *eine einfach unendliche Anzahl von Doppelgeraden wirklich* vorhanden, so ist der am nächsten liegende Fall, dass sie *eine Erzeugung einer Fläche zweiten Grades* bilden. Diese F_2 ist dann doppelt zählend die Singularitätenfläche. Sie kann allgemein sein, ausarten, insbesondere zerfallen. Wenn sie in eine sich selbst dualistische Form

*) In einer vorläufigen Mittheilung in den Sitzungsberichten der phys.-med. Societät zu Erlangen vom Juli 1873 habe ich die 48 Complexe nach der Anzahl der Doppelgeraden geordnet.

ausarten soll, so zerfällt sie in zwei Ebenen, resp. zwei Punkte auf deren Schnittlinie. Die Erzeugenden bilden vier Büschel, die in den Ebenen E_1, E_2 durch die Punkte P_1, P_2 gehen. Die Büschel $E_1 P_1$ und $E_2 P_2$ bilden dann die eine Erzeugung dieser zerfallenen Fläche, $E_1 P_2$ und $E_2 P_1$ die andere. *Zwei so zusammengehörige Büschel repräsentiren dann die doppelten Complexgeraden.* — In noch specielleren Fällen können E_1 und E_2, P_1 und P_2 zusammenrücken.

Es kann auch sein, dass *nur ein Büschel von Doppelgeraden* auftritt, das nicht mehr als eine Erzeugung einer F_2 aufgefasst werden kann. Die Ebene des Büschels gehört der Singularitätenfläche doppelt an, ebenso der Mittelpunkt des Büschels. In der ersteren hat man einen Kegelschnitt, durch den letztern einen Kegel, der den genannten Kegelschnitt berührt.

Sind einfach unendlich viel Doppelgerade vorhanden, welche *beide Erzeugungen einer* F_2 ausmachen, so besteht der Complex aus allen Tangenten von F_2.

Ist dann F_2 ein *Kegelschnitt*, so besteht der Complex aus *allen Treffgeraden desselben* (dual aus allen Tangenten eines Kegels). Dann giebt es *zweifach unendlich viele Doppelgerade des Complexes*, sie liegen in der Ebene des Kegelschnittes. (Im dualen Fall sind sie die Geraden durch die Kegelspitze.) — Andere Fälle mit zweifach unendlich vielen Doppelgeraden kommen nicht vor, wenn wir zerfallende Complexe ausschliessen.

Das Zerfallen der Singularitätenfläche geschieht stets zusammen mit dem der Congruenz der singulären Linien. Es gilt hiefür das folgende Gesetz:

Ist eine Fläche m^{ter} Ordnung n^{ter} Klasse Theil der Singularitätenfläche, so gehört von ihren Tangenten eine Congruenz n^{ter} Ordnung, m^{ter} Klasse den singulären Linien an, und umgekehrt.

Zerfällt also die Singularitätenfläche nicht, so thut das auch die Congruenz der singulären Linien nicht. Es haben daher gerade die Fälle ein besonderes liniengeometrisches Interesse, bei denen die Singularitätenfläche zerfällt.

In den meisten Fällen ist die Abzählung der *Constanten* sehr leicht. Es dürfen hier ähnliche Inductionsschlüsse angewandt werden, wie bei den Doppelgeraden. Wenn z. B. das Auftreten eines zweifachen Elementartheilers die Constantenzahl um eins verringert, so vermindert ein neu auftretender doppelter Elementartheiler (vorausgesetzt, dass in beiden Fällen derselbe an Stelle von zwei einfachen Elementartheilern tritt) diese Zahl nochmals um eins.

Die Abzählung der *absoluten Invarianten* ist etwas weniger einfach, bietet jedoch keine Schwierigkeiten. Klein giebt eine Formel an für die willkürlichen Constanten, die bei der Transformation in die kano-

nische Form auftreten*). Hat der Complex m Constante und ist die Zahl dieser willkürlichen Constanten n, so ist die Zahl der absoluten Invarianten $m - 15 + n$. Dabei ist jedoch die erste kanonische Form vorausgesetzt, resp. es tritt als Bedingung auf, dass alle Elementartheiler einfach sind. Für die erste kanonische Form findet man so die Zahlen:

$$\begin{matrix}[111111], & [1111(11)], & [111(111)], & [11(11)(11)], & [1(11)(111)], \\ 4 , & 3 , & 2 , & 2 , & 1 , \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}[(11)(11)(11)], & [(1\dot{1}\dot{1})(111)]. \\ 1 , & 0. \end{matrix}$$

Für spätere Fälle habe ich diese Abzählung unterlassen.

Die Eintheilung der Complexe kann von ganz verschiedenen Gesichtspunkten aus geschehen. In der Arbeit selbst sind die Elementartheiler obenangestellt, sie gaben die Eintheilung in die kanonischen Formen, was für die Behandlung das einfachste ist, da sie eine übersichtliche und erschöpfende Eintheilung geben. Wir sagten auch früher schon, dass man ganz ebenso erst nach den Wurzeln λ und innerhalb dessen nach den Elementartheilern eintheilen könnte. Hierauf gehen wir auch hier nicht weiter ein. Dagegen soll *die Anzahl der doppelten Complexgeraden* für die erste Tabelle die Unterscheidung abgeben. In der zweiten, ausführlicheren Tabelle soll *nach den Flächengattungen, die als Singularitätenflächen auftreten*, geordnet werden. Für jeden Complex ist die Constantenzahl angegeben. Man erkennt nach den oben ausgesprochenen Sätzen über die Doppelgeraden, dass beide Eintheilungen sich nahe berühren. In der letzten Tabelle sind alle Complexe mit je gleich viel *Constanten* zusammengestellt.

Tabelle I.

Eintheilung nach der Zahl der Doppelgeraden.

1 Doppelgerade	[11112], [1113], [114], [15]
2, sich schneidende . . .	[1122], [123], [24], [33]
2 windschiefe	[1111(11)], [111(12)]
3, als Dreieck resp. Trieder	[222], [6]
3, 2 windsch. treffen die dritte	[11(11)2], [1(11)3], [(11)4], [12(12)], [3(12)], [11(13)]
4, Vierseit	[11(11)(11)], [1(11)(12)], [(12)(12)]
4, Dreieck und Trieder . .	[(11)22], [2(13)], [1(14)], [(15)]
5 Doppelgerade	[(11)(11)2], [(11)(13)]
6 Doppelgerade	[(11)(11)(11)]

*) Vgl. S. 42 der Dissertation.

Ein Büschel	[(11)(22)], [2(22)], [11(22)], [1(23)], [(24)], [(33)]
Eine Erzeugung von F_2 . .	[111(111)], [11(112)], [1(113)], [(114)], [1(11)(111)], [(11)(112)], [(12)(111)], [12(111)], [3(111)], [2(112)], [1(122)], [(123)]
Beide Erzeugungen von F_2 .	[(111)(111)]
Strahlfeld oder Strahlbündel	[(222)].

Tabelle II.

Aufzählung der Singularitätenflächen.

Nicht-Linienflächen 4. Ordnung und Klasse.

El.-Th.	Nr.	Const.	
111111	—	19	Allgemeine Kummersche Fläche.
11112	7	18	Complexfläche, als Leitgerade eine beliebige Raumgerade.
1113	16	17	Complexfläche, als Leitgerade eine Complexgerade,
114	30	16	Complexfläche, als Leitgerade eine singuläre Linie.
15	42	15	Fläche mit 1 Doppelgeraden und 1 con. Knoten.
1122	22	17	Fläche mit 2 Doppelgeraden und 4 con. Knoten.
123	34	16	1 Rückkehrgerade, 1 Doppelgerade, 2 con. Knoten
33	46	15	2 Rückkehrgerade, 1 con. Knoten.

Linienflächen vierten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
1111(11)	1	17	Cremona XI, die allgemeine.
111(12)	8	16	„ XII, die allgemeine (Lie 1)*).
11(13)	17	15	„ X, die allgemeine (Lie 7).
1(14)	31	14	„ X, die stationären Ebenen vereinigt (Lie 10).
11(11)2	9	16	„ V, die allgemeine.
1(11)3	18	15	„ V, mit Rückkehrerzeugender.
12(12)	24	15	„ VI, die allgemeine (Lie 2).
3(12)	37	14	„ VI, mit Rückkehrerzeugender (Lie 4).

Flächen 3. (4.) Ordnung, 4. (3.) Klasse.

El.-Th.	Nr.	Const.	
222	39	16	Fläche mit 4 conischen Knoten etc. Dual: Steiner'sche Fläche.
24	44	15	Fläche mit 2 conischen Knoten, 1 biplanarem, Schläfli XVIII.

*) Vgl. Lie: „*Ueber Complexe* . . .“ Diese Annalen, Bd. V, S. 235.

El.-Th.	Nr.	Const.	
6	48	14	Fläche mit 1 conischen Knoten, 1 biplanarem, Schläfli XIX.

Linienflächen dritten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
(11)22	26	15	Allgemeine, als Ergänzung ein beliebiger Doppelpunkt etc.
(11)4	32	14	Allgemeine, als Ergänzung ein Cuspidalpunkt.
2(13)	36	14	Cayley'sche, mit bel. Doppelpunkt (Lie 8).
(15)	43	13	„ , mit Cuspidalpunkt (Lie 11).

Zwei Flächen zweiten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
11(11)(11)	3	15	Die F_2 haben ein räumliches Vierseit gemein etc.
1(11)(12)	11	14	Die F_2 berühren sich nach einer Erzeugenden.
(12)(12)	28	13	Die F_2 berühren sich nach zwei Erzeugenden.
11(22)	23	14	Kegel und Kegelschnitt.
1(23)	35	13	Kegel und Kegelschnitt, der letztere durch die Spitze des ersteren.

Eine Fläche zweiten Grades (F_2) und zwei Ebenen (E_1, E_2) nebst zwei Punkten (P_1, P_2).

El.-Th	Nr.	Const.	
(11)(11)2	13	14	E_1 und E_2 tangiren F_2 in P_1 und P_2.
(11)(13)	20	13	E_1 und E_2 gehen durch dieselbe Erzeugende von F_2, P_1 und P_2 liegen auf ihr.
2(22)	40	13	F_2 ist Kegel, $E_1 = E_2$ durch dessen Spitze etc.
(24)	45	13	F_2 ist Kegel, $E_1 = E_2$ ist Tangentialebene.

Eine doppelt zählende Fläche zweiten Grades.

El.-Th.	Nr.	Const.	
111(111)	2	14	4 lineare Congruenzen singulärer Linien, die 8 Directricen gehören einer Erzeugung v. F_2 an.
1(11)(111)	4	12	2 lineare Congruenzen singulärer Linien, die 8 Directricen zu je 4 vereinigt.
(111)(111)	6	9	Der Complex besteht aus den Tangenten von F_2.
12(111)	12	13	3 lin. Congruenzen sing. Linien, 1 davon speciell und dopp. zählend.
(12)(111)	15	11	1 lin. Cong. sing. Lin, 4fach zählend und spec.
3(111)	21	12	2 lin. Congruenzen sing. Linien, 1 davon speciell und 3fach zählend.
(222)	41	8	Complex besteht aus den Tangenten eines Kegels resp. den Treffgeraden eines Kegelschnittes.

Vier Ebenen $(E_1 \cdots E_4)$ und vier Punkte $(P_1 \cdots P_4)$.

El.-Th.	Nr.	Const.	
(11)(11)(11)	5	13	Tetraedraler Compl., E und P bild. ein Tetraeder.
11(112)	10	13	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 4 lineare Cong. sing. Lin.
1(113)	19	1	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 3 lineare Cong. sing. Lin. (1 davon speciell).
(11)(112)	14	11	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 2 dopp. Büschel sing. Lin.
1(122)	25	12	$E_1 = \cdots = E_4$, 2 dopp. zähl. spec. lin. Cong.
2(112)	27	12	$E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$, 3 lin. Cong. (1 dopp. zähl. zerfall. und 2 spec.)
(11)(22)	29	12	$E_1 = E_2$, E_3, E_4. E_1 erfüllt mit dopp., E_3 und E_4 mit einf. sing. Lin.
(114)	33	11	$E_1 = E_2$, erfüllt mit dreif. sing. Lin., ausserdem 1 Cong. sing. Lin.
(123)	38	11	$E_1 = \cdots = E_4$, erfüllt mit vierf. sing. Lin.
(33)	47	12	$E_1 = E_2 = E_3$, erfüllt mit dopp. sing. Lin., 2 spec. Cong. (die Directricen in E_4 durch P_4).

Tabelle III.

Aufzählung nach der Constantenzahl.

Const.	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8.
El.-Th.	111111	11112	1113	114	15	6						
			1111(11)	111(12)	11(13)	1(14)	(15)					
			1122	222	(11)22							
				123	33	(12)3						
				11(11)2	1(11)3	(11)4						
					24	2(13)	2(22)	2(112)				
					11(11)(11)	1(11)(12)	(11)(13)					
					12(12)	11(22)	1(23)	(33)				
						2(11)(11)	(11)(11)(11)	1(11)(111)	(12)(111)		(111)(111)	
						111(111)	11(112)	1(113)	(114)			
							(12)(12)	(11)(22)	(11)(112)			
							1(111)2	(111)3				
								1(122)	(123)			(222)
								(24)				

Erlangen, im Juli 1873.

Ueber die Plücker'sche Complexfläche.

Von Felix Klein in Erlangen.

Aus der Discussion der Liniencomplexe zweiten Grades, wie sie Hr. Weiler in dem vorstehenden Aufsatze durchgeführt hat, geht hervor, dass die Plücker'sche Complexfläche gleich der allgemeineren Kummer'schen Fläche für unendlich viele Complexe zweiten Grades die singuläre Fläche*) bildet, und dass dieselbe also mit ganz ähnlichen Mitteln untersucht werden kann, wie dies der Verf. früher (diese Annalen Bd. II, S. 198 ff.) bei der Kummer'schen Fläche gethan hatte. Das System der sechs paarweise in Involution liegenden linearen Complexe, welches bei der Kummer'schen Fläche eine fundamentale Rolle spielte, ist bei der Complexfläche nur in dem Sinne ausgeartet, dass zwei dieser Complexe, indem sie zusammenrückten, speciell wurden und in die Doppellinie der Fläche übergingen. Mit Bezug auf die vier übrigen linearen Complexe bleiben durchaus die Schlussweisen bestehen, welche bei der Kummer'schen Fläche ihre Anwendung fanden, und man hat also insbesondere den Satz:

Eine Plücker'sche Complexfläche ist mit Bezug auf vier paarweise in Involution liegende lineare Complexe ihre eigene reciproke Polare.

Aus diesem Satze folgt ohne Weiteres, dass das Doppelverhältniss der vier singulären Punkte der Complexfläche gleich dem Doppelverhältnisse ihrer vier Ebenen sei. Indem man sodann die Complexfläche nicht mehr als singuläre Fläche eines besonderen Complexes zweiten Grades betrachtet, sondern in der Art, wie sie bei Plücker eingeführt wird, d. h. als Brennfläche derjenigen Linien eines Complexes zweiten Grades, welche eine feste Gerade schneiden, erhält man:

Die vier Punkte, in denen eine beliebige Gerade die singuläre Fläche eines Complexes zweiten Grades trifft, und die vier Ebenen, die man durch dieselbe Gerade als Tangentenebenen der singulären Fläche legen kann, haben dasselbe Doppelverhältniss.

Diesen Satz habe ich für die singuläre Fläche des allgemeinen Complexes vom zweiten Grade, d. h. für die Kummer'sche Fläche,

*) Ich ziehe diesen von Hrn. Voss vorgeschlagenen Ausdruck (Gött. Nachrichten 1873, p. 546) dem sonst gebräuchlichen „Singularitätenfläche" vor.

bereits in diesen Annalen Bd. II, S. 215, mitgetheilt; aber der Zusammenhang, in welchem er dort ausgesprochen ist, kann nicht als Beweis desselben gelten.

Um so lieber will ich hier eine einfache Betrachtung mittheilen, die in Anlehnung an die von Plücker begonnene Untersuchungsweise der Complexflächen (vgl. dessen Neue Geometrie S. 205 ff.) unmittelbar die vier zur Fläche gehörigen linearen Complexe nachweist und aus ihrer Existenz die Gleichheit der fraglichen Doppelverhältnisse, sowie weiterhin die Eigenschaft der Fläche erschliesst, ihre eigene reciproke Polare zu sein. Aus der Gleichheit der beiden Doppelverhältnisse wird man weiterhin, was bei Plücker in minder übersichtlicher Weise bewiesen wird, den Satz von der Identität der von den singulären Punkten gebildeten und der von den singulären Ebenen umhüllten Fläche gewinnen. Ist nämlich das Doppelverhältniss der vier Punkte, in welchen eine beliebige Gerade die erste Fläche trifft, immer gleich dem Doppelverhältnisse der vier Ebenen, welche man durch die Gerade hindurch an die zweite Fläche legen kann, so sind die Tangenten der ersten Fläche immer auch Tangenten der zweiten Fläche, d. h. die beiden Flächen sind identisch*), w. z. b. w.

Für die Singularitäten der Complexfläche, wie sie Plücker nachweist, sollen im Nachstehenden, soweit sie in Betracht kommen, die folgenden Bezeichnungen**) angewandt werden. Die vier singulären Ebenen der Fläche mögen E_1, E_2, E_3, E_4 heissen. Sie enthalten je ein Paar von Doppelpunkten der Fläche: 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'; 4, 4'. Die in ihnen verlaufenden Verbindungslinien der Doppelpunktpaare, die singulären Strahlen der Fläche, seien S_1, S_2, S_3, S_4. Dieselben schneiden die Doppellinie und die Polare der Fläche bez. in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 und q_1, q_2, q_3, q_4, die jedesmal zu den zwei auf dem singulären Strahle gelegenen Doppelpunkten harmonisch sind. Weiter sollen die vier singulären Punkte der Fläche P_1, P_2, P_3, P_4 genannt sein. Von ihnen gehen die Paare Doppelebenen I, I'; II, II'; III, III'; IV, IV' aus. Die singulären Axen endlich, in welchen sich die zusammengehörigen Doppelebenen schneiden, seien durch A_1, A_2, A_3, A_4 bezeichnet.

Die Doppelebenen der Fläche enthalten (vgl. Plücker) jedesmal vier Doppelpunkte und durch jeden Doppelpunkt gehen vier Doppel-

*) Der Nachweis der Identität der beiden Flächen ist durch Hrn. Pasch in seiner Habilitationsschrift (Giessen 1870) auf allgemeinere und fundamentalere Betrachtungen betr. Brennflächen von Congruenzen zurückgeführt worden. Der im Texte angegebene Beweis scheint aber immer dadurch interessant, dass er bis zum Schlusse die Vorstellung des Unendlich-Kleinen vermeidet.

**) Vgl. Clebsch's Bericht über Plücker's Neue Geometrie in den Göttinger Anzeigen, 1869.

ebenen hindurch. Man kann die festgesetzten Bezeichnungen insbesondere so wählen, dass dieses Verhältniss in dem folgenden Schema seine Darstellung findet:

Ebenen	Punkte	Ebenen	Punkte
I	1 2 3 4	I'	1′ 2′ 3′ 4′
II	1 2 3′ 4′	II'	1′ 2′ 3 4
III	1 2′ 3 4′	III'	1′ 2 3′ 4
IV	1 2′ 3′ 4	IV'	1′ 2 3 4′

Ich behaupte nun zunächst, dass es möglich ist, die 8 Doppelpunkte den 8 Doppelebenen in den folgenden vier Weisen durch lineare Complexe zuzuordnen. *Es entsprechen den Punkten:*

$$1, \quad 1', \quad 2, \quad 2', \quad 3, \quad 3', \quad 4, \quad 4'$$

bezüglich die Ebenen:

$$\begin{array}{cccccccc} I, & I', & II, & II', & III, & III', & IV, & IV' \\ II, & II', & I, & I', & IV', & IV, & III', & III \\ III, & III', & IV', & IV, & I, & I', & II', & II \\ IV, & IV', & III', & III, & II', & II, & I, & I'. \end{array}$$

Gesetzt, es sei dieses bewiesen, dann folgt unmittelbar, dass die vier betreffenden linearen Complexe paarweise in Involution liegen. Denn die Zuordnungen, wie sie durch das vorstehende Schema gegeben sind, haben ersichtlich die Eigenschaft, paarweise vertauschbar zu sein, und die Vertauschbarkeit der mit ihnen verknüpften Zuordnungen ist für lineare Complexe das Kennzeichen der involutorischen Lage (vgl. diese Annalen Bd. IV, S. 414).

Um aber den nöthigen Beweis zu führen, construire ich vier lineare Complexe aus je fünf denselben angehörigen Linien und zeige sodann, dass sie die voraufgeführten Zuordnungen zur Folge haben. Es soll dies der Kürze wegen nur mit Bezug auf die erste Zuordnung auseinandergesetzt werden. Man construire nämlich den linearen Complex, der die folgenden fünf Geraden enthält:

die Doppellinie der Fläche,

die Polare,

die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte 2, 3′; 3, 4′; 4, 2′.

Man betrachte sodann etwa die singulären Strahlen S_2 und S_3. Die Linien des linearen Complexes, welche beide schneiden, müssen eine Regelschaar bilden und vermöge derselben werden die beiden Punktreihen S_2 und S_3 projectivisch auf einander bezogen sein. Aber von

dieser Regelschaar sind drei Erzeugende bekannt: die Doppellinie, die Polare und die Gerade 2, 3′. Sie ordnen den Punkten p_2, q_2, 2 von S_2 die Punkte p_3, q_3, 3′ von S_3 zu. Da aber p_2, q_2 auf S_2 zu 2, 2′ und p_3, q_3 auf S_3 zu 3, 3′, oder, was dasselbe ist, zu 3′, 3 harmonisch sind, so werden auch 2′, 3 durch die Regelschaar zugeordnet werden. *Dem linearen Complexe gehört also auch die Gerade 2′, 3 an.* Dasselbe beweist man in ähnlicher Weise von den Geraden 3′, 4; 4′, 2.

Unter den geraden Linien, die durch den Punkt 2 hindurchgehen, kennt man jetzt zwei als dem linearen Complexe angehörig, nämlich 2, 3′ und 2, 4′. Dem Punkte 2 ist also im Complexe die Ebene 2, 3′, 4′, d. h. nach der oben festgesetzten Bezeichnung die Ebene *II* zugeordnet. Dieselbe geht ausser durch 2, 3′, 4′ noch durch 1 hindurch; die Gerade 1, 2 gehört also ebenfalls dem Complexe an. In gleicher Weise zeigt man, dass den Punkten 3 und 4 die Ebenen *III* und *IV* entsprechen und also auch 1, 3; 1, 4 dem Complexe angehören. Hieraus denn endlich folgt, dass dem Punkte 1 die Ebene *I* entspricht. Die Zuordnung von 1′, 2′, 3′, 4′ bez. zu *I′*, *II′*, *III′*, *IV′* ergiebt sich auf dieselbe Weise und es ist somit der geforderte Beweis erbracht.

Durch denselben linearen Complex werden einander zugeordnet, wie nicht näher ausgeführt zu werden braucht: die vier singulären Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 bez. den vier singulären Punkten P_1, P_2, P_3, P_4; die vier singulären Strahlen S_1, S_2, S_3, S_4 bez. den vier singulären Axen A_1, A_2, A_3, A_4 u. s. w. Wir haben also;

Das Singularitätensystem ist in Bezug auf den construirten linearen Complex seine eigene conjugirte Polare.

was die Gleichheit der von den vier singulären Punkten und den vier singulären Ebenen gebildeten Doppelverhältnisse als einzelne Behauptung einschliesst. Weiter aber folgt:

Die Complexfläche selbst ist in Bezug auf den Complex ihre eigene conjugirte Polare.

Denn die Polarfläche derselben ist wieder eine Fläche vierter Ordnung mit derselben Doppellinie, denselben singulären Strahlen, denselben Berührungskegelschnitten in den Doppelebenen, und durch diese Elemente ist die Fläche als Fläche vierter Ordnung mehr als vollständig bestimmt.

Hiermit sind die zu Anfang voraufgeschickten Sätze und also auch die aus ihnen gezogenen Folgerungen bewiesen.

Erlangen, October 1873.

Untersuchung über den Zusammenhang der Flächen im Sinne Riemann's.

Von F. Lippich in Prag.

Bekanntlich lautet der auf den Zusammenhang der Flächen bezügliche Fundamentalsatz:

Wenn ein gegebenes System von (nicht gespaltenen) Flächen durch Querschnitte in lauter einfach zusammenhängende Flächen zerlegt wird, so ist in jedem Falle die Zahl der geführten Querschnitte weniger der Zahl der erhaltenen Flächenstücke constant.

Aus der Art, wie dieser Satz bewiesen wird, ist jedoch nicht unmittelbar ersichtlich, in welcher Weise die Querschnitte zu führen sind, damit die Zahl der Flächenstücke eine beliebige vorgeschriebene, und namentlich (wenn das ursprüngliche Flächensystem aus einer einzigen Fläche bestand) gleich Eins sei. Desshalb und im Hinblick auf die Wichtigkeit des Gegenstandes dürfte es nicht ganz werthlos sein, wenn im Folgenden die auf den Zusammenhang der Flächen bezüglichen Sätze auf einem von dem Riemann'schen etwas abweichenden und zum Theile mehr synthetischen Wege dargestellt werden.

Bezüglich der nicht ausdrücklich erklärten Benennungen folge ich den bekannten „*Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*“ *von C. Neumann.*

I.

Wir denken uns gegeben eine nicht aus getrennten Stücken bestehende Fläche F, d. h. eine Fläche von der Beschaffenheit, dass man von irgend einem auf ihr gelegenen Punkte zu jedem ihrer Punkte eine ununterbrochene Linie ziehen kann, die nur Punkte der Fläche selbst enthält.

Von dieser Fläche setzen wir voraus, dass sie nicht gespalten sei, also keine Linien enthält, in denen mehr als zwei Flächenstücke aneinander haftend zu denken sind. Demgemäss können im F nur geschlossene und nicht verzweigte Randcurven vorkommen.

Einen Schnitt in F denken wir uns vorläufig nur geführt längs einer Curve S, die entweder nirgends mit sich selber zusammentrifft oder

nur mit ihren Endpunkten. Die Fläche, welche durch Ausführung eines solchen Schnittes S aus der ursprünglichen entsteht, bezeichnen wir durch $F(S)$, die Ränder des Schnittes mit s und s'.

Wenn ein Schnitt S die gegebene Fläche nicht zerstückt, so muss es möglich sein, von irgend einem Punkte des Randes s zu irgend einem Punkte des anderen Randes s' eine Linie zu ziehen, welche ganz in $F(S)$ liegt und sich selbst nicht schneidet. Wir wollen sie eine zu S gehörige *Weglinie* nennen. Verbindet sie zwei gegenüberliegende Randpunkte, so ist sie in F eine geschlossene Linie, welche mit der Linie S nur einen einzigen Punkt gemein hat.

Ein Schnitt kann eine Fläche niemals zerstücken, wenn derselbe in einem *innern* Punkt der Fläche anfängt, oder in einem solchen endigt; denn in diesem Falle kann man immer von der einen Seite des Schnittes unendlich nahe dem Rande s um jenen innern Punkt herum nach dem anderen Rande s' gelangen. Es werden daher nur Quer- oder Rückkehrschnitte eine Fläche zerstücken können. Denkt man sich den Schnitt allmälig weiter geführt, so kann das Zerstücken erst in dem Momente eintreten, in welchem der Schnitt den Randpunkt erreicht und weil sodann nur zwei Punkte getrennt werden, so zerfällt die Fläche auch nur in zwei Theile.

Ist $F(S)$ zerstückt in die beiden Theile A und B, und man zieht von einem Punkte a in A eine Linie, welche S überschreitet, also nach B führt, so muss man S mindestens noch ein zweites mal überschreiten, um wieder nach a zurückzugelangen, im Allgemeinen wird die hiezu nöthige Zahl der Ueberschreitungen gerade sein müssen.

Wird demnach in F eine Linie S verzeichnet, so dass $F(S)$ zerstückt ist, so kann eine in F gezogene geschlossene Linie die Linie S nur in einer geraden Zahl von Punkten schneiden. Ist hingegen $F(S)$ nicht zerstückt, so kann die Zahl der Durchschnittspunkte eine beliebige sein.

Im letzteren Falle ist es nämlich möglich, von jedem Rande von S nach a zu gelangen ohne S überschreiten zu müssen.

Es seien in F zwei Linien S_1 und S_2 verzeichnet, die sich nicht gegenseitig treffen und es sei sowohl $F(S_1)$ als auch $F(S_2)$ nicht zerstückt; hingegen sollen beide Schnitte gleichzeitig geführt die Fläche zerstücken in die Theile A und B. Denkt man sich in $F(S_1)$ den Schnitt S_2 ausgeführt, so erkennt man, dass ein Rand von S_2 dem Theil A, der andere dem Theil B angehört. Dasselbe zeigt sich bezüglich der Ränder von S_1, wenn man in $F(S_2)$ den Schnitt S_1 führt. Um daher in $F(S_1)$ von einem Punkte σ_1 auf s_1 zu einem Punkte σ_1' auf s_1' zu gelangen, muss S_2 wenigstens einmal, allgemein eine ungerade Anzahl von Malen überschritten werden, da man schliesslich aus dem einen Theile A von $F(S_1, S_2)$ in den anderen B gelangen

soll. Ziehen wir dann in F noch eine Linie von σ_1 nach σ_1', welche S_2 nicht trifft, die aber S_1 in einer ungeraden Zahl von Punkten schneiden muss, so haben wir eine geschlossene Linie, die S_1 und S_2 in einer ungeraden Zahl von Punkten trifft. Ziehen wir aber von einem Punkte a in A eine Linie, welche S_1 in einer geraden Anzahl von Punkten schneidet, so dass man sich schliesslich wieder in A befindet, so muss sodann, wenn S_2 im weiteren Verlaufe geschnitten wird, dieses ebenfalls eine gerade Anzahl von Malen geschehen, um wieder nach a zurückkehren zu können. Dieselben Betrachtungen gelten auch dann noch, wenn das Durchschneiden von S_1 und S_2 beliebig oft abwechselt.

Wir erweitern sie noch für den Fall, dass sich die Linien S_1 und S_2 gegenseitig schneiden. Indem wir S_2 von seinem Anfangspunkte p bis zu seinem Endpunkte q durchlaufen, seien $1, 2, 3 \cdots n$ die Schnittpunkte auf S_1 in der Reihenfolge numerirt, in welcher sie passirt werden. Jeder der Theile $p \cdot\cdot 1$, $1 \cdot\cdot 2$, $2 \cdot\cdot 3$ u. s. f. von S_2 bildet für sich genommen in $F(S_1)$ einen Schnitt und wir nehmen an, alle diese Schnitte können so in Gruppen zusammengefasst werden, dass jede Gruppe für sich in $F(S_1)$ ein zerstückendes Schnittsystem bildet. Es zerfällt dann $F(S_1, S_2)$ in Theile, von denen jeder theils von Stücken der Linie S_2, theils von Stücken der Linie S_1 begrenzt erscheint, wobei natürlich noch Theile der ursprünglichen Begrenzung von F hinzutreten können. Da man also aus keinem dieser Theile nach einem anstossenden gelangen kann, ohne die entsprechenden begrenzenden Stücke von S_1 oder S_2 zu überschreiten, so bilden diese Stücke zusammengenommen in F selbst einen zerstückenden Schnitt und irgend eine in F gezogene geschlossene Linie muss denselben in einer geraden Zahl von Punkten treffen. Daraus erkennt man aber sofort, dass die Gesammtzahl aller Schnittpunkte auf S_1 und S_2 für jede geschlossene Linie in F gerade sein muss, und daher sind die Zahlen der Schnittpunkte auf S_1 und der auf S_2 gleichzeitig entweder gerade oder ungerade.

Wir sprechen daher folgenden Satz aus:

(1) . . . *Wenn in F zwei Linien S_1 und S_2 von der Beschaffenheit verzeichnet werden, dass sie sich gegenseitig nicht treffen, $F(S_1)$ sowohl wie auch $F(S_2)$ nicht zerstückt ist, wohl aber $F(S_1, S_2)$; so muss jede in F gezogene geschlossene Linie die beiden Linien S_1 und S_2 entweder gleichzeitig in einer geraden Anzahl von Punkten (Null mit einbegriffen), oder gleichzeitig in einer ungeraden Anzahl von Punkten (Null ausgeschlossen) durchschneiden. Dies gilt auch dann noch, wenn S_1 und S_2 sich gegenseitig durchschneiden, sobald nur die sämmtlichen Stücke, in welche eine dieser Linien z. B. S_2 durch die andere S_1 zerlegt wird, so in Gruppen zusammengefasst werden können, dass jede Gruppe für sich in $F(S_1)$ ein zerstückendes Schnitt-*

system vorstellt. Jede Weglinie von S_1 schneidet also S_2 und umgekehrt. —

Wir wollen jetzt annehmen, dass eine der beiden Linien etwa S_2 so beschaffen sei, dass $F(S_2)$ zerstückt ist. Treffen sich diese Linien nicht, so wird S_1 ganz in dem einen der beiden Theile A oder B, etwa in A verlaufen. Eine zu S_1 gehörige Weglinie kann demnach S_2 nur in einer geraden Zahl von Punkten schneiden, Null natürlich mit einbegriffen, da der Theil A durch S_1 nicht zerstückt ist. Das Vorhandensein einer Weglinie von S_1, welche S_2 gar nicht trifft, hört selbst dann nicht auf, wenn sich S_1 und S_2 durchschneiden. Um dieses nachzuweisen setzen wir fest, es werde S_1 in einem bestimmten Sinne durchlaufen von seinem Anfangspunkte p aus bis zu seinem Endpunkte q und es seien $1, 2, 3 \cdots n$ die Schnittpunkte auf S_2 in der Reihenfolge numerirt, in der sie passirt werden. Die Theile von $F(S_2)$ mögen wieder A und B heissen, und es sei p etwa in A gelegen. Sodann ist sofort ersichtlich, dass die Stücke $p \cdot\cdot 1$, $2 \cdot\cdot 3$, $4 \cdot\cdot 5$ u. s. w. von S_1 sämmtlich in A, die Stücke $1 \cdot\cdot 2$, $3 \cdot\cdot 4$, $5 \cdot\cdot 6$ u. s. f. hingegen sämmtlich in B liegen. Wird der Schnitt S_1 ausgeführt, so sind diese Stücke sämmtlich Schnitte, die entweder ganz in A oder ganz in B verlaufen. Aber man kann zeigen, dass nicht sämmtliche dieser Schnitte zerstücken werden. Denn nehmen wir an, dies sei der Fall, und es wären $(p, 1)$, $(2, 3)$, $(4, 5) \cdots$ die an S_2 grenzenden Stücke, welche durch die Schnitte $p \cdot\cdot 1$, $2 \cdot\cdot 3$, $4 \cdot\cdot 5$ u. s. f. aus A herausfallen, ebenso $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$ die Stücke des Theiles B. Wenn man nun die Ränder von S_2 wieder schliesst, so fügt man dadurch die aus A herausgefallenen Theile an den Theil B, wodurch er übergehe in B' und dafür die aus B' herausgefallenen Theile an A, wodurch dieser Theil übergehe in A'. Aus keinem der Stücke $(p, 1)$, $(2, 3)$ u. s. w. konnte man der Annahme nach heraus und nach dem übrigen Theil von A gelangen ohne $p \cdot\cdot 1$, $2 \cdot\cdot 3$ u. s. f. zu überschreiten und ähnliches gilt von den Stücken, die aus B herausgeschnitten wurden. Demnach kann man auch jetzt von B' nicht nach A' gelangen ohne irgendwelche Stücke von S_1 zu überschreiten, d. h. $F(S_1)$ erscheint in die Theile A' und B' zerlegt, was gegen die Voraussetzung ist. Es muss daher wenigstens eines der Stücke $p \cdot\cdot 1$, $1 \cdot\cdot 2$, $2 \cdot\cdot 3$ u. s. f. von S_1 bezüglich der Fläche $F(S_2)$ ein nicht zerstückender Schnitt sein. Ist dieses aber der Fall, so giebt es für das entsprechende Stück von S_1 eine Weglinie, die ganz in der Fläche $F(S_1, S_2)$ liegt, also keine der Linien S_1 und S_2 schneidet. Daher ergiebt sich der Satz:

(2) . . . *Wenn in der Fläche F zwei Linien verzeichnet werden S_1 und S_2 von der Beschaffenheit, dass $F(S_1)$ nicht zerstückt ist, wohl aber $F(S_2)$ und die beiden Linien schneiden sich nicht, so werden die zu S_1 gehörigen Weglinien, wenn sie so gewählt sind, dass sie S_2*

schneiden, dieses nur in einer geraden Zahl von Punkten thun können. Schneiden sich S_1 und S_2 gegenseitig, so giebt es auch in diesem Falle ebenso wie im vorhergehenden Weglinien von S_1, die S_2 nicht treffen, die also ganz in dem einen oder dem anderen Theile verlaufen, aus welchen $F(S_2)$ besteht.

II.

Einen Querschnitt, dessen Anfangs- und Endpunkt auf verschiedenen Rändern der Fläche liegt, nennen wir einen A-Schnitt und die Linie auf F, nach welcher er geführt erscheint, eine A-Linie.

Sei nun in F ein A-Schnitt A geführt. Damit dieses ausführbar ist, muss F wenigstens zwei Randcurven besitzen; es mag R eine dieser Curven sein, in welcher der Schnitt A mit seinen Rändern a und a' einmündet. Von irgend einem Punkte des Randes a kann man längs a bis R gelangen, und indem man an R weitergeht, muss man nach dem in R liegenden Punkte des Randes a' gelangen können, da R nur in einem Punkte von A getroffen wird. Sodann kann man aber längs a' zu jedem beliebigen Punkte von a' kommen, daher ist $F(A)$ nicht zerstückt. Da man ferner ebenso den anderen Rand von F, in welchem A mündet, umlaufend nach den Ausgangspunkte in A wieder zurückkommt, so sieht man, dass in der Fläche $F(A)$ die Ränder von A mit den beiden Rändern der Fläche, in welche A mündet, zu einem einzigen Rande verbunden wird.

(3) . . . *Ein A-Schnitt kann eine Fläche niemals zerstücken; die Fläche $F(A)$ hat um einen Rand weniger als die Fläche F.*

In der Fläche F sei nun ein *bestimmter* A-Schnitt möglich, d. h. die Fläche habe wenigstens zwei Ränder R und R'. Jede ganz in F liegende und sich selbst nicht schneidende Linie, die von einem Punkte auf R gezogen wird nach einem Punkte auf R', ist eine A-Linie. Aus dem Vorhandensein eines bestimmten A-Schnittes schliesst man also auf unendlich viele A-Linien in F, die aber sämmtlich zwischen denselben beiden Rändern gezogen erscheinen. Sobald man aber nach einer dieser Linien einen Schnitt A geführt hat, so sind in $F(A)$ alle übrigen der betrachteten A-Linien von F keine A-Linien mehr, weil ihre Endpunkte nunmehr in einem und demselben Rande liegen, also:

(4) . . . *Zwischen zwei Rändern einer Fläche kann nur ein einziger A-Schnitt gezogen werden; und wenn in der Fläche F ein bestimmter A-Schnitt möglich ist, so schliesst man hieraus auf das Vorhandensein einer Gruppe von unendlich vielen A-Linien in F, die aber sämmtlich so miteinander zusammenhängen, dass, wenn nach einer dieser Linien A ein Schnitt geführt ist, alle übrigen aufhören in $F(A)$ A-Linien zu sein.*

Hat die Fläche F im Ganzen ϱ Ränder, und führt man zwischen

zweien derselben einen Schnitt A_1, so hat $F(A_1)$ wegen (3) nur mehr $\varrho - 1$ Ränder und ein weiterer A-Schnitt A_2 muss wegen (4) zwischen zweien der $\varrho - 1$ Ränder verlaufen. Sodann ist $F(A_1 A_2)$ $\varrho - 2$-randig und wenn man so fortfährt, so kommt man nach Ausführung von $\varrho - 1$ A-Schnitten zu einer einrandigen Fläche. Da dieses immer eintreten muss, wie man auch die A-Schnitte aufeinander folgen lässt, aber immer erst nach $\varrho - 1$ Schnitten, so hat man den Satz:

(5) . . . *Die Zahl der A-Schnitte, welche man ausgehend von einer gegebenen Fläche F nach einander ausführen kann, ist constant, d. h. unabhängig von der Anordnung dieser Schnitte, und zwar um Eins kleiner als die Zahl der Ränder in F. Nach Ausführung aller A-Schnitte ist F in eine einrandige Fläche verwandelt.*

III.

Wir betrachten nunmehr solche Querschnitte, deren Endpunkte entweder auf der Curve des Schnittes selbst, oder mit den Anfangspunkten zugleich auf demselben Rande liegen. Einen derartigen Querschnitt nennen wir einen B-Schnitt und die ihm entsprechende Curve eine B-Linie.

(6) . . . *Die Fläche $F(B)$ hat um einen Rand mehr als die Fläche F.*

Denn wenn man von dem Punkte des Randes b von B ausgeht, welcher in dem Rande R der Fläche liegt und den Rand b durchläuft, sodann wieder zu R zurückkehrt, so hat man entweder nur einen Theil des anderen Randes b' beschrieben, falls der Endpunkt des B-Schnittes auf B selbst liegt, oder gar keinen Theil von b', falls der Endpunkt des Schnittes auf R sich befindet. Durch Fortgehen im Rande R kann man aber nur wieder zum Ausgangspunkte zurückkehren, also gehört der nicht durchlaufene Randtheil von b' einem neuen Rande der Fläche $F(B)$ an.

Ein B-Schnitt kann eine Fläche zerstücken oder auch nicht. Nehmen wir an, es sei $F(B)$ *nicht* zerstückt; dann kann man zwei gegenüberliegende Randpunkte von B durch eine Weglinie verbinden, längs welcher wir einen Schnitt C geführt denken. In der Fläche $F(B)$ ist nun C ein A-Schnitt, somit ist $F(B, C)$ nicht zerstückt und wenn man die Ränder von B schliesst, so erkennt man, dass auch $F(C)$ nicht zerstückt sein kann, also in F ein nicht zerstückender Rückkehrschnitt möglich ist. Da ferner in $F(B, C)$ für die Curve C eine Weglinie C_1 gezogen werden kann zwischen zwei gegenüberliegenden Randpunkten von C, so ist C_1 in F (d. h. wenn die Ränder der Schnitte B und C geschlossen werden) eine Rückkehrlinie, welche B gar nicht und C nur in einem Punkte schneidet. Daraus folgt aber, dass auch $F(C_1)$ nicht zerstückt ist, denn wäre dieses der Fall, so müsste ja

nach (2) C_1 von der in sich zurücklaufenden Linie C in einer geraden Anzahl von Punkten getroffen werden. Verfolgt man die Construction, durch welche C aus B erhalten wurde, von C ausgehend, so sieht man, dass auch umgekehrt aus dem Vorhandensein eines nicht zerstückenden Rückkehrschnittes die Existenz eines nicht zerstückenden B-Schnittes gefolgert wird. Eine speciellere Form des letzteren erhält man übrigens einfach dadurch, wenn man in $F(C)$ einen A-Schnitt führt, der in einem Rande von C beginnt.

(7) . . . *Ist daher die Fläche $F(B)$ nicht zerstückt, so giebt es in der Fläche F immer einen nicht zerstückenden Rückkehrschnitt, der, wenn man will, immer so gewählt werden kann, dass er die ursprüngliche B-Linie nicht trifft. Umgekehrt, wenn ein nicht zerstückender Rückkehrschnitt möglich ist, so giebt es auch immer einen nicht zerstückenden B-Schnitt, falls nur die Fläche einen Rand besitzt.*

(8) . . . *Wenn in einer Fläche F nur ein nichtzerstückender B-Schnitt möglich ist, so dass also $F(B)$ durch jeden weiteren B-Schnitt zerstückt wird, so ist in F auch nur ein einziger nichtzerstückender Rückkehrschnitt möglich und umgekehrt.*

Ist nämlich in $F(B)$ ein Rückkehrschnitt C' möglich, so dass $F(B, C')$ nicht zerstückt ist, so könnte aus C' auch ein B-Schnitt B' abgeleitet werden, ohne dass $F(B, B')$ zerstückt wäre, was gegen die Voraussetzung ist.

In Folge dieses Zusammenhanges der nichtzerstückenden B-Schnitte und Rückkehrschnitte wollen wir die weiteren Betrachtungen zunächst auf die letztere Schnittart als die einfachere beschränken.

IV.

Einen Rückkehrschnitt, welcher die gegebene Fläche nicht zerstückt, nennen wir einen C-Schnitt und die ihm entsprechende Curve eine C-Linie. Es erhellt sofort:

(9) . . . *Jeder Rückkehrschnitt verwandelt die gegebene Fläche in eine andere, die um zwei Ränder mehr besitzt als die ursprüngliche.*

In der Fläche F sei ein bestimmter C-Schnitt C_1 möglich; für zwei gegenüberliegende Randpunkte von C_1 ziehen wir eine Weglinie C' und führen längs derselben einen Schnitt. Da dieser in der Fläche $F(C_1)$ ein A-Schnitt ist, so ist $F(C_1 C')$ nicht zerstückt und folglich auch $F(C')$ nicht, da man diese Fläche erhält, wenn man in $F(C_1 C')$ die Ränder des Schnittes C_1 wieder schliesst. Nun kann man von C' ausgehend in derselben Weise einen anderen C-Schnitt C'' ableiten, der aus einer Weglinie für C' entstanden ist u. s. f. Man sieht also:

(10) . . . *Wenn in einer Fläche F ein bestimmter C-Schnitt möglich ist, so lässt sich aus diesem eine Gruppe unendlich vieler C-Linien*

der Fläche F ableiten, die gegen die Linie C_1 eine völlig beliebige Lage haben können.

Wir machen nun die Voraussetzung, dass $F(C_1)$ durch jeden weiteren Rückkehrschnitt zerstückt werde, also auch durch einen Rückkehrschnitt längs einer der unendlich vielen aus C_1 ableitbaren C-Linien, die C_1 nicht treffen. Dann treten die sämmtlichen C-Linien in F, also auch jene, welche C_1 treffen (die somit in $F(C_1)$ keine Rückkehrlinien sind) in eine eigenthümliche Beziehung zu einander, die wir aufsuchen wollen.

Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, dass sämmtliche C-Linien in F in zwei Gruppen zusammengefasst werden können, von denen die eine alle C-Linien C_g enthält, die C_1 in einer geraden Zahl von Punkten inclusive Null, die andere hingegen jene C-Linien C_u, die C_1 in einer ungeraden Zahl von Punkten schneiden.

Wir betrachten eine beliebige von den C-Linien der ersteren Art, etwa C_g, und nehmen an, sie treffe C_1 in den Punkten $1, 2, \cdots n$, die wieder in der Reihenfolge numerirt vorausgesetzt, sind in welcher sie passirt werden, wenn man C_g in bestimmtem Sinne durchläuft. Die Stücke $1 \cdot\cdot 2$, $2 \cdot\cdot 3$, $3 \cdot\cdot 4$, $\cdots\cdot n-1 \cdot\cdot n$, $n \cdot\cdot 1$ von C_g sind in $F(C_1)$ entweder B-Schnitte, wenn die Endpunkte des Stückes in demselben Rande von C_1 liegen, oder A-Schnitte, wenn dies nicht der Fall ist. Jeder dieser B-Schnitte muss nun $F(C_1)$ zerstücken; denn wäre dieses nicht der Fall, so wäre nach (7) in $F(C_1)$ ein nichtzerstückender Rückkehrschnitt möglich, was gegen die Voraussetzung ist. Was ferner diejenigen Stücke von C_g anbelangt, die in $F(C_1)$ A-Schnitte vorstellen, so ist zuerst zu bemerken, dass sie in gerader Anzahl vorhanden sein müssen, wenn die Gesammtzahl der Schnittpunkte auf C_1, wie vorausgesetzt, gerade sein soll. In der That, die Zahl der Schnittpunkte auf C_1 ist ebenso gross als die Zahl der in einem und demselben Rande von C_1 liegenden Endpunkte der Stücke von C_g, und jeder B-Schnitt führt zwei, jeder A-Schnitt aber nur einen solchen Punkt in dem einen Rande von C_1 mit sich. Fassen wir nun irgend zwei dieser A-Schnitte, etwa A' und A'' näher in's Auge, und denken wir z. B. A' in $F(C_1)$ zuerst geführt, so ist A'' in $F(C_1 A')$ kein A-Schnitt mehr, sondern ein B-Schnitt und zwar ein zerstückender. Wäre nämlich letzteres nicht der Fall, so müsste in $F(C_1 A')$ ein C-Schnitt möglich sein, also auch in $F(C_1)$, was wieder gegen die Voraussetzung. Wenn wir daher die sämmtlichen A-Schnitte, welche unter den Stücken von C_g vorkommen, beliebig in Gruppen zu je zweien zusammen fassen, so wird $F(C_1)$ durch jede solche Gruppe zerstückt. Mithin ergiebt sich, dass alle Stücke von C_g so beschaffen sind, dass sie entweder einzeln oder zu zweien $F(C_1)$ zerstücken. Der

Satz (1) ist daher auf sämmtliche Linien C_g anwendbar und wir können sagen:

(11) . . . *Wenn in einer Fläche ein bestimmter C-Schnitt C_1 möglich ist, $F(C_1)$ aber durch jeden weiteren Rückkehrschnitt zerstückt wird, so stehen die sämmtlichen C-Linien der Fläche F in einer solchen Beziehung zu einander, dass jede C-Linie, welche C_1 in einer geraden Zahl von Punkten inclusive Null schneidet, von jeder C-Linie, welche C_1 in einer ungeraden Zahl von Punkten schneidet, ebenfalls geschnitten wird, und zwar auch wieder in einer ungeraden Zahl von Punkten. Diese Beziehung gilt auch dann noch, wenn man statt C_1 irgend eine andere C-Linie substituirt.*

Hiemit lässt sich leicht die Frage beantworten, ob in der betrachteten Fläche F_1, wenn man statt C_1 irgend einen anderen C-Schnitt C' führt, noch ein zweiter C-Schnitt C'' möglich wird oder nicht. Es muss C'' so gewählt sein, dass er C' nicht trifft, denn sonst wäre er in $F(C')$ kein C-Schnitt; C' und C'' müssen daher beide der Gruppe C_g oder der Gruppe C_u angehören. Eine Weglinie von C', welche zwei gegenüberliegende Randpunkte verbindet, ist in F eine C-Linie und zwar eine solche, welche C' in einem Punkte schneidet; sie muss daher auch C'' schneiden, folglich ist $F(C', C'')$ zerstückt.

(12) . . . *Wenn daher in einer Fläche F ein bestimmter C-Schnitt C_1 möglich ist, ausser diesem aber kein zweiter, so bleibt in dieser Fläche immer nur ein C-Schnitt möglich, wie man denselben auch wählen mag.*

In derselben Fläche F soll nur *ein* A-Schnitt möglich sein, d. h. F besitze nur zwei Randcurven. Wir denken uns eine bestimmte A-Linie A_1 und eine bestimmte C-Linie C_1 verzeichnet, die sich durchschneiden mögen. Wird zuerst ein Schnitt nach C_1 geführt, so ist zwar in $F(C_1)$ der Schnitt A_1 kein A-Schnitt mehr, allein, da $F(C_1)$ nicht zerstückt ist, so kann man in dieser Fläche immer eine A-Linie ziehen, also ist auch in $F(C_1)$ ein A-Schnitt möglich. Wird hingegen zuerst A_1 geführt, so ist in $F(A_1)$ C_1 kein C-Schnitt mehr, allein ein anderer C-Schnitt ist immer ausführbar. Um dieses zu zeigen, führen wir zuerst einen A-Schnitt A', welcher C_1 nicht trifft. In der Fläche $F(A')$ ist nunmehr A_1 ein B-Schnitt und, wenn dieser nicht zerstückt, in $F(A')$ und folglich auch in F nach (7) ein C-Schnitt möglich, der A_1 nicht schneidet. Würde aber A_1 zerstücken, so giebt es nach (2) für C_1 irgend eine Weglinie, die A_1 nicht schneidet, nach welcher somit ein C-Schnitt möglich ist, auch wenn A_1 gezogen ist. Man kann daher ganz allgemein sagen:

(13) . . . *Ist in einer Fläche ein A-Schnitt für sich und ein C-Schnitt für sich möglich, so ist ein C-Schnitt auch dann noch ausführbar, wenn vorerst ein beliebig vorgeschriebener A-Schnitt, und ein*

A-Schnitt immer ausführbar, wenn bereits ein beliebig vorgeschriebener C-Schnitt geführt wurde.

Es kann nunmehr der Satz (12) verallgemeinert werden für eine Fläche, in welcher nach einander mehrere C-Schnitte ausführbar sind. Seien also C_1, $C_2 \cdots C_\gamma$ *bestimmte*, nach einander ausgeführte C-Schnitte, durch welche die Fläche F in eine Fläche $F(C_1 C_2 \cdots C_\gamma)$ verwandelt wird, in der kein weiterer C-Schnitt möglich ist. Um zu zeigen, dass bei irgend einer anderen Wahl und Anordnung der C-Schnitte immer γ nöthig sind, um die Verwandlung in eine Fläche ohne C-Schnitt zu bewirken, verfahren wir wie folgt.

Wir denken uns in F eine ganz beliebige C-Linie C_1' gezogen, welche die Linien $C_1, C_2 \cdots C_\gamma$ irgendwie durchschneiden mag und sodann die Schnitte $C_1 C_2 \cdots C_{\gamma-1}$ geführt. Hiedurch entsteht die Fläche $F(C_1 C_2 \cdots C_{\gamma-1})$, in welcher noch ein bestimmter C-Schnitt C_γ und daher nach (12) statt C_γ auch irgend ein anderer, aber nur einer, geführt werden kann. In der Fläche $F(C_1 C_2 \cdots C_{\gamma-1})$ werden die Stücke von C_1', in welche diese Linie durch die ursprünglichen Schnitte zerfällt, A- oder B-Schnitte bilden. Denkt man sich nach und nach sämmtliche A-Schnitte geführt, so erkennt man durch Anwendung des Satzes (13), dass statt C_γ eine andere C-Linie Γ verzeichnet werden kann, welche diese A-Schnitte nicht trifft. Nun denken wir uns noch nach den B-Linien Schnitte geführt. Von diesen wird nach (8) einer nicht zerstücken, die übrigen zerstücken. Durch Anwendung von (7) und (2) nach jedem neuen Schnitt erkennt man, dass zu Γ eine Weglinie angegeben werden kann, welche keinen der B-Schnitte trifft und nach welcher statt Γ ein C-Schnitt geführt werden kann, der somit keines der Stücke von C_1' schneidet; diesen Schnitt nennen wir C_γ'' und substituiren ihn für C_γ. In der Fläche $F(C_1 C_2 \cdots C_{\gamma-1} C_\gamma'')$ ist nun kein weiterer C-Schnitt möglich und C_1' liegt ganz in der Fläche $F'(C_\gamma'')$, d. h. überschreitet nirgends die Linie C_γ''. Nun können wir aber mit dieser Fläche ebenso verfahren wie mit F' und für $C_{\gamma-1}$ einen Schnitt $C_{\gamma-1}''$ substituiren, welcher ebenfalls C_1' nicht trifft u. s. f. Statt der ursprünglich gegebenen Schnitte $C_1 C_2 \cdots C_\gamma$ werden hiedurch γ andere $C_1'' C_2'' \cdots C_\gamma''$ substituirt, die sämmtlich C_1' nicht treffen.

Hieraus geht hervor, dass die Linie C_1' ganz in der Fläche $F(C_2'' C_3'' \cdots C_\gamma'')$ liegt, in welcher noch der Schnitt C_1'' möglich ist, aber kein weiterer C-Schnitt. In dieser Fläche ist C_1' eine C-Linie; denn wäre sie dies nicht, wäre sie also ein zerstückender Rückkehrschnitt, durch welchen $F(C_2'' C_3'' \cdots C_\gamma'')$ in zwei Theile M und N zerfällt, so müssten von den sämmtlichen Linien $C_2'' C_3'' \cdots C_\gamma'$ einige ganz in M, die anderen ganz in N liegen und es blieben die Theile M und N getrennt, auch wenn man die Ränder dieser Schnitte wie-

der aneinander fügt und die ursprüngliche Fläche herstellt. In dieser war aber C_1' als C-Linie angenommen. Da somit in $F(C_2''C_3''\cdots C_\gamma'')$ C_1' eine C-Linie ist, so kann man durch dieselbe den Schnitt C_1'' ersetzen und es wird dann nach (12) in $F(C_1'C_2''C_3''\cdots C_\gamma'')$ kein weiterer C-Schnitt mehr möglich sein. Die gegenwärtige Betrachtung hat also gezeigt, dass man den Schnitt C_1 ersetzen kann durch einen beliebig gewählten anderen C-Schnitt C_1'. Mit der Fläche $F(C_1')$ kann man nun bezüglich des Schnittes C_2'' ebenso verfahren und diesen ersetzen durch einen in $F(C_1')$ beliebig gewählten C-Schnitt C_2' u. s. f. bis C_γ'' ersetzt ist durch C_γ'. Wir haben also an Stelle der γ ursprünglich gegebenen Schnitte, beliebig gewählte andere, deren Zahl wieder γ ist und aus der Darstellung geht hervor, dass die Zahl dieser neuen Schnitte wegen (12) niemals grösser, aber auch niemals kleiner als γ sein kann. Der letztere Fall wäre nämlich nur dadurch möglich, dass eine beliebig gewählte C-Linie, wie etwa C_1', aufhört eine C-Linie zu sein in der Fläche $F(C_2''C_3''\cdots C_\gamma'')$. Somit ist der zu (5) analoge Satz bewiesen:

(14) ... *Die Zahl der C-Schnitte, welche man, ausgehend von einer gegebenen Fläche F, nach einander ausführen kann, ist constant, d. h. unabhängig von der Anordnung dieser Schnitte.*

V.

Die ursprüngliche Zahl der in einer gegebenen Fläche ausführbaren A-Schnitte (5) und die Zahl der möglichen C-Schnitte sind für diese Fläche zwei charakteristische Constante, die beziehungsweise α und γ heissen mögen. Man kann aus diesen beiden Constanten eine andere ableiten, welche eine wichtige Bedeutung hat. Nehmen wir an, die Fläche besitze wenigstens *eine* Randcurve; irgend ein C-Schnitt verwandelt dieselbe in eine andere, die um zwei Ränder mehr besitzt als die ursprüngliche, in welcher daher zwei weitere A-Schnitte möglich sind. Da alsdann in der neuen Fläche nach (13) und (14) noch immer die übrigen A- und C-Schnitte ausführbar sind, so folgt, dass, wenn man in ganz beliebiger Ordnung A- und C-Schnitte führt, bis keine dieser Schnittarten mehr möglich ist, im Ganzen $\alpha + 2\gamma$ A-Schnitte gezogen werden mussten und sodann eine Fläche erhalten wird, welche keinen A- und keinen C-Schnitt mehr zulässt. Die Zahl $\alpha + 2\gamma$ ist aber noch einer anderen Auffassung fähig. Da nämlich die Zahl der nicht zerstückenden B-Schnitte wegen (8) ebenfalls γ ist, jeder B-Schnitt die Zahl der Ränder um Eins vermehrt, also auch die Zahl der A-Schnitte, so ist $\alpha + 2\gamma$ die Zahl sämmtlicher möglichen A- und nicht zerstückenden B-Schnitte, also die Zahl sämmtlicher nicht zerstückenden Querschnitte zusammengenommen.

Definition. Eine Fläche soll einfach zusammenhängend heissen,

wenn sie weder einen A- noch einen C-Schnitt zulässt, sonst mehrfach zusammenhängend.

Sodann lässt sich folgender Satz aussprechen:

(15) ... *Jede (nicht gespaltene) mehrfach zusammenhängende Fläche kann mit Hinzufügung aller zulässigen C-Schnitte durch eine bestimmte Zahl von A-Schnitten oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch eben dieselbe Zahl von Querschnitten (A- und B-Schnitte) in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden. Ist die Zahl dieser A-Schnitte oder der Querschnitte n, so heisse die Fläche $n+1$-fach zusammenhängend und $N = n + 1$ die Grundzahl derselben.*

Setzt man in $n = \alpha + 2\gamma$ für α seinen aus der Zahl ϱ der Ränder der Fläche folgenden Werth, d. h. $\alpha = \varrho - 1$, so wird

$$n = \varrho + 2\gamma - 1;$$

doch ist zu bemerken, dass dieser Ausdruck nur dann mit $\alpha + 2\gamma$ übereinstimmt, wenn ϱ nicht Null ist; denn α ist sowohl Null, wenn die Fläche nur einen, als auch wenn sie keinen Rand besitzt. Um diese Nichtübereinstimmung zu umgehen, supponiren wir bei einer vollständig geschlossenen Fläche irgendwo einen Rand, indem wir einen Punkt ausscheiden oder einen Einschnitt machen längs einer beliebig angenommenen, nicht in sich zurücklaufenden und mit sich selbst nicht zusammentreffenden Linie. Hiedurch wird zugleich die in (15) angegebene Art, die Grundzahl einer Fläche aus der Zahl der Querschnitte zu berechnen, durch welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende übergeht, auch auf geschlossene Flächen anwendbar.

Aus dem Ausdruck für die Grundzahl einer Fläche

$$N = \varrho + 2\gamma$$

ergiebt sich sofort die folgende Bemerkung.

(16) ... *Die Grundzahl einer Fläche ist immer um eine gerade Zahl grösser als die Zahl der Ränder der Fläche. Die Zahl der Ränder ist um eine gerade Zahl kleiner als die Grundzahl der Fläche. Eine geschlossene Fläche* ($\varrho = 1$) *kann nur ungeradzahligfach zusammenhängend sein. Die Grundzahl einer Fläche, die keinen C-Schnitt zulässt, ist gleich der Zahl ihrer Ränder.*

Mit Hülfe der vorangegangenen Betrachtungen lässt sich leicht die Frage beantworten, unter welchen Bedingungen eine Fläche F in eine andere gegebene Fläche F_1 durch blosse Biegungen und Dehnungen ohne Hülfe von Zerschneidungen oder Zusammenheftungen, also durch stetige Umformung sich verwandeln lässt. Hiebei sollen die Grössen der Biegungen und Dehnungen unbeschränkt bleiben und gegenseitige Durchdringungen der Flächentheile, wie sie bei Rie-

mann'schen Flächen längs der Uebergangslinien zu denken sind, zugelassen werden. Indem wir zur Erleichterung der Vorstellung eine einfach zusammenhängende Fläche in einer Ebene ausgebreitet denken, gehen wir aus von folgenden, aus der Natur einer stetigen Umformung sich ergebenden Sätzen:

(a) . . . Eine einfach zusammenhängende Fläche F kann immer durch stetige Umformung in eine andere gegebene einfach zusammenhängende Fläche F_1 verwandelt werden. Ist also F' die aus F entstandene Fläche, so werden F' und F_1 so übereinander gelegt werden können, dass sie sich vollständig decken. Wenn man den Rand von F in irgend eine Anzahl von Theilen zerlegt denkt, die der Reihe nach, in welcher sie von einem Punkte, der sich im Rande von F bewegt, passirt werden, mit $r^{(1)}\, r^{(2)}\, r^{(3)} \ldots r^{(n)}$ bezeichnet sein mögen, und wenn man in gleicher Weise mit dem Rande von F_1 verfährt, dessen n Theile in der Reihe ihrer Aufeinanderfolge $r_1^{(1)}\, r_1^{(2)}\, r_1^{(3)} \ldots r_1^{(n)}$ seien; so kann man immer die stetige Umformung der Fläche F in die Form F_1 so einrichten, dass schliesslich alle Punkte von $r^{(1)}$ mit jenen von $r_1^{(1)}$, alle Punkte von $r^{(2)}$ mit jenen von $r_1^{(2)}$ u. s. f., endlich die Punkte von $r^{(n)}$ mit jenen von $r_1^{(n)}$ sich decken.

(b) . . . Wird ferner eine Fläche F durch beliebige stetige Umformungen und Zerschneidungen in eine einfach zusammenhängende, sodann durch Zusammenheftungen in eine Fläche F' verwandelt, und zeigt es sich, dass in F' nirgends Punkte getrennt erscheinen, die in F nicht getrennt, aber auch keine neuen Verbindungen zwischen Punkten vorhanden sind, die in F getrennt waren, so kann F in die Form F' durch eine stetige Umformung allein übergeführt werden.

(c) . . . Es ist überdies sofort klar, dass eine Fläche F nur dann in eine andere vorgeschriebene Fläche F_1 durch stetige Umformung allein verwandelt werden kann, wenn F und F_1 dieselbe Zahl von Randcurven besitzen; denn durch stetige Umformung können weder neue Ränder entstehen, noch vorhandene Ränder verschwinden. Im Allgemeinen ist zwar diese Bedingung der gleichen Ränderzahl nicht hinreichend, wir wollen aber zunächst zeigen, dass sie es allemal ist, wenn die beiden Flächen keine C-Schnitte zulassen.

Es seien $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)} \ldots R^{(n)}$ die Ränder von F, $R_1^{(1)}$, $R_1^{(2)}$, $R_1^{(3)} \ldots R_1^{(n)}$ die Ränder von F_1, in irgend einer Reihenfolge numerirt. Wir können durch Anwendung von A-Schnitten allein F sowohl als auch F_1 in einfach zusammenhängende Flächen verwandeln, da wir annehmen, dass F und F_1 keine C-Schnitte zulassen. Diese A-Schnitte wählen wir in beiden Flächen so, dass der erste Schnitt $A^{(1)}$ führt von $R^{(1)}$ zu $R^{(2)}$ in F, $A_1^{(1)}$ von $R_1^{(1)}$ zu $R_1^{(2)}$ in F_1; der zweite Schnitt $A^{(2)}$ führt von $R^{(2)}$ zu $R^{(3)}$ in F, $A_1^{(2)}$ von $R_1^{(2)}$ zu

$R_1^{(3)}$ in F_1 u. s. f. $A^{(\alpha-1)}$ führt schliesslich in F von $R^{(\alpha-1)}$ zu $R^{(\alpha)}$ und $A_1^{(\alpha-1)}$ von $R_1^{(\alpha-1)}$ zu $R_1^{(\alpha)}$.

Denken wir uns nun die erhaltenen einfach zusammenhängenden Flächen in einer Ebene ausgebreitet und betrachten wir etwa den Rand von $F(A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(\alpha)})$, so besteht er aus folgenden Theilen: aus dem Rande $R^{(1)}$, an diesen schliessen sich rechts und links an die Ränder des Schnittes $A^{(1)}$, an diese schliessen sich an, nach rechts und links weiter fortschreitend, die beiden Theile des Randes $R^{(2)}$, welche liegen zwischen dem Endpunkte von $A^{(1)}$ und dem Anfangspunkte von $A^{(2)}$, hierauf folgen wieder die beiden Ränder von $A^{(2)}$ u. s. f. Durch den Rand $R^{(\alpha)}$ werden endlich die links und rechts von $R^{(1)}$ gelegenen Stücke vereinigt. Genau dieselbe Anordnung der Stücke von $R_1^{(1)}R_1^{(2)}\cdots$ und der Ränder von $A_1^{(1)}A_1^{(2)}\cdots$ zeigt der Rand von $F_1(A_1^{(1)}A_1^{(2)}\cdots A_1^{(\alpha)})$. Wir können jetzt $F(A^{(1)}\cdots A^{(\alpha)})$ so umformen in F', dass dieses, auf $F_1(A_1^{(1)}\cdots A_1^{(\alpha)})$ gelegt, letztere Fläche deckt, zugleich aber die Punkte von $R^{(1)}$ zu liegen kommen auf $R_1^{(1)}$, die Punkte des rechten Randes von $A^{(1)}$ auf dem rechten Rande, die des linken auf dem linken Rande von $A_1^{(1)}$ ausgebreiet erscheinen u. s. f. Jetzt wollen wir, während F' auf $F_1(A_1^{(1)}\cdots A_1^{(\alpha)})$ bleibt, letztere Fläche in ihre frühere Form zurückbringen, so dass die Ränder von $A_1^{(1)}A_1^{(2)}\cdots$ wieder zusammenstossen. Dasselbe geschieht dann auch mit den Rändern von $A^{(1)}A^{(2)}\cdots$, und wenn wir sie zusammenheften, so hat nunmehr F die Form von F_1 angenommen. Da wir hierbei nur nöthig hatten, solche Punkte wieder zu vereinigen, die durch die A-Schnitte getrennt wurden, so muss nach (b) F in F_1 durch stetige Umformung allein verwandelt werden können.

Der allgemeine Fall ist leicht auf den eben betrachteten zurück zu führen, indem man in F und F_1 zuerst die sämmtlichen C-Schnitte ausführt, welche möglich sind. Dadurch werden F und F_1 in Flächen verwandelt, die keine C-Schnitte zulassen; damit aber die obigen Betrachtungen anwendbar seien*), müssen nach Ausführung der C-Schnitte die Ränder in gleicher Zahl vorhanden sein, und da auch die Zahlen der ursprünglichen Ränder wegen (c) gleich sein müssen, so haben wir folgenden Satz:

(17) . . . *Von zwei Flächen kann die eine in die andere immer und nur dann durch stetige Umformung allein in die andere verwandelt werden, wenn in beiden die Ränder und die nichtzerstückenden Rückkehrschnitte in gleicher Anzahl vorhanden sind. Die beiden Flächen müssen daher auch gleiche Grundzahlen besitzen.*

*) Selbstverständlich sind nach Verbindung der Ränder der A-Schnitte auch die Ränder der C-Schnitte wieder zu vereinigen.

VI.

Es erübrigt noch einige Folgerungen zu erwähnen, die auf Flächen oder Flächensysteme sich beziehen, aus denen durch irgend welche nichtzerstückende oder zerstückende Schnitte andere Flächen abgeleitet werden.

Die ursprünglich gegebene Fläche F besitze A A-Schnitte und Γ C-Schnitte und wir setzen

$$P = N - 1 = \mathsf{A} + 2\,\Gamma.$$

Wenn wir in F irgend welchen nichtzerstückenden Schnitt führen und dadurch die Fläche in eine andere verwandeln, der auch eine andere Zahl P zukommen wird, so ist bezüglich der A-, B-, und C-Schnitte die Frage nach der Aenderung von P durch das Vorhergegangene als erledigt zu betrachten. Von nichtzerstückenden Schnitten bleibt daher nur zu erwähnen ein Einschnitt, der in einem Randpunkte beginnt und in einem Punkte der Fläche endigt, und jener, der seinen Anfangs- und Endpunkt in Flächenpunkten liegend hat. Ersterer ändert an der Zahl P Nichts, letzterer vermehrt die Zahl der Ränder um Eins, also auch A.

(18) . . . *Wird eine Fläche, deren Grundzahl $P + 1$ ist, verwandelt in eine andere Fläche durch einen A-Schnitt oder einen nichtzerstückenden B-Schnitt, so vermindert sich die Zahl P um Eins, sie bleibt ungeändert, wenn der Schnitt ein C-Schnitt oder ein Einschnitt ist, der in einem Randpunkte beginnt oder endet, sie vermehrt sich um Eins durch einen Einschnitt, dessen Anfangs- und Endpunkte nicht Randpunkte sind.*

Zerstückt kann eine Fläche nur durch B-Schnitte und Rückkehrschnitte werden. In den beiden Flächenstücken werden sodann noch gewisse A- und C-Schnitte möglich sein, deren Summe mit A, respective mit Γ verglichen werden soll.

Was nun irgend einen der C-Schnitte anbelangt, so kann nach (2) immer eine Weglinie gezogen werden, welche die Linie des zerstückenden Schnittes nicht schneidet; nach dieser ist also ein C-Schnitt ausführbar, der für den ursprünglichen substituirt werden kann. Die Summe aller in den beiden durch den Schnitt entstandenen Flächentheilen ausführbaren C-Schnitte bleibt also Γ. Ein zerstückender B-Schnitt vermehrt die Zahl der Ränder um Eins; da aber sämmtliche Ränder, die nach Führung des Schnittes vorhanden sind, sich auf zwei getrennte Flächenstücke vertheilen, so ist ein A-Schnitt weniger ausführbar als im Falle eines nichtzerstückenden B-Schnittes, somit bleibt die Summe aller A-Schnitte noch immer A. Ein Rückkehrschnitt aber führt *zwei* neue Ränder ein, und da durch das Zerstücktsein nur *ein* A-Schnitt ausfällt, so folgt eine Vermehrung von A um Eins.

(19) . . . *Wird eine Fläche F durch einen Schnitt zerstückt und bildet man für die beiden Theile die Summe der in ihnen noch möglichen A- und C-Schnitte, so bleibt die Summe der C-Schnitte immer gleich der Zahl der in F ausführbaren C-Schnitte; hingegen bleibt die Summe der A-Schnitte nur dann gleich der Zahl der A-Schnitte in F, wenn der Schnitt ein B-Schnitt, sie wird aber um Eins grösser als diese Zahl, wenn der Schnitt ein Rückkehrschnitt war.*

An der Fläche F sollen nun ganz beliebige Schnitte ausgeführt werden, und es sei α die Anzahl aller A-Schnitte, β und β' die Anzahl der nichtzerstückenden und der zerstückenden B-Schnitte, ebenso γ und γ' die Zahlen der ausgeführten C-Schnitte und zerstückender Rückkehrschnitte, endlich ε und ε' die Zahlen für die Einschnitte, die am Rande beginnen oder endigen, und beziehungsweise derjenigen, die ihre beiden Endpunkte auf der Fläche haben.

Nach (18) und (19) erhält man ein Flächensystem, in welchem die Summe aus den noch ausführbaren A-Schnitten und der doppelten Zahl der noch möglichen C-Schnitte

$$P - \alpha - \beta + \gamma' + \varepsilon' = P'$$

sein wird. Ist ferner die Zahl der entstandenen Flächenstücke φ, so ist zugleich

$$\varphi = \beta' + \gamma' + 1.$$

Die Zahl P' lässt sich auch durch die Grundzahlen N_1, N_2, N_3 $\cdots$ N_φ der φ Flächenstücke darstellen, denn es ist

$$N_1 - 1 + N_2 - 1 + \cdots + N_\varphi - 1 = N_1 + N_2 + \cdots + N_\varphi - \varphi = P'$$

ebenfalls die Summe aus allen in den sämmtlichen Flächenstücken noch ausführbaren A-Schnitten und der doppelten Zahl der noch möglichen C-Schnitte.

Setzt man noch

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_\varphi = N'$$

und eliminirt γ' aus den beiden ersterhaltenen Gleichungen, so erhält man

$$N - 2 = N' + \alpha + \beta + \beta' - 2\varphi - \varepsilon'.$$

(20) . . . *Wenn man an einer Fläche ganz beliebige Schnitte ausführt, durch welche dieselbe in irgend welche Stücke zerfällt, so ist die Summe aus den Grundzahlen aller entstandenen Flächenstücke und der sämmtlichen geführten A- und B-Schnitte vermindert um die Summe der doppelten Zahl der Flächenstücke und derjenigen Einschnitte, die ihre beiden Endpunkte auf der jeweiligen Fläche haben, eine constante Zahl und zwar die um Zwei verminderte Grundzahl der ursprünglichen Fläche.*

Dieser Satz kann in sehr mannigfaltiger Weise specialisirt werden. Sind z. B. die entstandenen Flächenstücke sämmtlich einfach zusammenhängend, also

$$N_1 = N_2 = \cdots = N_\varphi = 1 ,$$

so wird $N' = \varphi$ und wenn wir noch annehmen, dass keine Einschnitte vorkommen, daher $\varepsilon' = 0$ zu setzen ist, giebt die dem Satz (20) entsprechende Gleichung:

$$N - 2 = \alpha + \beta + \beta' - \varphi ;$$

$\alpha + \beta + \beta'$ ist die Anzahl aller geführten Querschnitte und die Gleichung enthält den Eingangs erwähnten Fundamentalsatz, der gewöhnlich den Ausgangspunkt für die Untersuchungen über den Zusammenhang der Flächen bildet.

In der gegenwärtigen Fassung ist er etwas allgemeiner, da auch beliebige Rückkehrschnitte ausgeführt werden dürfen. Wir wollen ihn benützen, um den Ausdruck für die Grundzahl einer beliebigen n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche mit Windungspunkten herzuleiten. Sei die Zahl der Windungspunkte ω und $m_1\, m_2\, m_3 \cdots m_\omega$ die Zahlen der Blätter, die beziehungsweise im 1^{ten}, 2^{ten}, $3^{\text{ten}} \cdots \omega^{\text{ten}}$ Windungspunkte zusammenhängen. Um jeden Windungspunkt herum führen wir einen Rückkehrschnitt, der alle n Blätter durchdringt und eigentlich äquivalent ist mehreren Rückkehrschnitten, die wir aber nicht abzuzählen brauchen. Die Zahl der einfach zusammenhängenden Flächenstücke, die auf diese Weise abgetrennt werden, ist

$$(n - m_1 + 1) + (n - m_2 + 1) + (n - m_3 + 1) + \cdots + (n - m_\omega + 1) = \omega n - w,$$

wenn

$$w = (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_\omega - 1)$$

die Summe der Ordnungszahlen aller Windungspunkte ist.

In der übrig bleibenden Fläche ziehen wir Schnitte, die ebenfalls alle Blätter durchdringen, und von denen der erste so geführt ist, dass er ausgeht vom Rande des um den ersten Windungspunkt gezogenen Rückkehrschnittes und endigt in dem Rande des Rückkehrschnittes um den zweiten Windungspunkt, der zweite, von diesem ausgehend, führt zum Rande des Rückkehrschnittes um den dritten Windungspunkt u. s. f. bis man wieder zum ersten Rückkehrschnitt zurückgelangt. Die früher zusammenhängende Fläche zerfällt durch diese Schnitte, die theils A-Schnitte, theils B-Schnitte sein können, in $2n$ Theile und die Zahl aller dieser Schnitte ist ωn, daher

$$\varphi = 2n + \omega n - w$$

die Gesammtzahl aller entstandenen Flächenstücke. Von diesen ist eines zweifach zusammenhängend, nämlich jenes, welches den willkürlich anzunehmenden Einschnitt enthält, der die Riemann'sche Kugel-

fläche einrandig macht. Verwandeln wir dieses Flächenstück noch in ein einfach zusammenhängendes, so haben wir

$$\alpha + \beta + \beta' = \omega n + 1$$

und daher:

$$N = \omega - 2n + 3.$$

Der Satz (20) kann leicht erweitert werden für den Fall, dass ausgegangen wird von einem System von Flächen. Bedeutet N die Summe aller Grundzahlen der gegebenen Flächen und Φ die Zahl derselben, versteht man ferner unter N', α, β, β', ε', φ noch immer dieselben Zahlen wie früher, so lautet die Gleichung:

$$N - 2\Phi = N' - 2\varphi + \alpha + \beta + \beta' - \varepsilon'.$$

Von den vorhergehenden Untersuchungen haben wir ausdrücklich gespaltene Flächen ausgeschlossen. In solchen Flächen sind nichtgeschlossene und verzweigte Randcurven möglich; es kann daher auch nicht ohne Weiteres von einer bestimmten Zahl der Ränder gesprochen und die Unterscheidung zwischen A- und B-Schnitten in der angegebenen Weise nicht mehr festgehalten werden. Aber selbst wenn z. B. ein A-Schnitt zwischen wirklich getrennten Rändern vorhanden ist, wird derselbe nicht immer die bei ungespaltenen Flächen zutreffenden Eigenschaften besitzen, denn wenn beide Ränder, die er verbindet, nicht geschlossen sind, so müssen sie durch ihn nicht zu einem einzigen Rande verbunden werden und der A-Schnitt kann zerstücken. Desgleichen gelten die für C-Schnitte aufgestellten Sätze nicht ausnahmslos für eine gespaltene Fläche.

Dennoch wäre es unrichtig, einer solchen Fläche einen unendlichen Zusammenhang zuzuschreiben*) in dem Sinne, dass für sie die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende durch eine endliche Zahl von Querschnitten nicht möglich sei. Eine solche Verwandlung kann immer durch eine endliche Zahl von Querschnitten ausgeführt werden, und diese Zahl kann zwar beliebig gross sein, es lässt sich aber für sie ein ganz bestimmtes endliches Minimum angeben. Die hierauf bezüglichen Untersuchungen mögen einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Prag, im April 1873.

---

*) Vgl. Thomae's Aufsatz: Einige Sätze aus der *Analysis situs* Riemann'scher Flächen, in Schlömilch's Zeitschrift Bd. 12, S. 367.

Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne.

Par J. P. Gram à Copenhague.

Dans un mémoire inséré au volume 62 du journal de Crelle*), M. Aronhold a cherché de déduire directement de la théorie des transformations linéaires les principes fondamentaux de la théorie des invariants, en montrant, comment ces fonctions se présentent naturellement, quand on cherche les conditions pour la transformation d'une forme donnée en une autre. Cette méthode a des avantages essentielles sur celle de commencer par une définition des invariants, sans montrer à priori l'existence des fonctions en question. Clebsch a fait usage du même procédé**) et quoiqu'il l'ait simplifié en quelques parties, la méthode n'a pas encore été rendue assez simple et élémentaire pour qu'on puisse s'en servir pour donner le fondament générale d'un développement élémentaire de la théorie des invariants et covariants.

C'est pour cette raison que j'ai essayé, dans ce qui va suivre, de pousser à fin la méthode de Aronhold, en appliquant seulement des considérations élémentaires. — La première partie se rattache donc assez près au mémoire cité de Aronhold, dans la seconde partie j'introduis les covariants, dont ensuite je démontre les propriétés les plus importantes par rapport aux transformations linéaires.

Quoique donc la plupart des théorèmes démontrés ne soient pas nouveaux, j'espère que dans les démonstrations de ceuxci il y aura quelque chose digne d'intérêt.

1.

Soit proposée une forme générale de l'ordre p et de n variables $x_1, x_2, \cdots x_n$. — Dans la notation symbolique***) cette forme sera représentée par

*) Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Crelle 62, p. 281.

**) Clebsch, Theorie der binären Formen, §§ 79., 80., p. 300.

***) Voir Clebsch, Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen, Crelle Bd. 59, et Binäre Formen p. 28.

$$a_x^p = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^p,$$

c'est à dire par la puissance $p^{ième}$ d'une forme linéaire où, pour toutes les valeurs des indices $\iota, \varkappa, \lambda \cdots$, on pose

$$a_1^\iota a_2^\varkappa a_3^\lambda \cdots = a_{\iota\varkappa\lambda\ldots} \quad (\iota + \varkappa + \lambda \cdots = p).$$

Si l'on transforme les variables (x) *) par les formules

$$x_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \cdots \alpha_{in}\xi_n,$$

la forme a_x^p sera transformée en une autre de même ordre et, pourvu que le déterminant de transformation ne s'annulle pas, aussi du même nombre de variables. Cette forme, la forme transformée, sera représentée par $a_\xi'^p$, de sorte qu'on aura

$$a_\xi'^p = a_x^p.$$

Soit encore b_ξ^p une forme quelconque de l'ordre p des variables (ξ). Si par une transformation linéaire il sera possible de transformer a_x^p en b_ξ^p, il faut et il suffit que, pour toutes les valeurs des indices $\iota\varkappa\lambda\cdots$, on puisse avoir

$$a'_{\iota\varkappa\lambda\ldots} = b_{\iota\varkappa\lambda\ldots} \tag{1}$$

Ces équations, en nombre $\mu = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}$, contiennent dans les premiers membres les coefficients (a) et les coefficients (α), encore indéterminés. Par l'élimination de ces derniers, dont le nombre est n^2, on obtient $\mu - n^2$ équations finales dans lesquelles entrent seulement les (a) et les (b), et qui en général seront les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation soit possible.

Pour pouvoir mieux étudier les équations de condition, on forme des équations (1) un système nouveau équivalent de la forme

$$b_{\iota\varkappa\lambda\ldots} a'_{\varrho\sigma\tau\ldots} = b_{\varrho\sigma\tau\ldots} a'_{\iota\varkappa\lambda\ldots} \tag{2}$$

Ces équations seront homogènes par rapport à tous les coefficients (a), tous les (b) et tous les (α). Ils donnent comme le système primitif encore $\mu - n^2$ résultants indépendentes, qui seront homogènes, soit par rapport à tous les (a), soit à tous les (b).

Chacun de ces résultants peut être mis sous la forme

$$R = A_0' B_0 + A_1' B_1 + \cdots A_\nu' B_\nu = 0, \tag{3}$$

les (A') désignant des fonctions entières et homogènes de même degré seulement des (a), les (B) des fontions ayant les mêmes propriétés par rapport aux (b).

---

*) En général, je dénote par (x) tout le système des variables x_i marqués des indices différents, également par (α) tous les coefficients de transformation α_{iL}, etc.

Le résultant R peut être supposé irreductible, de sorte qu'il n'existe aucune relation linéaire plus simple entre les mêmes fonctions (A'), dont les coefficients dépendent des (b).

De chaque résultant R on peut alors dériver au moins un autre plus simple.

Soit c_ζ^ν une troisième forme, qui par une transformation linéaire peut se transformer en a_x^ν. Entre les coefficients (c) et (a) il subsiste alors une relation analogue à $R = 0$, savoir

$$R' = A_0' C_0 + A_1' C_1 + \cdots A_\nu' C_\nu = 0 , \tag{4}$$

les fonctions (C) étant semblables aux (B). Du même, entre les coefficients (b) et (c) on a la relation

$$R'' = B_0' C_0 + B_1' C_1 + \cdots B_\nu' C_\nu = 0 , \tag{5}$$

où (B') sont analogues aux (A') dans R.

En résolvant les égalités (3) et (4) par rapport à A_0' et en égalant les deux valeurs, on obtient

$$A_1' \frac{B_1}{B_0} + A_2' \frac{B_2}{B_0} + \cdots A_\nu' \frac{B_\nu}{B_0} = A_1' \frac{C_1}{C_0} + A_2' \frac{C_2}{C_0} + \cdots A_\nu' \frac{C_\nu}{C_0} . \tag{6}$$

Cette relation doit être identique. — Car par une transformation linéaire, dont les coefficients soient (β), on peut transformer b_ξ^ν en c_ζ^ν, supposé que a_x^ν puisse se transformer en b_ξ^ν, ce qui doit être le cas selon les relations (3). Si donc on exprime les (c) par (b) et (β), on obtient de (6) une relation entre les (a), les (b) et les coefficients (β) parfaitement arbitraires. Cette relation qui ne contient que ν fonctions (A') ne peut donc avoir lieu, à moins qu'elle ne soit identique. C'est à dire, il faut que

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{C_1}{C_0}, \qquad \frac{B_2}{B_0} = \frac{C_2}{C_0} \text{ etc.},$$

pour qu'on puisse transformer b_ξ^ν en c_ζ^ν. Du même on aura entre les coefficients de a_x^ν et de b_ξ^ν des égalités semblables, savoir

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1}{B_0}, \qquad \frac{A_2}{A_0} = \frac{B_2}{B_0} \text{ etc.}, \tag{7}$$

les (A) étant les mêmes fonctions des (a) que les (B) des (b).

C'est évident, que ces égalités seront les conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité de la transformation de a_x^ν en b_ξ^ν, car leur nombre est au moins égal au nombre des résultants primitifs $R = 0$.

Les quotients rationels $\frac{A_i}{A_0}$ *ont donc la propriété caractéristique de rester invariables, soit qu'on les forme de coefficients d'une forme quel-*

conque a_x^p, soit de coefficients d'une forme qui, par une transformation linéaire, peut être dérivée de a_x^p.

Par cette raison on les nomme *les invariants absolus* de la forme a_x^p.

L'égalité des invariants absolus est donc la condition nécessaire et suffisante pour que, par une transformation linéaire, deux formes générales se puissent réduire l'une à l'autre.

De là il suit aussi, que tous les invariants absolus seront des fonctions de $\mu - n^2$ entre elles.

Si de la même manière on cherchait les conditions de la transformation d'un système de formes en une autre par la même transformation linéaire, on trouverait aussi des équations de la forme (7), c'est à dire l'égalité des invariants absolus.

Soit $\frac{P(a)}{Q(a)}$ un invariant absolu d'un système de formes, donc je désigne les coefficients par (a). Si l'on désigne par (a') les coefficients transformés, $c \cdot a \cdot d \cdot$ les coefficients des formes transformées, on a l'égalité

$$\frac{P(a')}{Q(a')} = \frac{P(a)}{Q(a)},$$

d'où il suit que *)

$$P(a') = \varrho \cdot P(a); \qquad Q(a') = \varrho \cdot Q(a). \tag{8}$$

Par une transformation linéaire quelconque le numérateur et le dénominateur des invariants absolus ne sont par conséquent altérés que par un facteur, qui évidemment ne peut dépendre des coefficients (a), mais seulement des coefficients de transformation.

Toutes les fonctions des coefficients d'un système de formes, qui ont cette propriété, sont nommées *invariants.*

Le facteur ϱ étant une fonction des (α), nous le représenterons par $\varphi(\alpha)$ ou par $\varphi(\alpha_{ik})$. — Les invariants pouvant être supposés homogènes, $\varphi(\alpha)$ doit l'être aussi par rapport à tous les coefficients (α). On a donc

$$P(a') = \varphi(\alpha) \cdot P(a).$$

Si l'on transforme de nouveau les formes une fois transformées, et désigne par (a'') les nouveaux coefficients transformés, par (β) les coefficients de la dernière transformation, on obtient

$$P(a'') = \varphi(\beta)\, P(a') = \varphi(\beta)\, \varphi(\alpha)\, P(a).$$

Supposons que la dernière transformation soit la réciproque de la première, $P(a'')$ est donc égal à $P(a)$ et l'on aura

$$\varphi(\beta)\, \varphi(\alpha) = 1. \tag{9}$$

*) Voir Clebsch, Binäre Formen p. 306.

Mais pour la transformation réciproque on a

$$\beta_{ik} = \frac{r_{ki}}{r};$$

en posant le déterminant $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{nn} = r$, et r_{ki} désignant le sous-déterminant de α_{ki} dans r.

L'égalité (9) peut donc s'écrire ainsi

$$\varphi(\alpha_{ik}) \cdot \varphi\left(\frac{r_{ki}}{r}\right) = 1,$$

ou, en dénotant par ν le degré de la fonction homogène φ

$$\varphi(\alpha_{ik})\,\varphi(r_{ki}) = r^{\nu}. \tag{10}$$

D'où il suit, que $\varphi(\alpha)$ doit être un facteur rationel du degré ν de r^{ν}, l'autre facteur est du degré $(n-1)\cdot\nu$.

Les éléments du déterminant r étant supposés indépendents entre elles, r n'est pas résoluble en facteurs rationels. Les deux facteurs de r^{ν} doivent donc être des puissances entières de r, multipliées par un même constant numérique, qui pourtant ne peut être que l'unité positive. — Donc il faut que $\nu = n\lambda$, λ étant un nombre entier, et l'on aura

$$\varphi(\alpha) = r^{\lambda}; \qquad \varphi(r_{ik}) = r^{(n-1)\lambda}. \tag{11}$$

D'où résulte le théorème suivant *).

Quand une fonction des coefficients d'un système de formes par une transformation linéaire des formes n'est alterée que par la multiplication par un facteur constant, alors ce facteur est nécessairement une puissance du déterminant de la transformation.

La définition complète des invariants est donc donnée par l'identité

$$J(a') = r^{\lambda} \cdot J(a), \tag{12}$$

$J(a)$ étant un invariant quelconque.

Le théorème subsiste encore quand P contient, non seulement des coefficients, mais aussi des variables. On peut directement appliquer la même démonstration.

2.

Une transformation linéaire des variables d'une forme comporte également une transformation linéaire des coefficients, les coefficients transformés (a') étant des fonctions, linéaires par rapport aux (a), homogènes du degré n par rapport aux (α). Pour déterminer la forme

*) Voir la mémoire citée de Aronhold, le théorème V; Clebsch: Binäre Formen p. 306.

générale de ces fonctions, nous considérons en premier lieu des formes linéaires.

Soit (a_x) un système de formes linéaires contenant des variables (x) ou (y), (z) $\cdots$, cogrédients avec ceux-la. Les coefficients transformés seront alors déterminés par ce que pour toutes les formes on doit avoir identiquement

$$a'_\xi = a_x .$$

Si l'on écrit les formules de transformation des (x) ainsi

$$x_i = \alpha_i \xi_1 + \beta_i \xi_2 + \gamma_i \xi_3 + \cdots \nu_i \xi_n , \quad (i = 1, 2 \cdots n) \tag{13}$$

on trouve pour les coefficients transformés les expressions suivantes

$$a_1' = a_\alpha , \quad a_2' = a_\beta , \quad a_3' = a_\gamma \cdots \cdots , \quad a_n' = a_\nu .$$

En résolvant ces équations par rapport aux (a), on obtient les (a) exprimés par (a'). Le déterminant de la transformation dite est $r = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \cdots \nu_n = (\alpha\beta\gamma \cdots \nu)$.

Les coefficients symboliques d'une forme de l'ordre p étant transformés par les mêmes formules que ceux de la puissance $p^{ième}$ d'une forme linéaire a_x, on trouvera pour les coefficients transformés de a_x^p les expressions symboliques suivantes

$$a_1'^\iota a_2'^\varkappa a_3'^\lambda \cdots = a_\alpha^\iota a_\beta^\varkappa a_\gamma^\lambda \cdots \qquad (\iota + \varkappa + \lambda + \cdots = p) . \tag{14}$$

Si donc dans l'identité

$$J(a) = \frac{J(a')}{r^\lambda} ,$$

$J(a)$ désignant un invariant quelconque d'un système de formes, on remplace les coefficients de transformation (α), (β), (γ) $\cdots$ respectivement par les n systèmes différents (x), (y), (z) $\cdots$ de variables cogrédients, le déterminant $(\alpha\beta\gamma \cdots)$ devient $(xyz \cdots)$ et les coefficients transformés deviendront toutes les polaires des formes primitives par rapport aux n systèmes de variables.

De là suit le théorème suivant:

On peut exprimer rationellement tous les invariants d'un système de formes par toutes les polaires des formes données par rapport aux n systèmes de variables (x), (y), (z) $\cdots$, *en remplaçant pour chaque forme le coefficient symbolique* $a_1^\iota a_2^\varkappa a_3^\lambda \cdots$ *par la polaire correspondante* $a_x^\iota a_y^\varkappa a_z^\lambda \cdots$, *et en divisant ensuite par une puissance du déterminant* $(xyz \cdots)$. *Réciproquement toute fonction rationelle entière, obtenue en divisant par une puissance de* $(xyz \cdots)$ *un aggrégat de polaires, aura toujours la propriété caractéristique des invariants: savoir que la fonction, formée des éléments transformés, ne diffère que par un facteur, qui est une puissance du déterminant de transformation r, de celle formée des éléments primitifs.*

Si une telle fonction ne contient que des coefficients elle est donc un invariant, si elle contient des variables elle s'appelle un *covariant.*

Le théorème énoncé se démontre facilement. Soit F une fonction rationelle entière des polaires, divisible par $(xyz\cdots)^\lambda$, K le quotient de division, K' la transformée de celle-ci. Par une transformation quelconque F reste invariable, toutes les polaires restant invariables, tandisque, selon la règle de la multiplication des déterminants, $(xyz\cdots) = r(\xi\eta\zeta\cdots)$, $(\xi)(\eta)(\zeta)\cdots$ étant les variables transformés, correspondents aux (x), (y), $(z)\cdots$. On aura donc

$$K' = \frac{F}{(\xi\eta\zeta\cdots)^\lambda} = \frac{F}{r^{-\lambda}(xyz\cdots)^\lambda} = r^\lambda \frac{F}{(xyz\cdots)^\lambda} = r^\lambda \cdot K,$$

ce qui fut à démontrer.

Parmi les covariants il faut compter, soit les formes elles mêmes et leurs polaires, pour lesquelles $\lambda = 0$, soit le déterminant $(xyz\cdots)$, qu'on nomme le covariant identique.

Tous les covariants, qui ne contiennent plus de n systèmes de variables cogrédients, peuvent être obtenus par la méthode développée, ce qu'on peut vérifier en remplaçant dans un covariant quelconque comme ci-dessus (α), (β), $(\gamma)\cdots$ réspectivement par (x), (y), $(z)\cdots$. Les coefficients (a') deviennent alors des polaires, les variables $(\xi)(\eta)(\zeta)\cdots$, qu'on obtient en résolvant les équations de transformation (13), deviennent égaux à l'unité ou s'annullent, et le covariant transformé se réduit à une fonction des polaires, qui divisée par $(xyz\cdots)^\lambda$ donne le covariant primitif.

Pour les covariants qui contiennent un nombre quelconque de systèmes de variables, on peut appliquer la même représentation, ce qui est évident selon le théorème de Clebsch sur la réprésentation symbolique des covariants et invariants*). — Je n'insisterai pas sur ce sujet.

La représentation développée à quelque interêt comme se rattachant immédiatement à la définition des fonctions en question; j'en donnerai ensuite une application importante.

3.

Jusqu'ici nous avons supposé que toutes les formes considérées soient des formes générales, considérons à présent des formes spéciales.

Si entre les coefficients d'une forme ou d'un système de formes il existe une seule relation homogène, $\varphi(a) = 0$, *invariable par une trans-*

*) Crelle's Journal Bd. 59. Une démonstration élémentaire de ce théorème important est donnée par M. Zeuthen dans le „Tidesskrift for Mathematik" Copenhague 1872.

formation linéaire, il faut nécessairement que $\varphi(a)$ doit être un invariant.

Car $\varphi(a) = 0$ devant entrainer $\varphi(a') = 0$ on aura

$$\varphi(a') = c \cdot \varphi(a),$$

donc $\varphi(a)$ est un invariant.

S'il-y-avait une relation homogène $\varphi(a) = 0$, $\varphi(a)$ n'étant pas un invariant, il-y-aura nécessairement d'autres relations analogues, afin que la même relation puisse subsister pour une forme quelconque transformée.

Car on aura pour toute transformation $\varphi(a') = 0$. Si pour (a') nous substituons leurs expressions en (a) et en les coefficients de transformation (α), nous obtiendrons $\varphi(a')$ sous la forme

$$\varphi(a') = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots c_m\varphi_m,$$

les (c) étant fonctions des (α), les (φ) des (a).

La transformation étant complètement arbitraire, les (c) sont des constants arbitraires. Afin que $\varphi(a')$ soit donc égal à zéro il faut nécessairement que simultanément

$$\varphi_1(a) = 0, \quad \varphi_2(a) = 0 \cdots\cdots \varphi_m(a) = 0.$$

Remplaçons, comme nous l'avons fait plus haut, les coefficients de transformation par n systèmes de variables (x) (y) (z) $\cdots$, alors $\varphi(a')$ devient une fonction invariable composée des polaires, conséquemment un covariant, dont les coefficients évidemment seront $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$ $\cdots\cdots \varphi_m(a)$. On voit ainsi que ce covariant doit s'évanouir identiquement si la relation $\varphi(a) = 0$ aura lieu pour toute transformation linéaire.

$\varphi(a)$ est du reste elle-même un des coefficients du covariant obtenu, ou au moins une fonction linéaire à coefficients numériques de ceux-ci. Car on l'obtient de $\varphi(a')$ en posant

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = k \\ 0 \quad \text{„} \quad i \gtrless k, \end{cases}$$

ce qui est le même que dans le covariant trouvé de poser

$$x_1 = y_2 = z_3 = \cdots\cdots = 1.$$

en égalant tous les autres variables à zéro.

Si la fonction proposée $\varphi(a)$ n'était pas homogène, on verrait facilement en la résolvant en des parties homogènes que chacune de celles-ci donnerait naissance à un covariant, qui devrait s'annuller séparément.

Ordinairement un covariant ainsi obtenu contient comme facteur une puissance du covariant identique $(xyz\cdots)$; en divisant par celle-ci

on obtient un covariant plus simple, dont les coefficients sont les mêmes que ceux du covariant obtenu en premier lieu.

Du développement précédent suit immédiatement le théorème suivant bien connu*), mais tant que je sais pas encore démontré.

Toutes les relations entre les coefficients d'un système de formes, qui sont invariables par des transformations linéaires seront exprimées par l'évanouissement identique d'un certain nombre de covariants, qui ne contiennent plus de n systèmes de variables cogrédients. — Particulièrement ces covariants peuvent devenir des invariants.

Réciproquement, *si un covariant d'un système de formes s'annulle identiquement, le même sera le cas pour le covariant corréspondant d'un système transformé.*

Cela suit immédiatement de l'identité $K' = r^2 K$, les coefficients de K' étant des fonctions linéaires des coefficients de K, ce que l'on voit en introduisant pour les variables (x) (y) (z) leurs expressions en (ξ) (η) (ζ), et en comparant ensuite les coefficients des mêmes combinaisons des variables transformés.

Le théorème énoncé montre aussi, que c'est une condition *nécessaire*, afin qu'on puisse transformer deux systèmes de formes speciales l'une dans l'autre, que pour les deux systèmes les mêmes covariants s'annullent identiquement.

Cette condition sera du reste en même temps que l'égalité des invariants absolus la condition suffisante.

Soit effectivement proposé un système de formes dont les coefficients soient au nombre μ, et un autre système de formes réspectivement des mêmes ordres. Les mêmes covariants (invariants) sont supposés de s'annuller pour tous les deux systèmes, ce qui corréspond pour chacun d'eux à ν relations indépendentes entre les coefficients. Conséquemment on doit avoir $\mu - \nu - n^2$ conditions pour la possibilité de la transformation.

En même temps, entre les $\mu - n^2$ invariants absolus de chaque système de formes il subsistera ν relations en conséquence des ν relations entre les coefficients; il n'y-a donc pour chaque système que $\mu - \nu - n^2$ indépendents entre les invariants absolus. L'égalité des invariants absolus indépendents, qui seront formés de la même manière des coefficients de chaque système, sera donc la condition nécessaire et suffisante pour la transformation en question. — D'où le théorème suivant**):

*) Voir par exemple Clebsch: Binäre Formen p. 91.

**) Cfr. Clebsch: Binäre Formen p. 365. Il faut remarquer, que l'égalité des invariants absolus renferme que les mêmes *invariants* s'annullent, mais point toujours que les mêmes covariants s'évanouissent identiquement. De là viennent les cas spéciales par la théorème comme l'a énoncé Clebsch.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse transformer l'un à l'autre deux systèmes de formes quelconques, sont 1°, que les mêmes covariants (et invariants) s'annullent identiquement pour tous les deux systèmes et 2°, que les invariants absolus soient égaux.

Ce théorème montre comment la théorie des covariants et invariants suffit pour discuter complètement la théorie des transformations linéaires.

Toutes les formes, qui ont les mêmes covariants et invariants zéro, auront toutes les mêmes propriétés caractéristiques, indépendentes des transformations linéaires. On peut donc sur cette circonstance fonder une classification naturelle des formes de même ordre suivant leurs covariants et invariants zéro; ce qui au fond revient au même principe que la classification des courbes suivant leurs singularités.

Si l'on connait pour une forme proposée les relations invariables $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \cdots$ qui doivent subsister entre les coefficients, la méthode indiquée plus haut donne le moyen de déterminer directement les covariants ou invariants, qui doivent s'annuller.

Dans une des fonctions φ on n'a qu'à substituer des polaires pour les coefficients (a) et à reduire par division par $(xyz \cdots)$ tant que possible. On obtient par là un covariant, qui corréspond à un certain nombre de relations. — Des relations non contenues dans le covariant trouvé, on prend une nouvelle et la traite de la même manière, ce qui donne un deuxième covariant qui corréspond également à plusieurs relations; et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les relations soient consommées. — Par là on verra aussi, si quelqu'une des fonctions φ serait un invariant.

Quand le nombre n des variables surpasse deux, il peut être avantageux pour les sous-déterminants d'ordres différents de $(xyz \cdots)$ d'introduire des variables cogrédients de différents classes, ainsi comme Clebsch l'a indiqué*). Il faut alors, que tous les coefficients de la forme intermédiaire, ainsi obtenue, s'annullent. On peut ensuite, si cette forme contiendrait plusieurs systèmes de variables de même classe, égaler tous ces systèmes, pourvu que l'évanouissement de la dernière forme entraîne nécessairement que la première s'évanouisse aussi.

Pour illustrer la méthode expliquée par un simple exemple connu, nous cherchons le covariant qui doit s'annuller identiquement, afin qu'une forme ternaire cubique soit un cube parfait**).

On aura entre les coefficients d'un cube de la forme linéaire ternaire a_x des relations suivantes de second degré

---

*) Clebsch: Ueber ein Fundamentalproblem der Invariantentheorie, Schriften der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1872.

**) Voir Gundelfinger: Mathematische Annalen Bd. IV, p. 571.

$$(a_1 a_2 a_3)^2 = a_1^2 a_2 \cdot a_2 a_3^2, \quad a_1^3 \cdot a_2^3 = a_1^2 a_2 \cdot a_1 a_2^2,$$

et les autres analogues à celle-ci. Si donc la forme symbolique a_x^3 soit un cube parfait, on doit avoir les relations symboliques suivantes

$$a_1 a_2 a_3 \cdot b_1 b_2 b_3 = a_1^2 a_2 \cdot b_2 b_3^2; \quad a_1^3 \cdot b_2^3 = a_1^2 a_2 \cdot b_1 b_2^2 \text{ etc.}$$

La première donne le covariant

$$a_x a_y a_z b_x b_y b_z - a_x^2 a_y b_y b_z^2 = a_x a_y b_y b_z [a_z b_x - a_x b_z].$$

En posant $(zxy) = z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3$ on a l'identité $a_x b_y - a_y b_x = (ab u)$, et on peut donc reduire le covariant trouvé à

$$(ab u)\, a_x a_y b_y b_z,$$

qui est égal à

$$\tfrac{1}{2}(ab u)\, a_y b_y [a_x b_z - a_z b_x] = \tfrac{1}{2}(ab u)(ab v)\, a_y b_y,$$

(v) étant cogrédient à (u). Ce covariant est la polaire de $(ab u)^2 a_y b_y$ par rapport à x, donc il s'annulle avec ce-ci, et la relation proposée donne ainsi la forme intermédiaire

$$\Theta = (ab u)^2 a_x b_x,$$

qui doit s'évanouir identiquement.

De même la relation $a_1^3 b_2^3 - a_1^2 a_2 b_1 b_2^2 = 0$ donne le covariant

$$a_x^3 b_y^3 - a_x^2 a_y b_x b_y^2 = a_x^2 b_y^2 [a_x b_y - a_y b_x] = (ab u)\, a_x^2 b_y^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(ab u)[a_x^2 b_y^2 - a_y^2 b_x^2] = \tfrac{1}{2}(ab u)^2 [a_x b_y + a_y b_x],$$

qui est une polaire par rapport à (y) de la forme Θ obtenue en premier lieu. Toutes les autres relations étant tout à fait analogues aux deux relations considérées, elles ne peuvent donner quelque forme nouvelle. — La condition nécessaire et suffisante, afin qu'une forme ternaire cubique soit un cube parfait, est donc que la forme intermédiaire $\Theta = (ab u)^2 a_x b_x$ soit identiquement égale à zéro.

Copenhague, Mai 1873.

Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen.

Von Paul du Bois-Reymond in Freiburg i. Br.

Lejeune-Dirichlet's Resultat, dass die Fourier'sche Reihe für einen Werth x_1 von x, an dessen beiden Seiten die darzustellende Function um ein Endliches verschiedene Werthe

$$\lim f(x_1 - \varepsilon) = f(x_1 - 0), \qquad \lim f(x_1 + \varepsilon) = f(x_1 + 0)$$

besitzt, deren Mittelwerth

$$\tfrac{1}{2}\big(f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0)\big)$$

annehme, ist einige Mal Gegenstand kritischer Bemerkungen gewesen*). Eine etwas eingehendere Untersuchung der sprungweisen Werthänderungen analytisch dargestellter Functionen wird daher nicht überflüssig erscheinen. Sie führt zu einem allgemeinen Satze über die Sprünge willkürliche Functionen darstellender Integrale und Reihen.

I. Allgemeine Bemerkungen über sprungweise Werthänderungen der Functionen.

1.

Die im Endlichen sprungweise sich ändernden expliciten Functionen einer reellen Veränderlichen sind Grenzwerthe analytischer Ausdrücke, z. B. Reihen mit in's Unendliche wachsender Gliederzahl oder Integrale, bei denen ein Parameter oder eine Grenze einen numerischen Grenzwerth annimmt. Bei unstetigen Functionen wie:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, \qquad f(0 - 0) = -1, \qquad f(0 + 0) = +1,$$

ist die unendliche Operation nur durch die Bezeichung verdeckt. Denn $f(x)$ ist der Limes $(n = \infty)$ der für $x = 0$ stetigen Function:

*) Siehe u. A. H. Schläfli, Borchardt's Journal, Bd. 72, S. 284.

$$\frac{x^{n-1}+\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n!}}{2\,x^n+\frac{x^{n-1}}{1}+\cdots+\frac{1}{n!}}.$$

Wir können also allgemein die unstetige Function mit

$$f(x) = \lim_{h=\infty} f(x, h)$$

bezeichnen, wo im Falle z. B. einer Reihe h die unendlich werdende Gliederzahl vorstellt. Von der Function $f(x)$ werden wir annehmen, dass sie vor und nach der Sprungstelle stetig ist und nicht unendlich viele Maxima hat. Es wird zweckmässig sein, unsere Betrachtungen an ein einfaches Beispiel zu knüpfen und wir wählen dazu die bekannte Function:

$$f(x, h) = \operatorname{arctg} h\,(x_1 - x).$$

2.

Um die Unstetigkeit von $\lim f(x, h) = \lim \operatorname{arctg} h\,(x_1 - x)$ für $x = x_1$ wohl zu verstehen, haben wir zu beachten, in welcher Weise die unbestimmten Grössen x und h die bestimmten Werthe x_1 und ∞ annehmen. Wir können x den Werth x_1 ertheilen:

1) nachdem $h = \infty$ gesetzt worden,

2) bevor dies geschehen,

3) können wir gleichzeitig h unendlich und $x_1 - x$ Null werden lassen.

Diese drei Operationen schreiben wir in Formeln, wie folgt:

$$\lim_{\varepsilon=0} \lim_{h=\infty} f(x_1 \pm \varepsilon, h), \qquad \lim_{h=\infty} \lim_{\varepsilon=0} f(x_1 \pm \varepsilon, h),$$
$$\lim_{\varepsilon=0,\, h=\infty} f(x_1 \pm \varepsilon, h).$$

Sie führen zu folgenden drei Werthbestimmungen des $\lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$ für $x = x_1$.

1) Beschränkt man die unbestimmte Grösse x dahin, dass sie kleiner oder dass sie grösser als x_1 ist, so ergeben sich für den $\lim f(x, h)$ die Werthe $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$. Wenn man jetzt nachträglich (also nachdem $\lim f(x, h)$ einen der Werthe $\pm\frac{\pi}{2}$ angenommen) x von seinem unbestimmt gelassenen Werthe aus, den wir z. B. als $\frac{x_1}{2}$ uns denken können, bis x_1 wachsen lässt, so wird der $\lim f(x, h)$, welcher gleich $\frac{\pi}{2}$ ist und x gar nicht mehr enthält, auch nur $\frac{\pi}{2}$ bleiben können. *Daher fallen nach dem ersten Verfahren auf $x = x_1$ nur die Werthe $+\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ von* $\lim f(x, h)$. Noch evidenter wird dies, wenn wir dafür sorgen, dass der Limes nicht unabhängig von x wird, indem wir z. B. $f(x, h) = \operatorname{arctg} h\,(x_1 - x) + x^2$ setzen.

2) Nach dem zweiten Verfahren setzen wir zuerst $x = x_1$, wodurch $f(x, h)$ Null wird. Setzt man darauf $h = \infty$, so bleibt für $x = x_1$ der Werth Null bestehen. Es kommen aber auf die nämliche Weise wie unter 1) die Werthe $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ hinzu, *so dass* $\lim f(x, h)$ *für* $x = x_1$ *jetzt die drei Werthe* $+\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{2}$ *repräsentirt.*

3) Nach dem dritten Verfahren endlich setzt man gleichzeitig $x = x_1$, $h = \infty$. Wird dabei keine besondere Beziehung zwischen dem Wachsthum von h und der Abnahme von $x_1 - x$ angenommen, so kann das Produkt $h(x_1 - x)$ an der Grenze jeden beliebigen Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ erhalten, und $\lim f(x, h)$ stellt für $x = x_1$ alle Werthe zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ vor.

Den eben entwickelten drei Auffassungen entsprechen die drei Darstellungen:

Fig. 1.

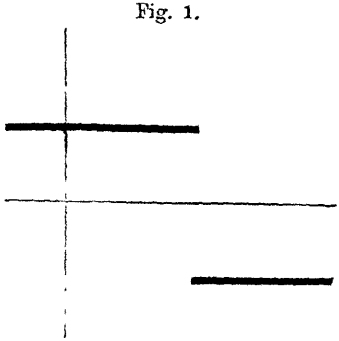


Fig. 2.

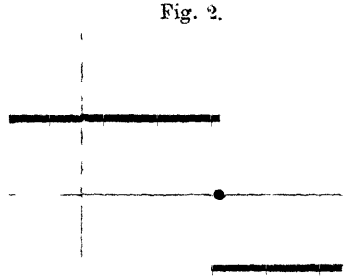
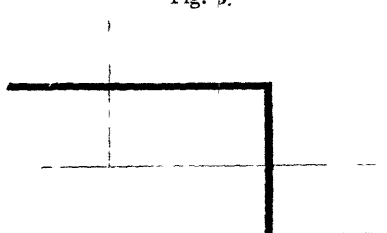


Fig. 3.



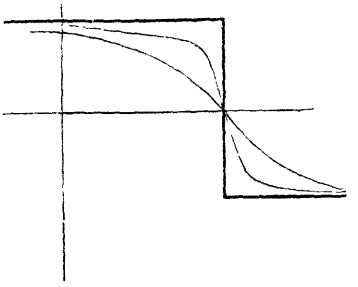
3.

Falls der $\lim f(x, h)$ in einem bestimmtem Problem auftritt, so wird dieses darüber entscheiden, wie man ihn aufzufassen hat. Tritt

aber die Frage an uns heran, was man sich, ganz allgemein zu reden, darunter zu denken habe, so ist dies Sache individuellen Beliebens. Mir persönlich sagt es am meisten zu, Fig. 3 als Darstellung des $\lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$ mir zu denken. Ich kann meine Wahl durch folgende Gründe rechtfertigen.

Die gebrochene Linie ist offenbar die Grenzgestalt der stetigen Curve $y = \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$, wenn h noch nicht unendlich ist, wie dies Fig. 4 andeutet:

Fig. 4.



Dann lässt sich nach der dritten Auffassung die Gleichung

$$y = f(x) = \lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$$

umkehren. D. i. man kann daraus $x = \varphi(y)$ darstellen, was nach den beiden ersten Auffassungen nicht möglich ist. Denn, wie die Figur 3 zeigt, ist $x = x_1$ im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$. Nun ist auch

$$x = x_1 - \frac{\operatorname{tg} y}{h},$$

welches im nämlichen Intervalle den nämlichen $\lim x$ ergiebt.

Die dritte Auffassung erschöpft den ganzen in $\lim f(x,h)$ enthaltenen Werthevorrath*), und wahrt die Stetigkeit der Reihenfolge dieser Werthe.

Diese Stetigkeit betreffend fällt noch Folgendes ins Gewicht. Die Unstetigkeiten der Fourier'schen Darstellungen willkürlicher Functionen (Reihen und Integral) sind, worauf bald des Genaueren eingegangen werden soll, ganz von derselben Beschaffenheit, wie die des $\lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$. Hier lässt sich aber die dritte Auffassung besser den physikalischen Anschauungen anpassen als die beiden anderen. Denn wenn z. B. eine plötzliche Dichtigkeitsänderung eines Mediums darzustellen ist, so wird die erste Vorstellungsweise der Idee entsprechen, dass absolut ohne Uebergang zwei verschiedene Dichtigkeiten aneinander stossen. Die zweite wird in der Trennungsfläche ohne physikalischen Grund das Mittel der angrenzenden Dichtigkeiten setzen. Die dritte

*) Wie sich Hr. C. Neumann treffend ausdrückt.

wird einem in einer unendlich dünnen Schicht stattfindenden continuirlichen Uebergang der einen Dichtigkeit in die andere mathematisch sich anschliessen, und so dem „natura non facit saltum“ in der analytischen Darstellung zu seinem Recht verhelfen. Hiernach ist die erste zur Noth, die dritte Vorstellung durchaus, die zweite gar nicht physikalisch gerechtfertigt. Aehnliches gilt von dem durch Fourier'sche Darstellungen auszudrückenden Anfangszustand einer Saite, der Grenzlinie einer elastischen Membran, u. s. w.

Aus allen diesen Gründen halte ich den Dirichlet'schen Mittelwerth an der Unstetigkeitsstelle — so lange man in der allgemeinen Theorie bleibt — für eine weniger natürliche Auffassung, als die geradlinige Verbindung der an die Unstetigkeitsstelle angrenzenden Werthe.

Ganz Aehnliches gilt auch von der sprungweisen Werthänderung des Differentialquotienten einer stetigen Function, wie im folgenden Artikel erörtert wird.

4.

Es möge bis zum Punkte x_1 der Differentialquotient $\frac{df}{dx} = f'(x)$ stetig sein und von da ab wieder, aber die Grösse $f'(x_1 + 0)$ sei nicht gleich $f'(x_1 - 0)$: die Curve $y = f(x)$ hat alsdann an der Stelle x_1 einen Knick. Eine kleine Veränderung der gewöhnlichen Definition des Differentialquotienten führt dazu, auch diese Unstetigkeit nach den obigen Principien behandeln zu können.

Statt unter der Ableitung $f'(x)$ den Limes ($\varepsilon = 0$) einer der Grössen:

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}, \qquad \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

zu verstehen, wollen wir sie symmetrisch als:

$$\lim_{x=x'=x''} \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

auffassen, wo der Limes bedeutet, dass die unbestimmten Grössen x' und x'' auf beliebige Weise in den Werth x übergehen. Oder, was damit gleichbedeutend ist, wir setzen:

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon_1=0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1}$$

wo die Grössen ε und ε_1 (die auch in Bezug auf ihre Zeichen beliebig sind) auf alle erdenklichen Weisen gleichzeitig oder nacheinander Null werden. Dies ist offenbar der allgemeinste, jeden anderen als speciellen Fall enthaltende Begriff vom Differentialquotienten.

Bilden wir nach dieser Definition den Differentialquotienten für eine Ecke x_1, so wird er, ε und ε_1 positiv vorausgesetzt:

$$\lim \frac{\varepsilon f'(x_1 + \eta) + \varepsilon_1 f'(x_1 - \eta_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

wo die Mittelwerthe η und η_1 den Bedingungen $0 \leqq \eta \leqq \varepsilon$, $0 \leqq \eta_1 \leqq \varepsilon_1$ genügen, oder unter Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung in Bezug auf ε und ε_1 wird er:

$$\lim \frac{\varepsilon f'(x_1 + 0) + \varepsilon_1 f'(x_1 - 0)}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

stellt also, wenn über das Nullwerden von ε und ε_1 gar nichts vorausgesetzt wird, jeden Werth zwischen $f'(x_1 - 0)$ und $f'(x_1 + 0)$, diese incl., vor. Daher diese Darstellung des Differentialquotienten der Vorstellung entspricht, dass die Ecke einen Uebergang der einen Tangentenneigung in die andere bei unendlich kleiner Krümmung vermittelt. Für $\varepsilon = \varepsilon_1$ geht der Differentialquotient an der Ecke in das Mittel $\frac{1}{2}(f'(x_1 + 0) + f'(x_1 - 0))$ über, indessen ist die Annahme $\varepsilon = \varepsilon_1$ eine ganz willkürliche Beschränkung.

Es mag sich z. B. um die zweiten Differentialquotienten des Potentials V einer homogenen Kugel an deren Oberfläche handeln. Man hat:

im Innern der Kugel $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi D x$, $\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi D$

im Aeusseren $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi D \frac{R^3 x}{r^3}$, $\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{4}{3}\pi D \frac{R^3(3x^2 - r^2)}{r^5}$.

An der Oberfläche entsprechen $f'(x_1 + 0)$:

$$\frac{4}{3}\pi D \frac{3x_1^2 - R^2}{R^2}$$

und $f'(x_1 - 0)$:

$$-\frac{4}{3}\pi D$$

Der Differentialquotient $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ in seiner allgemeinsten Auffassung ist somit:

$$\frac{4}{3}\pi D \frac{\varepsilon \cdot \frac{3x_1^2 - R^2}{R^2} - \varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

Wenn $\varepsilon_1 = 0$ gesetzt wird, ist sein Werth:

$$\frac{4}{3}\pi D \frac{3x_1^2 - R^2}{R^2},$$

so dass die Summe $\Delta V = 0$ wird. Dies ist der äussere Differentialquotient. Setzt man erst $\varepsilon = 0$, so wird $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi D$ und $\Delta V = -4\pi D$. Es sind das also die extremen Fälle. Durch alle übrigen Annahmen über das Nullwerden von ε und ε_1 erhält man alle Uebergänge von $\Delta V = -4\pi D$ in $\Delta V = 0$. Die Annahme $\varepsilon = \varepsilon_1$ ergiebt wieder den Mittelwerth $\Delta V = \frac{1}{2}(-\pi D + 0) = -2\pi D$, ist indessen, wie bemerkt, eine willkürliche Beschränkung. Wenn also Gauss den Mittelwerth $-2\pi D$ in der Oberfläche der Kugel offenbar mit Recht verwirft, so vermag ich doch nicht die der ersten Auffassung der vorigen Artikel ent-

sprechende unvermittelte Folge der Werthe $\Delta V = -4\pi D$ und $\Delta V = 0$ für die richtige oder doch die allein richtige Vorstellung zu halten. Sondern die unendlich rasche aber stetige Verwandlung von ΔV aus $-4\pi D$ in Null, wie sie der dritten Auffassung entspricht, erscheint gleichberechtigt und ist mir die angenehmere Vorstellung.

Ich habe nun noch zu zeigen, inwiefern diese Betrachtungen auf alle Integrale und Reihen Anwendung finden, welche willkürliche Functionen darstellen.

II. Ueber die sprungweisen Werthänderungen der willkürliche Functionen darstellenden Integrale und Reihen.

5.

Die Formel, um welche es sich handeln wird, lautet:

$$(I) \qquad (G_- + G_+) f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_A^B d\beta f(\beta) \varphi(\alpha, \beta - x) \text{ *).}$$

Sie setzt voraus, dass

$$G_+ = \int_0^\infty d\alpha \int_0^b d\beta \varphi(\alpha, \beta), \qquad G_- = \int_0^\infty d\alpha \int_{-a}^0 d\beta \varphi(\alpha, \beta)$$

von a und b unabhängig sind, und dass $A < x < B$. Ist x ausserhalb des Intervalls $A \cdots B$ gelegen, so ist das Integral rechts in (I) Null. Man kann die Formel auch schreiben:

$$(II) \qquad (G_- + G_+) f(x) = \lim \int_A^B d\beta f(\beta) \Phi(\beta - x, h)$$

wo der lim bedeutet, dass im vollzogenen Integral $h = \infty$ zu setzen ist und wo:

$$\Phi(\beta, h) = \int_0^h d\alpha \varphi(\alpha, \beta).$$

6.

An ein paar Beispielen werde ich zunächst die Beziehungen dieser Formeln zum Gegenstand dieses Aufsatzes erläutern.

Man hat:

---

*) Borchardt's Journal, Bd. 69, S. 65 und diese Annalen Bd. IV, S. 362.

$$\operatorname{arctg} h\,b = \int_0^h d\alpha \int_0^b d\beta \, \frac{1-\alpha^2\beta^2}{(1+\alpha^2\beta^2)^2}$$

$$\operatorname{arctg} h\,a = \int_0^h d\alpha \int_{-a}^0 d\beta \, \frac{1-\alpha^2\beta^2}{(1+\alpha^2\beta^2)^2}$$

Beide Integrale werden also $\frac{\pi}{2}$ für $h = \infty$ und von a und b unabhängig. Nach (I) hat man mithin:

$$\pi f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_A^B d\beta f(\beta) \, \frac{1-\alpha^2(\beta-x)^2}{(1+\alpha^2(\beta-x)^2)^2} \,.$$

Die Unstetigkeiten des Integrals sind also nur die der Function $f(x)$, wenn man diese ausserhalb des Integrals $A \cdots B$ Null annimmt. Falls z. B. $f(x)$ im Intervall $A \cdots B$ Eins ist, hat man:

$$\int_0^h d\alpha \int_A^B d\beta \, \frac{1-\alpha^2(\beta-x)^2}{(1+\alpha^2(\beta-x)^2)^2} = \operatorname{arctg} h\,(B-x) - \operatorname{arctg} h\,(A-x)$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{h(B-A)}{1+h^2(B-x)(A-x)}$$

woraus sofort klar ist, dass bei dieser besonderen Annahme über $f(x)$ die Sprünge von $f(x)$ für $x = A$ und $x = B$ ganz wie im Art. I. behandelt werden können.

Das zweite Beispiel sei eine jener Unstetigkeiten, die „durch Abänderung eines Functionalwerthes hebbare" genannt worden sind.

Durch geeignete Specialisirung von Formel (II) findet man:

$$f(0) \int_0^\infty \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \, d\alpha = \lim_{h=\infty} \int_0^\infty d\alpha f(\alpha) \, \frac{\varphi(\alpha h)}{\alpha} \,.$$

Setzen wir $\varphi(\alpha) = \sin \alpha^2$ und schreiben $f(x+\alpha)$ statt $f(\alpha)$, so ergiebt sich voraus:

$$\lim \int_0^\infty \frac{\sin h^2\alpha^2}{\alpha} \, f(x+\alpha)\, d\alpha = \frac{\pi}{4} f(x+0) \,.$$

Ferner

$$\lim \int_{-\infty}^0 \frac{\sin h^2\alpha^2}{\alpha} \, f(x+\alpha)\, d\alpha = -\frac{\pi}{4} f(x-0) \,.$$

Also:

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(x+\alpha) \, \frac{\sin h^2\alpha^2}{\alpha} = \frac{\pi}{4} \{f(x+0) - f(x-0)\}$$

woraus:

$$\frac{\pi}{8}\{f(x+0)-f(x-0)\} = \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\alpha(\beta-x)\cos\alpha^2(\beta-x)^2 .$$

Diese Formel hat folgende eigenthümliche Beschaffenheit. Das Integral rechter Hand ist Null überall, wo $f(x)$ stetig ist, und hat einen Werth nur, wo $f(x)$ springt. Setzen wir $f(x)$ Null von $-\infty$ bis a, und gleich $\frac{8}{\pi}$ von a bis ∞, so kann der Limes von

$$f(x,h) = \frac{8}{\pi}\int_0^h da \int_a^{\infty} d\beta\alpha(\beta-x)\cos\alpha^2(\beta-x)^2 = \frac{2}{\pi}\int_{h^2(a-x)^2}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha ,$$

wie aus der zweiten $f(x,h)$ gegebenen Form ohne Weiteres zu ersehen, auf folgende drei Weisen aufgefasst werden. Setzt man $f(a) = \lim_{x=a}\lim_{h=\infty} f(x,h)$ so ist $f(x)$ für alle Werthe von x incl. $x=a$ Null. Setzt man $f(a) = \lim_{h=\infty}\lim_{x=a} f(x,h)$ so ist $f(x)$ sonst überall Null nur für $x=a$ ist $f(x)=1$. Setzt man endlich $f(a) = \lim_{x=a,\ h=\infty} f(x,h)$, so ist $f(x)$ sonst Null, nur für $x=a$ repräsentirt $f(a)$ alle Werthe von Null bis Eins.

Es sei z. B. $a=0$, ferner sei $z = f(x^2+y^2)$ die Gleichung einer Fläche, also:

$$z = \lim_{h^2(x^2+y^2)}\frac{2}{\pi}\int^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha ,$$

so ist diese Fläche nach der ersten Auffassung des Limes die xy-Ebene, nach der zweiten die xy-Ebene mit dem Punkt $x=0$, $y=0$, $z=1$, nach der dritten die xy-Ebene mit einem Loth von der Länge 1 im Punkt $x=0$, $y=0$ errichtet.

Was wir bei besondern willkürliche Functionen darstellenden Integralen und besonderen Annahmen über die willkürlichen Functionen oben gesehen, nämlich die Gültigkeit der drei Auffassungen des Art. 1. ist bei den allgemeinen Formeln (I) und (II) weiter zu verfolgen, wobei sich die Aufgabe stellt, wie folgt:

Wir schreiben statt I.:

$$(G_- + G_+)f(x,h) = \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(\alpha,\beta-x) ,$$

wo $\lim f(x,h) = f(x)$, und statt A und B $-\infty$ und $+\infty$ gesetzt wurde, unter der Voraussetzung, dass das Integral nach β dann vermöge der Beschaffenheit von $f(\beta)$ convergirt, was z. B. der Fall sein wird, wenn $f(\beta)$, ausser in einem im Endlichen gelegenen Intervall, Null ist. Nun sei $f(x_1-0)$ für einen Werth $x=x_1$ nicht gleich $f(x_1+0)$. *Es ist der Limes von $f(x,h)$ zu finden, wenn die un-*

bestimmten Grössen $x_1 - x$ und h auf irgend eine vorgeschriebene Weise die bestimmten Werthe 0 *und* ∞ *annehmen.*

7.

Wir setzen, um die Aufgabe des vorigen Artikels zu lösen:

$$\int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(a,\beta-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\Phi(\beta-x,h) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta+x)\Phi(\beta,h)$$

und schreiben $\psi(\beta)$ statt $f(\beta + x_1)$, so dass $\psi(\beta)$ für $\beta = 0$ springt. Wir haben dann den Limes des Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta,h)$$

zu untersuchen, wenn ε und h Null und Unendlich werden.

Es sei zunächst $\varepsilon \gtrless 0$, und wir untersuchen einzeln die Integrale:

$$J_1 = \int_0^{\infty} d\beta \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta,h), \quad J_2 = \int_{\infty}^{0} d\beta \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta,h),$$

auf ihre Grenzwerthe. Das erste lässt sich auf die Form

$$\int_0^{\infty} d\beta \psi(\beta)\Phi(\beta,h) + \int_0^{\infty} d\beta (\psi(\beta+\varepsilon)-\psi(\beta))\Phi(\beta,h)$$

bringen, deren erster Theil für $h = \infty$

$$\psi(+0)\, G_+$$

wird, während der zweite für $\varepsilon = 0$, $h = \infty$, wie mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes leicht festzustellen, Null wird. So dass also:

$$\lim J_1 = \psi(+0)\, G_+ .$$

Um nun das Integral:

$$J_2 = \int_{-\infty}^{0} d\beta \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta,h)$$

an der Grenze $\varepsilon = 0$, $h = \infty$ zu bestimmen, schreiben wir es zunächst so:

$$\int_{-\infty}^{0} d\beta \Phi(\beta,h)\{\psi(\beta+\varepsilon) + \varrho(\beta)(\psi(-0)-\psi(+0)\} + (\psi(+0)-\psi(-0))\int_{-\varepsilon}^{0} d\beta \Phi(\beta,h).$$

Hierin stellt $\varrho(\beta)$ eine unstetige Function vor, die Null ist für

$-\infty \leqq \beta < \varepsilon$ und Eins für $\varepsilon \leqq \beta \leqq 0$. Dann ist die Function

$$\psi(\beta+\varepsilon) + \varrho(\beta)\{\psi(-0) - \psi(+0)\},$$

vorausgesetzt, dass $\psi(\beta)$ nur für $\beta = 0$ unstetig wird, im ganzen Intervall $-\infty$ bis 0 stetig. Denn wenn $\psi(\beta+\varepsilon)$ für $\beta = -\varepsilon$ plötzlich den Zuwachs $\psi(+0) - \psi(-0)$ erhält, so wird dieser Zuwachs durch das zweite Glied gerade aufgehoben. Der Limes von

$$\int_{-\infty}^{0} d\beta\, \Phi(\beta, h)\{\psi(\beta+\varepsilon) + \varrho(\beta)(\psi(-0) - \psi(+0))\}$$

ist hiernach unabhängig von der Art des Nullwerdens von ε und $\frac{1}{h}$, wie dies bei dem Integral J_1 schon gezeigt wurde, und wird:

$$\psi(-0)\, G_- .$$

Es ist also

$$\lim \int_{-\infty}^{0} d\beta\, \psi(\beta+\varepsilon)\Phi(\beta, h) = \psi(-0)\, G_- + (\psi(+0) - \psi(-0)) \lim \int_{-\varepsilon}^{0} d\beta\, \Phi(\beta, h) .$$

Setzen wir die ursprünglichen Bezeichnungen zurück, so ergiebt sich für ein positives ε:

$$\lim \int_{0}^{h} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(a, \beta - x_1 - \varepsilon)$$

$$= f(x_1+0)\, G_+ + f(x_1-0)\, G_- + \{f(x_1+0) - f(x_1-0)\} \lim \int_{0}^{h} d\alpha \int_{-\varepsilon}^{0} d\beta\, \varphi(\alpha, \beta).$$

Ganz ebenso würde man für ein negatives ε erhalten haben:

$$\lim \int_{0}^{h} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(\alpha, \beta - x_1 + \varepsilon)$$

$$= f(x_1+0)\, G_+ + f(x_1-0)\, G_- - \{f(x_1+0) - f(x_1-0)\} \lim \int_{0}^{h} d\alpha \int_{0}^{\varepsilon} d\beta\, \varphi(\alpha, \beta).$$

Beide Formeln vereinigt geben den Satz:

Wenn $f(x)$ für $x = x_1$ den Zuwachs $f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)$ erhält, und Lim einen ganz beliebigen Grenzübergang der unbestimmten Grössen $x_1 - x$, h in die Werthe 0, ∞ bezeichnet, so ist:

(III)
$$\begin{cases} \operatorname{Lim} \int_{0}^{h} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\varphi(\alpha, \beta - x) \\ = f(x_1+0)\, G_+ + f(x_1-0)\, G_- - \{f(x_1+0) - f(x_1-0)\} \operatorname{Lim} \int_{0}^{h} d\alpha \int_{0}^{x_1 - x} d\beta\, \varphi(\alpha, \beta) \end{cases}$$

welcher die am Schlusse des vorigen Artikels gestellte Aufgabe löst.

8.

Es ist zunächst leicht den Satz des vorigen Artikels im Falle eines successiven Grenzübergangs zu bestätigen. Setzt man erst $x = x_1$ und dann $h = \infty$, so wird das Integral rechts Null und der Werth des Integrals links ist:

$$f(x_1 + 0)\,G_+ + f(x_1 - 0)\,G_- ,$$

welcher, falls $G_+ = G_-$ ist, in das Dirichlet'sche Mittel:

$$\frac{G_+ + G_-}{2}\,\{f(x_1 + 0) + f(x_1 - 0)\}$$

übergeht. Ist $x < x_1$ und man setzt zuerst $h = \infty$, so wird das Integral rechts hierdurch schon von vornherein G_+, und die rechte Seite wird:

$$(G_+ + G_-)\,f(x_1 - 0) ,$$

welches also der Werth des Integrals links ist, wenn x bis x_1 wächst. Für $x_1 < x$ und $h = \infty$ ist das Integral rechts $-G_-$, so dass das Integral links, wenn x bis x_1 abnimmt, gleich:

$$(G_+ + G_-)\,f(x_1 + 0)$$

wird, wie dies Alles mit der bisherigen Theorie übereinstimmt.

Zu den drei Auffassungen des Art. 2. verhält sich also die allgemeine Formel (III) so. Setzt man:

$$f(x, h) = \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta)\,\varphi(\alpha, \beta - x)$$

so ist

$$\lim_{x=x_1} \lim_{h=\infty} f(x, h) = \begin{cases} (G_+ + G_-) f(x_1 - 0), & x \leqq x_1 \\ (G_+ + G_-) f(x_1 + 0), & x \geqq x_1 \end{cases}$$

$$\lim_{h=\infty} \lim_{x=x_1} f(x, h) = G_+ f(x_1 + 0) + G_- f(x_1 - 0)$$

$\lim_{x=x_1,\ h=\infty} f(x, h)$ repräsentirt eine stetige Folge von Werthen, die je nach der Beschaffenheit des Integrals $\int_0^h d\alpha \int_0^{x_1 - x} d\beta\,\varphi(\alpha, \beta)$ die Werthe $(G_+ + G_-) f(x_1 - 0)$, $(G_+ + G_-) f(x_1 + 0)$ entweder nur verbinden, oder noch ausserhalb des Intervalls, welche diese Werthe einschliessen, sich erstrecken können. Denn das in der Formel (III) rechts auftretende Integral:

$$\int_0^h d\alpha \int_0^{\varepsilon} d\beta\,\varphi(\alpha, \beta) ,$$

wie wir es kurz schreiben wollen, kann auf die Form

$$\lim_{x=0} \lim_{y=0} \{F(\varepsilon, h) - F(\varepsilon, y) - F(x, h) + F(x, y)\} ,\ \text{wo}\ \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} ,$$

gebracht werden*). Hierin kann die Grösse $F(\varepsilon, h)$ wenn ε und $\frac{1}{h}$ gleichzeitig verschwinden, vermöge geeigneter Beschaffenheit der Function F jeden beliebigen Werth erhalten, der durchaus nicht an das Intervall

$$\int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\varepsilon} d\beta\, \varphi(\alpha, \beta) \cdots, \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\varepsilon}^{0} d\beta\, \varphi(\alpha, \beta)$$

gebunden ist, wie ich dies in einer Abhandlung, deren Gegenstand die *Stetigvieldeutigkeit* der Functionen ist, an mehreren Beispielen gezeigt und erklärt habe.**)

9.

Im Falle der gemeinen Fourier'schen Formel lautet die Formel (III)

$$\operatorname{Lim} \int_0^{h} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta\, f(\beta) \cos \alpha(\beta - x)$$

$$= \frac{\pi}{2} \{f(x_1+0)+f(x_1-0)\} - \{f(x_1+0)-f(x_1-0)\} \operatorname{Lim} \int_0^{(x_1-x)h} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha$$

und im Falle der Sinus-Cosinus-Reihe:

$$\operatorname{Lim} \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta\, f(\beta) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\beta - x)}{\sin \frac{\beta - x}{2}}$$

$$= \pi \{f(x_1+0)+f(x_1-0)\} - \{f(x_1+0)-f(x_1-0)\} \operatorname{Lim} \int_0^{x_1-x} \frac{\sin (2n+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha,$$

wo der Lim den beliebigen Grenzübergang $x_1 - x = 0$, $n = \infty$ bedeutet. Das in dieser Formel auftretende Integral rechter Hand schreiben wir:

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}(x_1-x)} \frac{\sin (2n+1)\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha} d\alpha$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}(x_1-x)} \frac{\sin (2n+1)\alpha}{\alpha} d\alpha + \left(\frac{\frac{1}{2}(x_1-x)}{\sin \frac{1}{2}(x_1-x)} - 1\right) \cdot 2 \int_{\xi}^{\frac{1}{2}(x_1-x)} \frac{\sin (2n+1)\alpha}{\alpha} d\alpha,\ 0 < \xi < \tfrac{1}{2}(x_1-x),$$

*) Borchardt's Journal, Bd. 69, S. 70.
**) Borchardt's Journal, Bd. 70, S. 10.

nach dem zweiten Mittelwerthsatz. Das zweite Glied wird stets Null für $x_1 - x = 0$. Also ist:

$$\operatorname{Lim}\int_0^{x_1-x}\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha = \operatorname{Lim} 2\int_0^{\frac{1}{2}(2n+1)(x_1-x)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \operatorname{Lim} 2\int_0^{n(x_1-x)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Mithin findet man:

$$\operatorname{Lim}\left\{\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\,d\alpha + \cos x\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha + \cdots\cos nx\int_{-\pi}^{+\pi}f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha\right\}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left\{f(x_1+0)+f(x_1-0)\right\} + \left\{f(x_1+0)-f(x_1-0)\right\}\operatorname{Lim}\int_0^{n(x-x_1)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Diese Formel enthält das Eingangs dieses Aufsatzes angeführte Dirichlet'sche Resultat vom Mittel der an die Sprungstelle angrenzenden Werthe als speciellen Fall, und muss als die eigentliche Werthbestimmung der Fourier'schen Reihe für Sprungstellen der darzustellenden Function angesehen werden, da sie jeden Werth des Limes der Reihe liefert, wie man auch der Sprungstelle sich nähern und dazu die Gliederzahl unendlich werden lassen möge.

Die in den Formeln für Sprungstellen der Fourier'schen Darstellungen auftretenden Integrale

$$\int_0^{h(x_1-x)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha, \qquad \int_0^{n(x_1-x)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

können je nach der gegenseitigen Beziehung, gemäss welcher h und $x_1 - x$ oder n und $x_1 - x$ unendlich und Null werden, jeden Werth von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ annehmen. Also sind alle Werthe, welche die Fourier'sche Formel und die Fourier'sche Reihe an der Sprungstelle repräsentirt, eingeschlossen zwischen den Grenzen $\pi f(x_1 - 0)$ und $\pi f(x_1 + 0)$, ein Intervall, das sie continuirlich ausfüllen, und kein Werth liegt ausserhalb. Diese Eigenschaft kommt, wie im vorigen Artikel betont wurde, nicht allen darstellenden Formeln zu.

Die allgemeine Formel (III) hat eine gewisse Bedeutung in der Theorie der lineären partiellen Differentialgleichungen, die ich zum Abschluss dieser Betrachtungen im folgenden Capitel entwickeln will. Es wird mir dadurch Gelegenheit gegeben, zunächst mit einigen Worten den Zusammenhang der Lehre von den darstellenden Integralen (I) und (II) Art. 5 mit jener Theorie anzudeuten.

III. Bemerkungen über Sprünge der Randfunctionen bei partiellen Differentialgleichungen.

10.

Die Auflösungen partieller Differentialgleichungen der Form:

$$R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2S\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + Zu = 0,$$

wo die Coefficienten u nicht enthalten, pflegen bestimmt zu sein durch willkürlich gegebene Werthe von u und $\frac{\partial u}{\partial N}$ auf einer gegebenen Curve s, deren Normale mit N bezeichnet sei. Es ist dann die Form der Lösung:

$$u = \int ds f(s)\Phi(s, x, y) + \int ds f_1(s)\Phi_1(s, x, y),$$

die Integrale längs der Curve s genommen. Durch Stetigkeitsbedingungen etc. kann eines der Integrale in Wegfall kommen. Wenn die unbestimmten Veränderlichen x, y Werthe x_1, y_1 erhalten, welche einem Punkte s_1 der Curve s entsprechen, so muss das erste Integral sich auf $f(s_1)$, das zweite auf Null reduciren, während in:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \int ds f(s)\frac{\partial \Phi}{\partial N} + \int ds f_1(s)\frac{\partial \Phi_1}{\partial N}$$

das erste Integral für $x = x_1$, $y = y_1$ Null wird und das zweite gleich $f_1(s)$.

Statt x, y wollen wir andere Coordinaten einführen, nämlich Curven ν, die senkrecht durch die Curve s hindurchgehen, und Curven σ, die senkrecht durch die ν gehen. Zu diesen wird s gehören und wir betrachten nur das erste Integral, welches werden möge:

$$\int ds f(s)\Psi(s, \sigma, \nu).$$

Wir wollen die ν so rechnen, dass sie in der Curve s gleich Null seien, während die Curven s von einer Curve ν an gerechnet werden.

Giebt man dem σ im vorstehenden Integral einen Werth σ_1 und macht dann $\nu = 0$, so wird, wie bemerkt:

$$\text{(IV)} \qquad f(\sigma_1) = \lim_{\nu=0} \int ds f(s)\Psi(s, \sigma_1, \nu).$$

Aus der Formel (II) folgt:

$$f(x) = \lim_{h=\infty} \int d\beta f(\beta)\frac{\Phi(\beta - x, h)}{G_+ + G_-}.$$

Ein Blick auf beide Formeln zeigt, dass sie ganz dasselbe sind. Denn es entsprechen sich $\sigma_1\ \nu, s$ und $x, \frac{1}{h}, \beta$. Wenn Ψ die Grössen s und

σ_1 in allgemeinerer Form enthält, so ist dies nur scheinbar, da Φ die Grösse x ausser in $\beta - x$ noch als Parameter enthalten darf. Es ist überdies nicht schwer nachzuweisen, dass, wenn eine Formel, wie (IV) bestehen soll, Ψ ganz denselben Bedingungen zu unterwerfen ist wie Φ. Die Unmöglichkeit, mit den bekannten Methoden Ausdrücke wie den obigen (IV) zu beherrschen, die Schwierigkeit sie nur zu verificiren (wovon neuere Abhandlungen Zeugniss ablegen), hat mich seiner Zeit bestimmt, die Analogie zwischen Formel (IV) und der Umformung der Fourier'schen Formel:

$$\pi f(x) = \lim_{h=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \frac{\sin h(\beta - x)}{\beta - x},$$

welche mich sehr überraschte, bis zu Aufstellung der Formeln (I) und (II) zu verfolgen. Diese Art der Auffassung der Fourier'schen Formel und der ihr nachgebildeten ist, beiläufig bemerkt, verschieden von den Anwendungen, die Fourier selbst gemacht, und deren Princip darin bestand, dass er seinem Doppelintegral einen Factor $\chi(\beta, x, y)$ gab:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \chi(\beta, x, y) \cos \alpha (\beta - x),$$

der an der Grenze 1 wird, so dass das Integral dort in $f(x)$ übergeht, und dass $\chi(\beta, x, y) \cos \alpha (\beta - x)$ der Differentialgleichung genügte.

11.

Um nun zum Gegenstand dieses Aufsatzes zurückzukehren, wollen wir den Fall ins Auge fassen, wo die in der Grenzcurve willkürlich gegebene Function $f(s)$ für $s = \sigma_1$ springt. Deshalb wird die Function

$$u = \int ds f(s) \Psi(s, \sigma, \nu)$$

nicht unstetig zu sein brauchen. Für die vollständige Erledigung des Problems der partiellen Differentialgleichung ist es aber nöthig festzustellen, zu welchem Werth man gelangt, wenn man auf irgend einem Wege $\lambda(\sigma, \nu) = 0$ das Integral u zum Punkte $\sigma = \sigma_1$, $\nu = 0$ der Grenzcurve führt. Diesen Werth findet man auf Grund der allgemeinen Formel (III) zu:

$$\text{(V)} \quad f(\sigma_1 + 0) G_+ + f(\sigma_1 - 0) G_- - \{f(\sigma_1 + 0) - f(\sigma_1 - 0)\} \operatorname{Lim} \int_{\sigma}^{\sigma_1} ds \Psi(s, \sigma, \nu),$$

weil:

$$\int_0^{\sigma_1-\sigma} ds\,\Psi(s+\sigma,\sigma,\nu) = \int_\sigma^{\sigma_1} ds\,\Psi(s,\sigma,\nu)\,.$$

Es bedeutet in (V):

$$G_+ = \lim_{\gamma=0} \int_0^b ds\,\Psi(s+\sigma,\sigma,\nu)\,, \qquad G_- = \lim_{\gamma=0} \int_{-a}^0 ds\,\Psi(s+\sigma,\sigma,\nu)\,,$$

welche Grössen von a und b abhängig sind, und ausserdem ist ja die Formel (V) so geschrieben, dass $G_+ + G_- = 1$ angenommen.

Als Beispiel wollen wir die schon öfter behandelte Lösung von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ für die Kreisfläche betrachten.

12.

Die mit den bekannten Stetigkeitsbedingungen der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügende Function u, welche in der Peripherie des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ willkührlich gegeben ist, lautet:

$$2\pi u = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1-r^2) f(p)\,dp}{1 - 2r\cos(p-\varphi) + r^2}\,,$$

wo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Hierin entspricht $1 - r$ der Variabeln ν in (IV), $r\varphi$ der Variabeln σ, p dem s.

Um den Werth dieses Integrals für $r = 1$ zu finden, betrachten wir das einfachere:

$$\int_0^a \frac{dp\,(1-r^2)}{1 - 2r\cos p + r^2} = \operatorname{arctg} \frac{(1-r^2)\operatorname{tg} a}{1 - \frac{2r}{\cos a} + r^2}\,.$$

Es ist also nur der Werth des arctg für $r = 1$ festzustellen, ob er Null oder welches Vielfache von π er sei. Null ist er wahrscheinlich nicht, weil für $p = 0$ das Argument des Integrals $dp\frac{1+r}{1-r}$ wird, also für $r = 1$ einen unendlichen Werth annimmt*). Da ausserdem $r \leqq 1$, muss der arctg positiv sein.

---

*) In einer Abhandlung, Borchardt's Journal Bd. 73, S. 357, stellt Herr Prym die Behauptung auf, dass das Eingangs des Artikels verzeichnete Integral „auf dem Rande (für $r = 1$) versagt, indem es dort allenthalben den Werth Null liefert". Wenn man unter jenem Integral, unter dem doch r noch

Es sind die Werthe zu untersuchen, welche das Argument des arctg:

$$F(r, a) = \frac{(1 - r^2) \operatorname{tg} a}{1 - \frac{2r}{\cos a} + r^2}$$

durchläuft, wenn a von Null bis zu einem davon verschiedenen Werthe a_1 geht und r von einem von Eins verschiedenen Werth $r_1 < 1$ bis 1

---

steht, sich das denkt, was das Zeichen bedeutet, nämlich das Resultat des *vollzogenen*, Integration genannten Grenzübergangs, so wird das Integral für $r = 1$ nicht versagen, sondern ist, wie im Texte gezeigt wird, gleich $2\pi f(\varphi)$. Wollte man einwenden, unter Integral auf dem Rande sei das zu verstehen, was aus dem Integral wird, wenn *vor* der Integration, also in der noch endlich zu denkenden Summe, $r = 1$ gesetzt wird, so würde jenes Integral dann doch nicht *Null*, sondern *unbestimmt*, weil der Nenner eines seiner Elemente Null ist.

Ich glaube jedoch nicht, dass es dem üblichen Sinne unserer mathematischen Bezeichnungen entspräche, wenn man sagte, das in Rede stehende Integral sei auf dem Rande unbestimmt. Genau mit demselben Rechte könnte man von dem Ausdruck:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta f(\beta) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\beta - x)}{\sin \frac{\beta - x}{2}}$$

behaupten, duss er für $n = \infty$ versage, indem er dort für jeden Werth von x einen unbestimmten Werth liefere, und dies ist auch wirklich von Hrn. Frombeck in Wien aufgestellt worden.

Wenn in dem Integral einer Function $f(x, h)$ der Parameter h einen Grenzwerth, z. B. den Werth $h = \infty$ erhält, so kann man, da hier zwei Grenzübergänge vorliegen (der von der Summe zum Integral, und der Grenzübergang $h = \infty$), wie im Art. 2. dreierlei Auffassungen mit diesen beiden Grenzübergängen verbinden und unterscheiden:

$$1.\ \lim_{\delta=0} \lim_{h=\infty} \Sigma_p f(p\delta, h), \qquad 2.\ \lim_{h=\infty} \lim_{\delta=0} \Sigma_p f(p\delta, h)$$
$$3.\ \lim_{\delta=0,\, h=\infty} \Sigma_p f(p\delta, h).$$

Nach der ersten Auffassung wird vorstehendes Integral (h für n gesetzt) unbestimmt, nach der zweiten $\pi f(x)$, nach der dritten wird es verschiedener bestimmter und unbestimmter Werthe fähig sein.

Gebräuchlich ist wohl bis jetzt, dass ein Autor, der ohne genauere Angaben das Zeichen $\int$ vor einen Ausdruck setzt, dem Leser damit anzeigen will, er denke sich den Grenzübergang, der Integration genannt wird, bereits vollzogen. Das Resultat dieses Grenzübergangs für ein unbestimmtes r im Integral des Textes, oder für ein solches n im Integral dieser Anmerkung, erhält aber keinen unbestimmten Werth, wenn man $r = 1$, $n = \infty$ setzt.

Will man jedoch mit dem $\lim \int f(x, h)\, dx$ einen von dem gebräuchlichen (dem zweiten) abweichenden jener drei Begriffe verbinden, so ist dagegen nichts einzuwenden, und rein analytisch gedacht, würde ich der dritten Auffassung consequenter Weise den Vorzug geben. Nur muss man dann sich und dem Leser zum Bewusstsein bringen, dass dem alten Zeichen eine neue Bedeutung beigelegt wird.

geht. Diese Werthefolge muss mit $a = 0$, $r = r_1$ anfangen, weil man das Integral bildet, *bevor* $r = 1$ gesetzt wird.

Die Werthefolge von $F(r, a)$ beginnt also und endigt mit Null. Statt sie von $\lim_{a=0} F(r_1, a)$ bis $\lim_{r=0} F(r, a_1)$ gehen zu lassen, können wir sie nur von

$$\lim_{r=0}(\lim_{a=0} F(r, a)) \text{ bis } \lim_{a=0}(\lim_{r=1} F(r, a))$$

gehen lassen, weil durch diese neue Begrenzung nur Nullwerthe ausgeschlossen sind. Um die zwischenliegenden Werthe zu finden, habe ich in der Art. 8. citirten Abhandlung über Stetigvieldeutigkeit Methoden angegeben, welche hier vollständig genügen. Für ihre Anwendung ist es bequemer $F(r, a)$ algebraisch zu machen. Setzen wir $\cos a = 1 - y$, $\varrho = 1 - x$, so folgt:

$$F(\varrho, a) = F(x, y) = \frac{(2x - x^2)\sqrt{2y - y^2}}{-2y + 2xy + x^2 - x^2 y}.$$

Um jetzt alle zwischen „erst $y = 0$ dann $x = 0$“ und „erst $x = 0$ dann $y = 0$“ liegenden Werthe zu finden, hat man in F nach den Vorschriften jener Abhandlung (§ 6.) für y eine Function der Form:

$$\alpha_1 x^{\mu_1} + \alpha_2 x^{\mu_2} + \cdots$$

einzuführen, wo $\mu_1 < \mu_2 < \cdots$, und hat alsdann alle Werthe aufzusuchen, die F annimmt für $x = 0$ und für alle möglichen Annahmen über $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \mu_1, \mu_2, \cdots$. Man übersieht aber in allen solchen Fällen sehr schnell, welche Functionen y von x neue Werthe liefern. Hier ist es $y = \alpha x^2$, welche den ganzen Werthevorrath von $F(x, y)$ erschöpft. Man findet:

$$F(x, \alpha x^2) = \frac{(2 - x)\sqrt{2\alpha - \alpha^2 x^2}}{1 - 2\alpha + 2\alpha x - \alpha x^2}$$

und für $x = 0$, mithin $y = 0$:

$$F(x, \alpha x^2)_{x=0} = \frac{2\sqrt{2\alpha}}{1 - 2\alpha}.$$

Um die stetige Reihenfolge der Werthe $F(0, 0)$ zu erhalten, hat man α von 0 bis ∞ gehen zu lassen. Man erhält also die Werthe:

Substitution	$F(0, 0)$
1. erst $y = 0$, dann $x = 0$	0
2. $y = \alpha x^2$, dann $x = 0$ ergiebt:	
für $\alpha = 0$	0
für α von Null bis $\frac{1}{2}$	von 0 bis $+\infty$
für α von $\frac{1}{2}$ bis ∞	von $-\infty$ bis 0
3. erst $x = 0$, dann $y = 0$	0

In dem in Rede stehenden arctg $F(r, a)$ durchläuft also von $a = 0$ bis $a = a$ für $r = 1$ $F(r, a)$ die Werthe von 0 bis $+\infty$, von $-\infty$ bis Null, mithin ist

$$\lim_{r=1} \int_0^b \frac{(1-r^2)\,dp}{1-2r\cos p + r^2} = \pi = G_+ .$$

Ebenso findet man:

$$\lim_{r=1} \int_{-a}^0 \frac{(1-r^2)\,dp}{1-2r\cos p + r^2} = \pi = G_- .$$

Nach Formel (I) und (II) folgt, weil G_- und G_+ von a und b unabhängig sind:

$$2\pi f(\varphi) = \lim_{r=1} \int_A^B \frac{(1-r^2) f(p)\,dp}{1-2r\cos(p-\varphi)+r^2},$$

falls $A < \varphi < B$. Also ist in der That die Auflösung

$$2\pi u = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1-r^2) f(p)\,dp}{1-2r\cos(p-\varphi)+r^2}$$

nichts weiter als ein darstellendes Integral von der in Formel (I) Art. 5. enthaltenen Art.

Bestimmen wir noch den Grenzwerth von u, falls r und φ sich einem Punkte 1, φ_1 der Grenze nähern, in dem $f(p)$ springt.

13.

Formel (V) wird in unserem Falle:

$$2\pi \operatorname{Lim} u = \pi\{f(\varphi_1+0)+f(\varphi_1-0)\} - \{f(\varphi_1+0)-f(\varphi_1-0)\} \operatorname{Lim} \int_0^{\varphi_1-\varphi} \frac{(1-r^2)\,dp}{1-2r\cos p+r^2},$$

wo der Limes sich auf die Relation $\lambda(r, \varphi) = 0$ bezieht, der gemäss $r = 1$, $\varphi = \varphi_1$ werden.

Den nämlichen Werth hat Hr. Prym in der Art. 12. citirten Abhandlung S. 351 unter einer anderen Form erhalten, die wir noch aus der obigen ableiten wollen. Wir setzen $\varphi_1 - \varphi = \Delta\varphi$, so dass das Integral rechts wird:

$$\operatorname{arctg} \frac{(1-r^2)\operatorname{tg}\Delta\varphi}{1-\frac{2r}{\cos\Delta\varphi}+r^2}.$$

Das Argument dieses arctg geht vermöge der Substitutionen:

$$r = \sqrt{1-2\varrho\sin\tau+\varrho^2}, \quad \operatorname{tg}\Delta\varphi = \frac{\varrho\cos\tau}{1-\varrho\sin\tau},$$

$$\cos\Delta\varphi = \frac{1-\varrho\sin\tau}{\sqrt{1-2\varrho\sin\tau+\varrho^2}},$$

die einfache in der citirten Abhandlung des Hrn. Prym angegebene Bedeutungen haben, über in:

$$\Gamma(\varrho, \tau) = \frac{2 \sin \tau \cos \tau - \varrho \cos \tau}{2 \sin^2 \tau - 1 + \varrho \sin \tau}$$

und für $\varrho = 0$ in

$$\operatorname{tg}(-2\tau) = \operatorname{tg}(n\pi - 2\tau).$$

Der arctg muss, wie die Discussion des vorigen Artikels lehrt, als $\pi - 2\tau$ aufgefasst werden. Denn lassen wir in $\Gamma(\varrho, \tau)$, ohne $\Delta\varphi$ zu verändern, $r = 1$ werden, so ist wie oben $\lim \operatorname{arctg} \Gamma(\varrho, \tau) = \pi$. Lassen wir darauf $\varrho = 0$ werden, so wird noch $\tau = 0$, und der arctg, der schon $= \pi$ ist, bleibt bei diesem Werth. Also muss in $\operatorname{arctg} \Gamma(0, \tau) = n\pi - 2\tau$, $n = 1$ sein. Somit ergiebt sich

$$\begin{aligned} 2\pi \operatorname{Lim} u &= \pi \{f(\varphi_1 + 0) + f(\varphi_1 - 0)\} \\ &\quad - \{f(\varphi_1 + 0) - f(\varphi_1 - 0)\}(\pi - 2\tau) \\ &= 2\pi f(\varphi_1 - 0) + 2\tau \{f(\varphi_1 + 0) - f(\varphi_1 - 0)\}, \end{aligned}$$

welches die von Hrn. Prym gefundene Form ist.

Das in den beiden letzten Artikeln behandelte Beispiel gestattet, wie Hr. Christophel gezeigt hat*), eine allgemeinere andere Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ umfassende Behandlung, die sich auf die Eigenschaften dieser Differentialgleichung stützt. Ich habe mich indessen an ein Beispiel halten wollen, das zu einer rein analytischen, gerade von der Betrachtung der Differentialgleichung unabhängigen Durchführung geeignet ist.

Freiburg, September 1873.

---

*) Nachrichten der K. Gesellschaft in Göttingen, 1871, S. 438 sqq.

Ueber die allgemeine Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche.

Von Siegmund Günther in Erlangen.

Von sämmtlichen Methoden, welche, besonders in neuester Zeit, für die näherungsweise Auflösung einer algebraischen Gleichung in Vorschlag gebracht wurden, dürfte sich vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus die Fürstenau'sche als die beste empfehlen. Sie ist die einzige, welche eine völlig bestimmte Wurzel jeder beliebigen *literalen* Gleichung sofort in deren Coefficienten auszudrücken gestattet, während alle übrigen Berechnungsweisen lediglich auf *numerische* Gleichungen sich anwenden lassen. Könnte man vielleicht auch mit der Begründung dieser Methode in der Form, wie sie der Verfasser giebt, nicht völlig einverstanden sein, indem es nicht hinreichend sicher erscheint, die für die Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen bestehenden Regeln ohne Weiteres auch auf den Fall eines unendlich grossen n anzuwenden, so ist jeder derartige Zweifel doch endgültig gehoben durch die Untersuchungen Schröder's*), welcher auf ganz andrem Wege zu einer allgemeinen Auflösungsformel gelangte, in welcher die von Fürstenau angegebene als specieller Fall enthalten ist. Das Einzige, was einer ausgebreiteteren Anwendung dieser Methode etwa noch im Wege stehen könnte, ist die allerdings ungewöhnliche Form, in welcher die Wurzel dargestellt wird; der Begriff unendlicher Determinanten tritt hier, wie Baltzer**) hervorhebt, zum erstenmale uns entgegen, und es müssen diese Ausdrücke ebenso, wie diess in früherer Zeit bezüglich der unendlichen Producte und Kettenbrüche der Fall war, sich ihr Bürgerrecht in der Wissenschaft erst erringen. Ein wesentlicher Schritt hiezu ist gethan, wenn es gelingt, ihre Verwandtschaft mit den uns bereits geläufigen analytischen Formen nachzuweisen; während bis jetzt nur auf die nahen Beziehungen hingewiesen wurde, in welchen diese Ausdrücke zu den recurrirenden

*) Schröder, diese Annalen, Bd. II., S. 347.

**) Baltzer in Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 6, Lit. Bericht, S. 11.

Reihen stehen, soll hier vorzüglich ihr Verhältniss zu den Kettenbrüchen discutirt, resp. ihre Identität mit diesen dargethan werden.

Die absolut kleinste Wurzel der Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

ist gleich folgendem Ausdruck näherungsweise

$$-a_0\frac{P}{R},$$

wo

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ist, während man unter P eine auf die nämliche Weise gebildete, nur um einen Grad niedrigere Determinante zu verstehen hat.

Der n^{te} Näherungsbruch des allgemeinen Kettenbruches

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}$$

lässt sich, wie man auf dem Wege der Induction leicht findet, darstellen durch folgenden Quotienten*):

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & N_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & M_1 & a_3 & N_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & M_{n-3} & a_{n-1} & N_{n-2} & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & M_{n-2} & a_n & \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & N_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ M_0 & a_2 & N_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & M_1 & a_3 & N_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & M_{n-3} & a_{n-1} & N_{n-2} & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & M_{n-2} & a_n & \end{vmatrix},$$

wobei folgende Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} M_0 N_0 &= -b_2, \\ M_1 N_1 &= -b_3, \\ &\cdots\cdots \\ M_{n-3} N_{n-3} &= -b_{n-1}, \\ M_{n-2} N_{n-2} &= -b_n. \end{aligned}$$

Es kommt nun nur darauf an, die Determinanten P und R in die

*) Ich habe seitdem den Charakter dieser Umformung in einer besonderen Schrift (Erlangen, Besold 1873) näher dargelegt. [Januar 1874.]

hier vorliegende Form überzuführen, um sofort die Identität jener Determinanten-Quotienten mit den Näherungswerthen eines gewissen Kettenbruches hervortreten zu sehen.

Wir bedienen uns zu diesem Zwecke lediglich der beiden Sätze: Eine Determinante wird dadurch mit einer Zahl multiplicirt, dass man eine ihrer Horizontal- oder Verticalreihen mit dieser Zahl multiplicirt; der Werth jeder Determinante bleibt ungeändert, wenn man eine beliebige Colonne von einer andren subtrahirt. Der Kürze halber wollen wir ferner jede Zahlenreihe der Determinante, deren Verbindungslinie der Diagonale parallel läuft, als 1^{te}, 2^{te}, $\cdots$ n^{te} Diagonalreihe bezeichnen, die gewöhnlich so genannte eigentliche Diagonalreihe als erste genommen. Auch ist es vortheilhaft, die Determinanten P und R auf einen gleichen Grad zu bringen; wir erreichen diess, indem wir

$$-a_0 P = \begin{vmatrix} -a_0 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \end{vmatrix}$$

setzen.

Es seien die beiden Determinanten zunächst vom $(n-1)^{ten}$ Grade. Wir multipliciren die n^{te} Verticalreihe mit a_{n-1} und subtrahiren alsdann von ihr die $(n-1)^{te}$; ebenso verfahren wir hierauf mit der $(n+1)^{ten}$ und subtrahiren von ihr die n^{te}, und fahren so fort, bis wir jedes der n^{ten} Diagonalreihe angehörige Glied berücksichtigt haben.

Wir sehen so, dass schliesslich in dieser n^{ten} Diagonalreihe nur mehr Nullen vorkommen können, und anstatt $(n+1)$ mit Zahlen ausgefüllter Diagonalreihen haben wir deren nur noch n. Es könnte allerdings scheinen, als ob auch auf den Factor a_{n-1}, mit welchem in Folge der Multiplication jeder Term behaftet ist, Rücksicht genommen werden müsste; es steht jedoch nichts im Wege, jedesmal nach vollzogener Subtraction diesen allen Gliedern derselben Verticalreihe gemeinsamen Factor wieder vor die Determinante zu setzen. Wir bekommen so dieselbe multiplicirt mit

$$a_{n-1} \cdot \frac{1}{a_{n-1}}$$

und ihr Werth bleibt ungeändert.

Die nämliche Operation, welche wir hier mit der n^{ten} Diagonalreihe ausgeführt haben, können wir nunmehr fortsetzen für die $(n-1)^{te}$. Indem wir successive jeden dieser Reihe angehörigen Term mit dem links von ihm stehenden und jeden der $(n-2)^{ten}$ angehörigen mit dem rechts von ihm stehenden multipliciren und hierauf in der besprochenen Weise je zwei Verticalreihen von einander abziehen, werden schliesslich auch in der $(n-1)^{ten}$ Diagonalreihe ausschliesslich Nullen

enthalten sein. Auch lässt sich leicht zeigen, dass eine Werthänderung des in Frage kommenden Quotienten durch diese Multiplicationen nicht eintreten kann. Denn während von den Factoren, mit welchen in Folge derselben je zwei benachbarte Verticalreihen behaftet erscheinen, diejenigen, mit welchen die linksstehende dieser beiden Reihen multiplicirt wurde, sich auf die nämliche Weise herausheben, wie diess oben von dem Factor a_{n-1} gezeigt wurde, treten die andren allerdings zunächst vor; da aber im Nenner die nämlichen Operationen ausgeführt werden, wie im Zähler, und da es erlaubt ist, Zähler und Nenner eines Bruches mit der nämlichen Zahl zu multipliciren, so bleibt das Resultat gleichwohl dasselbe.

Fährt man in der hier erörterten Weise fort, so wird man schliesslich dahin gelangen, dass sämmtliche Diagonalreihen, von der n^{ten} bis zur 3^{ten} inclusive aus Nullen bestehen, und da bei dem nach demselben Gesetze gebildeten Nenner sich Alles entsprechend verhält, so erkennen wir, dass jeder nach der Fürstenau'schen Regel angebbare Näherungswerth der gesuchten Wurzel sich als Näherungsbruch eines gewissen Kettenbruches darstellen lässt.

Es bleibt uns nun noch übrig zu zeigen, dass die beiden Näherungsbrüche, welche wir für $\frac{-a_0 P}{R}$ erhalten, je nachdem $-a_0 P$ und R resp. vom $(n-1)^{ten}$ und n^{ten} Grade sind, auch ein und demselben Kettenbruche angehören; es muss also bewiesen werden, dass wenn

$$-a_0 P_{n-1} = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & q_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & p_1 & m_3 & q_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & m_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & p_{n-3} & m_{n-1} \end{vmatrix}$$

ist, dass alsdann

$$-a_0 P_n = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & q_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & p_1 & m_3 & q_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & m_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & p_{n-3} & m_{n-1} & q_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & p_{n-2} & m_n \end{vmatrix}$$

sein muss. Der Beweis hiefür ergiebt sich aber sofort, wenn man bedenkt, dass bei der zur Transformirung unsrer Ausdrücke angewandten Subtraction nie eine Verticalreihe von derjenigen abgezogen wurde, welche links, sondern stets von derjenigen, welche rechts von ihr stand. Der Umstand, dass zu den $(n-1)$ Verticalreihen der Deter-

minante für $-a_0 P_{n-1}$ noch eine weitere nach rechts hinzugefügt wurde, kann also durchaus keinen Einfluss üben; die Unterdeterminante des Terms m_n in der für $-a_0 P_n$ gefundenen Determinante ist $= -a_0 P_{n-1}$, und es sind somit

$$-a_0 P_{n-1} \text{ und } -a_0 P_n$$

zwei aufeinanderfolgende Näherungszähler eines Kettenbruches, dessen Bildungsgesetz allerdings nicht näher bekannt ist.

Das ganze Verfahren wird sofort übersichtlich werden, wenn wir es an einem Beispiele vollständig durchführen. Die biquadratische Gleichung

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

ergiebt als Näherungswerth für ihre kleinste Wurzel folgenden Ausdruck:

$$\frac{\begin{vmatrix} -a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2^2 - a_1 a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_2 a_3 - a_1 - (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3^2 - a_2) \\ 0 & 0 & a_0 a_2 & a_1 a_3 - a_0 a_2 (a_3^2 - a_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2^2 - a_1 a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_2 a_3 - a_1 - (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3^2 - a_2) \\ 0 & 0 & a_0 a_2 & a_1 a_3 - a_0 a_2 (a_3^2 - a_2) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -a_0 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}};$$

und dieser Ausdruck ist wiederum, zufolge dem Obigen, gleich dem vierten Näherungswerthe des Kettenbruches

$$\frac{-a_0}{a_1} - \frac{a_0 a_2}{a_1} - \frac{a_0 (a_2^2 - a_1 a_3)}{a_1 a_2 - a_0 a_3} - \frac{a_0 a_2 [a_2 a_3 - a_1 - (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3^2 - a_2)]}{a_1 a_3 - a_0 a_2 (a_3^2 - a_2)} - \cdots$$

Baltzer (s. o.) hat als zwei wesentliche Punkte für die wissenschaftliche Sicherstellung der Fürstenau'schen Methode die folgenden bezeichnet: Discussion derselben für den Fall complexer Wurzeln, und Nachweis, dass von je zwei aufeinanderfolgenden Determinanten-Quotienten der eine kleiner, der andre grösser als der wahre Wurzelwerth sein müsse. Das Erste ist seitdem von dem Erfinder selbst geleistet worden*); der Beweis für jene zweite Eigenschaft ergiebt sich uns unmittelbar, indem wir die Identität jenes Quotienten zweier unendlich fortlaufender Determinanten mit einem unendlichen Kettenbruche dargethan haben. Wir haben so folgende beide Sätze erhalten, deren Beweis auf andrem Wege wohl wesentliche Schwierigkeiten darbieten dürfte:

*) Fürstenau: *Neue Methode zur Darstellung und Berechnung imaginärer Wurzeln der Gleichungen.* Marburg 1867.

1) *Drückt man die absolut kleinste Wurzel einer algebraischen Gleichung durch den Quotienten zweier unendlichen Determinanten aus, so ist der wahre Werth der Wurzel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerthen dieses Quotienten enthalten.*

2) *Die absolut kleinste Wurzel einer algebraischen Gleichung lässt sich darstellen durch einen aus den Coëfficienten der Gleichung gebildeten unendlichen aber convergirenden Kettenbruch.*

Es ist bei unsrer Transformation vorausgesetzt, dass sämmtliche Coëfficienten der Gleichung von 0 verschieden sind; wäre diess nicht der Fall, so würde dieselbe in der hier durchgeführten Weise nicht vor sich gehen können, indem natürlich die Multiplication einer Colonne der Determinante mit 0 unzulässig wäre. Würde z. B. in der obigen biquadratischen Gleichung $a_2 = 0$ sein, so würde der nach der Fürstenau'schen Vorschrift gebildete Näherungswerth nachstehende Gestalt annehmen

$$\begin{vmatrix} -a_0 & 0 & a_3 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 1 \\ a_0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

und eine Reduction auf Kettenbruch-Determinanten wäre unmöglich. Es würde auch in diesem Falle der oben entwickelte Kettenbruch zu dem unbrauchbaren Näherungswerthe

$$-\frac{a_0}{a_1}$$

führen. Während man also sonst, ehe man die Auflösung einer Gleichung in Angriff nimmt, dieselbe durch passende Substitutionen auf eine reducirte Form zu bringen bemüht ist, muss man dieselbe bei Anwendung dieser Methode in eine andre Gleichung transformiren, deren Coëfficienten sämmtlich von 0 verschieden sind.

Es könnte sich die Frage aufwerfen lassen, in welchem Zusammenhang diese Auflösungsmethode mit der von Lagrange gegebenen steht, welche sich bekanntlich ebenfalls der Kettenbrüche bedient. Ein eigentlicher Zusammenhang zwischen denselben besteht nicht; ihr Unterschied lässt sich dahin präcisiren: Die hier vorgetragne Methode lässt sich ohne Unterschied auf Buchstaben-, wie auf Zahlen-Gleichungen anwenden und liefert eine völlig bestimmte Wurzel; die Lagrange'sche dagegen beschränkt sich auf numerische Gleichungen, und dient nur zur genaueren Bestimmung einer Wurzel, deren Werth schon obenhin bekannt ist. Gelingt es also noch, das Bildungsgesetz des die Wurzel ausdrückenden Kettenbruches genau festzustellen, so ist in unserem Falle die independente Darstellung jedes beliebigen Näherungswerthes dieser Wurzel sofort gegeben, während bei Lagrange's Ver-

fahren zur Berechnung eines folgenden Näherungswerthes die Kenntniss aller vorhergehenden erforderlich ist.

Am deutlichsten charakterisirt sich der Unterschied beider Methoden, wenn wir die Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung, d. h. die Ausziehung der Quadratwurzel, vermittelst jeder derselben durchführen. Ist

$$x^2 = A,$$

so findet sich bekanntlich nach Lagrange

$$x = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{2\alpha_0} + x - \alpha_0,$$

wo α_0, $\alpha_1 \cdots$ recurrirend berechnet werden müssen. Berechnet man hingegen für die Gleichung

$$x^2 - 2a_1 x = a_0$$

nach der gewöhnlichen Methode den kleinsten Wurzelwerth, so erhält man

$$x = a_1 - \sqrt{a_1^2 + a_0}.$$

Für diesen Werth stellen die Fürstenau'schen Determinanten sich sofort als Kettenbruchdeterminanten dar; wir finden

$$x = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -2a_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -a_0 & -2a_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -a_0 & -2a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -2a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -a_0 & -2a_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -a_0 & -2a_1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -a_0 & -2a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und erhalten so in der That die anderweitig bekannte Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a_1^2 + a_0} = a_1 + \frac{a_0}{2a_1} + \frac{a_0}{2a_1} + \cdots$$

Erlangen, Anfang März 1873.

Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.

Von A. Brill und M. Nöther*).

Die Riemann'sche Theorie der Abel'schen Functionen und das Werk von Clebsch und Gordan über denselben Gegenstand bieten eine reiche und für die Geometrie theilweise noch unbenutzte Quelle werthvoller algebraischer Sätze und Begriffe. Indem dieser Theorie der Begriff der algebraischen *Function* zu Grunde liegt, geht die Untersuchung auf solche Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden, deren wesentliche Eigenschaft die Unabhängigkeit von rationalen Transformationen ist. Es ist aber die Aufgabe der Algebra, diese interessanten Beziehungen direct und ohne die in den genannten Theorien angewandte Beihilfe transcendenter Sätze zu beweisen, um dieselben einerseits für ihr eigenes Gebiet zu erwerben, andererseits auch der Geometrie leichter zugänglich zu machen.

Indem die Verfasser sich die Aufgabe stellten, für die wichtigsten jener Sätze die algebraische Form und den algebraischen Beweis zu finden, war es ihre Absicht, einen Ausgangspunkt für die Entwicklung jenes theilweise einem fremden Gebiete entwachsenen Zweiges der Algebra zu finden**). Es genügte in dieser Beziehung, den bekannten Hilfsmitteln der Algebra einige wenige Begriffe hinzuzufügen. Um aber der Darstellung eine grössere Uebersichtlichkeit und Kürze zu verleihen, war es nöthig, auch einige neue Bezeichnungen einzuführen, welche man in den §§. 1. 2. 5. definirt finden wird.

---

*) Der vorliegende Aufsatz ist die Ausführung einer in den Göttinger Nachrichten (Febr. 1873) enthaltenen Note der Verfasser. — Ein Auszug aus dem Folgenden ist von Herrn Fiedler in die soeben erschienene Uebersetzung der 2. Ausgabe des Salmon'schen Werkes über höhere ebene Curven aufgenommen worden.

**) Wir bemerken, dass dieser Ausgangspunkt ganz verschieden ist von dem ebenfalls algebraischen, welchen Herr Weierstrass zur Aufstellung der Zahl p in seinen Vorlesungen nimmt.

Nach dem Vorgang von Clebsch und Gordan möge im Nachfolgenden die Gleichung, durch welche eine algebraische Function y der Variabeln x definirt wird, als Gleichung einer *Curve*, in den Cartesischen Coordinaten x, y (oder den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, wo $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$) geschrieben, aufgefasst werden (selbstverständlich ohne über die Realität der Variabeln, oder der in der Gleichung auftretenden Coefficienten irgend eine Voraussetzung zu machen). Die Vorzüge der an ein geometrisches Bild sich anlehnenden Darstellungsweise sind an anderen Orten genügend hervorgehoben worden, weshalb dies hier übergangen werden kann; ebensowenig scheint es nothwenig, an dieser Stelle über die mit den elementaren geometrischen Begriffen verbundenen Operationen an der Gleichung etwas zuzufügen. Wenn die hier gewählte Form der Definitionsgleichung für eine algebraische Function — die allgemeine Form der Gleichung einer Curve n.Ordnung — von der von Riemann gewählten Normalform abweicht, so sei erwähnt, dass nicht nur, vermöge der Annahme des § 1., diese letztere in unserer Darstellung mit inbegriffen ist, sondern dass auch alle Ausartungen der Riemann'schen Form, wie z. B. die auf hyperelliptische Functionen führenden Gleichungen, durch den letzten § (§ 7.) des I. Theiles in die Betrachtungen desselben mit hereingezogen worden sind. Diese Betrachtungen erfüllen die wesentliche Forderung, völlig unabhängig von Constantenzählung und somit auch für Curven mit beliebig speciellen Eigenschaften gültig zu sein.

Der erste Theil handelt von den Eigenschaften der Gruppe von Schnittpunkten, welche eine algebraische Curve mit irgend einer „ihr adjungirten", d. h. mit einer solchen Curve, die durch jeden ihrer Doppelpunkte einfach, durch einen i-fachen Punkt $(i-1)$-fach u. s. w. hindurchgeht, ausser diesen noch besitzt. Betrachtet man die Schaaren von Punkt-Gruppen, welche auf der gegebenen Curve durch *bewegliche* adjungirte Curven ausgeschnitten werden, so gelangt man zu einer Geometrie auf der Curve, vermöge deren es möglich wird, die bei eindeutiger Transformation der Curve ungeändert bleibenden Eigenschaften in einfacher Weise zu definiren. — Den Ausgangspunkt für diese Betrachtungen bildet der „Restsatz" (§ 1.), ein Satz über Punktgruppen auf einer Curve, welcher, dem Abel'schen Theorem nahe verwandt, dasselbe in seinen Anwendungen auf Geometrie in vielfacher Hinsicht zu vertreten geeignet ist. Sofern sich vermöge dieses Satzes aus einem vollständigen Schnittpunktsystem Theile desselben als selbständige Punktgruppen ausscheiden lassen, wird eine besondere Betrachtung der Schaaren von Punktgruppen, welche Curven verschiedener Ordnung aus der gegebenen Curve ausschneiden, nothwendig (§§ 2. 3.). Von besonderer Bedeutung erscheinen hierbei solche

„Special"-Gruppen, welche einer gewissen Ungleichung genügen (§ 3. a. E.). Von diesen wird (§ 4.) gezeigt, dass sie immer durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung (wenn n den Grad der gegebenen Curve bedeutet) ausgeschnitten werden können. Hieran anknüpfend wird (§ 5.) ein Satz bewiesen, der nach Riemann, von dem er zuerst ausgesprochen, und nach Roch, von dem er allgemein bewiesen wurde, im Nachstehenden der „Riemann-Roch'sche Satz" genannt wird. Dieser Satz, der von hervortretender Wichtigkeit ist, ermöglicht den algebraischen Beweis aller der bereits aus der Theorie der Abel'schen Functionen bekannten Sätze über die Anzahl der linear unabhängigen adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, über die bei eindeutiger Transformation erhaltenen Eigenschaften einer Curve und der ihr adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die Erhaltung des Geschlechtes u. s. f. (§ 6.).

Im zweiten Theil, der sich vorzugsweise mit einer allgemeinen Curve ihres Geschlechtes beschäftigt, wird (§ 9.) das Problem der Special-Gruppen in algebraischer Form aufgestellt und zur Herstellung einer Ungleichung für dieselben benutzt. Für einen Grenzfall (§ 10.), der durch diese Ungleichung bezeichnet ist, lässt sich die Anzahl der Lösungen (§ 11.) jenes algebraischen Problems bestimmen und in einzelnen Fällen auf indirectem Wege bestätigen (§ 12.). In den §§ 13—16. werden die Moduln für eine Klasse von Curven definirt und in mehrfacher Weise, je anschliessend an eine der Normalformen (§ 10.), auf die man eine allgemeine Curve ihres Geschlechtes eindeutig transformiren kann, bestimmt und gezählt. Die gegen die Riemann'sche Zahl $3p-3$ für die Moduln erhobenen Bedenken werden zerstreut und damit diese Frage, wie die Verfasser glauben, endgiltig erledigt.

Das Vorstehende gestattet noch einen Schluss auf die Anzahl der freien Bestimmungsstücke einer Raumcurve von gegebenem Grad und Geschlecht (zwischen denen jedoch eine Ungleichung besteht). (§ 17.)

Zum Schluss folgt eine uneingeschränkt gültige Anwendung der Theorie der Special-Gruppen auf die Definition der besonderen Punktgruppen in der Ebene, deren Untersuchung durch eine Bemerkung von Cayley (Proceed. Math. Soc. Dec. 1870) veranlasst worden war.

I. Theil.

§ 1.

Der Restsatz.

Die nachfolgenden Betrachtungen handeln von den Eigenschaften von Punktsystemen einer ebenen irreducibeln algebraischen Curve mit

beliebigen Doppel- und vielfachen Punkten*), die durch ihre Gleichung $f(x, y) = 0$ (in homogenen Coordinaten $f(x_1, x_2, x_3) = 0$), $f = 0$, oder kürzer durch f bezeichnet werden möge, und zwar beziehen sich dieselben insbesondere auf solche Punktsysteme, welche eine durch die Doppelpunkte von f einfach, die i-fachen Punkte $(i-1)$-fach hindurchgehende, im Uebrigen aber willkührliche algebraische Curve (welche auch zerfallen kann) ausserdem noch ausschneidet. Curven dieser Art wollen wir „der Curve f adjungirte" oder kurzweg *„adjungirte Curven"* nennen**). Wenn wir uns in der Folge ausschliesslich mit den durch adjungirte Curven ausgeschnittenen Punktgruppen beschäftigen (unter *„Punktgruppe"* ein beliebiges Aggregat von einer endlichen Anzahl von Punkten auf f verstanden), so ist diese Beschränkung nur eine scheinbare; denn man braucht einer nicht adjungirten Curve nur eine solche feste Curve zuzufügen, welche das Aggregat Beider zu einer (zerfallenden) adjungirten Curve vervollständigt.

Man theile das System der Schnittpunkte, welche eine adjungirte Curve mit f ausser den (zur Charakterisirung der adjungirten Curve als solcher) in die *„singulären"* Punkte von f (wir fassen unter dieser Bezeichnung Doppel- und vielfache Punkte zusammen) fallenden Schnittpunkten besitzt, beliebig in zwei Gruppen G_R und G_Q von bez. R und Q Punkten. Mit Sylvester***) nennen wir dann die Gruppe G_Q das *„Residuum"* von G_R oder die zu G_R residuale Gruppe und umgekehrt, indem wir als Residuum einer Gruppe, die von einer adjungirten Curve ausgeschnitten wird, jede Gruppe von Punkten bezeichnen, welche mit den Punkten jener Gruppe und den singulären Punkten von f (jeden i-fachen Punkt von f als $i-1$-fachen der adj. C. gerechnet) ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden. Legt man nun durch G_Q irgend eine andere adjungirte Curve (was immer möglich ist, wenn man nur den Grad hoch genug wählt) und nennt die Gruppe $G_{R'}$ von R' Punkten, welche diese noch ausserhalb der singulären Punkte ausschneidet, der Gruppe G_R *„corresidual"* in Bezug auf die Gruppe G_Q (weil sie das-

---

*) Wir setzen zunächst noch vielfache Punkte mit *getrennten* Tangenten voraus, werden indess in § 7. zeigen, wie man diese Beschränkung aufheben kann.

**) In unserer Note in den Göttinger Nachrichten werden dieselben „Curven vom Charakter der φ" genannt, indem dort unter „Curven φ" adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung verstanden werden.

***) Man vergl. die Vorrede zu der (gleichzeitig mit dem Erscheinen unserer Note veröffentlichten) zweiten Ausgabe des Werkes von G. Salmon: Higher plane curves, woselbst jene Bezeichnung auf Curven 3. Ordnung angewendet wird; oder den Literaturnachweis zu Cap. V. der Uebersetzung dieses Werkes von Fiedler. — In Uebereinstimmung mit der hier adoptirten Bezeichnung wählten wir den Namen „Restsatz" statt des in unserer Note gebrauchten Wortes: „Aequivalenzsatz".

selbe Residuum G_Q wie jene besitzt), so kann man den folgenden *Satz* aussprechen:

Sind auf einer algebraischen Curve die Punktgruppen $G_R, G_{R'}, \cdots$ einander corresidual in Bezug auf eine Punktgruppe G_Q, so sind sie es in Bezug auf jede andere Punktgruppe $G_{Q'}$, welche zu einer von ihnen (etwa G_R) residual ist. Mit anderen Worten: *„corresiduale Gruppen"* ist ein Begriff, welcher von einem speciellen Residuum unabhängig ist. — Dabei ist noch zu bemerken, dass es gleichgiltig ist, ob die Gruppen $G_R, G_{R'}, \cdots$ und ebenso die Gruppen $G_Q, G_{Q'}, \cdots$ lauter verschiedene, oder theilweise je dieselben (festen) Punkte enthalten.

Um jenen Satz zu beweisen, nehmen wir an, die gegebene Curve sei $f = 0$; auf dieser werden ausgeschnitten die Punktgruppen:

$$\begin{aligned} G_Q &\text{ und } G_R \text{ durch } A = 0, \\ G_Q &\text{ und } G_{R'} \quad „ \quad B = 0, \\ G_{Q'} &\text{ und } G_R \quad „ \quad \alpha = 0, \end{aligned}$$

wo $A = 0$, $B = 0$, $\alpha = 0$ f adjungirte Curven seien. Wir werden nun zeigen, dass auch die Gruppen $G_{Q'}$ und $G_{R'}$ auf einer und derselben adjungirten Curve liegen. Zunächst lassen sich*) immer zwei Curven $\beta = 0$, $\gamma = 0$ finden von der Beschaffenheit, dass man identisch hat:

$$\alpha \cdot B \equiv \beta \cdot A + \gamma \cdot f.$$

Denn die Gleichung $\alpha \cdot B = 0$ repräsentirt eine (zerfallende) Curve, welche durch alle nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkte von $A = 0$ und $f = 0$ hindurchgeht. Ausserdem aber erfüllt das Produkt $\alpha \cdot B$ auch in den singulären Punkten von $f = 0$ die Bedingungen**), an welche noch weiter die Möglichkeit geknüpft ist, dasselbe auf die Form der rechten Seite zu bringen. Dasselbe verschwindet nämlich in jedem i-fachen Punkte von $f = 0$ (wo $A = 0$ einen $(i-1)$-fachen Punkt besitzt) $(2i-2)$-fach, und besitzt somit alle Eigenschaften, um in die Form der rechten Seite übergeführt zu werden. Die hierbei sich ergebende Curve $\beta = 0$ ist nun aber nothwendig eine adjungirte. Denn das Verhalten von $\beta \cdot A$ muss, wenn die obige *Identität* besteht, dem von $\alpha \cdot B$ in jedem i-fachen Punkte

*) Diese Schlussweise ist zwar schon lange bekannt (vgl. z. B. Plücker, Theorie der algebr. Curven; Einleitung.); die Grenzen ihrer Berechtigung sind indessen erst in jüngerer Zeit angegeben worden. (S. d. folgende Note.)

**) Nöther, Math. Annalen Bd. VI. S. 351, wo gezeigt wird, dass die Curve $\alpha \quad B = 0$, wenn sie auf die Form der rechten Seite soll gebracht werden können, in jedem i-fachen Punkt von $f = 0$, in welchem $A = 0$ einen k-fachen Punkt besitzt, entweder gewisse specielle Singularitäten oder wenigstens einen $k + i - 1$-fachen Punkt haben muss.

von $f = 0$ auch den einzelnen Zweigen dieses Punktes gegenüber dasselbe sein. In einem solchen Punkte wird aber jeder Zweig von $f = 0$ von der Curve $\alpha \cdot B = 0$ in $2i - 2$ Punkten getroffen. Die Curve $\beta = 0$ muss somit jeden Zweig noch in $i - 1$ Punkten schneiden, der Punkt also ein $(i - 1)$-facher sein. Denn wäre derselbe etwa ein $(i - 2)$-facher Punkt von $\beta = 0$, dessen Zweige einzeln $i - 2$ Zweige von $f = 0$ berührten, so würden 2 Zweige nur in $2i - 3$ Punkten getroffen werden. Noch weniger könnte der Punkt ein $(i - 3) \cdots$-facher sein. Da nun der Ausdruck β ausser in den singulären Punkten bloss noch in den Punkten der Gruppen $G_{R'}$ und $G_{Q'}$ verschwindet, so liegen diese auf der adjungirten Curve $\beta = 0$, q. e. d. Tritt an Stelle von $B = 0$ eine *Schaar* von Curven $B = 0$, welche alle durch G_Q gehen und f in einer Schaar von G_Q residualen Gruppen $G_{R'}$ treffen, so liefert derselbe Satz an Stelle von $\beta = 0$ eine *Schaar* von Curven $\beta = 0$, die alle durch $G_{Q'}$ gehen und $f = 0$ in derselben Schaar von Gruppen $G_{R'}$ schneiden. Diese zweite Schaar hat dieselben willkührlichen Parameter, wie die erstere, und in derselben Form; sie ist in Bezug auf $f = 0$ der ersteren vollständig *„äquivalent"*. Insbesondere gilt dies für die linearen Schaaren von Curven $B = 0$ und $\beta = 0$, die man durch G_Q, bez. $G_{Q'}$ legen kann; die Anzahl der linear von einander unabhängigen Curven $B = 0$ und $\beta = 0$ ist somit die gleiche, und charakteristisch für die Schaar der Gruppen $G_{R'}$, der wir sie später als Index beifügen werden.

Zur Aufstellung einer der Schaar der Curven $B = 0$ äquivalenten Schaar $\beta = 0$ kann für die Basisgruppe $G_{Q'}$ dieser letzteren eine beliebig specielle, der Gruppe G_R residuale Gruppe gewählt werden; indessen muss, wenn die Schaar $B = 0$ die allgemeinste lineare Schaar durch G_Q war, auch für $\beta = 0$ die allgemeinste lineare Schaar gewählt werden, welche $f = 0$ in der Gruppe $G_{Q'}$ schneidet. So sind die allgemeinsten adjungirten Curven 4. Ordnung zu einer Curve 5. Ordnung $f = 0$ mit 3-fachem Punkt P, für welche im Ganzen 12 Schnittpunkte in den letzteren fallen, nicht die in 4 Gerade zerfallenden Curven mit 4-fachem Punkt in P, denn diese bilden nur eine 4-fach unendliche Schaar, sondern diejenigen Curven 4. Ordnung, welche in P einen 3-fachen Punkt haben, dessen Tangenten mit denen von $f = 0$ übereinstimmen. Dieselben bilden noch eine 5-fach unendliche Schaar; und somit ist auch die Schaar der zu jenen 12 in P fallenden Schnittpunkten residualen Gruppen G_8 noch eine 5-fach unendliche.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass, obgleich Irreducibilität der Gleichung $f = 0$ vorausgesetzt ist, doch in dem Vorstehenden hiervon an keiner Stelle Gebrauch gemacht wurde und demnach *der Restsatz auch für reducibele Curven seine Geltung behält.*

§ 2.

Schaaren von Punktgruppen.

Durch den im Vorstehenden bewiesenen Restsatz sind Gruppen von Punkten, auch wenn dieselben nicht vollständige Schnittpunktsysteme bilden, in solcher Weise unabhängig von der sie ausschneidenden Schaar von Curven definirt, dass eine Betrachtung derselben an und für sich nicht umgangen werden kann.

Die beweglichen Schnittpunkte einer durch irgend welche Bedingungen nicht vollständig festgelegten adjungirten Curve bilden auf f eine *ein- oder mehrfach unendliche Schaar von Punktgruppen*, für welche sich folgende zunächstliegenden Unterscheidungsmerkmale aufstellen lassen:

1. Die Zahl der in jeder Gruppe der Schaar befindlichen Punkte (die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der adjungirten Curve).

2. Die Mannigfaltigkeit der Schaar (die Zahl der willkührlichen Parameter in der Gleichung jener Curve).

3. Der Grad, bezw. die Form, in welcher diese Parameter in die Gleichung eingehen.

Mit Rücksicht auf den Grad kann man z. B. von *„linearen"*, *„quadratischen"*, $\cdots$ *Schaaren von Punktgruppen* reden. So bilden die Gruppen von je 3 Punkten, welche alle Geraden aus einer Curve 3. Ordnung ausschneiden, eine lineare 2-fach unendliche (∞^2-)Schaar von je 3 Punkten. Die Punkte, in welchen die Tangenten eines Kegelschnitts eine Curve 3. Ordnung treffen, eine quadratische 1-fach unendliche (∞^1-)Schaar von je 3 Punkten; ein einzelner gegebener Punkt einer solchen Curve eine lineare ∞^0-Schaar von 1 Punkt. Dagegen gehört ein Punkt einer Curve 3. Ordnung mit Doppelpunkt einer linearen ∞^1-Schaar von je 1 Punkte an, u. s. w.

Sei jede der Gruppen von je Q Punkten, welche die Schaar bilden sollen, σ Bedingungen unterworfen, so wird die Schaar eine $(Q-\sigma)$-fach unendliche, da durch $Q-\sigma$ beliebig anzunehmende Punkte einer Gruppe auf $f=0$ die übrigen σ Punkte der Gruppe auf eine endliche Anzahl von Arten bestimmt sind.

Mit Hilfe des Restsatzes ist es nun möglich, insbesondere die *linearen* Schaaren, mit denen wir uns in der Folge vorzugsweise zu beschäftigen haben, vor den übrigen noch weiter auszuzeichnen. Jede *lineare* Schaar ist offenbar zugleich eine Schaar corresidualer Gruppen. Irgend eine Gruppe G_Q, welche σ Bedingungen genügt, möge durch den Restsatz zu einer linearen q-fach ($q \leq Q-\sigma$) unendlichen Schaar von Gruppen von je Q Punkten führen, die alle G_Q corresidual sind und zugleich den σ Bedingungen genügen. Jede Gruppe innerhalb dieser Schaar ist alsdann durch irgend q Punkte von $f=0$ eindeutig

festgelegt. Von den Punkten irgend einer Gruppe, welche den σ Bedingungen genügt, waren aber $Q - \sigma$ Punkte ganz willkührlich anzunehmen, die daraus hervorgehende $\infty^{Q-\sigma}$-Schaar von Gruppen zerfällt also in ∞^{τ} Systeme von linearen ∞^{q}-Schaaren, wobei $\tau = (Q-\sigma)-q$ ist. Für $\tau = 0$ erhält man so eine endliche Anzahl von linearen Schaaren, die im Allgemeinen einander nicht corresidual sind; und zwar dieselben, von welchen $Q - \sigma = q$ Punkten man auch ausgegangen ist.

Die Q Punkte einer Gruppe kann man sich demnach in 3 Theile zerlegt denken: q Punkte, welche die Gruppe innerhalb der Schaar festlegen, τ Punkte, welche sodann die Schaar, eindeutig oder mehrdeutig, bestimmen, die übrigen σ Punkte, welche durch die σ Bedingungen mit bestimmt sind.

So gehören irgend 3 Punkte einer Curve 3. Ordnung einer ∞^{2}-Schaar von je 3 Punkten an, für welche bei beliebiger Lage der Punkte $\sigma = 0$, also $\tau = 3 - 2 = 1$ ist. Es giebt demnach noch ein ∞^{1}-System von solchen ∞^{2}-Schaaren. Darunter befindet sich auch die Schaar der durch die Geraden der Ebene ausgeschnittenen Gruppen, für welche $\sigma = 1$, $\tau = 0$ ist.

Der Kürze halber möge in der Folge eine *lineare ∞^{q}-Schaar* von Gruppen von je Q Punkten durch $g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$, $\cdots$, und die *einzelne Gruppe* einer solchen Schaar entsprechend durch $G_Q^{(q)}$, $\Gamma_Q^{(q)}$, $\cdots$ bezeichnet werden. Auch möge, wenn nicht Anderes ausdrücklich zugefügt ist, unter einer ∞^{q}-Schaar eine *lineare* ∞^{q}-Schaar verstanden werden. — Die durch die Geraden der Ebene auf einer Curve 3. Ordnung ausgeschnittene Schaar von Gruppen ist demnach eine Schaar $g_3^{(2)}$.

§ 3.

Die linearen Schaaren.

Sind durch den Restsatz die linearen Schaaren von Punktgruppen von den sie ausschneidenden Curvenschaaren unabhängig gemacht, so giebt es doch eine gewisse Grenze für den Grad derjenigen Curven, durch die eine gegebene Schaar ausgeschnitten werden kann. Ehe wir indess auf diese Frage eingehen, betrachten wir die durch gegebene adjungirte Curven ausschneidbaren Schaaren, um einen Ueberblick über die einfachsten Punktgruppen überhaupt zu erhalten.

Die Curve $f = 0$ sei von der n. Ordnung ($n > 3$), nicht zerfallend, und besitze α_2 Doppel-, α_3 dreifache-, $\cdots$ α_i i-fache Punkte je mit getrennten Tangenten. Sei die adjungirte Curve $\varphi = 0$ von der s. Ordnung, und setzt man zunächst $s \geq n$ voraus, so geht durch die Schnittpunkte derselben mit $f = 0$ auch noch die Curve:

$$\psi \equiv \varphi + A \cdot f = 0$$

hindurch, wo A ein noch unbestimmter Ausdruck $(s-n)$. Ordnung ist. Ist es nun möglich, mit Hilfe der

$$\tfrac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2) = x$$

Coefficienten von A ebensovielen Coefficienten von ψ specielle Werthe zu ertheilen, so kann man an Stelle des Ausdrucks φ, welcher wenigstens*)

$$\frac{s(s+3)}{2} - \Sigma\alpha_i \cdot \frac{i(i-1)}{2} = y$$

willkührliche Coefficienten besitzt, den Ausdruck ψ (mit übrigens denselben Eigenschaften gegenüber $f=0$) mit wenigstens

$$y - x = ns - \Sigma\alpha_i \cdot i(i-1) - p$$

$$\left(\text{wo } p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma\alpha_i \cdot \frac{i(i-1)}{2} \text{ gesetzt wird}\right)$$

noch unbestimmten Coefficienten setzen. Im Fall also, dass man über alle Coefficienten in $A=0$ in der gewünschten Weise verfügen kann, sind von den nicht in die singulären Punkte von $f=0$ fallenden Schnittpunkten von $\varphi=0$ mit $f=0$ höchstens p durch die Uebrigen bestimmt, sofern diese nicht eine besondere Lage haben. Im Falle jedoch, dass jene Voraussetzung bezüglich $A=0$ nicht eintritt (wo dann statt $y-x$ eine grössere Zahl steht), sowie für besondere Lagen der $y-x$ ersten Schnittpunkte (wenn eine oder mehrere Gleichungen eine Folge der Uebrigen sind) werden jedenfalls weniger als p Punkte durch die Uebrigen bestimmt sein.

Eine Verminderung der Coefficientenanzahl der adjungirten Curve wird nicht mehr möglich, wenn $s<n$ ist. Nichtsdestoweniger gelten für die Fälle $s=n-1$ und $s=n-2$ die obigen Betrachtungen noch, weil für sie die Zahl x verschwindet.

Für $s=n-3$ wird die Zahl $y=p-1$; und weil dann die Anzahl der nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkte $=2p-2$ wird, so sind höchstens $p-1$ Punkte durch die Uebrigen bestimmt**), sofern diese Letzteren nicht eine besondere Lage besitzen***).

*) Für besondere Lage der vielfachen Punkte von $f=0$ könnte z. B. die Zahl der Bedingungen dafür, dass $\varphi=0$ eine adjungirte Curve ist, geringer als $\Sigma\alpha_i \cdot \frac{i(i-1)}{2}$ sein, und alsdann φ mehr als y willkührliche Coefficienten besitzen.

**) Für besondere Curven $f=0$ kann es eintreten, dass *Jeder* der $p-1$ angenommenen Punkte je noch *einen* anderen mit bestimmt, wie für die (hyperelliptische) Curve 5. Ordnung mit einem dreifachen Punkt, wo die adj. Curven $(n-3)$. Ordnung zerfallen, für eine gewisse (hyperelliptische) Curve 6. Ordnung mit 7 Doppelpunkten u. s w.

Die nachfolgenden Betrachtungen haben übrigens für Curven, für welche die Zahl $p=0$ oder $=1$ ist, keine Bedeutung mehr, weil im 1. Fall überhaupt keine, im 2. keine Schaaren von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung existiren. Es gelten dann jedoch analoge Betrachtungen für adj. Curven $(n-2)$. Ordnung.

***) Auf einer Curve 5. Ordnung mit 2 Doppelpunkten $(p=4)$ nehme man

Man kann das Vorstehende dahin zusammenfassen, dass *von den nicht in die singulären Punkte fallenden Schnittpunkten einer adjungirten Curve s. Ordnung mit* $f = 0$:

I. *Für* $s > n - 3$: *höchstens* p *durch die übrigen*

$$ns - \Sigma \alpha_i \cdot i(i-1) - p = n\alpha + p - 2 \quad (\alpha = s - (n-3))$$

Schnittpunkte bestimmt sind;

II. *für* $s = n - 3$: *höchstens* $p - 1$ *durch die übrigen* $p - 1$ *Schnittpunkte bestimmt sind.*

Legt man also durch gewisse Punkte einer Curve $f = 0$ eine adjungirte Curvenschaar, so wird für die durch diese Curven ausgeschnittene Schaar $g_Q^{(q)}$

$$\text{im Fall I.,} \quad q \geqq Q - p$$
$$\text{im Fall II.,} \quad q \geqq Q - p + 1$$

sein.

Wir setzen hierbei keineswegs voraus, dass die adjungirten Curven nicht zerfallen. Darum ist es aber auch nicht nothwendig, Curven von niederer, als der $(n-3)$. Ordnung besonders zu betrachten, da man solche durch Zufügen einer festen Curve immer zu einer adjungirten Curve der $(n-3)$. oder höherer Ordnung machen kann.

§ 4.

Adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung.

Im vorstehenden § werden Ungleichungen zwischen dem oberen und unteren Index einer linearen Schaar hergeleitet, welche den Fall, wo die adjungirte Schnittcurve von der $(n-3)$. Ordnung ist, vor den übrigen Fällen in gewisser Weise auszeichnet. In diese Ungleichungen ging eine bloss von den Eigenschaften von f abhängige Zahl ein, die wir nach dem Vorgang von Riemann, Clebsch u. A. mit dem Buchstaben p bezeichnet haben und in der Folge mit Clebsch das *Geschlecht* der Curve f nennen wollen, indem wir uns vorbehalten, an späterer Stelle die eigentliche Bedeutung dieser Zahl zu erörtern.

In diesem § soll nun die Umkehrung des am Ende des vorigen entwickelten Satzes bewiesen werden, nämlich: *dass eine q-fach unendliche Schaar* $g_Q^{(q)}$ *von Punktgruppen von je Q Punkten* (unter welchen sich auch solche befinden können die für alle Gruppen *dieselben* sind) *immer dann durch eine Schaar von adjungirten Curven* $(n-3)$. *Ordnung ausgeschnitten werden kann, wenn:*

$$q \geqq Q - p + 1, \quad \text{also} \quad Q - q \leqq p - 1$$

$p - 1 = 3$ Punkte in einer Geraden durch einen der Doppelpunkte an, dann bilden die 3 übrigen Schnittpunkte noch eine $g_3^{(1)}$. Wegen anderer Beispiele vgl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, S. 213.

*ist**). Wir werden diesen Satz für alle durch Curven von höherer als der $(n-3)$. Ordnung ausgeschnittenen Gruppen zu beweisen haben.

Ist zunächst $Q \leqq 2p-2$, so kann man zeigen:

1. Dass der Satz richtig ist für jede Schaar $g_Q^{(q)}$, wenn er richtig ist für Schaaren $g_{Q-1}^{(q-1)}$, immer vorausgesetzt, dass $q \geqq Q-p+1$ ist.

2. Ist sofort klar, dass derselbe für $Q \leqq p-1$ und $q=0$ giltig ist; denn durch eine vollständig bestimmte *einzelne* Gruppe von $p-1$ und weniger Punkten lässt sich immer eine adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung legen.

Um nun auch die erste Behauptung zu erweisen, bemerken wir zunächst, dass, wenn die Schaar $g_{Q-1}^{(q-1)}$ durch Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, die Schaar $g_Q^{(q)}$ durch ein System $(n-2)$. Ordnung ausgeschnitten werden kann. Denn man nehme irgend eine Gruppe $\Gamma_Q^{(q)}$ der letzten Schaar, lege durch einen beweglichen Punkt α derselben eine Gerade A und durch die übrigen $Q-1$ Punkte, welche eine Gruppe $\Gamma_{Q-1}^{(q-1)}$ bilden, eine adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung C_{n-3}. Das Residuum R der Gruppe Γ_Q, welches aus den weiteren $2p-2-(Q-1)$ Schnittpunkten von C_{n-3} und den übrigen $n-1$ Schnittpunkten der Geraden A besteht, ist zugleich Residuum für jede Gruppe der Schaar $g_Q^{(q)}$, weil es dies für eine derselben ist (§ 1.); die Schaar $g_Q^{(q)}$ wird somit in der That durch eine Schaar von durch R gehenden Curven $(n-2)$. Ordnung C'_{n-2} ausgeschnitten, die noch zudem Alle in die Gerade A und eine Curve $(n-3)$. Ordnung zerfallen, weil $n-1$ Punkte einer Curve $(n-2)$. Ordnung nicht auf einer Geraden liegen können, ohne dass Zerfallen eintritt. Betrachtet man nun statt der Gruppe $\Gamma_Q^{(q)}$ irgend eine beliebige der corresidualen $g_Q^{(q)}$, *welche den Punkt α nicht enthält,* die aber gleichfalls durch eine der zerfallenden C'_{n-2} muss ausgeschnitten werden können, so erkennt man, dass, da A unbeweglich ist, dies nur durch eine adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung geschehn kann. Q. e. d.

Der vorstehende Beweis macht an keiner Stelle Gebrauch von der Ungleichung $Q \leqq 2p-2$. Er gilt demnach auch für den Fall, dass dieselbe nicht erfüllt ist. Weil nun aber adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung nicht existiren, welche in mehr als $2p-2$ Punkten die Curve f (wenn diese nicht zerfällt) schneiden, so schliesst man rückwärts, *dass Punktgruppen $G_Q^{(q)}$ von mehr als $2p-2$ Punkten, für*

*) Nach diesem Satz lässt sich beispielsweise jede Schaar $g_5^{(1)}$ auf einer Curve 5 Ordnung mit 2 Doppelpunkten, für welche also $p=4$ ist, durch adjungirte *Kegelschnitte* ausschneiden. Soll aber ein Kegelschnittbüschel mit der Curve 5. Ordnung ausser den beiden Doppelpunkten noch 3 feste Schnittpunkte besitzen, so muss jeder Kegelschnitt der Schaar zerfallen. Daher sind die einzigen Gruppen $g_5^{(1)}$ auf der Curve diejenigen beiden Schaaren, welche von den durch die Doppelpunkte gehenden Strahlen ausgeschnitten werden.

welche $q \geqq Q - p + 1$ *ist, nicht existiren;* und die eingangs des Beweises ausgesprochene Beschränkung $Q \leqq 2p - 2$ fällt somit von selbst weg.

Die zuletzt ausgesprochene Bemerkung kann man zum Beweis eines wichtigen Satzes gebrauchen. Gruppen G_Q, welche von einer adjungirten Curve $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, bilden, dem § 3. zufolge, mindestens eine $(Q-p+1)$-fach unendliche Schaar; also Gruppen G_{2p-2} *mindestens* eine ∞^{p-1}-Schaar. Wir wollen nun zeigen, dass sie zugleich *höchstens* eine solche Schaar bilden. Denn bildeten sie z. B. eine ∞^p-Schaar, so könnte man durch Hinzunahme eines willkührlichen *festen* Punktes β von f eine Schaar $g_{2p-1}^{(p)}$, (in deren Gruppen allen der Punkt β vorkäme) herstellen, welche indess zufolge der oben gemachten Bemerkung nicht existiren kann. Somit giebt es auch keine Schaar $g_{2p-2}^{(p)}$, und umsoweniger solche $g_{2p-2}^{(p+1)}$, u. s. w. *Es giebt also nur eine* $(p-1)$*-fach unendliche Schaar d. h. nur* p *linear von einander unabhängige adjungirte Curven* $(n-3)$. *Ordnung.*

§ 5.

Der Riemann-Roch'sche Satz.

Wir haben oben in § 3. solcher Punktgruppen gedacht, für welche $q > Q - p + 1$ ist. Dieselben werden nach dem vorstehenden § immer durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten, besitzen indess auch diesen gegenüber einen speciellen Charakter, wie wir unten näher sehen werden, indem die Lage der einzelnen Punkte einer jeden Gruppe der Schaar nicht beliebig ist, sondern durch Einige derselben die Uebrigen bestimmt sind. Wir wollen daher eine solche Punktgruppe, welche einer ∞^q-Schaar $g_Q^{(q)}$ angehört, für die

$$q > Q - p + 1$$

ist, eine „*Specialgruppe*", und die Schaar selbst eine „*Special-Schaar*" nennen. Beispiele folgen unten (vgl. z. B. § 10.). Die Systeme der Specialgruppen auf einer gegebenen Curve lassen sich nun in merkwürdiger Form zu je zweien in der Weise gruppiren, dass jedes aus dem anderen eindeutig abgeleitet werden kann.

Der Satz, nach welchem diese Gruppirung vorgenommen werden kann, ist von Riemann in Nr. 5 seiner Abel'schen Functionen (Borch. Journ. Bd. 54) für den Fall $q = 1$ gegeben, und von Roch (Borch. J. Bd. 64) auf dem von Riemann eingeschlagenen Wege allgemein bewiesen worden. Riemann hat in Nr. 3 seiner Abhandlung „Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen" einen zweiten Beweis des Satzes, ebenfalls für einen speciellen Fall: $Q = p$, $p-1$ und $p-2$ gegeben, der sich indess ohne wesentliche Aenderung auf den allgemeinen Fall ausdehnen lässt. Ausserdem kann man den Satz

aus den Differentialgleichungen des Umkehrproblems, für den unbestimmten Fall desselben, schliessen. Wir geben hier zwei algebraische Beweise. In seiner allgemeinen Form lautet der Riemann-Roch'sche Satz folgendermassen:

Legt man durch die Gruppe $G_Q^{(q)}$ einer Special-Schaar $g_Q^{(q)}$ auf der Curve f, für welche $q = Q - p + 1 + r$ sein mag (r irgend eine ganze positive Zahl $< p - 1$), eine adjungirte Curve ($n - 3$). Ordnung, so schneidet dieselbe in $2p - 2 - Q = R$ weiteren Punkten, die ihrerseits wiederum einer Special-Schaar $g_R^{(r)}$ von Gruppen $G_R^{(r)}$ angehören, für welche r den aus obiger Gleichung sich ergebenden Werth $r = R - p + 1 + q$ besitzt).*

Zum Beweis dieses Satzes füge man zu jeder Gruppe der Schaar $g_Q^{(q)}$ noch r festliegende, aber beliebig gewählte (und zwar zu *jeder* Gruppe *dieselben*) Punkte von $f = 0$ hinzu. Man erhält so eine Schaar $g_{Q+r}^{(q)}$, für welche die Anzahl der willkührlichen Parameter sich nicht vermehrt hat, wohl aber die Anzahl der Punkte in den einzelnen Gruppen. Durch eine Gruppe $G_{Q+r}^{(q)}$ dieser Schaar lässt sich noch eine adjungirte Curve ($n - 3$). Ordnung legen, weil die Bedingung des § 4. erfüllt ist. Da nun aber die Lage jener r festen Punkte beliebig ist, so muss sich durch die Gruppe $G_Q^{(q)}$ noch mindestens eine ∞^r-Schaar von adjungirten Curven ($n - 3$). Ordnung legen lassen, und die durch dieselben ausgeschnittenen Gruppen $G_R^{(\varrho)}$ bilden mindestens eine ∞^r-Schaar, d. h. es ist ϱ mindestens $= r$. Dass aber andererseits ϱ nicht $> r$ sein kann, erkennt man aus der Umkehrung der eben angestellten Betrachtungen, indem man von einer Gruppe $G_R^{(\varrho)}$ ausgeht. Man gelangt so zu Gruppen $G_Q^{(\varkappa)}$, wo wieder $\varkappa$ mindestens $= Q - p + 1 + \varrho$ sein muss. Dieselben können aber nach dem Restsatze von der Schaar $g_Q^{(q)}$ nicht verschieden sein. Man hat somit $\varkappa = q$, daher auch $\varrho = r$, q. e. d.

*Corollar. Haben R Punkte G_R auf einer nichtzerfallenden Curve f eine solche specielle Lage, dass die durch sie gehenden adjungirten**) Curven ($n - 3$). Ordnung noch eine q [$> (p - 1 - R)$]-fach unendliche Schaar bilden (q eine positive ganze Zahl), wobei sie die Schaar $\gamma_Q^{(q)}$*

---

*) Auf einer Curve 7. Ordnung mit 9 Dp. ($p = 6$) kann man (wie weiter unten gezeigt wird) Gruppen von 4 Punkten G_4 so bestimmen, dass durch sie noch eine ∞^2-Schaar von adjungirten C_4 geht. Diese schneiden in einer Schaar $g_6^{(2)}$, die demnach eine Specialschaar ist. Nach dem oben ausgesprochenen Satz *gehört aber dann auch die Gruppe G_4 einer Special-Schaar $g_4^{(1)}$ an; d. h. durch jede Gruppe der Schaar $g_6^{(2)}$ lässt sich noch ein ∞^1-Büschel von adj. C_4 legen.*

**) Was unter „adjungirten Curven" für den Fall einer Curve f mit besonderen Singularitäten zu verstehen ist, wird unten (§ 7.) näher definirt. Mit Rücksicht hierauf haben wir den obigen Satz gleich in seiner *allgemeinen* Form ausgesprochen.

ausschneiden ($Q = 2p - 2 - R$), so gehört die Gruppe G_R einer ∞^r-Schaar $g_R^{(r)}$ an, für welche $r = R - p + 1 + q = p - 1 - Q + q$ ist, indem durch jede Gruppe $\Gamma_Q^{(q)}$ der Schaar $\gamma_Q^{(q)}$ noch eine ∞^r-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung hindurchgeht, welche $g_R^{(r)}$ ausschneidet.

Dies Corollar folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Satze. Dasselbe ist insofern weniger allgemein, wie dieser, als es nur von Punktgruppen handelt, die von Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden. Freilich folgt aus § 4., dass dies die *allgemeinsten Specialgruppen* sind. Man kann indess auf diese Erkenntniss, wie überhaupt auf den Inhalt der §§ 4. und 5. verzichten und doch das vorstehende Corollar allgemein beweisen.

Man füge nämlich zu der Gruppe G_R eine andere G_{q+1} von $q+1$ beliebigen Punkten und bilde daraus die Gruppe G_{R+q+1}. Alsdann kann man eine mindestens r-fach unendliche Schaar von Gruppen Γ_{r+p} (es ist $r + p = R + q + 1$) finden, welche G_{R+q+1} corresidual ist. Denn man lege durch diese Gruppe eine adjungirte Curve C (von genügend hoher Ordnung), und durch deren übrige Schnittpunkte und r willkührliche Punkte eine andere adjungirte C' derselben Ordnung; so ist (§ 3.) die Gruppe Γ_p der p noch übrigen Schnittpunkte unmittelbar [oder doch, in besonderen Fällen, nach willkührlicher Annahme einer Anzahl, etwa von π, weiteren Punkten] vollständig bestimmt, und bilden mit jenen r zusammen eine Gruppe $\Gamma_{r+p}^{(r)}$ [in jenen Fällen eine Gruppe $\Gamma_{r+p}^{(r+\pi)}$]. Man kann nun zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen die Gruppe G_{q+1}, welche ein Bestandtheil von G_{R+q+1} ist, ein solcher auch von Γ_p und somit von Γ_{r+p} ist. Alsdann bilden aber die übrigen $r + p - (q+1) = R$ Punkte von Γ_{r+p} noch eine r-fach [$(r+\pi)$-fach] unendliche Schaar, welche der Gruppe G_R corresidual ist, und von einer ∞^r [$\infty^{r+\pi}$-] Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten wird. — Dass aber auch in jedem besonderen Fall $\pi = 0$ sein muss, erkennt man, indem man noch die obigen Betrachtungen auf die erhaltenen Gruppen $\Gamma_{r+p}^{(r+\pi)}$ anwendet, von denen man denn zu einer mindestens $\infty^{q+\pi}$-Schaar gelangt, welche aber mit der ∞^q-Schaar $\gamma_Q^{(q)}$, von der wir oben ausgingen, übereinstimmen muss. Man schliesst so $\pi = 0$.

Es muss noch bewiesen werden, dass die Gruppe G_{q+1} ein Bestandtheil von Γ_p ist [wie man auch jene π Punkte angenommen hat]. Nach dem Restsatz ist die Wahl der Curve C ohne Einfluss auf die Lage der p Punkte Γ_p [nachdem die π Punkte fest angenommen sind], es genügt somit, für eine specielle Schnittcurve nachzuweisen, dass *ein beliebiger Punkt* x von G_{q+1} in Γ_p auftritt; was von diesem gilt, gilt von allen $q+1$. Lässt man aber C aus einer durch x gehenden beliebigen Geraden und einer durch die übrigen q Punkte

von G_{q+1} und durch G_R gehenden adjungirten Curve $(n-3)$. Ordnung bestehn (letztere ist nach Voraussetzung construirbar), so enthält auch die an die Stelle der obigen Curve $(n-2)$. Ordnung C' tretende Curve diese Gerade, und somit den Punkt x als Bestandtheil (während die zu C' gehörige Curve $(n-3)$. Ordnung durch die $r+\pi$ willkührlichen Punkte anderweitig bestimmt ist). Der Punkt x ist somit ein Bestandtheil der Gruppe Γ_p. Q. e. d.

Die Gleichungen des Riemann-Roch'schen Satzes lassen sich in folgende übersichtliche Gestalt bringen:

$$Q+R=2p-2;$$
$$Q-R=2q-2r.$$

Zu jedem Werthepaar Q, q, welches der Bedingung genügt, einer Special-Punktgruppe der erwähnten Art zuzugehören, lässt sich demnach nur *ein* Werthepaar R, r der entsprechenden Schaar $G_R^{(r)}$ bestimmen.

Selbstverständlich sind indess nur solche Special-Schaaren $G_Q^{(q)}$, $G_R^{(r)}$ in dieser Weise eindeutig einander zugeordnet, für welche zwischen den Q, bez. R Punkten der einzelnen Gruppen *keine weiteren Bedingungen* bestehen, als die, dass sie einer gegebenen unter ihnen *corresidual* sind, mit anderen Worten: solche Schaaren, welche *alle* Gruppen umfassen, die einer unter ihnen corresidual sind.

§ 6.

Die eindeutigen Transformationen.

Die im Vorstehenden entwickelten Sätze über Punktgruppen gewinnen ein weiteres Interesse durch das Verhalten der Punktgruppen bei der Ueberführung der gegebenen Curve in eine andere, welche ihr eindeutig und Punkt für Punkt (wie der Curve die Evolute) entspricht.

Hat man die Gleichung einer algebraischen Curve in homogenen Coordinaten: $f(x_1x_2x_3)=0$ oder kürzer $f(x)=0$ gegeben, so kann man die Coordinaten eines Punktes y einer neuen Curve mit denen eines Punktes x der gegebenen in Beziehung setzen durch die Relationen:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Theta_1(x) : \Theta_2(x) : \Theta_3(x), \tag{1}$$

wo die $\Theta(x)$ ganze homogene Functionen der Coordinaten des Punktes x sind. Eliminirt man dann mit Hilfe der Gleichung:

$$f(x)=0 \tag{2}$$

die Coordinaten x, so gelangt man zu der Gleichung einer Curve

$$F(y)=0, \tag{3}$$

welche der gegebenen eindeutig entspricht, sofern nicht zwischen den Coefficienten der Θ und der Gleichung $f = 0$ solche Relationen bestehen, dass die eindeutige Darstellung der Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ durch die y aus den Gleichungen (1), (2) unmöglich wird. Wir werden unten ein Beispiel dieses Ausnahmefalls, von dem wir zunächst abstrahiren, kennen lernen.

Den *beweglichen* Schnittpunkten der ∞^2-Curvenschaar:

$$\alpha_1\Theta_1 + \alpha_2\Theta_2 + \alpha_3\Theta_3 = 0$$

entsprechen alsdann die Schnittpunkte der Geraden

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$$

mit $F(y) = 0$, deren Grad somit gleich der Anzahl jener beweglichen Punkte der Schaar ist. Setzt man in (3) die aus (1) sich ergebenden Werthe der y ein, so muss wiederum (2) bis auf einen Factor zum Vorschein kommen, wenn Eindeutigkeit stattfindet, man hat also:

$$F(\Theta(x)) = M \cdot f(x) .$$

Wird auf der Curve $F(y) = 0$ durch eine Schaar von linearen (adjungirten) Curven:

$$\Sigma\alpha\Phi(y) \equiv \alpha_1\Phi_1(y) + \alpha_2\Phi_2(y) + \cdots \alpha_{q+1}\Phi_{q+1}(y) = 0$$

eine Schaar $g_Q^{(q)}$ von Gruppen ausgeschnitten, und transformirt man jene Schaar mit Hilfe der Gleichungen (1) in:

$$\Sigma\alpha\Phi(\Theta(x)) = 0,$$

so besitzt diese, somit auch die transformirte Schaar von Punktgruppen, dieselbe Mannigfaltigkeit wie jene; zugleich muss die Anzahl der beweglichen Punkte für beide Schaaren übereinstimmen, wie gleichfalls aus dem Begriff der eindeutigen Transformation folgt, und man kann demnach sagen, *dass bei eindeutiger Transformation einer Curve f eine lineare ∞^q-Schaar $g_Q^{(q)}$ auf f von Q beweglichen Punkten in eine ebensolche $\gamma_Q^{(q)}$ auf F übergeht.*

Ein bemerkenswerthes Verhalten bei eindeutiger Transformation von f zeigen die adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung. Punktgruppen, welche von diesen Curven auf $f = 0$ ausgeschnitten werden, gehen in solche über, welche aus der transformirten Curve F (wenn diese vom Grad N ist) von adjungirten Curven $(N-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, oder, wie man sagen kann:

Die Anzahl p der verschiedenen linear von einander unabhängigen Curven $(n-3)$. Ordnung, die zu einer gegebenen Curve n. Ordnung gehören (eine Zahl, die wir als „*Geschlecht*“ dieser Curve bezeichnet haben), *ist für alle durch eindeutige Transformation auseinander herleitbaren Curven dieselbe.*

Sei p das Geschlecht von f, P das von F. Wäre nun $P > p$,

so liesse sich zu einer Gruppe G_P von P auf $f=0$ beliebig angenommenen Punkten immer eine corresiduale mindestens ∞^{P-p}-Schaar finden (vgl. § 3.), welcher nach Obigem auf $F=0$ eine ebensolche entspräche. Für diese wäre für $P>p$ zugleich die Bedingung erfüllt, dass die Mannigfaltigkeit der Schaar $\geqq P-P+1$, also $\geqq 1$ ist, so dass sich (§ 3.) dieselbe durch adjungirte Curven $(N-3)$. Ordnung ausschneiden liesse. Eine solche Curve besitzt aber nur $P-1$ Bestimmungsstücke (§ 4.), und es wäre demnach unmöglich, mehr als $P-1$ Punkte einer der corresidualen Gruppen, also mehr als $P-1$ Punkte von G_P anzunehmen, während wir P willkürlich angenommen haben.

Somit liegt in der Annahme $P>p$ ein Widerspruch. Von der umgekehrten Annahme $p>P$ lässt sich das nämliche auf demselben Wege nachweisen, es bleibt also nur $P=p$*).

Der hiermit bewiesene fundamentale Satz von der Erhaltung des Geschlechtes einer Curve bei eindeutiger Transformation lässt den invarianten Charakter der adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung deutlich hervortreten und auf einen engen Zusammenhang dieser Curven mit den Invarianten bei eindeutiger Transformation schliessen. Wir werden weiter unten noch hiervon zu sprechen haben.

Man überzeugt sich übrigens leicht davon, dass die p linear unabhängigen Curven $(n-3)$. Ordnung ausser in den singulären Punkten auf f keinen Allen gemeinsamen Punkt besitzen. Denn wäre dies der Fall, so bildeten die übrigen $2p-3$ Schnittpunkte eine Schaar von Gruppen $G_{2p-3}^{(p-1)}$, deren jede nach dem Riemann-Roch'schen Satz die Basispunkte einer (s. d. Corollar): $(p-1)-(2p-3)+(p-1)=1$-fach unendlichen Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung liefern könnte, was der Annahme, dass auch der $(2p-2)$. Punkt fest ist, widerspräche.

Sind die Gleichungen von p linear unabhängigen der Curve $F(y)=0$ adjungirten Curven $(N-3)$. Ordnung, in beliebiger Auswahl:

$$\Phi_1(y)=0, \quad \Phi_2(y)=0 \cdots \Phi_p(y)=0,$$

ebenso die von ebensolchen $(n-3)$. Ordnung, welche $f(x)=0$ adjungirt sind:

---

*) Ein gleichfalls die invarianten Eigenschaften der Curven $(n-3)$. Ordnung benutzender Beweis dieses Satzes gründet sich auf den Nachweis der Identität:

$$D(x)\cdot\Phi\big(\Theta(x)\big)\equiv M\cdot\varphi(x)+C\cdot f(x),$$

wo $\varphi(x)=0$ eine zu $f(x)=0$, $\Phi(y)=0$ eine zu $F(y)=0$ adjungirte Curve ist, $D(x)$ die Functionaldeterminante der Transformationsausdrücke $\Theta(x)$ nach den Coordinaten x; M der oben ebenso bezeichnete Factor von $f(x)$ ist (vgl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen § 14. (S. 52) und Nöther, Math. Annalen II., S. 314 und VI., S. 351.

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0, \cdots \varphi_p(x) = 0,$$

so kann man, wenn f und F sich eindeutig entsprechen, immer die unbestimmten Factoren α so bestimmen, dass man hat:

$$\Phi_1(y) : \Phi_2(y) : \cdots : \Phi_p(y) = \Sigma\alpha_{1k}\varphi_k(x) : \Sigma\alpha_{2k}\varphi_k(x) : \cdots : \Sigma\alpha_{pk}\varphi_k(x),$$

wo

$$k = 1, 2, \cdots p.$$

Von diesen Gleichungen können je zwei die Transformationsgleichungen (1) ersetzen, was von Bedeutung ist, wenn es sich z. B. darum handelt, zu untersuchen, ob zwei gegeben vorliegende Curvengleichungen eindeutig in einander transformirbar sind.

Die durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnittenen Gruppen $G_Q^{(\varphi)}$ haben (§ 3.) die Eigenschaft, dass für einen gegebenen Werth von q die Zahl Q möglichst klein wird.

Handelt es sich also darum, die Formeln (1) so zu bestimmen, dass, für $q = 2$, Q, d. h. der Grad der transformirten Curve, ein möglichst niedriger wird, so hat man adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung an Stelle der Θ zu setzen. Wir werden weiter unten die näheren Bedingungen angeben, denen diese Curven dann noch zu unterwerfen sind, wollen aber hier eines Ausnahmefalles gedenken, für welchen eine *eindeutige* Transformation durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung unmöglich wird.

Wenn nämlich auf der Curve f je zwei Punkte einander derart zugeordnet sind, dass (wie dies z. B. bei Curven 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt der Fall ist) *alle* adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, welche durch einen beliebigen Punkt gehn, damit von selbst durch einen oder mehrere diesem zugeordnete Punkte gehen, so wird die eindeutige Umkehrung der Formeln (1) auch mit Hilfe von f in der Weise unmöglich, dass sich die Variabeln x durch die y nicht mehr rational, sondern nur noch mit Hilfe von Wurzelzeichen (oder überhaupt Irrationalitäten) ausdrücken lassen, und das Entsprechen hört auf eindeutig zu sein.

Man überzeugt sich indess leicht davon, dass man höhere Irrationalitäten, als Quadratwurzeln (also den Uebergang zu *mehr* als zweideutig entsprechenden Curven) vermeiden kann. Denn wenn jedem *beliebig* gegebenen Punkte α auf f etwa i Punkte in der Weise entsprechen könnten, dass alle adjungirten Curven durch α auch durch jene Punkte hindurchgingen, so könnte man, da eine solche Curve $p-1$ Bestimmungsstücke besitzt, $(i+1)(p-1)$ Schnittpunkte durch Annahme von $p-1$ bestimmen, während es doch nur $2(p-1)$ Schnittpunkte giebt. Daher ist i höchstens $= 1$.

In der angegebenen Weise kann also höchstens *ein* weiterer Punkt einer Curve durch einen gegebenen mit bestimmt sein. Die Curven,

für welche dies eintritt, sind nun aber keine anderen als die *hyperelliptischen*. Denn diese sind definirt durch die Bedingung, eine Schaar $g_2^{(1)}$ zu besitzen. Die beiden Punkte einer einzelnen Gruppe $g_2^{(1)}$ sind dann nach dem Riemann-Roch'schen Satz die Basispunkte von ∞^{p-2} adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, d. h. jede durch einen beliebigen Punkt von $f=0$ gelegte adjungirte Curve $(n-3)$. Ordnung geht noch durch einen zweiten, durch den ersten eindeutig bestimmten Punkt. Sämmtliche adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung schneiden f also in Punktepaaren, von welchen es eine ∞^1-Schaar giebt. Soll nun die Transformation einer hyperelliptischen Curve $f=0$ eine eindeutige sein, so muss man demnach adjungirte Curven von mindestens der $(n-2)$. Ordnung an Stelle der 3 Ausdrücke $\Theta=0$ setzen. Legt man denselben noch die Bedingung auf, durch $n+p-4$ feste Punkte von $f=0$ zu gehen, so sind noch 2 Bestimmungsstücke derselben willkührlich, durch welche dann noch $p+2$ weitere Schnittpunkte bestimmt sind. Die Ordnung der transformirten Curve ist demnach $=p+2$, und zwar besitzt die letztere einen p-fachen Punkt, wie der Restsatz ergiebt. Alle Curven vom Geschlecht p, mit Ausnahme der hyperelliptischen, können ähnlich durch adjungirte Transformationscurven $\Theta=0$ von der $(n-3)$. Ordnung mit $p-3$ gemeinsamen Basispunkten, die indess beliebig auf f angenommen sein können, auf eine Curve $(p+1)$. Ordnung mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten transformirt werden.

§ 7.

Berücksichtigung der singulären Punkte.

Wir haben bisher bezüglich der Singularitäten der Curve f die Voraussetzung gemacht, dass die einzelnen Zweige vielfacher Punkte *getrennt* seien.

In diesem § wollen wir zeigen, wie man durch eine von Nöther*) angegebene Methode in den Stand gesetzt wird, diese Beschränkung aufzuheben.

Wendet man auf eine Curve f, die einen singulären Punkt in P besitzt, eine beliebige eindeutige Transformation an, für welche P ein gemeinsamer Punkt der 3 Transformationscurven Θ ist, so entsprechen dem j-fachen Punkt von f, der in P fallen mag, j Punkte der transformirten Curve F, welche getrennt liegen, wenn die j Zweige von P getrennte Tangenten besitzen. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, der Punkt P liege in dem Eckpunkte des Coordinatendreiecks $x_1=0$, $x_2=0$, und die angewandte Transformation sei die quadratische:

*) Gött. Nachrichten 1871, S. 217.

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 .$$

Dann entspricht dem Punkt $x_1 = x_2 = 0$ das Werthsystem:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{0}{0} = \frac{dx_2}{dx_1}; \qquad y_3 = 0 .$$

Den j Zweigen in P entsprechen somit die j Punkte $\frac{y_1}{y_2} = \frac{dx_2}{dx_1}$ auf der Geraden $y_3 = 0$. Fallen zwei oder mehrere Tangenten in P zusammen (also in Rückkehrpunkten), so berührt F die Gerade $y_3 = 0$ ein- oder mehrfach.

Weil nun durch das Zusammenrücken zweier oder mehrerer Schnittpunkte dieser Geraden mit F den F adjungirten Curven keine Bedingung auferlegt wird, so haben auch die diesen Curven entsprechenden f adjungirten Curven wegen des einfachen Zusammenfallens mehrerer Tangenten der Zweige des vielfachen Punktes keinerlei Bedingungen zu genügen, und in die frühere Definition der Zahl p, der adjungirten Curven etc. ist keine Modification aufzunehmen.

Es kann nun aber weiter vorkommen, dass die Schnittpunkte der Geraden $y_3 = 0$ mit F, welche den Zweigen von P entsprechen, sich selbst theilweise oder alle wieder zu singulären Punkten vereinigen. Sie entsprechen alsdann Punkten von derselben Beschaffenheit, welche man als in P hereingerückt sich vorstellen muss, und welche durch die Transformation von P selbst und von einander getrennt werden. Die Fortsetzung des Transformationsverfahrens löst auch diese entweder in einzelne Punkte oder in einfachere Singularitäten auf. Ein gänzliches Auflösen der Singularitäten der Curve wird aber darum unmöglich, weil sich bei der Transformation immer wieder neue vielfache Punkte bilden, welche man indess, durch solche Wahl der Seiten des Transformationsdreiecks, dass dieselben ausser in den Eckpunkten des Dreiecks keine Singularitäten der zu transformirenden Curve enthalten, von allen aussergewöhnlichen Eigenthümlichkeiten frei erhalten kann.

Hat man auf diesem Wege die einzelnen vielfachen Punkte, aus welchen sich eine höhere Singularität P auf f zusammensetzt, erkannt, so ist damit die Curve auf eine solche, wie wir sie in dem Früheren vorausgesetzt haben, zurückgeführt, und es ist nunmehr leicht, das Verhalten einer adjungirten Curve in dem Punkt P so zu fixiren, dass alle Sätze, die wir oben abgeleitet haben, namentlich also auch der Restsatz, noch giltig sind. Wäre nämlich in Bezug auf F eine Curvenschaar durch eine äquivalente mit Hülfe des Restsatzes zu ersetzen, so hätte diese zweite Schaar, was die besonderen singulären Punkte auf $y_3 = 0$ betrifft, nur der Bedingung zu genügen, auch in diesen Punkten F adjungirt zu sein. Die quadratische Transformation zeigt nun sogleich, dass, wenn es sich darum handelt, in Bezug auf f eine Curvenschaar durch eine äquivalente zu ersetzen, das Verhalten

dieser zweiten Schaar in dem singulären vielfachen Punkte ebenfalls keiner andern Bedingung unterliegt, als der, ein adjungirtes zu sein; nämlich dass die zweite Schaar in dem zusammengerückten vielfachen Punkte sich ebenso verhalten muss, als ob die Punkte getrennt lägen. Die adjungirte Curve muss also in jedem j-fachen Punkte von f einen $(j-1)$-fachen Punkt besitzen; wenn noch weiter ein i-facher Punkt mit diesem vereinigt liegt, in demselben noch einen $(i-1)$-fachen Punkt etc. In einem Selbstberührungspunkt von f muss demnach die adjungirte Curve die gemeinsame Tangente berühren; ebenso in einem Rückkehrpunkt 2. Art, u. s. w.

Berücksichtigt man in dieser Weise die einzelnen Bestandtheile eines höheren singulären Punktes, so behalten der Restsatz und damit alle im Vorhergehenden entwickelten Sätze ihre uneingeschränkte Giltigkeit.

II. Theil.

§ 8.

Begrenzung der nachfolgenden Betrachtungen.

Die im I. Theil dieses Aufsatzes entwickelten Sätze über Punktgruppen auf einer Curve bedurften ihrer Natur nach keiner besonderen Voraussetzungen über den Grad der Allgemeinheit der Curve, auf welche sich dieselben bezogen.

Wenn wir in diesem II. Theil (mit Ausnahme der geometrischen Anwendung des letzten § 18.) zur Aufsuchung der im § 4. definirten Special-Punktgruppen auf einer gegebenen Curve f übergehn, so bedarf es einer Unterscheidung zwischen solchen Curven, welche die allgemeinsten ihres Geschlechtes sind und Curven mit speciellen Moduln, d. h. Curven, auf welchen Schaaren von Gruppen existiren, die nicht auf jeder ihres Geschlechtes ebenfalls vorkommen. Während diese letzteren Schaaren zur Charakterisirung der besonderen Curve von vornherein mit gegeben sein müssen, führt die Aufsuchung jener Special-Gruppen auf der allgemeinen Curve zu algebraischen Problemen, mit denen wir uns insbesondere im Nachfolgenden beschäftigen werden.

Beispielsweise sind demnach von der folgenden Untersuchung ausgeschlossen die im Früheren schon als „hyperelliptische" bezeichneten Curven, welche Schaaren $g_2^{(1)}$ besitzen. Ausgeschlossen sind ferner alle Curven, deren Ordnungszahl *unter* einer gewissen von p abhängigen Zahl m liegt (wo m später bestimmt werden wird), Curven, welche eine Schaar $g_{m-i}^{(2)}\,(i>0)$ besitzen, die in der allgemeinen Curve vom Geschlecht p nicht vorkommt. — Durch eine eindeutige Transformation kann, wie wir gesehen haben, *jede* Curve vom Geschlecht

p, mit Ausnahme der hyperelliptischen, in eine Curve $(p+1)$. Ordnung mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten transformirt werden. Schliessen wir also jene aus, so können wir unsere Betrachtungen auf Curven $(p+1)$. Ordnung vom Geschlecht p, oder vielmehr auf die durch beliebige eindeutige Transformation aus ihnen hervorgehenden Curven beschränken. Dabei ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass auch für Curven mit speciellen Moduln je eine Reihe der Resultate ihre Giltigkeit behalte.

§ 9.

Das Problem der Special-Gruppen.

Die algebraische Aufgabe, auf einer gegebenen Curve $f=0$, n. Ordnung mit je α_i i-fachen Punkten, die nun eine allgemeine ihres Geschlechtes sein soll, Schaaren von Special-Gruppen $G_R^{(r)}$ (für $r > R-p+1$ und jedenfalls $r>0$) aufzufinden, führt nach dem Riemann-Roch'schen Satze auf die andere zurück, Gruppen G_R zu finden, durch die, als Basispunkte genommen, noch ∞^q adjungirte Curven $n-3$. Ordnung gelegt werden können, wo

$$q = r - (R - p + 1)$$

ist; und ebenso umgekehrt. Die letztere Aufgabe verallgemeinern wir noch zu folgender:

Gegeben sei eine ∞^t-Schaar von adjungirten Curven. Man soll auf $f=0$ R Punkte G_R so bestimmen, dass die durch sie gehenden Curven der Schaar noch eine ∞^q-Schaar bilden.

Die R Punkte sind demnach durch die Lage von $t-q$ unter ihnen eindeutig bestimmt.

Sei die Gleichung der ∞^t-Schaar:

$$0 = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_{t+1}\varphi_{t+1} \equiv \Phi .$$

Dieselbe erfüllt die R Gleichungen:

$$\text{(A)} \qquad \Phi(x^{(1)}) = 0 \quad \Phi(x^{(2)}) = 0 \cdots \quad \Phi(x^{(R)}) = 0 ,$$

wo unter $x^{(1)}$ (homogene Coordinaten: $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$), $x^{(2)} \cdots x^{(R)}$ die Punkte der Gruppe G_R verstanden sind, für welche noch weiter die Gleichungen bestehn: $f(x^{(1)}) = 0 \cdots f(x^{(R)}) = 0$. Von jenen Gleichungen (A) sind zur Bestimmung der Verhältnisse der α nur $t-q$ verwendbar, weil aus je $t-q+1$ Jede eine identische Folge der Uebrigen sein soll. Aus dieser letzten Bemerkung folgt aber weiter, dass in dem aus den Coefficienten der α_i der Gleichungen (A) zu bildenden System:

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \cdots & \varphi_{t+1}(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \cdots & \varphi_{t+1}(x^{(2)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x^{(R)}) & \varphi_2(x^{(R)}) & \cdots & \varphi_{t+1}(x^{(R)}) \end{vmatrix} ,$$

sämmtliche $(t-q+1)$-gliedrige Determinanten verschwinden. Wie bekannt (vgl. Kronecker in Baltzer's Determinanten, 3. Aufl. S. 42) ist hierzu nothwendig, dass z. B. alle Determinanten von der Form:

$$(C) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(1)}) & \varphi_i(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(2)}) & \varphi_i(x^{(2)}) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x^{(t-q)}) & \varphi_2(x^{(t-q)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(t-q)}) & \varphi_i(x^{(t-q)}) \\ \varphi_1(x^{(k)}) & \varphi_2(x^{(k)}) & \cdots & \varphi_{t-q}(x^{(k)}) & \varphi_i(x^{(k)}) \end{vmatrix},$$

wo

für i alle Werthe der Reihe $t-q+1,\ t-q+2,\ \cdots\ t+1$,

„ k „ „ „ „ $t-q+1,\ t-q+2,\ \cdots\ R$

zu setzen sind, *zugleich* verschwinden. Aus dem System der so erhaltenen Lösungen sind dann nur noch die überflüssigen, welche nicht zugleich auch *sämmtliche* $(t-q+1)$ gliedrigen Determinanten des Systems (B) befriedigen, auszuscheiden.

Nun liefert aber das Schema (C)

$$(q+1)(R-t+q)$$

von einander unabhängige Gleichungen mit R Unbekannten (die Coordinaten der R Punkte sind je durch die Gleichungen: $f(x^{(i)})=0$ verbunden). Von diesen bleiben also willkührlich:

$$R-(q+1)(R-t+q),$$

eine Zahl, die jedenfalls nicht negativ sein darf:

$$(D) \qquad R \geqq (q+1)(R-t+q).$$

Für den Fall, dass die Curven $\Phi=0$ von der $(n-3)$. Ordnung sind, für welche dann der Riemann-Roch'sche Satz gilt, erhält man noch eine andere Grenze für die Möglichkeit des Problems. Wir wollen dieselben bestimmen unter der weiteren Voraussetzung, dass $t=p-1$ ist, indem wir hiermit zu der früher gestellten Aufgabe, Gruppen $G_R^{(r)}$, für welche $r>R-p+1$ ist, zu finden, zurückkehren. Die Determinanten (C) werden in diesem Fall $(p-q)$-gliedrige, und von den R Punkten, welche in den durch das Verschwinden dieser Determinanten des Systems (B) gelieferten Gleichungen auftreten, sind noch:

$$R-(q+1)(R+q-p+1)$$

willkührlich annehmbar. Diese Zahl kann indess nicht beliebig klein angenommen werden. Denn wenn jene R Punkte noch einer ∞^r-Schaar von Gruppen angehören sollen, so darf die obige Zahl nicht unter r herabsinken, wenn das Problem keinen Widerspruch (nicht Null Lösungen) enthalten soll, oder man hat:

(E) $$R-(q+1)\cdot r \geqq r,$$

und hieraus:

(E') $$R \geqq \frac{r(r+p+1)}{r+1},$$

oder auch:

(E'') $$p \geqq (q+1)(r+1).$$

Die Differenz der rechten und linken Seite dieser Ungleichungen:

(F) $$\tau = R-(q+1)r-r = R(r+1)-r(r+p+1) = p-(q+1)(r+1)$$

kann nunmehr beliebig auf Null herabgedrückt werden. Diese Zahl τ giebt (vgl. § 2., wo τ dieselbe Bedeutung hat) die Anzahl derjenigen noch willkührlich annehmbaren Punkte einer Gruppe G_R an, welche, nachdem die übrigen r willkührlichen fest angenommen sind, aus einem ∞^τ-System von ∞^r-Schaaren, die alle den gegebenen Bedingungen genügen, eine endliche Anzahl solcher ∞^r-Schaaren ausscheidet.

Den Gruppen G_R sind durch den Riemann-Roch'schen Satz Gruppen $G_Q^{(q)}$ residual zugeordnet in der Weise, dass, wenn R und r der obigen Ungleichung (E') entsprechend angenommen sind, sich Q und q aus den Gleichungen bestimmen:

$$Q+R = 2(p-1),$$
$$Q-R = 2(q-r).$$

Jeder *Schaar* $g_R^{(r)}$ von corresidualen Gruppen G_R entspricht somit eine ebensolche $g_Q^{(q)}$ und umgekehrt, und zwar so, dass jede Gruppe der einen Schaar jeder der anderen residual ist. Nun giebt es nach Vorstehendem ∞^τ-Schaaren $g_R^{(r)}$ von Gruppen $G_R^{(r)}$; mithin ebenso viele Schaaren $g_Q^{(q)}$, welche *einzeln* den $g_R^{(r)}$ entsprechen. Die ∞^τ-Schaaren von Gruppen G_R haben die Eigenschaft, dass keine mit der andern eine vollständige Gruppe gemein hat (da irgend eine Gruppe die Schaar, der sie angehört, vollständig und eindeutig bestimmt); Aehnliches gilt von den Schaaren $G_Q^{(q)}$.

Für $\tau = 0$ findet man aus den Gleichungen (A), bez. aus dem Verschwinden der Determinanten (C), zu r gegebenen Punkten eine *endliche* Anzahl α von Gruppen von je $R-r = r(q+1)$ Punkten (von denen jede mit den r zusammen eine Gruppe $G_R^{(r)}$ bildet), wenn man eine Gleichung α^{ten} Grades löst, deren Coefficienten noch die Coordinaten von r willkührlichen Punkten enthalten. Alle möglichen Gruppen $G_R^{(r)}$ theilen sich demnach hierbei in α-Schaaren, welche den α Wurzeln dieser Gleichung zugeordnet sind, und, von einander völlig getrennt, auch nicht durch unendlich kleine Veränderungen (continuirlich) in einander übergeführt werden können. Den α Schaaren von Gruppen $G_R^{(r)}$ sind alsdann ebensoviele Schaaren von Gruppen $G_Q^{(q)}$ auf $f=0$ als Residuen eindeutig zugeordnet, und umgekehrt. Die Aufsuchung dieser Schaaren führt somit auf eine Gleichung desselben

Grades wie die der $G_R^{(r)}$; die Anzahl der Lösungen ist für beide Probleme gleich gross, und die Lösungen der beiden Gleichungen gehen eindeutig aus einander hervor, wenn gleich die Probleme vom algebraischen Standpunkte als völlig verschiedene erscheinen.

Ist dagegen τ von Null verschieden, so findet ein derartiges Entsprechen zweier bestimmter Probleme nicht mehr statt. Denn existirt auch eine endliche Anzahl von Gruppen $G_R^{(r)}$ zu $r+\tau$ gegebenen Punkten, so führen diese durch den Riemann-Roch'schen Satz auf Gruppen $G_Q^{(q)}$, welche zwar q, aber keine $q+\tau$ Punkte gemeinsam haben können. Nimmt man demnach $q+\tau$ Punkte beliebig an, und sucht zu diesen die Gruppen $G_Q^{(q)}$, so sind sie zwar in endlicher, aber von jener Zahl verschiedener Anzahl vorhanden. Wohl aber existiren, wie oben bemerkt, zu gegebenen r Punkten ∞^τ-Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_R^{(r)}$, welchen zu beliebig gegebenen q Punkten ∞^τ-Lösungen für die Bestimmung von Gruppen $G_Q^{(q)}$ eindeutig entsprechen.

§ 10.

Grenzfälle.

Die Gleichung (E) des vorigen §. giebt die Minimalwerthe der Zahl R von Punkten an, für welche eine Special-Gruppe $G_R^{(r)}$ bei gegebenem r auf der Curve $f=0$ bestehen kann. Wir ordnen, der Uebersichtlichkeit halber, diese Zahlen in einer Tabelle an, indem wir die zugehörigen Werthe von q und Q für die Residualgruppen hinzufügen. Die letzte Colonne enthält noch die Zahl τ der Mannigfaltigkeit der Doppelschaar von Gruppen $G_R^{(r)}$, $G_Q^{(q)}$ (vgl. den vorstehenden §.). Sollen ganze Zahlen für R u. s. w. zum Vorschein kommen, so muss man auf die Gestalt der Zahl p Rücksicht nehmen. π sei eine ganze positive Zahl.

für $p=$	r	Minimalwerth von R	Zugehöriger Werth von q	Zugehöriger Werth von Q	τ
2π $2\pi+1$	1	$p-\pi+1$	$\pi-1$	$p+\pi-3$	0 1
3π $3\pi+1$ $3\pi+2$	2	$p-\pi+2$	$\pi-1$	$p+\pi-4$	0 1 2
4π $4\pi+1$ $4\pi+2$ $4\pi+3$	3	$p-\pi+3$	$\pi-1$	$p+\pi-5$	0 1 2 3
		etc.			

So existiren z. B. auf einer Curve 5. Ordnung mit 2 Doppelpunkten ($p = 4$) zwei von einander verschiedene ∞^1-Schaaren von Gruppen G_3, ausgeschnitten von den Geradenbüscheln durch je einen der Doppelpunkte. Sind auch diese beiden *Geraden*schaaren durch die Gerade, welche beide Doppelpunkte verbindet, stetig in einander überführbar, so ist dies doch mit den durch sie ausgeschnittenen *Gruppen* keineswegs der Fall. — Die beiden Schaaren lassen sich übrigens zugleich als durch den Riemann-Roch'schen Satz einander zugeordnete Schaaren aufzufassen. Denn sie gehören einer ∞^2-Schaar von Kegelschnitten an, welche durch die beiden Doppelpunkte und einen *beliebigen* weiteren Punkt der Curve 5. Ordnung gelegt werden kann.

Auf der Curve 6. Ordnung C_6 mit 5 Doppelpunkten $a_1 \cdots a_5$ existiren zu 2 willkührlichen Punkten der Curve 5 Special-Gruppen $G_4^{(1)}$. Denn transformirt man die Curve mittelst der ∞^2 Curven 3. Ordnung, welche durch die a und die 2 Punkte b gelegt werden können, so erhält man wieder eine Curve 6. Ordnung, die 5 Doppelpunkte haben muss, und deren auf der Curve C_6 entsprechende Punktepaare bilden mit $b_1 b_2$ zusammen die Basispunkte für Curven 3. Ordnung, die C_6 in Schaaren $g_4^{(1)}$ schneiden. Man erhält auf C_6 im Ganzen ∞^1 Systeme von Schaaren $g_4^{(1)}$. Eine derselben besteht z. B. aus den Gruppen, welche von dem durch a_1 gehenden Geradenbüschel ausgeschnitten werden; die Residualschaar derselben sind die Gruppen $G_4^{(1)}$, welche von dem durch $a_2 a_3 a_4 a_5$ gehenden Kegelschnittbüschel ausgeschnitten werden.

§ 11.

Ueber die Lösung des Problems der Special-Gruppen.

Wir haben oben (§ 9.) das Problem der Special-Punktgruppen in algebraischer Form aufgestellt, ohne weiter zu untersuchen — abgesehen von der in Formel (E) desselben § aufgestellten Bedingung — ob auch die angegebenen Gleichungen (mit ebensovielen Unbekannten), auf welche das Problem führt, keinen Widerspruch enthalten, oder, auf der anderen Seite, ob dieselben nicht etwa unendlich viele Lösungen zulassen. Auch die letztere Möglichkeit, welche der Zahl τ einen anderen Werth ertheilen würde, als wir oben (§ 9.) festgestellt, muss, wenn die späteren Anwendungen zulässig sein sollen, ausgeschlossen sein.

Man hat nun aber zweierlei Wege, um die Widerspruchslosigkeit und die Endlichkeit der Anzahl von Lösungen eines algebraischen Problems festzustellen: entweder, indem man aus der Discussion der Gleichungen selbst den numerischen Ausdruck für die Anzahl der Lösungen ableitet, oder indem man an dem durch irgend welche besondere Annahme der Constanten specialisirten Problem, bei welchem

man sich von der Existenz von Lösungen direct überzeugen kann, nachweist, dass dasselbe nicht unendlich viele Lösungen besitzt. Denn wenn durch Specialisirung der Constanten eine etwa vorhandene Functionalbedingung zwischen den Gleichungen (vermöge deren im allgemeinen Problem *keine* Lösungen vorhanden sind) identisch erfüllt wird, so wird die Anzahl der Gleichungen vermindert und die der Lösungen somit unendlich.

Durch die Formel (E, § 9.):

$$R - r(q+1) \geqq r$$

haben wir bereits alle diejenigen Probleme als unmöglich ausgeschlossen, bei welchen die *beiden* Ungleichungen:

[A] $$r > R - r(q+1) \geqq 0$$

zugleich erfüllt sind, Probleme, für welche nach dem Riemann-Roch'schen Satz sich im Voraus erkennen liess, dass sie unendlich viele Lösungen besitzen müssen, wenn sie *eine* haben, die also im Allgemeinen *Null* Lösungen besitzen.

Was nun zunächst die Anwendung der *ersten* der oben erwähnten Methoden auf unser Problem angeht, so scheinen die Schwierigkeiten, die sich der allgemeinen Discussion des Gleichungssystems, auf welches das angegebene Problem führt, entgegenstellen, dermalen noch unüberwindlich. Diese Discussion und die Aufstellung der Anzahl der Lösungen ist bisher nur für einige der hierher gehörigen Probleme möglich gewesen*), jedoch in der Weise, dass sich aus den erhaltenen Formeln auf die für eine wichtige Classe der obigen Probleme bestehende allgemeine Formel schliessen lässt.

Diese Formeln beziehen sich auf den Fall der Special-Gruppen $G_R^{(1)}$, für den das Problem als solches auch von Clebsch und Gordan (Abel'sche Functionen § 61.) schon algebraisch formulirt worden war; und zwar handelt es sich um Gruppen G_R, durch die noch $\infty^q = \infty^{p-R}$ adjungirte Curven gehn. Jene Formeln umfassen somit den von Riemann (Abel'sche Functionen § 5.) betrachteten Fall ($r=1$ der Tabelle), in welchem R zugleich möglichst klein, nämlich $=\frac{1}{2}(p+2)$, bez. $=\frac{1}{2}(p+3)$ wird, während q bez. $=\frac{1}{2}(p-2)$ und $=\frac{1}{2}(p-3)$ wird.

Bezeichnet man die Anzahl der Lösungen, welche die R-gliedrigen Determinanten eines Systems von der Form (B, § 9.), das aus R Horizontalreihen und $(R+i)$ Verticalreihen ($i \geqq 0$) besteht, sämmtlich

*) S. Brill, Math. Annalen, Bd. VI. S. 61 ff. (Einen in der Formel für $(7)_4$ (S. 63) befindlichen Fehler verbessere man nach dem Druckfehler-Verzeichniss des VI. Bandes.)

zum Verschwinden bringen (wobei die Punkte $x^{(i)}$ immer auf $f=0$ zu liegen haben), mit $(R+i)_R$, ist ferner M die Anzahl der nicht *allen* Curven $\varphi=0$ gemeinsamen Schnittpunkte *einer* derselben mit f (für den erwähnten Fall eines Minimalwerthes von R ist im System (B) $t=p-1$, oder $i=p-R=q$ zu setzen, sowie $M=2p-2$), ist endlich:

$$k=M-R+1, \quad \text{(für jenen Fall } =2p-1-R=Q+1)$$

und:

$$\binom{l}{m}=\frac{l(l-1)\cdots(l-m+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m},$$

so hat man für die Anzahl der gemeinsamen Lösungen:

$$[\mathrm{B}] \quad (R+i)_R=\binom{k}{i+1}-\binom{p}{1}\binom{k-2}{i-1}+\binom{p}{2}\binom{k-4}{i-3}-\cdots\cdots$$

$$\cdots+\begin{cases}(-1)^{\frac{i}{2}}\cdot\binom{p}{\frac{1}{2}i}\cdot\binom{k-i}{1}\cdots\cdot(i\,\text{gerade})\\ (-1)^{\frac{i+1}{2}}\cdot\binom{p}{\frac{1}{2}(i+1)}\cdot\cdots\cdot(i\,\text{ungerade}).\end{cases}$$

Die directe Ableitung dieser Formel sei für eine andere Gelegenheit vorbehalten, indem es hier genügen möge, darauf hinzuweisen, dass a. a. O. bereits ein strenger Beweis derselben für die Fälle $i=0, 1, 2, 3$ gegeben worden ist. Wir wollen jedoch hervorheben, dass sich eine leicht ausführbare Verification dieser Formel [B] aus der Bemerkung ergiebt, dass für den (in der Tabelle des § 10. nicht mehr enthaltenen) Fall: p ungerade und:

$$r=1, \quad R=\frac{p+1}{2}, \quad i=q=\frac{p-1}{2}, \quad k=\frac{2p-3}{2},$$

die Zahl der Lösungen $(R+i)_R$ *Null* sein muss, weil für diesen Fall, welches auch der Werth von p sein mag, die *beiden* obigen Ungleichungen [A]

$$r>R-r(q+1)\geqq 0$$

erfüllt sind. In der That erhält man Null, wie man leicht erkennt, wenn man die Formel, welche für diesen Fall aus [B] hervorgeht, durchaus in i anschreibt, und dann, vom ersten Glied anfangend, addirt. Die Summe der $\lambda+1$ ersten Glieder der rechten Seite lässt sich nämlich alsdann durch die Formel darstellen:

$$[\mathrm{B}'] \qquad \binom{2i}{\lambda}\binom{3i-2\lambda}{i-2\lambda+1}\frac{(i-2\lambda+1)(i-2\lambda)}{i(i+1)},$$

wie man durch einen Schluss von λ auf $\lambda+1$ beweist. Dieser Ausdruck wird aber $=0$ für $\lambda=\frac{i+1}{2}$ und $\lambda=\frac{i}{2}$ (für welche Werthe der zweite Klammerausdruck in [B'] bez. den Werth 1 und $2i$ erhält), d. h. wenn man die Summe (für ungerade, bez. gerade i) bis zum letzten Glied erstreckt. Q. e. d.

Mit der Formel [B.] ist nun die Frage sowohl nach der Möglichkeit, wie nach der Bestimmtheit des Problems für $r = 1$ und $p > 1$ erledigt, indem dann der Ausdruck $(R + i)_R$ eine positive, ganze Zahl ergiebt, sofern nur die Constanten, die in den Gleichungen auftreten, allgemeine Werthe besitzen.

In gleicher Weise ist durch Vermittlung des Riemann-Roch'schen Satzes die Existenz der residualen Punktgruppen $G_Q^{(Q-p+2)}$, insbesondere auch der Maximalgruppen, durch welche noch eine einfach unendliche Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung möglich ist, und für die $Q = \frac{1}{2}(3p-6)$, bez. $\frac{1}{2}(3p-7)$ und $q = \frac{1}{2}(p-2)$, bez. $= \frac{1}{2}(p-3)$ ist, erwiesen, was durch directe Inangriffnahme des betr. algebraischen Problems ungleich schwieriger gewesen wäre.

Der zweite im Früheren erwähnte Weg, um die Möglichkeit der auftretenden algebraischen Probleme zu erkennen, nämlich der der Untersuchung der Curve unter Voraussetzung einer Lösung des Problems, führt in vielen einzelnen Fällen zum Ziel, ohne dass sich deshalb eine zusammenfassende Methode angeben liesse. Wir erwähnen hier nur der Bestimmung der Gruppen $G_6^{(2)}$ für $p = 6$, die, an der Curve 6. Ordnung mit 4 Doppelpunkten ausgeführt, auf die Zahl 5 der Lösungen sogleich führt.

§ 12.

Ueber eine indirecte Bestimmungsweise der Minimal-Gruppen $G_R^{(1)}$.

Wenn eine Special-Gruppe $G_R^{(1)}$ aus der kleinsten Anzahl $R = \frac{1}{2}(p+2)$, bez. $\frac{1}{2}(p+3)$, von Punkten besteht, welche nach der Tabelle des § 10. noch für $r = 1$ zulässig ist, so kann man das Problem, die Anzahl α der zu 1 gegebenen Punkte möglichen Gruppen G_R zu finden, auf ein anderes zurückführen, welches zuweilen leichter zu lösen ist als das erstere, und umgekehrt.

Sei zunächst p gerade, also $R = \frac{1}{2}(p+2)$. Wir nehmen an, es seien 2 verschiedene der α zu einem gegebenen Punkt construirbaren Gruppen G_R gegeben, so gehört die Gruppe G_{2R}, welche sich aus beiden zusammensetzt, einer ∞^3-Schaar an, welche durch adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden kann. Denn seien $\varphi - \varkappa\,\varphi' = 0$, $\psi - \lambda\,\psi' = 0$ die beiden Büschel von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, welche bez. die Schaaren, welchen jene beiden Gruppen G_R angehören, ausschneiden, so wird die Gruppe G_{2R} ausgeschnitten von einer Curve der ∞^3-Schaar:

$$\mu \cdot \varphi\psi + \nu \cdot \varphi'\psi' + \varrho \cdot \varphi\psi' + \sigma \cdot \varphi'\psi = 0,$$

ist also eine Gruppe $G_{2R}^{(3)}$. Eine solche kann aber nach dem Satze des § 4. durch eine Curve $(n-3)$. Ordnung ausgeschnitten werden, welche in noch $p-4$ weiteren Punkten schneidet, die ihrerseits wiederum einer ∞^0-Schaar angehören, wie sich sofort aus dem Riemann-

Roch'schen Satz ergiebt. Zu jedem Paar von Gruppen G_R, die einem Paar von Wurzeln jener Gleichung α. Grades entsprechen, gehört sonach eine einzige Gruppe Γ_{p-4}. Andererseits ordnen sich jeder einzelnen der α Gruppen G_R die $\alpha - 1$ übrigen durch Vermittlung von $\alpha - 1$ Gruppen Γ_{p-4} zu. Geht man also von einer *einzelnen* Gruppe G_R aus, und fragt nach *denjenigen Gruppen* G_{p-4}, *welche mit* G_R *zusammen die Basispunkte einer* ∞^1*-Schaar von adjungirten Curven* $(n-3)$. *Ordnung bilden*, so muss man zu jenen $\alpha - 1$ Gruppen Γ_{p-4} gelangen. Dass aber diese Aufgabe andererseits auch in der algebraischen Form, in welche dieselbe nach § 9. gebracht werden kann, eine völlig bestimmte und endliche ist, geht daraus hervor, dass die für diesen Fall in Betracht kommende Ungleichung (D) des § 9. (in welcher $R = p-4$, $q = 1$, $t = \frac{1}{2}(p-2)$ zu setzen ist) erfüllt ist. Das Problem, die Gruppen Γ_{p-4} zu einer gegebenen Gruppe G_R zu finden, *enthält somit eine Lösung weniger*, als das Problem, die Gruppen G_R selbst zu finden. Diese Bemerkung kann in vielen Fällen für die indirecte Bestimmung der Anzahl der Lösungen des einen oder des anderen Problems von Nutzen sein; und es ist interessant, dass auch die Gleichung $(\alpha - 1)$. Grades, welche nach Ausscheidung eines Factors übrig bleibt, noch diese geometrische Deutung zulässt.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich für ungerade p anstellen. Dort existirt zu jeder Gruppe G_R noch eine endliche Anzahl von Gruppen Γ_{p-5} von $p-5$ Punkten, die mit G_R zusammen die Basispunkte einer ∞^1-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung bilden, welche noch in weiteren Gruppen G_R schneiden. Durch eine einzelne Gruppe Γ_{p-5} geht eine ∞^1-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die f in Punktgruppen schneiden, unter welchen die von $(\varphi - \varkappa\varphi')(\psi - \lambda\psi') = 0$ ausgeschnittenen enthalten sind. Es giebt aber ∞^2 solcher Gruppen Γ_{p-5}, die einander nicht corresidual sind.

§ 13.

Normalcurven.

Die im § 11. (am Ende) erwähnten Maximal-Punktgruppen $G_Q^{(Q-p+2)}$ sind es, welche Riemann zur Transformation der Curve f auf eine Normalform benutzt hat: eine Curve $(p+2)$. Ordnung (bez. $(p+3)$. Ordnung) mit zwei $\frac{1}{2}(p+2)$- (bez. $\frac{1}{2}(p+3)$-)fachen Punkten und noch $\frac{1}{4}p(p-4)$ (bez. $\frac{1}{4}(p-1)^2$) Doppelpunkten. Die Punkte einer solchen Gruppe sind nämlich die Basispunkte eines Büschels von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, welches in der Minimalzahl $R = \frac{1}{2}(p+2)$ (bez. $\frac{1}{2}(p+3)$) von beweglichen Punkten die Curve f schneidet. Seien $\varphi - \varkappa\varphi' = 0$, $\psi - \lambda\psi' = 0$ zwei solche Büschel, deren Basispunkte jedoch nicht corresidual sein dürfen. Diese Gleichungen, mit $f = 0$ verbunden, ergeben in den neuen Coordinaten

x, λ die Riemann'sche Normalcurve, deren vielfache Punkte in $x = \infty$ und $\lambda = \infty$ liegen. Man kann indess, indem man $x = \frac{x_1}{x_3}$, $\lambda = \frac{x_2}{x_3}$ setzt, die beiden Büschel auch mittelst:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi\psi' : \varphi'\psi : \varphi'\psi' : \varphi\psi ,$$

wo noch:

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

ist, zur Transformation von f in eine auf dem Hyperboloid $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$ gelegene Raumcurve $(p + 2)$. (bez. $(p + 3)$.) Ordnung benutzen (die ebenfalls noch wirkliche Doppelpunkte erhält). Diese Transformationen sind eindeutig, d. h. die beiden Büschel $\varphi - x\varphi' = 0$, $\psi - \lambda\psi' = 0$ haben immer nur je *einen* beweglichen Punkt gemein; denn die Basispunkte sollen nicht corresidual sein, und man kann immer Curven schon direct angeben, bei welchen dann jene Eigenschaft wirklich eintritt, wie bei der oben genannten Normalcurve selbst, bei denen die beiden Geradenbüschel in den vielfachen Punkten dieselbe besitzen. (Ausgenommen sind die Fälle $p = 1$ und $p = 2$.)

Projicirt man diese Raumcurve von einem ihrer Doppelpunkte aus auf eine Ebene, so ergiebt sich eine Normalcurve p. (bez. $(p + 1)$.) Ordnung mit zwei $\frac{1}{2}(p - 2)$- (bez. $\frac{1}{2}(p - 1)$-)fachen Punkten und $\frac{1}{4}p(p - 4) - 1$ (bez. $\frac{1}{4}(p - 1)^2 - 1$) Doppelpunkten. (Ausgenommen von dieser Transformation ist noch der Fall $p = 4$.)

Diese Umformung ist identisch mit einer quadratischen Transformation der Riemann'schen Normalform, deren drei Fundamentalpunkte in die beiden vielfachen Punkte und einen Doppelpunkt derselben gelegt werden. Es ist noch zu bemerken (worauf wir später zurückkommen werden), dass für die Transformation von Curven mit ungeradem p in jedem der beiden Büschel noch $\tau = 1$ willkührliche Punkte zur Bestimmung der betreffenden Schaar vorhanden sind, denen entsprechend noch zwei willkührlich zu bestimmende Parameter zur Verfügung stehen.

Wie der Fall $r = 1$ der obigen Tabelle zur Transformation von f auf eine Curve führt, bei der Geradenbüschel existiren, welche in Gruppen von möglichst wenigen beweglichen Punkten schneiden, so dient der Fall $r = 2$ zur Transformation von f auf eine Curve, bei der die ∞^2-Schaar der Geraden der Ebene in möglichst wenigen Punkten schneidet, also zur Transformation auf die *Normalcurve niedrigster Ordnung*. Man hat zu diesem Zwecke nur die durch eine der dort angegebenen G_Q gehenden adjungirten Curven $(n - 3)$. Ordnung den Geraden der Ebene entsprechen zu lassen. Die Normalcurve wird also eine Curve der Ordnung $p - \pi + 2$, mit $\frac{1}{2}(p - \pi + 1)(p - \pi) - p$ Doppelpunkten, wo $p = 3\pi$, bez. $= 3\pi + 1$ und $= 3\pi + 2$ gesetzt ist. Diesen 3 Fällen entsprechend hat man zur Wahl der Schaar der Transformationscurven keinen, einen oder zwei Parameter zur Verfügung.

Die allgemeine Formel zur Bestimmung der Anzahl der Schaaren (wenn $\tau + r$ Bestimmungsstücke gegeben sind), von denen eine hier zur Transformation angewendet wird, ist noch nicht aufgestellt. Die niedrigsten Fälle, insbesondere für $p = 6, 7, 8$, sind indess schon mittelst der obigen Formel ([B] in § 11.) erledigt. Zu beachten ist jedoch, dass die Gleichungen, auf welche das Problem führt, von derselben Art sind, wie die im Vorigen betrachteten, dass also die Schwierigkeit der Abzählung nur eine formelle ist, und dass eine Formel von der Art der [B] offenbar auch hier existiren muss. Da die bisher bekannten Formeln für wachsende p rasch steigende Zahlenwerthe ergeben, für $p = 6, 7, 8$ aber hier schon ganze, steigende Zahlen erhalten werden, so dürfen wir annehmen, dass die hier gültige Formel diese Eigenschaft ebenfalls besitzen muss.

Man kann zufügen, dass man auch hier durch besondere Betrachtungen an speciellen Curven einzelne dieser Zahlen leicht erhalten kann, die nach dem früher Gesagten alsdann auch für die allgemeinen Fälle ihre Geltung behalten.

Für den vorliegenden Fall gilt dasselbe, was wir im Früheren über die Verwendbarkeit der betreffenden Schaaren zu *eindeutigen* Transformationen bemerkt haben; es lassen sich schon immer zu speciellen Curven wirklich existirende Schaaren angeben, welche die zur Transformation erforderlichen Eigenschaften besitzen, wie z. B. die Geraden bei der Normalcurve.

In ähnlicher Weise kann man die weiteren Curvenschaaren: $r = 3, 4, \cdots$, welche die Tabelle liefert, zur Transformation von f in Normalcurven benutzen, welche in einem Raum von bez. $3, 4, \cdots$ Dimensionen gelegen sind. So ist also in einem Raum von 3 Dimensionen *die Raumcurve niedrigster Ordnung* bei gegebenem p, welche einer ebenen Curve mit allgemeinen Moduln (s. den folgenden §) entspricht, von der Ordnung $p - \pi + 3$, wo $p = 4\pi$, bez. $= 4\pi + 1$, $4\pi + 2$, $4\pi + 3$ gesetzt ist. Für $p = 4\pi$ kann dabei, abgesehen von den linearen Transformationen im Raum, die Transformation nur auf eine endliche Anzahl von Arten stattfinden.

§ 14.

Die Moduln einer Classe von algebraischen Curven. Riemann's Bestimmungsweise.

Riemann hat die algebraischen Curven vom Geschlechte p in *Classen* geordnet. In dieselbe Classe gehören alle diejenigen Curven, welche sich eindeutig in einander transformiren, also auch aus irgend einer Curve der Classe durch eindeutige Transformation ableiten lassen. Eine Classe eindeutig einander entsprechender Curven hängt von einer bestimmten Anzahl von stetig veränderlichen Parametern ab,

die als *Moduln* dieser Classe bezeichnet werden (Riemann, Abel'sche Functionen, Nr. 12 in Bd. 54 des Journ. Crelle-Borchardt). Wenn ein genau definirter algebraischer Process*) auf irgend eine der eindeutig in einander transformirbaren Curven der Classe angewendet, auf dieselben Werthe einer endlichen Anzahl von Parametern führt, und *umgekehrt* durch diese Werthe auch eine solche Classe von Curven eindeutig oder doch endlich vieldeutig bestimmt ist, so sind diese Parameter als die Moduln dieser Classe zu betrachten. Dieselben haben somit Invarianten-Eigenschaft bei eindeutiger Transformation. Je nach der Art der im Voraus zu definirenden algebraischen Operation erhält man verschiedene Systeme von Grössen als Moduln.

Offenbar muss nach dem, was (in § 6.) über den Invarianten-Charakter der adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung gesagt worden ist, dieser Process sich auf das *Verhalten der Curve f zu diesen Curven* beziehen. Wir werden mehrere solcher Operationen (bei welchen es gleichgültig ist, von welcher Curve der Classe man ausgeht) nach einander anführen und zeigen, *dass dieselben sämmtlich auf die Zahl $3p-3$ von Moduln führen.*

Des Zusammenhangs wegen erwähnen wir zunächst die bisher in dieser Frage angestellten Betrachtungen, und beginnen mit dem Verfahren Riemann's. Dasselbe bezieht sich auf das Verhalten von f zu einer ∞^1-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die man durch $p-2$ feste Punkte $x_1, x_2, \cdots x_{p-2}$ von f gelegt hat. Die ∞^1-Schaar der Gruppen von p weiteren Schnittpunkten hängt von $p-2$ Parametern ab, denn durch Veränderung der Lage auch nur eines der $p-2$ Punkte x geht die ∞^1-Schaar in eine andere ihr nicht corresiduale, das Büschel also in ein nicht äquivalentes über. In dem Büschel giebt es $4p-2$ Curven, welche f berühren. Denn die Berührungspunkte werden durch den Schnitt von f mit der Jacobi'schen Curve (Functionaldeterminante) von f, φ, φ' (wenn $\varphi - \lambda\varphi' = 0$ das Büschel ist) bestimmt, einer Curve von der Ordnung $3n-9$, die f in jedem der i-fachen Punkte $3i(i-1)$-punktig, in jedem der Punkte x 2-punktig trifft. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{4p-5}$ irgend $4p-5$ von einander unabhängige Doppelverhältnisse der $4p-2$ Parameter λ dieser Curven; dieselben werden zwar von linearen Transformationen unabhängig, aber im Allgemeinen noch Functionen der $p-2$ Punkte x sein. Unter der Voraussetzung nun, dass es $p-2$ unter ihnen giebt, welche als von einander unabhängige Functionen der Coordinaten dieser $p-2$ Punkte auftreten, kann man, mittelst Elimination dieser Coordinaten, $(4p-5)-(p-2) = 3p-3$ Functio-

*) An sich sind hierbei auch transcendente Operationen (von denen Riemann ebenfalls Gebrauch macht) zulässig. Wir sehen jedoch in unseren algebraischen Betrachtungen von denselben ab.

nen der Doppelverhältnisse angeben, welche unabhängig sind von dem speciellen Büschel, das hier benutzt wird. Nimmt man den Riemann'schen, freilich transcendenten (aber auch leicht direct algebraisch durchführbaren (siehe unten)) Nachweis hinzu, dass sich zu beliebigen Werthen der λ_i eine *endliche**) Zahl von Classen in einander transformirbarer Curven finden lässt, so kann man also die $3p-3$ Functionen der λ_i als Moduln ansehn.

Wäre die erwähnte Voraussetzung nicht erfüllt, wären also die Coordinaten der $p-2$ Punkte nur in weniger als $p-2$ Combinationen in den Gleichungen enthalten, so würde die Zahl der Moduln $3p-3$ übersteigen. Wie sich diese Zahl in der That in speciellen Fällen modificiren kann, zeigt z. B. der Fall der hyperelliptischen Curven. Irgend ein Büschel von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung durch $p-2$ Punkte von f geht hierbei noch durch $p-2$ weitere feste Punkte von f, und in demselben giebt es nur $2p+2$ Berührungscurven. Da diese sämmtlichen Büschel hier weiter äquivalent sind, so sind die $2p-1$ Doppelverhältnisse der Parameter dieser Berührungscurven unabhängig von der Wahl der festen Punkte, und sie sind die $2p-1$ Moduln der hyperelliptischen Curve.

§ 15.

Modification der Riemann'schen Bestimmungsweise der Moduln.

Riemann hat den algebraischen Beweis der Zahl $3p-3$ fallen gelassen wegen der Schwierigkeit, die oben erwähnte Voraussetzung im allgemeinen Fall direct zu untersuchen. Wir wollen zeigen, dass diese Untersuchung in der That und zwar auf mehrfache Weise geleistet werden kann.

Wir schreiben der adjungirten Curve $(n-3)$. Ordnung vor, die gegebene Curve f in einem Punkte p-punktig zu treffen**). Diese Aufgabe hat, für $p>1$, immer eine endliche Anzahl von Lösungen. Denn sie kann nie, auch wenn man eine Lösung voraussetzt, *unendlich* viele Lösungen zulassen, da es alsdann ∞^ν adjungirte Curven $(n-3)$. Ordnung geben müsste. Uebrigens kann die Zahl der Lösungen selbst*) durch die Formel angegeben werden:

*) Ist nämlich nur die Lage der Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche gegeben, so können zwar für *jede* der zugehörigen algebraischen Functionen diese Punkte als *dieselben* Blätter verbindend angesehen werden (s. Lüroth, Math. Ann. Bd. IV, S. 181 und Clebsch ibid. Bd. VI, S. 216), aber die Art des Zusammenhangs der einzelnen Blätter (die Lage der „Verzweigungsschnitte") kann immer noch eine wesentlich verschiedene sein. Vgl. Thomae, Borchardt's Journal Bd. 75, S. 224.

**) Dieser Weg ist vor längerer Zeit schon von Herrn Weierstrass eingeschlagen worden.

***) Vgl. Jonquières, in Borchardt's Journal Bd. 66, wo indess der vorlie-

$$(p-1)\,p\,(p+1).$$

Sei nun C_{n-3} eine der hier gefundenen Curven. Dieselbe trifft f noch in $p-2$ Punkten, welche wir als Basispunkte x der oben bezeichneten ∞^1-Schaar annehmen. Unter den $4p-2$ Berührungscurven dieser Schaar fallen jetzt $p-1$ in die C_{n-3} zusammen. Wir haben daher die $p-2$ Basispunkte des Büschels nun so bestimmt, dass von den $4p-5$ Doppelverhältnissen der Parameter λ, $p-1$ gleiche Werthe annehmen. Die $3p-3$ Parameter, die hier noch die Classe bestimmen, sind die Moduln.

Dass umgekehrt durch die Werthe dieser $3p-3$ Parameter eine Classe endlich bestimmt ist, kann man gleichfalls algebraisch und zwar durch die folgenden, einer Schlussweise des Herrn Cayley (in den Proceedings of the London Math. Soc. Vol. I. Oct. 1865) nachgebildeten Betrachtungen zeigen. Die Curve, für welche man jene $3p-3$ Parameter als bekannt annehmen will, möge in folgender Weise aus f hergeleitet werden: Man transformire f durch eine ∞^2-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die man durch $p-3$ der zuletzt bestimmten $p-2$ Punkte gehn lässt. Die transformirte Curve F wird von der $(p+1)$. Ordnung sein, mit $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten und der Eigenthümlichkeit, dass sie einen Punkt P besitzt, in welchem eine Gerade p-punktig berührt, eine Eigenschaft, die $p-3$ Beziehungen zwischen den absoluten Invarianten der Curve darstellt. Die in P berührende Gerade trifft die Curve F noch in einem Punkte P', welcher der Scheitel des Geradenbüschels ist, der dem im Vorhergehenden gefundenen Büschel von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung für f entspricht. Nun hat diese Curve F, welche den Bedingungen genügt, von der $(p+1)$. Ordnung zu sein, $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkte zu besitzen, durch den Punkt P' hindurchzugehn und die gegebenen $3p$ Geraden des durch P' gehenden Büschels, und zwar eine derselben in der $(p-1)$. Ordnung, zu berühren, noch:

$$\tfrac{1}{2}(p+1)(p+4)-\tfrac{1}{2}p(p-3)-(4p-2)-1=3$$

Constanten. Sei aber $F'=0$ die Gleichung einer beliebigen Curve, welche diesen Bedingungen genügt, in den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 geschrieben, und seien $x_1=0$, $x_2=0$ die Coordinaten des Punktes P'. Jede Curve $F=0$, die aus $F'=0$ durch die lineare Transformation, bei der $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3$ an Stelle von x_3 in $F'=0$ eingesetzt wird, hervorgeht, erfüllt ebenfalls noch die Bedingungen und enthält 3 willkührliche Constanten, woraus folgt, dass alle Curven, welche den Bedingungen genügen, aus einer endlichen Zahl von

---

gende Fall adjungirter Berührungscurven nicht unmittelbar berücksichtigt ist, sowie Brill, Ueber zwei Berührungsprobleme, Math. Annalen IV, S. 530.

Curven F' durch lineare Transformation müssen abgeleitet werden können. Wenn eine solche Curve F' noch irgend 3 durch lineare Transformation zerstörbare Bedingungen erfüllt (z. B. durch irgend 3 Punkte hindurchgeht, deren Coordinaten Zahlenwerthe sind), so besitzt sie nur $3p-3$ Constanten, welche dann bestimmte (irrationale) Functionen der $3p-3$ Parameter λ_i sind, was zu beweisen war. Statt dieser könnte man auch irgend $3p-3$ von einander unabhängige absolute Invarianten der Curve F (welche von den 3 in der Gleichung noch vorhandenen durch lineare Transformation zerstörbaren Constanten unabhängig sein müssen) oder endlich die $3p-3$ Constanten der Curve F' als Moduln definiren; die letztere Bestimmungsweise zeichnet sich vor den beiden anderen noch insofern aus, als sie, wenn die Coefficienten der Gleichung der Curve, also diese vollständig gegeben ist, die Classe *eindeutig* bestimmt.

Wir mögen hier anschliessend kurz den Einwand erledigen, den Herr Cayley in der oben citirten Note gegen die Zahl $3p-3$ erhoben hat. Sei eine der eben angeführten analoge Transformation von f auf eine Curve F mittelst einer ∞^2-Schaar von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, die aber durch $p-3$ beliebige Punkte $x_1, x_2, \cdots x_{p-3}$ von f gehen, ausgeführt. Dann ergiebt sich durch den oben benutzten Schluss, dass $4p-6$ Functionen der $4p-5$ Parameter λ_i der Berührungscurven, welche durch noch einen festen Punkt x_{p-2} gehen, existiren, die unabhängig sind von der Wahl des Basispunktes x_{p-2}; denn die $4p-6$ absoluten Invarianten von F sind unabhängig von der Wahl des dem Punkt x_{p-2} entsprechenden Scheitels des Tangentenbüschels. Da nun die Punkte $x_1, x_2, \cdots x_{p-3}, x_{p-2}$ für den Curvenbüschel auf f, welcher dem Tangentenbüschel entspricht, symmetrisch eingehen, so schliesst Cayley, dass jene $4p-6$ Functionen unabhängig seien von der Lage der $p-2$ Punkte. Dies wäre gerechtfertigt, wenn auch die $4p-6$ Functionen selbst symmetrisch abhängen von den $p-2$ Punkten, wie die $4p-5$ Doppelverhältnisse, aus denen sie eben *durch Elimination eines der Punkte* sich ergaben. Dass diess in der That nicht der Fall ist, ergiebt sich gerade aus dieser Elimination. Hiernach aber erscheint es auch nicht erforderlich, zur Hebung des gedachten Widerspruchs auf den Begriff der imperfecten Invarianten (Cayley, Math. Annalen Bd. 3, S. 270) einzugehen.

§ 16.

Andere Bestimmungsweise der Moduln.

Ein Mittel anderer Art, um die von Riemann angedeutete Schwierigkeit zu erledigen, bildet die im Früheren (§ 11.) durchgeführte Untersuchung der auf einer allgemeinen Curve f liegenden Minimalgruppen $G_R^{(1)}$. Sie führt für gerade p direct auf die Zahl $3p-3$,

für ungerade p bleibt noch *ein* weiterer Parameter zurück, dessen Beseitigung durch anderweitige Betrachtungen erfolgt.

Wir bedienen uns eines Büschels von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung, dessen Basispunkte eine der Gruppen G_Q der Tabelle § 10., für $r=1$, bildet. In diesem Büschel giebt es noch $3p$, bez. $3p+1$ (für p gerade, bez. ungerade), Berührungscurven. Die $3p-3$ Doppelverhältnisse der Parameter λ_i dieser Curven sind, *wenn p gerade ist*, als *Moduln* aufzufassen. In der That gelangt man nur zu einer endlichen Anzahl von Werthen dieser $3p-3$ Grössen, wie auch die Basispunkte G_Q gewählt sein mögen; denn es giebt nur eine endliche Anzahl von Schaaren corresidualer Gruppen G_Q; die Curven äquivalenter Büschel entsprechen einander aber projectivisch, jene $3p-3$ Doppelverhältnisse sind daher für corresiduale Gruppen G_Q dieselben und nur für die Gruppen aus verschiedenen Schaaren verschieden. Weiterhin ist aber auch umgekehrt durch $3p-3$ gegebene Werthe der Doppelverhältnisse die Classe endlich vieldeutig bestimmt. Der algebraische Nachweis dieser Behauptung ist für $p \gtreqless 6$ identisch mit dem Nachweis, dass die (früher aus der Riemann'schen Normalform abgeleitete) Curve p. Ordn. mit zwei $\frac{1}{2}(p-2)$-fachen und $\frac{1}{4}p(p-4)-1$ Doppelpunkten, welche eben durch Benutzung zweier der Minimalschaaren $g_R^{(1)}$ entstanden ist (abgesehen von 8 durch die linearen Transformationen einzuführenden Constanten), noch $3p-3$ Constanten besitzt, welch' letzteres durch directe Abzählung bestätigt wird. Eine Curve der erwähnten Art genügt somit auf eine endliche Anzahl von Arten der Bedingung, dass $3p-3$ Doppelverhältnisse der Tangenten, die sich von einem ihrer vielfachen Punkte aus legen lassen, vorgeschriebene Werthe haben.

Ebenso hätte man auch die $3p-3$ absoluten Invarianten der Riemann'schen Normalform als die Moduln der aus ihr ableitbaren Classe bezeichnen können.

Für den Fall der *ungeraden* p hängen die $3p-2$ Doppelverhältnisse der Parameter λ_i der Berührungscurven des niedrigsten Büschels, welcher oben erwähnt wurde, von dem einen willkührlichen Parameter ab, der die Schaar der Basispunkte G_Q bestimmt ($\tau=1$ in der Tabelle).

Diesen Parameter kann man nun (ähnlich wie oben § 15.) dazu verwenden, um in den Berührungscurven zwei zusammenfallen zu lassen. Dies kann auf zwei verschiedene Arten geschehen, entweder so, dass in dem Büschel eine Curve vorkommt, die in 2 verschiedenen Punkten berührt, oder so, dass eine solche die gegebene Curve in 3 auf einander folgenden Punkten trifft, also osculirt. Diese Aufgaben sind also eine Verallgemeinerung der Aufgabe, die Doppeltangenten, bez. die Wendetangenten einer gegebenen Curve zu finden; auf welch letztere Aufgabe sie auch für $p=3$ direct zurückkommen. Algebraisch

führt das Problem wieder auf ein simultanes System von Gleichungen von der Form des Systems (B. § 9.), wobei indess entweder zweimal zwei Punkte oder drei Punkte als unendlich benachbart anzunehmen sind. Für den Fall $p = 5$ führen diese Aufgaben auf die Bestimmung der Werthe M_{22}, bez. M_{13} des Aufsatzes „über zwei Berührungsprobleme“ (im IV. Bd. der Math. Ann. S. 548, Formel 6., und S. 547 unten) zurück, und ergeben beide 120 für die Zahl der Lösungen. — Wenn man für $p \geqq 5$ zwei solcher speciellen Büschel zur Transformation von f auf die § 13. erwähnte Normalform, eine Curve $F(p+1)$. Ordnung mit zwei $\frac{p-1}{2}$-fachen und $\frac{1}{4}(p-1)^2 - 1$ Doppelpunkten, anwendet, so erhält diese Curve die Eigenschaft, dass in dem Strahlenbüschel von jedem der beiden vielfachen Punkte aus sich je eine Gerade befindet, welche F doppelt, bez. in einem Wendepunkte berührt. Die Curve hat dann ebenfalls nur $3p - 3$ Parameter, welche hier als die Moduln der aus F abgeleiteten Classe zu betrachten sind.

Man kann noch andere dem Riemann'schen analoge Wege zur Bestimmung der Moduln einschlagen, jedoch unter Anwendung von ∞^2-Schaaren adjungirter Curven. So ist oben bereits gezeigt worden, wie man die $p - 3$ Basispunkte einer solchen Schaar auf f derart wählen kann, dass die transformirte Curve $(p+1)$. Ordnung einen Punkt besitzt, in welchem eine Gerade p-punktig trifft.

Cremona hat (in einer gemeinschaftlich mit Casorati verfassten Note: osservazioni etc. Rend. Ist. Lombard. 1869) die $p - 3$ Basispunkte so zu bestimmen versucht, dass in der transformirten Curve $(p+1)$. Ordnung von den $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten $p - 3$ solche zu Rückkehrpunkten werden. Indess sind die Gleichungen, auf welche dieses Problem führt, zu verwickelt, um die Möglichkeit und Bestimmtheit des Problems im allgemeineren Fall untersuchen zu können*).

Die oben (§ 13.) aufgestellten *Normalcurven niedrigster Ordnung* von der $(p - \pi + 2)$. Ordnung, wo p bez. $= 3\pi$, $3\pi + 1$ oder $3\pi + 2$ ist, eignen sich gleichfalls zur Definition der Moduln. Diese Curven enthalten nämlich noch:

$$\tfrac{1}{2}(p-\pi+2)(p-\pi+5) - \{\tfrac{1}{2}(p-\pi)(p-\pi+1) - p\} - 8 = \\ = 3p-3 \text{ (bez. } 3p-2,\ 3p-1)$$

Parameter. Für $p = 3\pi$ sind diese Grössen direct als Moduln anzusehn. Für $p = 3\pi + 1$ (bez. $3\pi + 2$) hat man dagegen für die Wahl der ∞^2-Schaar des Transformationscurven noch einen (bez. zwei) Parameter zur Verfügung. Diese Parameter wird man wieder so bestimmen, dass in der ∞^2-Schaar eine Curve enthalten ist, welche f in 4

*) Selbst der Fall $p = 5$ kann noch nicht als auf diesem Wege erledigt angesehen werden, da, wie es scheint, in den bez. Betrachtungen der erwähnten Note ein Versehen mit untergelaufen ist.

(bez. 5) benachbarten Punkten trifft. Die Normalcurve enthält dann noch einen Punkt, in welchem eine Gerade 4- (bez. 5-) punktig berührt, eine Bedingung, die noch einen (bez. zwei) Parameter absorbirt. Für $p = 5$ kommt diese Bestimmung genau auf die oben gegebene zurück. Der allgemeine Fall lässt sich aber auch auf diesem Wege nicht völlig durchführen.

§ 17.

Die zu einer Classe gehörigen Raumcurven.

Wir benutzen die hier bewiesenen Constantenzählungen noch dazu, um die Gesammtheit der Raumcurven von gegebener Ordnung R mit gegebenem Geschlecht p, welche derselben ebenen Curve $f(x) = 0$ eindeutig entsprechen, welche also einer gegebenen *Classe* von algebraischen Curven zugehören, zu ermitteln.

In § 13. (am Ende) ist eine der Tabelle ($r = 3$) des § 10. entnommene untere Grenze für den Grad R einer Raumcurve, welche einer ebenen Curve f von gegebenem Geschlecht entspricht, angegeben. Sei diese Bedingung erfüllt, und seien die Transformationsgleichungen durch irgend eine ∞^3-Schaar von Curven φ in folgender Weise gegeben:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_1(x) : \varphi_2(x) : \varphi_3(x) : \varphi_4(x) ; \quad f(x) = 0 ,$$

so hat man zu bestimmen, wie viele Constanten (ausser den $3p - 3$ Parametern der Classe) durch die Transformation eingeführt werden können. Zunächst hängt jene ∞^3-Schaar der Transformationscurven ab von irgend einer der Gruppen $G_R^{(3)}$, in welchen f von einer derselben geschnitten wird. Für $R \leqq p + 2$ sind adjungirte Curven $(n - 3)$. Ordnung (n sei der Grad von f) zur Transformation zu benutzen. Es giebt aber (nach § 9., Formel (F.)) noch:

$$\tau = 4R - 3(p + 4)$$

solcher Schaaren; und durch lineare Transformation sind noch 15 weitere Constanten einzuführen. Für $R > p + 2$ (wo Curvenschaaren von höherer als der $(n - 3)$. Ordnung benutzt werden müssen, für welche denn erst p Punkte durch die übrigen bestimmt sind) hat man die R Punkte *einer* Gruppe ganz willkührlich zu nehmen, und diese bestimmen sodann eine ∞^{R-p}-Schaar. Für die erste der 4 Transformationscurven φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 kann man daher hier alle R Punkte willkührlich annehmen, für die zweite, dritte und vierte, die aus der ∞^{R-p}-Schaar zu nehmen sind, noch je $R - p$ Punkte, welche sie dann vollständig bestimmen. Endlich kann man diesen 3 Curven noch je einen willkührlichen Factor geben. Im Ganzen hat man also ebenfalls:

$$R + 3(R - p) + 3 = 4R - 3p + 3$$

Constanten eingeführt. Oder man kann sagen: die ∞^3-Schaar hängt

ab von $(R-3)+3\,(R-p-3)$ Parametern, zu denen sodann noch die 15 Parameter der linearen Transformation hinzutreten.

Zu derselben Classe von algebraischen Curven mit allgemeinen Werthen der Moduln gehören demnach $\infty^{4R-3p+3}$ *Raumcurven vom Geschlecht* p *und der Ordnung* R $(\geqq \frac{3}{4}(p+4)$; und *überhaupt giebt es* ∞^{4R} *Raumcurven* R^{ter} *Ordnung vom Geschlecht* p $(\leqq \frac{4}{3}R-4)$.

§ 18.

Special-Punktgruppen in der Ebene.

In vielen Anwendungen, insbesondere bei den eindeutigen Abbildungen von Flächen auf Ebenen, stösst man auf Systeme einer endlichen Anzahl von Punkten der Ebene von einer solchen speciellen Lage, dass sie von Curven einer gegebenen Ordnung, welche diese Punkte zu einfachen oder vielfachen festen Punkten besitzen sollen, eine höhere Schaar zulassen, als die directe Abzählung ergeben würde. Der Restsatz, sowie die §§ 3., 4. liefern die Mittel, die Construction solcher Curvenschaaren aus den Eigenschaften einer einzelnen Curve der Schaar abzuleiten.

Ist nämlich irgend eine Curve der Schaar, oder ein irreducibeler Theil f (n. Ordnung) einer zerfallenden Curve derselben gegeben, so geht die Aufgabe zuerst in die bisher behandelte über, auf f selbst diejenigen Gruppen, bez. Specialgruppen G_Q anzugeben, in welchen f von den übrigen Curven der Schaar geschnitten wird; erst dann sind die etwa noch vorhandenen die Schaar beschränkenden Bedingungen, welche von dem Schnitt mit f unabhängig sind, zuzufügen.

Seien die Punktgruppen G_Q, in welchen f von den übrigen Curven der Schaar geschnitten wird, zu einer ∞^q-Schaar gehörig. Welcher Art dieselben auch sein mögen, ob sie durch den Schnitt von Curven höherer oder, wenn es Specialgruppen auf f sind, von adjungirten Curven $(n-3)$. Ordnung definirt sind: die sie ausschneidenden Curven lassen sich vermöge des Restsatzes immer durch äquivalente Curven s^{ter} Ordnung ersetzen, wenn s $(\geqq n)$ die Ordnung der Curven der gesuchten Schaar bedeutet. Wie wir indess schon früher bemerkt haben, sind diese Curven C_s, deren feste Basispunkte auf f in dieser Weise bestimmt sind, noch nicht völlig gegeben; vielmehr kann man statt ihrer auch:

$$C_s + A_{s-n} \cdot f = 0$$

setzen (wo $A_{s-n}=0$ die Gleichung einer beliebigen Curve $(s-n)$. Ordnung ist), ohne den Schnitt der C_s mit f zu ändern. Es ist daher möglich, den Curven C_s noch:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)$$

äussere lineare Bedingungen vorzuschreiben, welche den Schnitt mit f, soweit derselbe von beliebig und fest anzunehmenden Schnittpunkten der C_s mit f abhängt, nicht beeinflussen — den σ Constanten von A entsprechend. Erst durch Einführung von mehr als σ linearen Bedingungen wird die Mannigfaltigkeit q der Schaar in Bezug auf $f = 0$ selbst reducirt.

Die Bedingungen, welche man den Curven C_s vorschreiben kann, mögen nun von der Art sein, dass dieselben einen i-fachen Punkt von f zum k-fachen ($k \geqq i$) Punkt besitzen sollen. Das System von Curven C_s, welches f in einem solchen Punkte ik-punktig treffen soll, genügt aber dann schon der Bedingung, welche der Restsatz stellt, wenn die Curven C_s den i-fachen Punkt von f ebenfalls zum i-fachen Punkt besitzen, und ausserdem jeden Zweig von f noch in $k - i$ unendlich nahen Punkten treffen*). Soll an Stelle eines derartigen Verhaltens ein eigentlicher k-facher Punkt treten, so sind noch:

$$\varrho = \tfrac{1}{2} k (k+1) - \{\tfrac{1}{2} i (i+1) + i (k-i)\} = \tfrac{1}{2} (k-i)(k-i+1)$$

äussere Bedingungen von den Curven C_s zu erfüllen.

Sei $\Sigma\varrho$, auf alle vielfachen Punkte ausgedehnt, die Gesammtzahl der äusseren Bedingungen. Ist $\Sigma\varrho \leqq \sigma$, so haben dieselben weder einen Einfluss auf die übrigen festen Basispunkte der C_s, noch auf die Gruppen der beweglichen Punkte, in welchen f von diesen Curven geschnitten wird. Ist aber $\Sigma\varrho > \sigma$, so bilden diejenigen Curven C_s, welche allen jenen Bedingungen genügen, mit Hülfe von $f = 0$ nur noch eine $\infty^{q-\Sigma\varrho+\sigma}$-Schaar, welche linear aus der ∞^q-Schaar ausscheidet.

Die Gleichung der Gesammtschaar von Curven C_s, welche den oben vorgeschriebenen Bedingungen genügen, hat die Form:

$$C_s + A_{s-n} \cdot f = 0,$$

wo A_{s-n} noch die allgemeinste Curve $(s-n)$. Ordnung ist, welche die i-fachen Punkte von f, die für C_s k-fache Punkte sein sollen, zu $(k-i)$-fachen Punkten besitzt. Für $\Sigma\varrho \geqq \sigma$ wird A_{s-n} zu Null; die Gesammtschaar selbst ist aber *immer* eine $\infty^{q-\Sigma\varrho+\sigma}$-Schaar.

Nimmt man zur Curve f beispielsweise die hyperelliptische Curve 6. Ordnung für $p = 3$, deren Gleichung die Form besitzt: $\Sigma c_i c_k \alpha_{ik} = 0$ — wo die α Constante sind, i und k die Werthe 1, 2, 3 annehmen, und $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ die Gleichungen von 3 durch 7 gemeinsame Punkte $a_1, a_2, \cdots a_7$ gehenden Curven 3. Ordnung sind — so kann man, für speciellere Fälle mit Hülfe der Punktepaare, in welchen f von den Curven der Schaar $c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3 = 0$ getroffen wird,

*) Vgl. die Schlussbemerkungen zum Restsatz, § 1.

auf dieser Curve f Gruppen von Basispunkten für besondere Schaaren von Curven 7. Ordnung C_7 angeben. Es bedeute z. B. $\{[a_1^2]a_2^3a_3\cdots a_7\}$ eine Curve 7. Ordnung, welche a_1 zum Doppelpunkt mit denselben Tangenten wie f, a_2 zum 3-fachen, $a_3 \cdots a_7$ zu einfachen Punkten besitze. Dann bilden die Curven C_7:

$$\{[a_1^2]a_2 \cdot\cdot a_7\}; \quad \{[a_1^2][a_2^2]a_3 \cdot\cdot a_7\}; \quad \{[a_1^2][a_2^2][a_3^2]a_4 \cdot\cdot a_7\};$$
$$\{[a_1^2][a_2^2][a_3^2][a_4^2]a_5 \cdot\cdot a_7\},$$

bezüglich eine

$$\infty^{23}; \quad \infty^{20}; \quad \infty^{16}; \quad \infty^{12}\text{-Schaar.}$$

Dagegen bilden die Curven C_7

$$\{a_1^3a_2 \cdot\cdot a_7\}; \{a_1^3a_2^3a_3 \cdot\cdot a_7\}; \{a_1^3a_2^3a_3^3a_4 \cdot\cdot a_7\}; \{a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3a_5 \cdot\cdot a_7\},$$

bezüglich eine

$$\infty^{24}; \quad \infty^{18}; \quad \infty^{13}; \quad \infty^{8}\text{-Schaar.}$$

Mit Hülfe von $f = 0$ aber bilden jene Curven eine

$$\infty^{21}; \quad \infty^{17}; \quad \infty^{13}; \quad \infty^{9}\text{-Schaar;}$$

die letztern Curven dagegen eine

$$\infty^{21}; \quad \infty^{17}; \quad \infty^{13}; \quad \infty^{8}\text{-Schaar.}$$

Specieller aber giebt es eine ∞^5-Schaar von C_7 $\{a_1 \cdot\cdot a_7\}$ und durch 24 weitere feste Punkte (mit Hülfe von $f = 0$ eine ∞^2-Schaar, die f gerade so trifft, wie die Schaar der c_i). Ebenso eine ∞^4-Schaar $\{a_1 \cdot\cdot a_7\}$, durch 26 weitere feste Punkte (mit Hülfe von $f = 0$ eine ∞^1-Schaar). Dies bleibt ungeändert, wenn ein Theil der weiteren festen Punkte so in die Punkte a_i hineinrückt, dass man Curven $\{[a_1^2], [a_2^2], \cdot\cdot\}$ erhält. Und auch hier ändert sich wieder der Schnitt der C_7 mit f nicht, wenn sodann einer, zwei oder drei der Punkte $[a_1^2]$, $[a_2^2]$, $\cdot\cdot$ zu dreifachen Punkten a_1^3, a_2^3 $\cdot\cdot$ werden; wohl aber, sobald dies noch bei einem vierten Punkte eintritt.

Im September 1873.

Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben.

Von W. Göring in Rudolstadt.

Nachstehende Untersuchungen über die Jacobi'sche Thetafunction sind hervorgegangen durch die Anregung, welche ich aus den Arbeiten im mathematischen Seminar zu Breslau unter Leitung des Herrn Prof. Dr. Schröter geschöpft habe. Diese ganze Untersuchung hat ein ein doppeltes Ziel im Auge.

In seinem handschriftlichen Nachlasse hat Gauss gewisse unendliche Reihen und Producte untersucht, mit Hülfe deren er zu einer Reihe sehr eleganter und eigenthümlicher Beziehungen zwischen Grössen gelangt, die er die neuen Transcendenten nannte (vgl. Gauss' Werke, herausgegeben von der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen Bd. III, S. 436—479).

Es stellt sich nun heraus, dass diese Grössen nichts anderes sind als die Jacobi'schen Functionen $\vartheta_3(0, q)$, $\vartheta(0, q)$ und $\vartheta_2(0, q)$, resp. diese Functionen in der Weise verändert, dass man statt q q^3 resp. q^5 setzt. Dabei ist nicht möglich, dass Gauss diese Jacobi'schen Functionen schon gekannt hat, denn seine Abhandlungen tragen die Zeitangaben 1827 August 6 und August 29, während die Fund. nov. bekanntlich 1829 erschienen sind. Es lassen sich jedoch diese Formeln, welche Gauss meist zusammenhanglos und ohne Beweis angegeben hat, aus der Theorie der Thetafunction ableiten. Durch die gütige Erlaubniss des Herrn Prof. Dr. Schröter ist es mir vergönnt, eine einheitliche und an manchen Stellen erweiterte Darstellung dieser Beziehungen, welche den Hauptgegenstand der Arbeiten des mathematischen Seminars ausmachten, zugleich mit meinen eigenen Resultaten, die in dieser Richtung eine Erweiterung der Gauss'schen Formeln für die Sieben anstreben, zu veröffentlichen.

In diese ganze Entwicklung gehen aber fortwährend die Theilwerthe der ϑ-Functionen ein, und diese bilden den anderen Theil der Untersuchungen. Es haben bekanntlich die Jacobi'schen Functionen eine reelle Periode (π) und eine imaginäre ($i \log q$), wenn man bei letzterer von dem dabei auftretenden Exponentialfactor absieht. Dann

treten für die reelle Periode die Grössen $\vartheta_3\left(\frac{\mu\pi}{\alpha}, q\right)$, für die imaginäre Periode die Grössen $\vartheta_3\left(\frac{\mu\varpi}{\alpha}, q\right)$ oder $\vartheta_3(\mu\varpi, q^\alpha)$ als Theilwerthe auf, wenn $\varpi = i \log q$ und man für μ die Reihe der ganzen Zahlen $1, 2 \cdots \frac{\alpha-1}{2}$ setzt, wobei α eine ungerade Zahl sein soll. Alle übrigen Theilwerthe $\vartheta_3(\varrho\cdot\frac{\mu\pi}{\alpha}, q)$ und $\vartheta_3(\varrho\frac{\mu\varpi}{\alpha}, q)$ lassen sich mit Hülfe der bekannten Periodenformeln auf diese $\frac{\alpha-1}{2}$ Grundwerthe reduciren. Die Untersuchung geht nun dahin, den Zusammenhang dieser Grössen mit jenen Gauss'schen Fundamentalwerthen $\vartheta(0,q^\alpha)$, $\vartheta_2(0,q^\alpha)$, $\vartheta_3(0,q^\alpha)$, $\vartheta(0,q)$, $\vartheta_2(0,q)$, $\vartheta_3(0,q)$ aufzudecken, wo bei Gauss einmal $\alpha=3$, sodann $\alpha=5$ ist. Nachdem ich auch von diesen Grössen die Beziehungen bei der Siebentheilung (also für $\alpha=7$) aufgesucht und die vollkommene Analogie mit den Resultaten der Drei- und Fünf-Theilung entdeckt hatte, liess sich wohl ein allgemeines, dem zu Grunde liegendes Gesetz vermuthen. In der That werden wir dann durch eine für alle ungeraden Zahlen gültige Untersuchung finden, dass sich die Producte aus allen Theilwerthen immer auf eine elegante und einfache Weise durch die Gauss'schen Fundamentalwerthe darstellen lassen.

In Bezug auf alle diese Beziehungen werden wir hier vor uns ein Gebiet eröffnet finden, das in der höheren Analysis ein ebenso abgeschlossenes Ganze ausmacht, wie in den Elementen der Mathematik die Trigonometrie. Ebenso wie in dieser für die sin- und cos-Reihen etc. werden wir hier für die Jacobi'schen Transcendenten gewisse charakteristische Abhängigkeiten bestehend finden, nur dass von beiden Gebieten das unsere eine viel grössere Reichhaltigkeit besitzt, da wir es hier mit Functionen von doppelter Periode zu thun haben.

§ 1.

Zusammenstellung des gesammten zu Grunde liegenden Materials.

Es sind von Jacobi folgende 4 Functionen eingeführt worden:

$$\left|\begin{aligned}\vartheta(x,q) &= 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x\mp\cdots\\ &= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{hh}\cos 2hx\\ &= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{hh}e^{2hix}\\ &= \prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1-2q^{2h-1}\cos 2x+q^{4h-2})\end{aligned}\right.$$

$$(1)\quad\begin{cases}
\vartheta_1(x,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin x - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x - 2q^{\frac{49}{4}}\sin 7x \mp \cdots \\
\qquad = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} (-1)^h q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2}\sin(2h+1)x \\
\qquad = \frac{1}{i}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} (-1)^h q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2} e^{(2h+1)ix} \\
\qquad = 2q^{\frac{1}{4}}\sin x \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1-2q^{2h}\cos 2x + q^{4h}) \\
\vartheta_2(x,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos x + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x + 2q^{\frac{49}{4}}\cos 7x + \cdots \\
\qquad = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2}\cos(2h+1)x \\
\qquad = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2} e^{(2h+1)ix} \\
\qquad = 2q^{\frac{1}{4}}\cos x \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1+2q^{2h}\cos 2x + q^{4h}) \\
\vartheta_3(x,q) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x + \cdots \\
\qquad = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{hh}\cos 2hx \\
\qquad = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{hh} e^{2hix} \\
\qquad = \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1+2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2})
\end{cases}$$

Es bedeutet hierin $i = \sqrt{-1}$ und $\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} f(h)$, dass in $f(h)$ für h die Werthe aller ganzen positiven und negativen Zahlen zu setzen und die so erhaltenen Glieder sämmtlich zu addiren sind.

Es ergeben sich hieraus die Specialformeln:

$$\begin{cases}
\vartheta(0,q) = \sqrt{\frac{2Kx_1}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} \mp \cdots \\
\qquad = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} (-1)^h q^{hh} \\
\qquad = \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1-q^{2h-1})^2 \\
\qquad = \prod_{h=1}^{h=\infty} \frac{1-q^h}{1+q^h}
\end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \vartheta_1(0,q) = 0 \\ \vartheta_2(0,q) = \sqrt{\frac{2Kx}{\pi}} = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + 2q^{\frac{49}{4}} + \cdots \\ \qquad = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2} \\ \qquad = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1+q^{2h})^2 \\ \qquad = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{h=1}^{h=\infty} \frac{1-q^{4h}}{1-q^{4h-2}} \\ \vartheta_3(0,q) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots \\ \qquad = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{hh} \\ \qquad = \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1+q^{2h})^2 \\ \qquad = \prod_{h=1}^{h=\infty} \frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}} \cdot \frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}} \\ \vartheta_1'(0,q) = \left[\frac{d\,\vartheta_1(x,q)}{dx}\right]_{x=0} = \vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,. \end{cases}$$

Die Reihen in (1), in denen $q = e^{-\frac{\pi K_1}{K}}$, haben bekanntlich eine doppelte Periode, nämlich π und $i \log q$. Setzen wir der Kürze wegen $i \log = \varpi$, so haben wir die bekannten Beziehungen, in denen m eine beliebige ganze Zahl ist:

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta(x+m\pi,q) = \vartheta(x,q) \\ \vartheta_1(x+m\pi,q) = (-1)^m \vartheta_1(x,q) \\ \vartheta_2(x+m\pi,q) = (-1)^m \vartheta_2(x,q) \\ \vartheta_3(x+m\pi,q) = \vartheta_3(x,q) \\ q^{mm} e^{2mix} \vartheta(x-m\varpi,q) = (-1)^m \vartheta(x,q) \\ q^{mm} e^{2mix} \vartheta_1(x-m\varpi,q) = (-1)^m \vartheta_1(x,q) \\ q^{mm} e^{2mix} \vartheta_2(x-m\varpi,q) = \vartheta_2(x,q) \\ q^{mm} e^{2mix} \vartheta_3(x-m\varpi,q) = \vartheta_3(x,q)\,. \end{cases}$$

Ferner ist bekannt, dass diese 4 Functionen sämmtlich in einander übergehen, wenn man ihre Argumente um die Vielfachen der halben Periode vermehrt oder vermindert; denn es ist:

$$
(4)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\vartheta\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi,q\right) & = & \vartheta_3(x,q)\\
\vartheta_1\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi,q\right) & =(-1)^m & \vartheta_2(x,q)\\
\vartheta_2\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi,q\right) & =(-1)^{m+1} & \vartheta_1(x,q)\\
\vartheta_3\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi,q\right) & = & \vartheta(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\vartheta\left(x-\frac{2m+1}{2}\varpi,q\right) & =i(-1)^m & \vartheta_1(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\vartheta_1\left(x-\frac{2m+1}{2}\varpi,q\right) & =i(-1)^m & \vartheta(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\vartheta_2\left(x-\frac{2m+1}{2}\varpi,q\right) & = & \vartheta_3(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\vartheta_3\left(x-\frac{2m+1}{2}\varpi,q\right) & = & \vartheta_2(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\vartheta\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi-\frac{2n+1}{2}\varpi,q\right) & = & \vartheta_2(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\vartheta_1\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi-\frac{2n+1}{2}\varpi,q\right) & =(-1)^m & \vartheta_3(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\vartheta_2\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi-\frac{2n+1}{2}\varpi,q\right) & =i(-1)^{m+n+1} & \vartheta(x,q)\\
q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\vartheta_3\left(x+\frac{2m+1}{2}\pi-\frac{2n+1}{2}\varpi,q\right) & =i(-1)^n & \vartheta_1(x,q).
\end{array}\right.
$$

Diese Formeln zeigen auch, wie schliesslich alle 4 Functionen sich auf eine einzige, z. B. $\vartheta_3(x,q)$, welche die einfachste ist, zurückführen lassen.

Ferner ist zu beachten, dass:

$$
(5)\quad \left\{\begin{array}{l}
\vartheta(-x,q) = \vartheta(x,q)\\
\vartheta_1(-x,q) = -\vartheta_1(x,q)\\
\vartheta_2(-x,q) = \vartheta_2(x,q)\\
\vartheta_3(-x,q) = \vartheta_3(x,q).
\end{array}\right.
$$

Aus den Reihen (1) ergeben sich ferner folgende bekannte, später sehr häufig angewendete Beziehungen:

$$
(6)\quad \left\{\begin{array}{l}
2\,\vartheta_3(2x,q^4) = \vartheta_3(x,q) + \vartheta(x,q)\\
2\,\vartheta_2(2x,q^4) = \vartheta_3(x,q) - \vartheta(x,q).
\end{array}\right.
$$

Wir legen nun ferner folgende wichtige Formel zu Grunde:

$$\vartheta_3(tx+sry,q^r)\,\vartheta_3(sx-tpy,q^p)$$

$$(7)\quad =\sum_{\mu=0}^{\mu=rs^2+pt^2-1} q^{r\mu\mu}\,e^{2\mu i(tx+sry)}\,\vartheta_3\left\{(rs^2+pt^2)\,x-rpt\mu\varpi,q^{rp(rs^2+pt^2)}\right\}\cdot\vartheta_3\left\{(rs^2+pt^2)\,y-rs\mu\varpi,q^{rs^2+pt^2}\right\}$$

(vgl. Schröter, Ueber die Entwicklung der Potenzen der elliptischen Transcendenten ϑ und die Theilung dieser Functionen; Breslau 1855, S. 6).

Bedingung ist hierin, dass r, s, t, p keinen gemeinsamen Factor haben, sonst können sie beliebige ganze Zahlen sein.

Als specielle Fälle fliessen aus dieser Formel:

$$(8)\quad \vartheta_3(x,q^\alpha,\vartheta_3(y,q^\beta)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha+\beta-1} q^{\alpha\mu\mu}\,e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\alpha\mu\varpi,q^{\alpha+\beta})\cdot\vartheta_3\left\{\beta x-\alpha y-\alpha\beta\mu\varpi,q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)}\right\}$$

und aus dieser, wenn λ eine ungerade Zahl bedeutet:

$$(9)\quad \begin{cases} \vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} q^{\mu\mu}\,e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1})\cdot\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)}) \\ \vartheta(x,q)\;\vartheta(y,q^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} (-1)^\mu q^{\mu\mu}\,e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1})\cdot\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)}) \\ \vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1})\cdot\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)}) \\ \vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} (-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1})\cdot\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)}). \end{cases}$$

ferner:

$$\vartheta_3(tx+sy,q)\,\vartheta_3(sx-ty,q)$$

$$(10)\quad =\sum_{\mu=0}^{\mu=s^2+t^2-1} q^{\mu\mu}\,e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_3\left\{(s^2+t^2)\,x-t\mu\varpi,q^{s^2+t^2}\right\}\cdot\vartheta_3\left\{(s^2+t^2)\,y-s\mu\varpi,q^{s^2+t^2}\right\},$$

endlich noch die beiden Formeln:

$$(11)\quad \begin{cases} \vartheta_3(x,q^p)=\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\lambda\mu\mu}\,e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(px-p\mu\lambda\varpi,q^{\lambda pp}) \\ \vartheta_3(x,q)=\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(px-p\mu\varpi,q^{pp}), \end{cases}$$

worin p und λ ganz beliebige ganze Zahlen sind (vgl. die schon angeführte Schrift S. 4 und 6, sowie: Schröter, de aequationibus modularibus, Königsberg 1854, S. 6—8).

Es fliessen aus diesen Formeln eine Menge bekannter Beziehungen für den speciellen Fall, dass $\alpha = 1$, $\beta = 1$, die, da sie im Folgenden fortwährend benutzt werden, hier zusammengestellt sind.

Von diesen Formeln sind einige schon von Jacobi angegeben worden (Crelle Bd. 3, S. 305, Bd. 26, S. 103), die übrigen finden sich in der zuletzt citirten Abhandlung (de aequ. mod. S. 9—11), oder sind doch unmittelbare Folgerungen daraus. Zunächst folgt aus (9) für $\lambda = 1$ das bekannte System von 24 Formeln für die Producte je zweier ϑ-Functionen, von denen wir folgende acht als die einfachsten und wichtigsten anführen:

$$(12)\quad \begin{cases} \vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) = \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2) + \vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2) \\ \vartheta\,(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q) = \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2) - \vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2) \\ \vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(x-y,q) = \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2) + \vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2) \\ \vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2) - \vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2) \\ \vartheta\,(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) = \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2) + \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2) \\ \vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q) = \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2) - \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2) \\ \vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_2(x-y,q) = \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2) + \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2) \\ \vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2) - \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2). \end{cases}$$

Hieraus gehen folgende wichtige specielle Formeln hervor:

$$(13)\quad \begin{cases} \vartheta\,(x,q)\;\vartheta_3\,(x,q) = \vartheta\,(0,q^2)\;\vartheta\,(2x,q^2) \\ \vartheta_1(x,q)\;\vartheta_2\,(x,q) = \vartheta\,(0,q^2)\;\vartheta_1\,(2x,q^2) \\ 2\,\vartheta_3(x,q^2)\,\vartheta_2\,(x,q^2) = \vartheta_2\,(0,q)\;\vartheta_2\,(x,q) \\ 2\,\vartheta\,(x,q^2)\,\vartheta_1\,(x,q^2) = \vartheta_2\,(0,q)\;\vartheta_1\,(x,q)\,, \end{cases}$$

ferner für $x = y = 0$

$$(14)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta_3{}^2\,(0,q^2) = \vartheta_3{}^2\,(0,q) + \vartheta^2\;(0,q) \\ 2\,\vartheta_2{}^2\,(0,q^2) = \vartheta_3{}^2\,(0,q) - \vartheta^2\;(0,q) \\ \vartheta^2\;(0,q^2) = \vartheta\,(0,q)\cdot\vartheta_3\,(0,q) \\ \vartheta_3{}^2\,(0,q^{\frac{1}{2}}) = \vartheta_3{}^2\,(0,q) + \vartheta_2{}^2\,(0,q) \\ \vartheta^2\;(0,q^{\frac{1}{2}}) = \vartheta_3{}^2\,(0,q) - \vartheta_2{}^2\,(0,q) \\ \vartheta_2{}^2\,(0,q^{\frac{1}{2}}) = 2\,\vartheta_2\,(0,q)\cdot\vartheta_3\,(0,q)\,, \end{cases}$$

ferner:

$$(15)\quad \begin{cases} \vartheta_1{}^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta_2{}^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta\,(0,q^2)\,\vartheta_2\,(0,q^2) \\ \vartheta^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta_3{}^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta\,(0,q^2)\,\vartheta_3\,(0,q^2) \\ 2\,q^{\frac{1}{8}}\,\vartheta^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = 2\,q^{\frac{1}{8}}\,\vartheta_1{}^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = \vartheta_2\,(0,q^{\frac{1}{2}})\;\vartheta\,(0,q^{\frac{1}{2}}) \\ 2\,q^{\frac{1}{8}}\,\vartheta_3{}^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = 2\,q^{\frac{1}{8}}\,\vartheta_2{}^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = \vartheta_2\,(0,q^{\frac{1}{2}})\;\vartheta_3\,(0,q^{\frac{1}{2}})\,. \end{cases}$$

Die in (15) untersuchten Reihen sind folgende:

$$(16)\quad \begin{cases} \vartheta_2\left(\frac{\omega}{4}, q\right) = \vartheta_3\left(\frac{\omega}{4}, q\right) = 1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{6}{2}} + q^{\frac{10}{2}} + q^{\frac{15}{2}} + q^{\frac{21}{2}} + \cdots \\ i\,\vartheta_1\left(\frac{\omega}{4}, q\right) = \vartheta\left(\frac{\omega}{4}, q\right) = 1 - q^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{6}{2}} + q^{\frac{10}{2}} - q^{\frac{15}{2}} - q^{\frac{21}{2}} + \cdots \\ \vartheta\left(\frac{\pi}{4}, q\right) = \vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q\right) = 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + 2q^{64} \mp \cdots \\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}, q\right) = \vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q\right) = \sqrt{2}\,(q^{\frac{1}{4}} - q^{\frac{9}{4}} - q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + q^{\frac{81}{4}} - \cdots\cdots). \end{cases}$$

Bemerkenswerth ist in den ersten beiden Reihen das Fortschreiten der Exponenten nach den Triangularzahlen. Auch setzen wir die Producte von 4 ϑ-Functionen voraus, welche resultiren, wenn man in (12) je 2 Gleichungen multiplicirt und dann umformt. Ist:

$$\begin{aligned} 2x' &= x + y + z + \omega \\ 2y' &= x - y + z - \omega \\ 2z' &= x + y - z - \omega \\ 2\omega' &= x - y - z + \omega \end{aligned}$$

und bezeichnen wir zur Abkürzung das Product

$$\vartheta_3(x, q)\ \vartheta_3(y, q)\ \vartheta_3(z, q)\ \vartheta_3(\omega, q)$$

mit

$$\vartheta_3(x, y, z, w),$$

so ist:

$$(17)\quad \begin{cases} \vartheta_3(x,y,z,\omega) + \vartheta(x,y,z,\omega) = \vartheta_3(x',y',z',\omega') + \vartheta(x',y',z',\omega') \\ \vartheta_3(x,y,z,\omega) - \vartheta(x,y,z,\omega) = \vartheta_1(x',y',z',\omega') + \vartheta_2(x',y',z',\omega') \\ \vartheta_1(x,y,z,\omega) + \vartheta_2(x,y,z,\omega) = \vartheta_3(x',y',z',\omega') - \vartheta(x',y',z',\omega') \\ \vartheta_1(x,y,z,\omega) - \vartheta_2(x,y,z,\omega) = \vartheta_1(x',y',z',\omega') - \vartheta_2(x',y',z',\omega'). \end{cases}$$

Vermehrt man in diesen Formeln je 2 Argumente um $\frac{\pi}{2}$, oder um $\frac{\omega}{2}$, oder auch um $\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}$, so ergeben sich eine grosse Menge von Beziehungen, unter denen folgende 3 bemerkenswerth sind:

$$(18)\quad \begin{cases} \vartheta(x,z)\,\vartheta_3(y,\omega) - \vartheta_3(x,z)\ \vartheta(y,\omega) = \vartheta_2(x',y')\,\vartheta_1(z',\omega') + \vartheta_1(x',y')\,\vartheta_2(z',\omega') \\ \vartheta_3(x,z)\,\vartheta_2(y,\omega) - \vartheta_2(x,z)\,\vartheta_3(y,\omega) = \vartheta_1(x',y')\ \vartheta(z',\omega') + \vartheta(x',y')\,\vartheta_1(z',\omega') \\ \vartheta(x,z)\,\vartheta_2(y,\omega) - \vartheta_2(x,z)\ \vartheta(y,\omega) = \vartheta_1(x',y')\,\vartheta_3(z',\omega') + \vartheta_3(x',y')\,\vartheta_1(z',\omega') \end{cases}$$

Von besonderer Wichtigkeit und Einfachheit ist jedoch eine Formel, die man erhält, wenn man in (17) setzt statt x, y, z, ω resp. $x + \frac{\pi}{2}$, $x + \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}$, $x + \frac{\omega}{2}$, x. Dann ist:

$$(19)\quad 2\vartheta(x,q)\,\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(x,q) = \vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_1(2x,q).$$

Da wir sie später brauchen werden, so führen wir noch folgende Formeln an, die aus (17) und (18) durch Gleichsetzung zweier Argumente hervorgehen, und die in gewisser Weise den Beziehungen in (12) entsprechen:

$$(20)\quad \begin{cases} \vartheta^2(0,q)\,\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q) = \vartheta_3^2(x,q)\,\vartheta_3^2(y,q) - \vartheta_2^2(x,q)\,\vartheta_2^2(y,q) \\ \qquad\qquad = \vartheta^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q) - \vartheta_1^2(x,q)\,\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_2^2(0,q)\,\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(x-y,q) = \vartheta_3^2(x,q)\,\vartheta_3^2(y,q) - \vartheta^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q) \\ \qquad\qquad = \vartheta_2^2(x,q)\,\vartheta_2^2(y,q) - \vartheta_1^2(x,q)\,\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_3^2(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) = \vartheta_3^2(x,q)\,\vartheta_3^2(y,q) + \vartheta_1^2(x,q)\,\vartheta_1^2(y,q) \\ \qquad\qquad = \vartheta_2^2(x,q)\,\vartheta_2^2(y,q) + \vartheta^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q), \end{cases}$$

ferner:

$$(21)\quad \begin{cases} \vartheta^2(0,q)\,\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta_3^2(x,q)\,\vartheta_2^2(y,q) - \vartheta_2^2(x,q)\,\vartheta_3^2(y,q) \\ \qquad\qquad = \vartheta_1^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q) - \vartheta^2(x,q)\,\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_2^2(0,q)\,\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta^2(x,q)\,\vartheta_3^2(y,q) - \vartheta_3^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q) \\ \qquad\qquad = \vartheta_1^2(x,q)\,\vartheta_2^2(y,q) - \vartheta_2^2(x,q)\,\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_3^2(0,q)\,\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta^2(x,q)\,\vartheta_2^2(y,q) - \vartheta_2^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q) \\ \qquad\qquad = \vartheta_1^2(x,q)\,\vartheta_3^2(y,q) - \vartheta_3^2(x,q)\,\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_3^2(0,q)\,\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q) + \vartheta^2(0,q)\,\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) \\ \qquad\qquad = \vartheta^2(x,q)\,\vartheta_3^2(y,q) + \vartheta_3^2(x,q)\,\vartheta^2(y,q), \end{cases}$$

endlich:

$$(22)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q) \\ \qquad = \vartheta(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\{\vartheta(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) + \vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q)\} \\ 2\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q)\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q) \\ \qquad = \vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q\,\{\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) + \vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_2(x-y,q)\} \\ 2\,\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q) \\ \qquad = \vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\{\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q) + \vartheta(x+y,q)\,\vartheta_2(x-y,q)\}. \end{cases}$$

Aus allen diesen Formeln leuchtet noch ein, dass:

$$(23)\qquad \vartheta^4(0,q) + \vartheta_2^4(0,q) = \vartheta_3^4(0,q),$$

welche Gleichung auch schon aus (2) sich bietet, da sie nichts anderes aussagt, als dass $k^2 + k_1^2 = 1$, was a priori klar ist.

Ausser den aufgestellten Beziehungen sind noch von Wichtigkeit die Jacobi'schen Uebergangsformeln zwischen der reellen und imaginären Periode. Ist $p = \log q$, also da

$$q = e^{-\frac{\pi K_1}{K}}, \quad p = -\frac{\pi K_1}{K},$$

so ist:

$$(24)\quad \begin{cases} \vartheta(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_2\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_1(x, e^p) = i\sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_1\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_2(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_2(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_3\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right), \end{cases}$$

Dieses ist das gesammte den nachfolgenden Untersuchungen zu Grunde gelegte Material.

Gauss hat nun die Reihen, von denen er ausgeht und die sich bei der Vergleichung als identisch mit den Reihen in (2) erweisen, mit P, Q, R, p, q, r bezeichnet, dergestalt dass:

$$(25)\quad \begin{cases} \vartheta_3(0, q^\alpha) = P, \quad \vartheta(0, q^\alpha) = Q, \quad \vartheta_2(0, q^\alpha) = R \\ \vartheta_3(0, q) = p, \quad \vartheta(0, q) = q, \quad \vartheta_2(0, q) = r, \end{cases}$$

wo bei Gauss das eine Mal $\alpha = 3$, das andere Mal $\alpha = 5$ ist. Wir werden diese Bezeichnung in der ganzen Untersuchung beibehalten, da sie in der That eine sehr anschauliche Darstellung der Beziehungen ermöglicht. Eine Verwechslung der Function $q = \vartheta(0, q)$ und des Moduls q der Reihen ist dabei nicht gut möglich.

§ 2.

Die Dreitheilung.

Gemäss § 1. (25) ist in dieser Untersuchung bezeichnet:

$$\begin{aligned} &\vartheta_3(0, q^3) = P, \quad \vartheta(0, q^3) = Q, \quad \vartheta_2(0, q^3) = R \\ &\vartheta(0, q) = p, \quad \vartheta(0, q) = q, \quad \vartheta_2(0, q) = r. \end{aligned}$$

Die hier zu untersuchenden Reihen, wie sie aus § 1. (1) und (2) hervorgehen, sind dann folgende:

$$(1)\quad \begin{cases} p = \vartheta_3(0, q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots \\ q = \vartheta(0, q) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} \mp \cdots \\ r = \vartheta_2(0, q) = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + 2q^{\frac{49}{4}} + \cdots \\ P = \vartheta_3(0, q^3) = 1 + 2q^3 + 2q^{12} + 2q^{27} + 2q^{48} + \cdots \\ Q = \vartheta(0, q^3) = 1 - 2q^3 + 2q^{12} - 2q^{27} + 2q^{48} \mp \cdots \\ R = \vartheta_2(0, q^3) = 2q^{\frac{3}{4}} + 2q^{\frac{27}{4}} + 2q^{\frac{75}{4}} + 2q^{\frac{147}{4}} + \cdots \end{cases}$$

$$
\left\{\begin{array}{ll}
q^{\frac{1}{3}}\vartheta_3(\varpi,q^3) = & q^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{4}{3}} + q^{\frac{16}{3}} + q^{\frac{25}{3}} + q^{\frac{49}{3}} + q^{\frac{64}{3}} + q^{\frac{100}{3}} + \cdots \\
q^{\frac{1}{3}}\vartheta(\varpi,q^3) = & q^{\frac{1}{3}} - q^{\frac{4}{3}} - q^{\frac{16}{3}} + q^{\frac{25}{3}} + q^{\frac{49}{3}} - q^{\frac{64}{3}} - q^{\frac{100}{3}} \pm \cdots \\
q^{\frac{1}{3}}\vartheta_2(\varpi,q^3) = & q^{\frac{1}{12}} + q^{\frac{25}{12}} + q^{\frac{49}{12}} + q^{\frac{121}{12}} + q^{\frac{169}{12}} + q^{\frac{289}{12}} + \cdots \\
iq^{\frac{1}{3}}\vartheta_1(\varpi,q^3) = & q^{\frac{1}{12}} - q^{\frac{25}{12}} - q^{\frac{49}{12}} + q^{\frac{121}{12}} + q^{\frac{169}{12}} - q^{\frac{289}{12}} \mp \cdots \\
\vartheta_3\left(\frac{\pi}{3},q\right) = & 1 - q - q^4 + 2q^9 - q^{16} - q^{25} + 2q^{36} - q^{49} \mp \cdots \\
\vartheta\left(\frac{\pi}{3},q\right) = & 1 + q - q^4 - 2q^9 - q^{16} + q^{25} + 2q^{36} + q^{49} \mp \cdots \\
\vartheta_2\left(\frac{\pi}{3},q\right) = & q^{\frac{1}{4}} - 2q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} - 2q^{\frac{81}{4}} + q^{\frac{121}{4}} \pm \cdots \\
\vartheta_1\left(\frac{\pi}{3},q\right) = & \sqrt{3}\{q^{\frac{1}{4}} - q^{\frac{25}{4}} - q^{\frac{49}{4}} + q^{\frac{121}{4}} + q^{\frac{169}{4}} - \cdots\}.
\end{array}\right. \tag{2}
$$

Es soll also nun nachgewiesen werden, dass sich die eigenthümlichen Reihen (2) durch die Reihen (1) darstellen lassen, und es sollen ferner die Beziehungen untersucht werden, die zwischen den Reihen (1) selbst bestehen. Diese letzteren Beziehungen sind es, die von Gauss ohne Beweis angegeben worden sind.

Es lassen sich 2 wichtige Systeme von Formeln aufstellen. Setzen wir nämlich in § 1. (9) $\lambda = 2$, so ist:

$$
\left\{\begin{array}{lll}
\vartheta_3(x,q)\ \vartheta_3(y,q^2) = & \vartheta_3(x+y,q^3) & \vartheta_3(2x-y,q^6) \\
& + q\ e^{2ix}\vartheta_3(x+y-\varpi,q^3) & \vartheta_3(2x-y-2\varpi,q^6) \\
& + q^4 e^{4ix}\vartheta_3(x+y-2\varpi,q^3) & \vartheta_3(2x-y-4\varpi,q^6) \\
\vartheta_2(x,q)\ \vartheta_2(y,q^2) = & \vartheta_2(x+y,q^3) & \vartheta_3(2x-y,q^6) \\
& + q\ e^{2ix}\vartheta_2(x+y-\varpi,q^3) & \vartheta_3(2x-y-2\varpi,q^6) \\
& + q^4 e^{4ix}\vartheta_2(x+y-2\varpi,q^3) & \vartheta_3(2x-y-4\varpi,q^6) \\
\vartheta_1(x,q)\ \vartheta_1(y,q^2) = & -\vartheta_2(x+y,q^3) & \vartheta(2x-y,q^6) \\
& + q\ e^{2ix}\vartheta_2(x+y-\varpi,q^3) & \vartheta(2x-y-2\varpi,q^6) \\
& - q^4 e^{4ix}\vartheta_2(x+y-2\varpi,q^3) & \vartheta(2x-y-4\varpi,q^6) \\
\vartheta(x,q)\ \vartheta(y,q^2) = & \vartheta_3(x+y,q^3) & \vartheta(2x-y,q^6) \\
& - q\ e^{2ix}\vartheta_3(x+y-\varpi,q^3) & \vartheta(2x-y-2\varpi,q^6) \\
& + q^4 e^{4ix}\vartheta_3(x+y-2\varpi,q^3) & \vartheta(2x-y-4\varpi,q^6).
\end{array}\right. \tag{3}
$$

Ein weit eleganteres System von Beziehungen ergiebt sich aber, wenn in § 1. (9) $\lambda = 3$ gesetzt wird, und je 2 der dortigen Gleichungen addirt, resp. subtrahirt werden. Rechts erhält man scheinbar die Moduln q^4 und q^{12}, allein diese gehen mit Hülfe der Formeln § 1. (6) in die Moduln q und q^3 über. Wir erhalten dann:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)+\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3) &= \vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\ &\quad+\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3) &= \vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\ &\quad-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)+\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3) &= \vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\ &\quad+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3) &= \vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\ &\quad-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)+\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3) &= \vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\ &\quad+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3) &= \vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\ &\quad-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)+\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3) &= \vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\ &\quad+\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)-\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3) &= \vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\ &\quad-\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)+\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3) &= \vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\ &\quad+\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)-\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3) &= \vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\ &\quad-\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)+\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3) &= \vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\ &\quad+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)-\vartheta_3(2x,y)\,\vartheta_3(2y,q^3) &= \vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\ &\quad-\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)
\end{aligned}\right.$$

(vgl. Schröter, de aequ. mod. S. 13 und 14).

Aus (4) resultiren zunächst für $x=0$ und $y=\varpi$, ferner für $x=\frac{\pi}{3}$ und $y=0$ nach Anwendung der Formeln § 1. (3) und für $x=0$ und $y=0$ folgende 3 Beziehungen:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
q\vartheta(\varpi,q^3)-r\vartheta_2(\varpi,q^3)+p\vartheta_3(\varpi,q^3)&=0\\
Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)&=0\\
qQ+rR-pP&=0\,.
\end{aligned}\right.$$

Die letzte Gleichung involvirt bekanntlich die schon von Legendre angegebene Modulargleichung für die Tranformation dritter Ordnung, nämlich:

$$\sqrt{\varkappa\lambda}+\sqrt{\varkappa_1\lambda_1}=1$$

(vgl. Schröter a. a. O. S. 14).

Wir gehen nun aus von der zweiten Formel in (3) und setzen hierein für y: $y + \frac{\pi}{2} - \frac{\varpi}{2}$, so ist mit Hülfe von § 1. (3) und (4):

$$-ie^{-iy}q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(x,q)\,\vartheta(y,q^2) = -\vartheta_1(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta(2x-y+\varpi,q^6)$$
$$-q\,e^{2ix}\vartheta_1(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta(2x-y-\varpi,q^6)$$
$$-q^4e^{4ix}\vartheta_1(x+y-3\varpi,q^3)\,\vartheta(2x-y-3\varpi,q^6).$$

Hierein setzen wir $x=\varpi$, $y=0$, dann ist nach § 1. (4):

$$\vartheta(\varpi,q^6) = iq^{\frac{1}{2}}\vartheta_1(2\varpi,q^6),$$

also:

$$(6^a)\qquad \vartheta_2(0,q)\,\vartheta(0,q^2) = -2q\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\varpi,q^6),$$

also mit Hülfe von § 1. (13):

$$(6^b)\qquad \vartheta_2(0,q)\,\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^6) = -2q\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi,q^3)\,\vartheta_2(\varpi,q^3).$$

Setzt man in (6^a) statt q $q^{\frac{1}{2}}$ und wendet § 1. (4) und (13) an, so folgt:

$$(6^c)\qquad \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,q^{\frac{3}{2}})\,\vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}}) = -2q\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi,q^3)\,\vartheta(\varpi,q^3),$$

Multipliciren wir (6^b) mit $\vartheta_2(0,q)$, (6^c) mit $\vartheta(0,q)$, subtrahiren und beachten (5), so ist:

$$(6^d)\quad -2q\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi,q^3)\,\vartheta_3(\varpi,q^3)$$
$$= \vartheta_2^{\,2}(0,q)\,\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^6) - \tfrac{1}{2}\vartheta^2(0,q)\,\vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_2(0,q^{\frac{3}{2}}) = A.$$

Es lässt sich nun A auf doppelte Art darstellen. Setzt man einmal direct die Werthe aus § 1. (14) für $\vartheta(0,q^2)$ etc. ein, so ist:

$$A = r^2\sqrt{pqPQ} - q^2\sqrt{rpRP}.$$

Andrerseits aber ist:

$$\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^6) = \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^6) - \vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^6) \text{ aus (5)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{\vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}}) + \vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0,q^{\frac{3}{2}})\right\} \text{ nach § 1. (6)}$$

und

$$\vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_2(0,q^{\frac{3}{2}}) = \vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}}) - \vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0,q^{\frac{3}{2}}) \text{ aus (5)}.$$

Setzt man dieses in A ein, so wie die Werthe für $\vartheta_2^{\,2}(0,q)$ und $\vartheta^2(0,q)$ aus § 1. (14), so ist:

$$A = \tfrac{1}{4}\left\{\vartheta_3^{\,2}(0,q^{\frac{1}{2}}) + \vartheta^2(0,q^{\frac{1}{2}})\right\}\left\{\vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0,q^{\frac{3}{2}}) - \vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}})\right\}.$$

Da nun aus § 1. (14):

$$\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0,q^{\frac{3}{2}}) - \vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}})\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2(p^2P^2 - r^2R^2 - q^2Q^2)} = \sqrt{rqRQ},$$

da nach (5):

$$p^2 P^2 = q^2 Q^2 + r^2 R^2 + 2\, rqQR\,,$$

so folgt schliesslich:

$$A = p^2 \sqrt{rqRQ}\,.$$

Also haben wir jetzt aus (6^{d}) die Identität

$$r^2 \sqrt{pqPQ} - q^2 \sqrt{rpRP} = p^2 \sqrt{rqRQ}\,, \tag{7}$$

so wie aus (6^{b}), (6^{c}) und (6^{d}) die 3 Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} -2\,q\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi, q^3)\,\vartheta_3(\varpi, q^3) &= p\sqrt{rqRQ} \\ -2\,q\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi, q^3)\,\vartheta_2(\varpi, q^3) &= r\sqrt{pqPQ} \\ -2\,q\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi, q^3)\,\vartheta\,(\varpi, q^3) &= q\sqrt{rpRP}\,. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

3 ähnliche Formeln bestenen auch für die reelle Periode, denn nach § 1. (11) ist:

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_0^{p-1} q^{\mu\mu}\, e^{2\mu i x}\, \vartheta_3(px - p\mu\varpi, q^{pp})\,.$$

Setzt man hierein statt x $x + \frac{\pi}{2} - \frac{\varpi}{2}$, so ist:

$$\vartheta_1(x,q) = i q^{\frac{1}{4}} e^{ix} \sum_0^{p-1} (-1)^{\mu+1} q^{\mu\mu+\mu}\, e^{2\mu i x}\, \vartheta_3\Big(p(x+\tfrac{\pi}{2}) - (\mu+\tfrac{1}{2})p\omega, q^{pp}\Big).$$

Wird hierin statt q $q^{\frac{1}{3}}$ und $p = 3$, $x = \frac{\pi}{3}$ gesetzt, so folgt:

$$\vartheta_1\left(\tfrac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right) = i\sqrt{3}\, q^{\frac{1}{3}}\, \vartheta_1(\varpi, q^3)\,. \tag{9}$$

Dann folgt aus (6^{a}) mit Anwendung von § 1. (13):

$$3\,\vartheta(0, q^{\frac{2}{3}})\,\vartheta_2(0, q)\,\vartheta(0, q^2) = 2\,\vartheta_1^{\,2}\left(\tfrac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right)\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right),$$

ferner aus (6^{a}):

$$\tfrac{3}{2}\,\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{6}})\,\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0, q) = 2\,\vartheta_1^{\,2}\left(\tfrac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right)\vartheta\left(\tfrac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right)$$

und durch eine ähnliche Betrachtung, wie für die imaginäre Periode:

$$3\,\vartheta_3(0,q)\sqrt{\vartheta_2(0,q)\,\vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q^{\frac{1}{3}})\,\vartheta(o,q^{\frac{1}{3}})} = 2\,\vartheta_1^{\,2}\left(\tfrac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right)\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right),$$

so dass, wenn wir schliesslich für q q^3 setzen und die linken Seiten gemäss § 1. (14) reduciren, sich ergiebt:

$$\left\{\begin{aligned} 2\,\vartheta_1^{\,2}\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right) &= 3\,P\sqrt{rqRQ} \\ 2\,\vartheta_1^{\,2}\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right) &= 3\,R\sqrt{pqPQ} \\ 2\,\vartheta_1^{\,2}\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right)\vartheta\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right) &= 3\,Q\sqrt{prPR}\,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Multipliciren wir nun sämmtliche 3 Gleichungen in (8) und wenden die Formel § 1. (19) an, so ergiebt sich:

$$\vartheta_2^2(0,q)\ \vartheta^2(0,q)\ \vartheta_3^2(0,q) = -4q^2\vartheta_1^6(\varpi,q^3),$$

Damit ist $\vartheta_1(\varpi,q^3)$ berechnet. Trägt man seinen Werth dann in (8) ein, so sind auch $\vartheta_3(\varpi,q^3)$ etc. dargestellt. Ebenso verfährt man mit den Gleichungen (10) und erhält nun folgende Darstellung der Fundamentalwerthe der Dreitheilung, nämlich der oben in (2) angegebenen Reihen durch die in (1) aufgestellten:

(11)
$$\begin{cases} i\,q^{\frac{1}{3}}\vartheta_1(\varpi,q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ q^{\frac{1}{3}}\vartheta\ (\varpi,q^3) = \sqrt{\frac{RP}{rp}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ q^{\frac{1}{3}}\vartheta_2(\varpi,q^3) = \sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ q^{\frac{1}{3}}\vartheta_3(\varpi,q^3) = \sqrt{\frac{RQ}{rq}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{3},q\right) = \sqrt{3}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \vartheta\left(\frac{\pi}{3},q\right) = \sqrt{\frac{rp}{RP}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \vartheta_2\left(\frac{\pi}{3},q\right) = \sqrt{\frac{pq}{PQ}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \vartheta_3\left(\frac{\pi}{3},q\right) = \sqrt{\frac{rq}{RQ}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Der Grundgedanke zur Herleitung dieser Resultate ist von Herrn Prof. Dr. Schröter angegeben worden.

§ 3.

Die Gauss'schen Formeln.

Wir gehen nun zum 2. Theile, nämlich zur Herleitung der Gauss' schen Beziehungen, oder solcher, die ihnen analog sind (vgl. Gauss' Werke Bd. III, S. 470, 471, 476 und 479).

Wir hatten schon in § 2. (7) eine solche Beziehung zwischen p, q, r und P, Q, R allein gefunden. Dieselbe Beziehung, so wie noch eine zweite ähnliche ergiebt sich auch, wenn man die Werthe aus § 2. (11) in § 2. (5) substituirt. Beide Beziehungen lassen sich auf eine etwas andere Form bringen und lauten:

(1)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{p^3}{P}} + \sqrt{\frac{q^3}{Q}} - \sqrt{\frac{r^3}{R}} = 0 \\ \sqrt{\frac{P^3}{p}} - \sqrt{\frac{Q^3}{q}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}} = 0. \end{cases}$$

Aus den 3 Formeln § 1. (18) folgt nun, wenn man $x = z = \varpi$, $y = \omega = 0$ setzt, also $x' = y' = \varpi$, $z' = \omega' = 0$ ist:

$$\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\,\vartheta_3^2(0, q^3) = \vartheta^2(\varpi, q^3)\,\vartheta_2^2(0, q^3) - \vartheta_2^2(\varpi, q^3)\,\vartheta^2(0, q^3)$$
$$\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\,\vartheta^2(0, q^3) = \vartheta_3^2(\varpi, q^3)\,\vartheta_2^2(0, q^3) - \vartheta_2^2(\varpi, q^3)\,\vartheta_3^2(0, q^3)$$
$$\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\,\vartheta_2^2(0, q^3) = \vartheta^2(\varpi, q^3)\,\vartheta_3^2(0, q^3) - \vartheta_3^2(\varpi, q^3)\,\vartheta^2(0, q^3).$$

Trägt man in diese Formeln die Werthe aus § 2. (11) ein, so resultirt:

$$(2)\qquad \begin{cases} Pp = \dfrac{Q^3}{q} - \dfrac{R^3}{r} \\ Qq = \dfrac{P^3}{p} - \dfrac{R^3}{r} \\ Rr = \dfrac{Q^3}{q} - \dfrac{P^3}{p}. \end{cases}$$

Wenn man dieselben Gleichungen § 1. (18) nimmt, jetzt aber $x = z = \frac{\pi}{3}$ setzt, so resultiren nach den Eintragungen aus § 2. (11):

$$(3)\qquad \begin{cases} 3\,Pp = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{q^3}{Q} \\ 3\,Qq = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{p^3}{P} \\ 3\,Rr = \dfrac{p^3}{P} - \dfrac{q^3}{Q}, \end{cases}$$

also durch die Combination von (2) und (3)

$$(4)\qquad \begin{cases} 3pP = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{q^3}{Q} = \dfrac{3Q^3}{q} - \dfrac{3R^3}{r} \\ 3qQ = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{p^3}{P} = \dfrac{3P^3}{p} - \dfrac{3R^3}{r} \\ 3rR = \dfrac{p^3}{P} - \dfrac{q^3}{Q} = \dfrac{3Q^3}{q} - \dfrac{3P^3}{p} \end{cases}$$

(vergl. Gauss, a. a. O. S. 471).

Wir könnten nun durch Eintragen in die 4fachen Produkte ebenso leicht alle übrigen Beziehungen ableiten, ziehen es aber vor, der Abwechslung wegen einen andern Weg einzuschlagen.

Vorher aber will ich noch eine Bemerkung machen, welche zeigt, in wie naher Beziehung diese Gauss'schen Formeln zu der Modulargleichung in § 2. (5) stehen, ja wie die Produkte derselben merkwürdiger Weise einzig und allein aus dieser abgeleitet werden können.

In § 2. (5) war:

$$pP = pQ + rR.$$

Hieraus folgt:

$$p^2P^2 = pqPQ + prPR$$
$$q^2Q^2 = pqPQ - qrQR$$
$$r^2R^2 = prPR - qrQR$$

und hieraus:

$$(p^2P^2+q^2Q^2+r^2R^2)^2 = 2(p^4P^4+q^4Q^4+r^4R^4)$$
$$2(p^4P^4-r^4R^4+q^4Q^4) = (p^2P^2+q^2Q^2+3R^2r^2)(p^2P^2+q^2Q^2-r^2R^2)$$
$$2(p^4P^4-q^4Q^4+r^4R^4) = (p^2P^2+3q^2Q^2+R^2r^2)(p^2P^2-q^2Q^2+r^2R^2)$$
$$2(q^4Q^4-p^4P^4+r^4R^4) = (3p^2P^2+q^2Q^2+r^2R^2)(q^2Q^2-p^2P^2+r^2R^2).$$

Nun folgt aber aus § 1. (23):

$$(p^4-q^4)(P^4-Q^4) = r^4R^4$$
$$p^4Q^4 + q^4P^4 = p^4P^4 - r^4R^4 + q^4Q^4$$
$$r^4Q^4 + q^4R^4 = p^4P^4 - r^4R^4 - q^4Q^4$$
$$q^4R^4 + r^4Q^4 = p^4P^4 - q^4Q^4 + r^4R^4,$$

ferner aus

$$pP = qQ + rR$$
$$2pqPQ = p^2P^2 - r^2R^2 + q^2Q^2$$
$$2qrQR = p^2P^2 - r^2R^2 - q^2Q^2$$
$$2prPR = p^2P^2 + r^2R^2 - q^2Q^2.$$

Trägt man dieses auf beiden Seiten ein, so sieht man, dass sich ergiebt:

$$\frac{p^3}{P}\cdot\frac{Q^3}{q} + \frac{q^3}{Q}\frac{P^3}{p} - p^2P^2 - q^2Q^2 = 3r^2R^2$$

und ebenso in den übrigen Fällen, also:

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(\frac{Q^3}{q} - \frac{P^3}{p}\right)\left(\frac{q^3}{Q} - \frac{p^3}{P}\right) = 3r^2R^2 \\ \left(\frac{P^3}{p} - \frac{R^3}{r}\right)\left(\frac{r^3}{R} - \frac{p^3}{P}\right) = 3q^2Q^2 \\ \left(\frac{Q^3}{q} - \frac{R^3}{r}\right)\left(\frac{r^3}{R} - \frac{q^3}{Q}\right) = 3p^2P^2 . \end{cases}$$

Wir hätten schliesslich dieses selbe Resultat noch auf eine dritte Weise aus § 2. (4) herleiten können, übergehen es aber der Kürze halber.

Zerlegt man nun die Formeln (2) und (3) in der Weise, dass z. B.

$$\left(\sqrt{\frac{P^3}{p}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}}\right)\left(\sqrt{\frac{P^3}{p}} - \sqrt{\frac{R^3}{r}}\right) = Qq$$

und beachtet die Beziehungen (1), so ergeben sich folgende neue irrationale Abhängigkeiten*):

---

*) Vergl. Schering: Mittheilungen über den III. Bd. von Gauss' Werken. Math. Ann. Bd. I. S. 139.

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{P^3}{p}} - \sqrt{\frac{R^3}{r}} - \sqrt{\frac{q^3}{Q}} = 0 \\ \sqrt{\frac{P^3}{p}} + \sqrt{\frac{Q^3}{q}} - \sqrt{\frac{r^3}{R}} = 0 \\ \sqrt{\frac{Q^3}{q}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}} - \sqrt{\frac{p^3}{P}} = 0 \\ 3\sqrt{\frac{P^3}{p}} - \sqrt{\frac{q^3}{Q}} - \sqrt{\frac{r^3}{R}} = 0 \\ 3\sqrt{\frac{Q^3}{q}} - \sqrt{\frac{r^3}{R}} - \sqrt{\frac{p^3}{P}} = 0 \\ 3\sqrt{\frac{R^3}{r}} + \sqrt{\frac{q^3}{Q}} - \sqrt{\frac{p^3}{P}} = 0\,. \end{cases}$$

Es lassen sich nun die Resultate (1) und (6) immer zu je zweien combiniren und es ergeben sich daraus 3 rationale Beziehungen zwischen je vier dieser Grössen. So ist z. B.

$$\frac{Q^2}{\sqrt{Qq}} + \frac{P^2}{\sqrt{Pp}} = \frac{3P^2}{\sqrt{Pp}} - \frac{q^2}{\sqrt{qQ}} = \frac{3Q^2}{\sqrt{Qq}} - \frac{p^2}{\sqrt{Pp}}\,.$$

Hieraus aber folgt:

$$\sqrt{\frac{pP}{qQ}} = \frac{2P^2}{Q^2+q^2} = \frac{p^2+P^2}{2Q^2}$$

und ähnlich noch 2 andere Beziehungen. Wie man sieht, folgt aus diesen:

$$(7)\quad \begin{cases} qqPP + ppQQ + ppqq - 3PPQQ = 0 \\ ppRR + rrPP - rrpp + 3RRPP = 0 \\ qqRR - rrQQ + rrqq + 3RRQQ = 0 \end{cases}$$

(vergl. Gauss, a. a. O. S. 471).

Andrerseits folgt ebenso aus (6) und (1):

$$\sqrt{\frac{Qq}{Pp}} = \frac{2Q^2}{P^2+p^2}, \quad \sqrt{\frac{Pp}{Qq}} = \frac{3P^2-p^2}{2q^2},$$

also:

$$\frac{3P^2-p^2}{2q^2} = \frac{2Q^2}{P^2+p^2}\,\frac{pP}{qQ}$$

$$(p^2-3P^2)(p^2+P^2) = -4pqPQ$$

nebst den beiden entsprechenden Formeln; so dass wir hieraus erhalten:

$$(8)\quad \begin{cases} p^4 - 3P^4 = 2pP(Rr - Qq) \\ 3Q^4 - q^4 \;\;\; = 2qQ(Pp + Rr) \\ r^4 - 3R^4 = 2Rr(Pp + Qq)\,. \end{cases}$$

Noch eine Gauss'sche Beziehung ergiebt sich aus der Combination der Formeln in (6) und (1) unter einander. Es ist:

$$\sqrt{\frac{Qq}{Pp}} = \frac{Q^2+q^2}{2P^2} = \frac{3Q^2+q^2}{3P^2+p^2},$$

also:

$$\frac{Q\,q}{P\,p} = \frac{3\,Q^4 + q^4 + 4\,Q^2 q^2}{2\,(3\,P^4 + p^2 P^2)},$$

also:

(a) $$\frac{6\,P^4}{p\,P} + 2\,p\,P = \frac{3\,Q^4 + q^4}{Q\,q} + 4\,Q\,q\,,$$

ferner:

$$\sqrt{\frac{Q\,q}{P\,p}} = \frac{q^2 - Q^2}{P^2 - p^2} = \frac{3\,Q^2 - q^2}{2\,p^2},$$

also:

$$\frac{Q\,q}{P\,p} = \frac{3\,Q^4 + q^4 - 4\,Q^2 q^2}{2\,p^4 - 2\,p^2 P^2},$$

also:

(b) $$\frac{2\,p^4}{p\,P} - 2\,p\,P = \frac{3\,Q^4 + q^4}{Q\,q} - 4\,Q\,q,$$

also durch Addition der Gleichungen (a) und (b)

$$\frac{3\,P^4 + p^4}{P\,p} = \frac{3\,Q^4 + q^4}{Q\,q}\,.$$

Auf gleiche Weise stellt man die Identität her:

$$\frac{3\,P^4 + p^4}{P\,p} = \frac{3\,R^4 + r^4}{R\,r},$$

so dass schliesslich:

(9) $$\frac{r^4 + 3\,R^4}{r\,R} = \frac{q^4 + 3\,Q^4}{q\,Q} = \frac{p^4 + 3\,P^4}{p\,P}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 471).

Setzt man ferner in § 1. (20) $x = y = \frac{\pi}{3}$ und trägt die betreffenden Werthe aus § 2. (11) ein, so ergeben sich nachstehende 3 Formeln:

(10)
$$\begin{cases} \dfrac{p\,p\,Q\,Q - q\,q\,P\,P}{p\,P - q\,Q} = 2\sqrt{p\,q\,P\,Q} \\ \dfrac{r\,r\,P\,P - p\,p\,R\,R}{p\,P - r\,R} = 2\sqrt{r\,p\,R\,P} \\ \dfrac{r\,r\,Q\,Q + q\,q\,R\,R}{r\,R + q\,Q} = 2\sqrt{r\,q\,R\,Q} \end{cases}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 479).

Aus der Formel § 1. (17)

$$\vartheta_1{}^4(x, q) + \vartheta_3{}^4(x, q) - \vartheta^4(x, q) - \vartheta_2{}^4(x, q) = 0$$

resultiren für $x = \frac{\varpi}{3}$ und $x = \frac{\pi}{3}$ noch folgende 2 Beziehungen:

(11)
$$\begin{cases} \dfrac{R^2 P}{r^2 p^2} + \dfrac{Q^2 P^2}{q^2 p^2} - \dfrac{R^2 Q^2}{r^2 q^2} = 1 \\ \dfrac{r^2 p^2}{R^2 P^2} + \dfrac{q^2 p^2}{Q^2 P^2} - \dfrac{r^2 q^2}{R^2 Q^2} = 9\,. \end{cases}$$

Gauss hat diese beiden Beziehungen für die Dreitheilung nicht angegeben. Doch finden sich die analogen Formeln bei der Fünfthei-

lung (vgl. § 4. (21), so wie wir auch schon in (12) 2 Abhängigkeiten ganz gleicher Natur antreffen werden.

Wohl aber hat Gauss noch 2 eigenthümliche Formeln ohne Beweis angegeben, indem er die Grössen:

$$P_0 = \vartheta_3(0, q^{\frac{1}{3}}), \quad Q_0 = \vartheta(0, q^{\frac{1}{3}}), \quad R_0 = \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{3}})$$

einführt, welche den Grössen P, Q, R coordinirt sind. Diese Formeln finden sich Band III, S. 476 und sind:

$$\left\{\frac{3PP - P_0P_0}{2}\right\}^2 = p^4 - 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\left\{\frac{3QQ - Q_0Q_0}{2}\right\}^2 = q^4 + 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Indem ich mich bemühte, auch diese Formeln, die etwas tiefer liegen, aus der Theorie der ϑ-Functionen abzuleiten, bin ich auf eine Menge eigenthümlicher Beziehungen gestossen, die Gauss nicht angegeben hat, aus denen dann aber schliesslich nicht nur die beiden obigen Gauss'schen Beziehungen, sondern noch 4 andere ebensolche sich ergeben. Es sind diese Formeln bemerkenswerth, da links z. B. nichts weiter als P_0 und P, resp. Q und Q_0 etc., rechts aber allein die überhaupt für die ganze Theorie der elliptischen Transcendenten fundamentalen Grössen p, q und r stehen.

Setzt man in die Formeln § 2. (4) einmal $x = \frac{\varpi}{3}$, $y = 0$, sodann aber $x = 0$, $y = \frac{\pi}{3}$ und im zweiten Fall für q $q^{\frac{1}{3}}$, so ergeben sich nach den nöthigen Vereinfachungen folgende Beziehungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} \sqrt{\frac{RP}{R_0P_0}} + \sqrt{\frac{PQ}{P_0Q_0}} - \sqrt{\frac{RQ}{R_0Q_0}} = 1 \\ \sqrt{\frac{R_0P_0}{RP}} + \sqrt{\frac{P_0Q_0}{PQ}} - \sqrt{\frac{R_0Q_0}{RQ}} = 3 \end{cases}$$

vgl. hiermit (11), sowie § 4. (21); ferner:

$$(13) \qquad \begin{cases} P\sqrt{rq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{RQ} + \sqrt{R_0Q_0}\} \\ P_0\sqrt{rq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{3\sqrt{RQ} + \sqrt{R_0Q_0}\} \\ Q\sqrt{pr} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{R_0P_0} - \sqrt{RP}\} \\ Q_0\sqrt{pr} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{R_0P_0} - 3\sqrt{RP}\} \\ R\sqrt{pq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{PQ} - \sqrt{P_0Q_0}\} \\ R_0\sqrt{pq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{3\sqrt{PQ} - \sqrt{P_0Q_0}\}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt nun einerseits:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{3PP - P_0P_0}{2} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{R_0Q_0 - 3RQ}{rq} \\ \dfrac{3QQ - Q_0Q_0}{2} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{R_0P_0 - 3RP}{pr} \\ \dfrac{3RR - R_0R_0}{2} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{P_0Q_0 - 3PQ}{pq} \end{cases}$$

als auch andrerseits:

$$(15)\quad \begin{cases} 3P - P_0 = 2\sqrt{\dfrac{R_0Q_0}{rq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ 3Q - Q_0 = 2\sqrt{\dfrac{R_0P_0}{rp}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -(3R - R_0) = 2\sqrt{\dfrac{P_0Q_0}{pq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -(P - P_0) = 2\sqrt{\dfrac{RQ}{rq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ Q - Q_0 = 2\sqrt{\dfrac{PR}{pr}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -(R - R_0) = 2\sqrt{\dfrac{PQ}{pq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

und hieraus:

$$(16)\quad \begin{cases} (3P - P_0)(3Q - Q_0)(3R - R_0) = -4P_0Q_0R_0 \\ (P - P_0)\quad (Q - Q_0)\quad (R - R_0) = \quad 4PQR. \end{cases}$$

Andrerseits aber folgen aus (13) mit Hülfe von (12), da:

$$\sqrt{P}\{\sqrt{R_0Q} + \sqrt{Q_0R}\} = \sqrt{P_0}\{\sqrt{R_0Q_0} + \sqrt{RQ}\}:$$

die 3 Beziehungen:

$$(17)\quad \begin{cases} \sqrt{PP_0}\sqrt{rq} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{QR_0} + \sqrt{RQ_0}\} \\ \sqrt{QQ_0}\sqrt{pr} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{PR_0} - \sqrt{RP_0}\} \\ \sqrt{RR_0}\sqrt{pq} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{QP_0} - \sqrt{PQ_0}\}. \end{cases}$$

Combiniren wir diese Resultate mit (13), so haben wir folgende Beziehungen:

$$\begin{cases} \sqrt{Prq}(\sqrt{P} + \sqrt{P_0}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{Q} + \sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{R} + \sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{Prq}(\sqrt{P} - \sqrt{P_0}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{Q} - \sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{R} - \sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{P_0rq}(\sqrt{P_0} + \sqrt{3P}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{3Q} + \sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{3R} + \sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{P_0rq}(\sqrt{P_0} - \sqrt{3P}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{3Q} - \sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{3R} - \sqrt{R_0}\} \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \sqrt{Qpr}\,(\sqrt{Q}+\sqrt{Q_0}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P}+\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{R_0}-\sqrt{R}\} \\ \sqrt{Qpr}\,(\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P_0}-\sqrt{P}\}\{\sqrt{R}+\sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{Q_0pr}\,(\sqrt{Q_0}+\sqrt{3Q}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{3P}+\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{R_0}-\sqrt{3R}\} \\ \sqrt{Q_0pr}\,(\sqrt{Q_0}-\sqrt{3Q}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P_0}-\sqrt{3P}\}\{\sqrt{R_0}+\sqrt{3R}\} \\ \sqrt{Rpq}\,(\sqrt{R}+\sqrt{R_0}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P}+\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0}\} \\ \sqrt{Rpq}\,(\sqrt{R}-\sqrt{R_0}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{P_0}-\sqrt{P}\}\{\sqrt{R}+\sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{R_0pq}\,(\sqrt{R_0}+\sqrt{3R}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{3P}+\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{3Q}-\sqrt{Q_0}\} \\ \sqrt{R_0pq}\,(\sqrt{R_0}-\sqrt{3R}) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \{\sqrt{3P}-\sqrt{P_0}\}\{\sqrt{3Q}+\sqrt{Q_0}\} \end{cases}$$

und hieraus:

$$(19)\quad \begin{cases} -2\sqrt{PQR} = (\sqrt{P}+\sqrt{P_0})(\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0})(\sqrt{R}-\sqrt{R_0}) \\ -2\sqrt{PQR} = (\sqrt{P}-\sqrt{P_0})(\sqrt{Q}+\sqrt{Q_0})(\sqrt{R}+\sqrt{R_0}) \\ 2\sqrt{P_0Q_0R_0} = (\sqrt{3P}+\sqrt{P_0})(\sqrt{3Q}-\sqrt{Q_0})(\sqrt{R_0}-\sqrt{3R}) \\ 2\sqrt{P_0Q_0R_0} = (\sqrt{3P}-\sqrt{P_0})(\sqrt{3Q}+\sqrt{Q_0})(\sqrt{3R}+\sqrt{R_0}) \end{cases}$$

(vgl. hiermit die Resultate der Fünftheilung § 4. (17) und § 5. (3) und (5)).

Setzen wir nun in die Formeln § 1. (17)

$$x = \frac{4\pi}{3}, \quad z = \frac{2\pi}{3}, \quad y = w = \frac{\varpi}{3},$$

also:

$$x' = \pi + \frac{\varpi}{3}, \quad y' = \pi - \frac{\varpi}{3}, \quad z' = w' = \frac{\pi}{3}$$

Dann ist:

$$\vartheta_3^2\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right)\vartheta_3^2\left(\tfrac{\varpi}{3}, q\right) - \vartheta^2\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right)\vartheta^2\left(\tfrac{\varpi}{3}, q\right) = -\vartheta_1^2\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right)\vartheta_1^2\left(\tfrac{\varpi}{3}, q\right) + \vartheta_2^2\left(\tfrac{\pi}{3}, q\right)\vartheta_2^2\left(\tfrac{\varpi}{3}, q\right),$$

so dass nach § 2. (11):

$$(20)\qquad r^2q^2PP_0 - r^2p^2QQ_0 - p^2q^2RR_0 = 3PQRP_0Q_0R_0$$

und hieraus:

$$(21)\qquad \begin{cases} \frac{p^2}{PP_0}(r^2QQ_0+q^2RR_0) = -3RQR_0Q_0+r^2q^2 \\ \frac{q^2}{QQ_0}(r^2PP_0-p^2RR_0) = \quad 3PRP_0R_0+r^2p^2 \\ \frac{r^2}{RR_0}(q^2PP_0-p^2QQ_0) = \quad 3PQP_0Q_0+p^2q^2. \end{cases}$$

Ferner folgen aus § 1. (18) die Formeln:

$$\vartheta_2^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)=\vartheta_1^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-\vartheta_3^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)$$

$$\vartheta_2^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta_3^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)=\vartheta_1^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-\vartheta^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)$$

$$\vartheta^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta_3^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)=\vartheta_2^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-\vartheta_1^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)$$

und hieraus mit Hülfe von § 2. (11)

$$(22)\qquad \begin{cases} \frac{p^2}{PP_0}(QR_0-RQ_0) = 3QR+R_0Q_0 \\ \frac{q^2}{QQ_0}(PR_0-RP_0) = 3RP+R_0P_0 \\ \frac{r^2}{RR_0}(QP_0-PQ_0) = 3PQ+P_0Q_0. \end{cases}$$

Bildet man nun aber aus den Formeln (13) den Complex

$$r^2(q^2PP_0-p^2QQ_0),$$

indem man die zugehörigen Formeln multiplicirt, sowie denselben Ausdruck aus (17), indem man quadrirt, und zieht von dem doppelten letzteren den ersten ab, so folgt nach Beachtung der Beziehung § 2. (5)

$$q^2PP_0-p^2PP_0=\left(\tfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(3R^2+R_0^2-4RR_0).$$

Wendet man für $3R^2+R_0^2-4RR_0$ die Beziehungen (15) an, und combinirt zugleich damit (21), so folgt:

$$(23)\qquad \begin{cases} q^2PP_0-p^2QQ_0 = 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{PQP_0Q_0}}{pq}=\frac{RR_0}{r^2}\{3PQP_0Q_0+p^2q^2\} \\ r^2PP_0-p^2RR_0 = 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RPR_0P_0}}{rp}=\frac{QQ_0}{q^2}\{3PRP_0R_0+r^2p^2\} \\ r^2QQ_0+q^2RR_0 = 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RQR_0Q_0}}{rq}=\frac{PP_0}{p^2}\{r^2q^2-3RQR_0Q_0\}. \end{cases}$$

Erhebt man nun die 1. Formel in (22) ins Quadrat, so ist:

$$qR^2Q^2+R_0^2Q_0^2+6RQR_0Q_0=\frac{p^4}{P^2P_0^2}\{RQ_0-QR_0\}^2,$$

also, wenn man hierzu aus (23) addirt:

$$-12RQR_0Q_0 + 4r^2q^2 = 16p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RQR_0Q_0}}{PP_0rq},$$

so folgt:

$$\begin{aligned}(3RQ - R_0Q_0)^2 + 4r^2q^2 &= \frac{p^4}{P^2P_0^2}(RQ_0 - QR_0)^2 + 16p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RQR_0Q_0}}{PP_0rq} \\ &= \frac{p^4}{P^2P_0^2}(RQ_0 + QR_0)^2 - \frac{4p^4}{P^2P_0^2}RQR_0Q_0 + 16p^2(pqr)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RQR_0Q_0}}{PP_0rq}.\end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass nach (17):

$$RQ_0 + QR_0 = rqPP_0\left(\frac{2}{pqr}\right)^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{RQR_0Q_0},$$

und entwickelt hiervon das Quadrat, so fällt in der Gleichung das letzte Glied gegen das doppelte Product, das vorletzte Glied gegen das letzte Glied des Quadrates fort, und wir haben:

$$(3RQ - R_0Q_0)^2 + 4r^2q^2 = p^4r^2q^2\left(\frac{2}{pqr}\right)^{\frac{4}{3}} = 4p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Hieraus folgt jetzt:

$$\left\{\frac{3RQ - R_0Q_0}{2}\right\}^2 = -r^2q^2 + p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

und hieraus in Folge der Formeln (14)

$$\left\{\frac{3PP - P_0P_0}{2}\right\}^2 = p^4 - 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Ebenso behandelt man nun die beiden anderen Gleichungen in (22) und (23) und man erhält aus jeder wieder 2 Formeln, so dass wir nun im Ganzen folgende sechs Formeln haben, von denen die ersten beiden von Gauss (vgl. Bd. III, S. 476) angegeben sind:

(24)
$$\left\{\begin{aligned}\left\{\frac{3PP - P_0P_0}{2}\right\}^2 &= p^4 - 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \\ \left\{\frac{3QQ - Q_0Q_0}{2}\right\}^2 &= q^4 + 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \\ \left\{\frac{3RR - R_0R_0}{2}\right\}^2 &= r^4 + 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \\ \left\{\frac{3RQ - R_0Q_0}{2}\right\}^2 &= -r^2q^2 + p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \left\{\frac{3PR - P_0R_0}{2}\right\}^2 &= r^2p^2 + q^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \left\{\frac{3PQ - P_0Q_0}{2}\right\}^2 &= p^2q^2 + r^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}\right.$$

§ 4.

Die Fünftheilung.

Gemäss § 1. (25) ist hier bezeichnet

$$P = \vartheta_3(o, q^5), \quad Q = \vartheta(o, q^5), \quad R = \vartheta_2(o, q^5),$$

Die Reihen, mit denen wir es dann zu thun haben, sind folgende:

(1)
$$\left\{\begin{array}{ll}
P=\vartheta_3(o,q^5) & =1+2q^5+2q^{20}+2q^{45}+2q^{80}+2q^{125}+\cdots \\
Q=\vartheta(o,q^5) & =1-2q^5+2q^{20}-2q^{45}+2q^{80}-2q^{125}\pm\cdots \\
R=\vartheta_2(o,q^5) & =2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{45}{4}}+2q^{\frac{125}{4}}+2q^{\frac{245}{4}}+\cdots \\
q^{\frac{1}{5}}\vartheta_3(\varpi,q^5) & =q^{\frac{1}{5}}+q^{\frac{16}{5}}+q^{\frac{36}{5}}+q^{\frac{81}{5}}+q^{\frac{121}{5}}+q^{\frac{196}{5}}+q^{\frac{256}{5}}+\cdots \\
q^{\frac{4}{5}}\vartheta_3(2\varpi,q^5) & =q^{\frac{4}{5}}+q^{\frac{9}{5}}+q^{\frac{49}{5}}+q^{\frac{64}{5}}+q^{\frac{144}{5}}+q^{\frac{169}{5}}+q^{\frac{289}{5}}+\cdots \\
q^{\frac{1}{5}}\vartheta(\varpi,q^5) & =q^{\frac{1}{5}}-q^{\frac{16}{5}}-q^{\frac{36}{5}}+q^{\frac{81}{5}}+q^{\frac{121}{5}}-q^{\frac{196}{5}}-q^{\frac{256}{5}}\pm\cdots \\
q^{\frac{4}{5}}\vartheta(2\varpi,q^5) & =q^{\frac{4}{5}}-q^{\frac{9}{5}}-q^{\frac{49}{5}}+q^{\frac{64}{5}}+q^{\frac{144}{5}}-q^{\frac{169}{5}}-q^{\frac{289}{5}}\pm\cdots \\
q^{\frac{1}{5}}\vartheta_2(\varpi,q^5) & =q^{\frac{1}{20}}+q^{\frac{169}{20}}+q^{\frac{289}{20}}+q^{\frac{529}{20}}+q^{\frac{729}{20}}+\cdots \\
q^{\frac{1}{5}}\vartheta_2(2\varpi,q^5) & =q^{\frac{9}{20}}+q^{\frac{81}{20}}+q^{\frac{121}{20}}+q^{\frac{361}{20}}+\cdots \\
iq^{\frac{1}{5}}\vartheta_1(\varpi,q^5) & =q^{\frac{9}{20}}-q^{\frac{49}{20}}-q^{\frac{169}{20}}+q^{\frac{289}{20}}+q^{\frac{529}{20}}+\cdots \\
iq^{\frac{4}{5}}\vartheta_1(2\varpi,q^5) & =q^{\frac{1}{20}}-q^{\frac{81}{20}}-q^{\frac{121}{20}}+q^{\frac{361}{20}}+\cdots
\end{array}\right.$$

Beachten wir den eigenthümlichen Bau dieser Reihen. In $\vartheta_3(\varpi, q^5)$, $\vartheta(\varpi, q^5)$, $\vartheta_2(\varpi, q^5)$ und $\vartheta_1(\varpi, q^5)$ stehen die Quadrate sämmtlicher Zahlen (resp. sämmtlicher ungerader Zahlen in den letzten beiden Reihen), die über oder unter einem Vielfachen von 5 liegen. In den 4 andern Reihen aber stehen die Quadrate der übrigen Zahlen. Die Reihen für die reelle Periode haben folgendes Aussehen:

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = 1 + 2q^{25} + 2q^{100} + \cdots + 2\cos\frac{2\pi}{5}\left\{q + q^{16} + q^{36} + \cdots\right\} - 2\cos\frac{\pi}{5}\left(q^4 + q^9 + q^{49} + \cdots\right)$$

$$\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 1 + 2q^{25} + 2q^{100} + \cdots + 2\cos\frac{2\pi}{5}\left\{q^4 + q^9 + q^{49} + \cdots\right\} - 2\cos\frac{\pi}{5}\left(q + q^{16} + q^{36} + \cdots\right).$$

Die übrigen, welche analog gebildet sind, übergehen wir der Kürze halber.

Nun setzen wir in die Grundformel § 1. (10) $t = 1$, $s = 2$, so folgen durch passende Veränderung der Argumente um die halben Perioden folgende 6 Beziehungen:

$$
(2)\quad \begin{cases}
\vartheta_3(x+2y,q)\ \vartheta_3(2x-y,q) = \\
\qquad = \sum_0^4 q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta_3(5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_3(5y-2\mu\varpi, q^5) \\
\vartheta\ (x+2y,q)\ \vartheta\ (2x-y,q) \\
\qquad = \sum_0^4 (-1)^\mu q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta\ (5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta\ (5y-2\mu\varpi, q^5) \\
\vartheta_2(x+2y,q)\ \vartheta_2(2x-y,q) \\
\qquad = \sum_0^4 q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta_2(5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_2(5y-2\mu\varpi, q^5) \\
\vartheta\ (x+2y,q)\ \vartheta_3(2x-y,q) \\
\qquad = \sum_0^4 (-1)^\mu q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta\ (5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_3(5y-2\mu\varpi, q^5) \\
\vartheta_2(x+2y,q)\ \vartheta_3(2x-y,q) \\
\qquad = \sum_0^4 q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta_2(5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_3(5y-2\mu\varpi, q^5) \\
\vartheta\ (x+2y,q)\ \vartheta_2(2x-y,q) \\
\qquad = \sum_0^4 (-1)^{\mu+1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta\ (5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_2(5y-2\mu\varpi, q^5).
\end{cases}
$$

Setzt man hierein $x = y = 0$, so folgt nach einigen Umformungen:

$$
(3)\quad \begin{cases}
4q\ \vartheta_3(\varpi, q^5)\ \vartheta_3(2\varpi, q^5) = pp - PP \\
4q\ \vartheta\ (\varpi, q^5)\ \vartheta\ (2\varpi, q^5) = QQ - qq \\
4q\ \vartheta_2(\varpi, q^5)\ \vartheta_2(2\varpi, q^5) = rr - RR;
\end{cases}
$$

ferner:

$$
(4)\quad \begin{cases}
2q\left\{\vartheta_3(\varpi, q^5)\ \vartheta\ (2\varpi, q^5) - \vartheta\ (\varpi, q^5)\ \vartheta_3(2\varpi, q^5)\right\} = pq - PQ \\
2q\left\{\vartheta\ (\varpi, q^5)\ \vartheta_2(2\varpi, q^5) - \vartheta_2(\varpi, q^5)\ \vartheta\ (2\varpi, q^5)\right\} = rq + RQ \\
2q\left\{\vartheta_2(\varpi, q^5)\ \vartheta_3(2\varpi, q^5) + \vartheta_3(\varpi, q^5)\ \vartheta_2(2\varpi, q^5)\right\} = pr - PR.
\end{cases}
$$

Es braucht wohl nicht noch besonders darauf aufmerksam gemacht zu werden, dass q auf der linken Seite der Modul ist, während q auf der rechten Seite das Gauss'sche Zeichen für $\vartheta(0, q)$ bedeutet. Aehnliche Formeln wie in (3) ergeben sich aber auch sehr leicht für die reelle Periode. Setzt man in (2) $x = \frac{\pi}{5}$, $y = 0$, so ist:

$$(5^a)\quad \begin{cases} \vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = P^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=4} q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\, \vartheta_3(\mu\varpi, q^5)\, \vartheta_3(2\mu\varpi, q^5) \\ \vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = Q^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=4} q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\, \vartheta(\mu\varpi, q^5)\, \vartheta(2\mu\varpi, q^5) \\ -\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = R^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=4} q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\, \vartheta_2(\mu\varpi, q^5)\, \vartheta_2(2\mu\varpi, q^5). \end{cases}$$

$\vartheta_3(\mu\varpi, q^5) \cdot \vartheta_3(2\mu\varpi, q^5)$ lässt sich aber in allen Gliedern auf $q\vartheta_3(\varpi, q^5)\,\vartheta_3(2\varpi, q^5)$ zurückführen, und dieser Ausdruck ist dann in unserem Falle behaftet mit dem Factor:

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} \text{ d. i. mit } \frac{e^{\frac{8i\pi}{5}} e^{\frac{2i\pi}{5}} - e^{\frac{2i\pi}{5}}}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1} = -1, \text{ da } e^{2i\pi} = 1.$$

Dann ist offenbar:

$$\begin{aligned} \vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right) &= P^2 - q\,\vartheta_3(\varpi, q^5)\,\vartheta_3(2\varpi, q^5) \\ \vartheta\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right) &= Q^2 + q\,\vartheta(\varpi, q^5)\,\vartheta(2\varpi, q^5) \\ -\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right) &= R^2 - q\,\vartheta_2(\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\varpi, q^5). \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung von (3):

$$(5^b)\quad \begin{cases} 4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5PP - pp \\ 4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5QQ - qq \\ 4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = rr - 5RR. \end{cases}$$

Wenn wir aber in die 3. Formel von (2) statt x und y $x + \frac{\pi}{2}$ und $y + \frac{\pi}{2}$ setzen und dann $x = \frac{\pi}{5}$ $y = 0$ nehmen, so folgt, da nach § 1. (5)

$$\vartheta_1(\pi - \mu\varpi, q^5) = \vartheta_1(\mu\varpi, q^5)$$

$$\vartheta_1\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_1\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\, \vartheta_1(\mu\varpi, q^5)\, \vartheta_1(2\mu\varpi, q^5).$$

Vermöge § 1. (3) lassen sich nun die vier Glieder rechter Hand alle auf $q\vartheta_1(\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5)$ reduciren. Davon ist aber das 1. und 4. Glied negativ, das 2. und 3. positiv, also haben wir:

$$-e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{\frac{6i\pi}{5}}-e^{\frac{8i\pi}{5}}=-\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{-2i\pi}{5}}\right)-\left(e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{\frac{-i\pi}{5}}\right)$$

$$=-2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\right)=-2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)=-\sqrt{5}.$$

Es ist also:

$$(6)\qquad -\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=q\sqrt{5}\,\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5).$$

Es ist also jetzt nur noch übrig $\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)$ herzuleiten. Setzen wir in § 1. (20) $x=2\varpi$ $y=\varpi$ und für q q^5 und multipliciren mit $16q^2$, so ergeben sich mit Hülfe von (3), sowie für $x=\frac{2\pi}{5}$, $y=\frac{\pi}{5}$ mit Hülfe von (5) folgende Beziehungen:

$$(7)\qquad\begin{cases}(p^2-P^2)^2-(q^2-Q^2)^2=4R^2(r^2-R^2)\\(p^2-P^2)^2-(r^2-R^2)^2=4Q^2(q^2-Q^2)\\(r^2-R^2)^2+(q^2-Q^2)^2=4P^2(p^2-P^2)\\(5P^2-p^2)^2-(5Q^2-q^2)^2=4r^2(5R^2-r^2)\\(5P^2-p^2)^2-(5R^2-r^2)^2=4q^2(5Q^2-q^2)\\(5R^2-r^2)^2+(5Q^2-q^2)^2=4p^2(5P^2-p^2);\end{cases}$$

ferner:

$$(8)\qquad\begin{cases}16q^2\,\vartheta_1^2(\varpi,q^5)\,\vartheta_1^2(2\varpi,q^5)=-\frac{16}{5}\,\vartheta_1^2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_1^2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)\\\qquad\qquad=(r^2-R^2)(r^2-5R^2)\\\qquad\qquad=(q^2-Q^2)(q^2-5Q^2)\\\qquad\qquad=-(p^2-P^2)(p^2-5P^2).\end{cases}$$

Ferner aber folgt aus (7)

$$p^4-2p^2P^2+P^4-r^4+2r^2R^2-R^4=4Q^2q^2-4Q^4,$$

also nach § 1. (23):

$$(9)\qquad\begin{cases}(q^2-Q^2)(q^2-5Q^2)\\\quad=2(PPpp-QQqq-RRrr)=16q^2\,\vartheta_1^2(\varpi,q^5)\,\vartheta_1^2(2\varpi,q^5).\end{cases}$$

Wenden wir hierauf die 3 letzten Formeln aus § 1. (14) an, so ist:

$$(q^2-Q^2)(q^2-5Q^2)=4\left\{\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{10})-\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{10})\right\}$$

also:

$$(10)\quad 2q\,\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)=\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{10})-\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{10})=V.$$

Jetzt werde in die Hauptformel § 1. (8) $\alpha=1$, $\beta=5$ gesetzt, so ist dann:

$$\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^5)=\sum_{\mu=0}^{\mu=5}q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^6)\,\vartheta_3(5x-y-5\mu\varpi,q^{30}).$$

Setzt man hierein statt q q^2 und $x = \frac{\varpi}{2}$, $y = 0$ und reducirt auf gehörige Weise vermöge der Formeln § 1. (3), so ist:

$$q^{-\frac{1}{2}}\,\vartheta_2(0, q^2)\,\vartheta_3(0, q^{10}) = 2\,\vartheta_3(\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(5\varpi, q^{60}) + 2q^4\vartheta_3(3\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(15\varpi, q^{60}) + 2q^{12}\,\vartheta_3(5\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(25\varpi, q^{60}).$$

Setzt man aber $x = 0$, $y = \frac{5\varpi}{2}$, so folgt:

$$q^{-\frac{1}{2}}\,\vartheta_3(0, q^2)\,\vartheta_2(0, q^{10}) = 2q^2\,\vartheta_3(5\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(5\varpi, q^{60}) + 2q^{10}\,\vartheta_3(3\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(15\varpi, q^{60}) + 2q^{10}\,\vartheta_3(\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(25\varpi, q^{60}).$$

Subtrahirt man beide Formeln, so ist:

$$q^{\frac{1}{2}}\,V = 2\left\{\vartheta_3(5\varpi, q^{60}) - \vartheta_2(5\varpi, q^{60})\right\}\left\{\vartheta_3(\omega, q^{12}) - \vartheta_2(\varpi, q^{12})\right\}.$$

Mit Hülfe von § 1. (6) folgt schliesslich:

$$\vartheta_3(0, q^2)\,\vartheta_3(0, q^{10}) - \vartheta_2(0, q^2)\,\vartheta_3(0, q^{10}) = 2q^2\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,\vartheta_1(5\varpi, q^{15}),$$

also nach dem Vergleiche mit (10)

$$(11) \qquad q\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,\vartheta_1(5\varpi, q^{15}) = \vartheta_1(\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5).$$

Diese elegante Formel ist für die ganze nachfolgende Entwicklung wichtig; der Grundgedanke für ihre Herleitung rührt von Herrn Prof. Schröter her. Es findet sich diese Beziehung auch schon bei Jacobi, der auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Productbeziehungen zu ihr gelangt ist. (Vgl. J. Jacobi: Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten 2 quadratische Formen haben: Crelle's Journal, Bd. 37, S. 92, Formel 21.) Ich werde später in einer allgemeinen Untersuchung zeigen, dass sich eine allgemeine Formel für alle ungraden Zahlen angeben lässt, von der (11) nur ein specieller Fall ist (vgl. § 9. (12) und (13)).

Da nun nach § 2. (11)

$$iq^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_1(\varpi, q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

so ist:

$$(12) \qquad q\,\vartheta_1(\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5) = -\left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dann ergiebt sich also aus (12) und (8)

$$(13) \qquad \begin{cases} & (rr - RR)\,(rr - 5RR) \\ = & (qq - QQ)\,(qq - 5QQ) \\ = & -(pp - PP)\,(pp - 5PP) = (16pqr\,PQR)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

und aus (12) und (9):

$$(14) \qquad 2pp\,PP - 2qq\,QQ - 2rr\,RR = (16pqr\,PQR)^{\frac{2}{3}}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475. Zugleich ist zu bemerken, dass sich an der betreffenden Stelle ein Zeichenfehler findet).

Diese letztere Beziehung:

$$2ppPP - 2qqQQ - 2rrRR = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}}$$

ist sehr interessant, denn sie giebt Gelegenheit, die Modulargleichung für die Transformation fünfter Ordnung in einer neuen Gestalt darzustellen. Setzt man die Werthe aus § 1. (2) ein, also z. B. $q = \sqrt{\frac{2K\varkappa_1}{\pi}}$, $Q = \sqrt{\frac{2\Lambda\lambda_1}{\pi}}$ etc., so ist:

$$\varkappa\lambda + \varkappa_1\lambda_1 + 2\sqrt[3]{4\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1} = 1,$$

so dass also diese Modulargleichung sich in 4facher Gestalt darbietet, denn es bestehen noch die 3 Formen:

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda}\,(\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda}) = \sqrt[4]{\varkappa_1\lambda_1}\,(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\varkappa_1})$$
$$\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda} = \sqrt[3]{4\varkappa_1\lambda_1}\,\sqrt[12]{\varkappa\lambda}$$
$$\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\varkappa_1} = \sqrt[3]{4\varkappa\lambda}\,\sqrt[12]{\varkappa_1\lambda_1}$$

(vgl. Schröter: Ueber die Modulargleichungen Crelle Bd. 57, S. 378 so wie de aequ. mod. S. 16; sowie auch Fund. nov. S. 69).

Aus den Formeln (4) lassen sich mit Hülfe der Formeln § 1. (21) nun ähnliche Beziehungen angeben, wie in § 3. (7) für die Dreitheilung. Quadrirt man nämlich die 3 Formeln in (4) und setzt z. B. für

$$\vartheta_3^2(\varpi, q^5)\ \vartheta^2(2\varpi, q^5) + \vartheta^2(\varpi, q^5)\ \vartheta_3^2(2\varpi, q^5)$$

seinen Werth aus § 1. (21), nämlich:

$$-P^2\,\vartheta(2\varpi, q^5)\,\vartheta(\varpi, q^5) + Q^2\,\vartheta_3(2\varpi, q^5)\,\vartheta_3(\varpi, q^5)$$

so ergiebt sich:

$$(15)\quad \begin{cases} PPqq + QQpp + 4pqPQ - ppqq - 5PPQQ = 0 \\ PPrr + RRpp + 4prPR - pprr - 5RRPP = 0 \\ QQrr + RRqq + 4qrQR - qqrr - 5QQRR = 0. \end{cases}$$

Es folgt ferner aus § 1. (19)

$$2\vartheta(\varpi, q^5)\ \vartheta_1(\varpi, q^5)\ \vartheta_2(\varpi, q^5)\ \vartheta_3(\varpi, q^5) = PQR\,\vartheta_1(2\varpi, q^5)$$
$$2\vartheta(2\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\varpi, q^5)\,\vartheta_3(2\varpi, q^5) = q^{-3}PQR\,\vartheta_1(\varpi, q^5)$$

und

$$2\vartheta\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_1\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right)$$
$$2\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_1\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right)$$

Multiplicirt man die ersten beiden Gleichungen mit einander, so wie die letzten beiden, so ergiebt sich nach Anwendung von (3) und (5)

$$(16)\quad \begin{cases} (pp - PP)\ \ (QQ - qq)\ \ (rr - RR) &= 16\,P^2Q^2R^2 \\ (pp - 5PP)\,(qq - 5QQ)\,(rr - 5RR) &= 16p^2q^2r^2\,. \end{cases}$$

Es wird sich dann später zeigen (vgl. § 5. (4) und (6)), dass sich diese beiden Gleichungen noch weiter zerlegen lassen, indem nämlich wird:

$$(17)\quad \begin{cases} (p - P)\,(q + Q)\,(r + R) = 4\,PQR \\ (p + P)\,(Q - q)\,(r - R) = 4\,PQR \\ (\sqrt{5}\,P - p)\,(\sqrt{5}\,Q + q)\,(\sqrt{5}\,R + r) = 4pqr \\ (\sqrt{5}\,P + p)\,(\sqrt{5}\,Q - q)\,(r - \sqrt{5}\,R) = 4pqr\,. \end{cases}$$

Wir gelangen nun zur Darstellung derjenigen Beziehungen, welche bei Gauss das Hauptinteresse in Anspruch nehmen Aus § 1. (13) folgt nämlich:

$$\sqrt{PQ}\,\vartheta_1(2\varpi, q^{10}) = \vartheta_1(\varpi, q^5)\quad \vartheta_2(\varpi, q^5)$$
$$\sqrt{PQ}\,\vartheta_1(4\varpi, q^{10}) = \vartheta_1(2\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\varpi, q^5),$$

also durch Multiplication und Benutzung von (3) und (12):

$$PQ\left\{\tfrac{1}{4}\vartheta(0, q^2)\,\vartheta_2(0, q^2)\,\vartheta_3(0, q^2)\,\vartheta(0, q^{10})\,\vartheta_2(0, q^{10})\,\vartheta_3(0, q^{10})\right\}^{\frac{1}{3}} = (\tfrac{1}{4}pqrPQR)^{\frac{1}{3}}(r^2 - R^2)\,.$$

Reduciren wir $\vartheta(0, q^2)$ etc. nach den Formeln § 1. (14), so folgt schliesslich:

$$rr - RR = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}\,.$$

Durch die anderen Beziehungen in § 1. (13) kann man auf dieselbe Weise die Differenzen $QQ - qq$ und $pp - PP$ als Product darstellen. Beachtet man (13), so folgt auch für $rr - 5RR$ etc. ein Product, da dort

$$(rr - RR)\,(rr - 5RR) = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}}.$$

Setzen wir

$$\frac{(4PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} = A\,, \qquad \frac{(4pqr)^{\frac{5}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} = B\,,$$

so dass also:

$$AB = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}}, \qquad \frac{A}{B} = \frac{PQR}{pqr}\,.$$

Dann folgt:

$$(18)\quad \begin{cases} 4q\,\vartheta_3(\varpi, q^5)\,\vartheta_3(2\varpi, q^5) = pp - PP = A\sqrt{\frac{p}{P}} \\ 4q\,\vartheta\,(\varpi, q^5)\,\vartheta\,(2\varpi, q^5) = QQ - qq = A\sqrt{\frac{q}{Q}} \\ 4q\,\vartheta_2(\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\varpi, q^5) = rr - RR = A\sqrt{\frac{r}{R}} \end{cases}$$

$$(19)\qquad \begin{cases} 4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,PP - pp = B\sqrt{\frac{P}{p}} \\ 4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,QQ - qq = B\sqrt{\frac{Q}{q}} \\ 4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = rr - 5\,RR = B\sqrt{\frac{R}{r}} \end{cases}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475).

Addirt oder subtrahirt man immer 2 entsprechende Formeln in (18) und (19), so entstehen sechs sehr symmetrische irrationale Beziehungen, die denen in § 3. (6) in gewisser Weise analog sind:

$$(20)\qquad \begin{cases} \sqrt[6]{\frac{(QR)^5}{qr}} + \sqrt[6]{\frac{(qr)^5}{QR}} - \sqrt[6]{\frac{(2PP)^5}{2pp}} = 0 \\ 5\sqrt[6]{\frac{(QR)^5}{qr}} + \sqrt[6]{\frac{(qr)^5}{QR}} - \sqrt[6]{\frac{(2pp)^5}{2PP}} = 0 \\ -\sqrt[6]{\frac{(PR)^5}{pr}} + \sqrt[6]{\frac{(pr)^5}{PR}} - \sqrt[6]{\frac{(2QQ)^5}{2qq}} = 0 \\ -5\sqrt[6]{\frac{(PR)^5}{pr}} + \sqrt[6]{\frac{(pr)^5}{PR}} - \sqrt[6]{\frac{(2qq)^5}{2QQ}} = 0 \\ \sqrt[6]{\frac{(PQ)^5}{pq}} - \sqrt[6]{\frac{(pq)^5}{PQ}} - \sqrt[6]{\frac{(2RR)^5}{2rr}} = 0 \\ 5\sqrt[6]{\frac{(PQ)^5}{pq}} - \sqrt[6]{\frac{(pq)^5}{PQ}} - \sqrt[6]{\frac{(2rr)^5}{2RR}} = 0 \end{cases}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475).

Wenn man aus § 1. (17) die Formel nimmt:

$$\vartheta_3^2(x, q)\,\vartheta_3^2(2x, q) + \vartheta_1^2(x, q)\,\vartheta_1^2(2x, q) - \vartheta^2(x, q)\,\vartheta^2(2x, q) - \vartheta_2^2(x, q)\,\vartheta_2^2(2x, q) = 0$$

und setzt hierein einmal $x = \omega$ und q^5, das andere Mal $x = \frac{\pi}{5}$ und benutzen die Beziehungen (18) und (19), so ergeben sich noch 2 elegante rationale Beziehungen, nämlich:

$$(21)\qquad \begin{cases} \frac{q}{Q} + \frac{r}{R} - \frac{p}{P} = \frac{pqr}{PQR} \\ \frac{Q}{q} + \frac{R}{r} - \frac{P}{p} = 5\frac{PQR}{pqr} \quad \text{oder:} \\ \frac{PQ}{pq} + \frac{PR}{pr} - \frac{RQ}{rq} = 1 \\ \frac{pq}{PQ} + \frac{pr}{PR} - \frac{qr}{QR} = 5 \end{cases}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475 und 477; sowie auch § 3. (11) und (12)).

Wenn das System (18) zuerst mit PP, QQ, RR, sodann zweitens mit pp, qq, rr multiplicirt wird und man die Gleichungen in geeig-

neter Weise subtrahirt oder addirt, so dass die Beziehung (14) und § 1. (23) anwendbar wird, und ebenso mit (19) verfährt, so erhält man schliesslich noch folgende 4 Beziehungen:

$$(22)\quad \begin{cases} \sqrt{pP^3} + \sqrt{qQ^3} - \sqrt{rR^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(4pqr)^{\frac{5}{8}}}{(4PQR)^{\frac{1}{8}}} \\ \sqrt{\frac{r^5}{R}} - \sqrt{\frac{q^5}{Q}} - \sqrt{\frac{r^5}{R}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(4pqr)^{\frac{5}{8}}}{(4PQR)^{\frac{1}{8}}} \\ \text{und} \\ \sqrt{Pp^3} - \sqrt{Qq^3} + \sqrt{Rr^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(4PQR)^{\frac{5}{8}}}{(4pqr)^{\frac{1}{8}}} \\ \sqrt{\frac{Q^5}{q}} - \sqrt{\frac{P^5}{p}} - \sqrt{\frac{R^5}{r}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(4PQR)^{\frac{5}{8}}}{(4pqr)^{\frac{1}{8}}}. \end{cases}$$

Wir sind damit am Abschluss der grösstentheils (mit Ausnahme etwa von § 3. (10—24)) durch die Anleitung im mathematischen Seminar erreichten Resultate. Ich habe hierbei lediglich nur das redactionelle Verdienst einer einheitlichen und möglichst präcisen Darstellung, und spreche daher Herrn Prof. Schröter an dieser Stelle nochmals meinen Dank dafür aus, diese schönen und eleganten Resultate hiermit veröffentlichen zu dürfen. Die nachstehende Untersuchung in § 5. über die Darstellung der Theilwerthe der Fünf einzeln, deren Product wir bis jetzt erst in (18) und (19) kennen, ist zwar auch noch von diesen Uebungen aus angeregt, jedoch von mir ganz selbständig durchgeführt worden.

§ 5.

Die einzelnen Theilwerthe.

Wir haben vorher noch einige Hülfsformeln abzuleiten. Aus § 1. (22) ergiebt sich:

$$PQ\left\{\vartheta(x,q^5)\,\vartheta_3(y,q^5) + \vartheta_3(x,q^5)\,\vartheta(y,q^5)\right\} = 2\,\vartheta\left(\tfrac{x+y}{2},q^5\right)\vartheta\left(\tfrac{x-y}{2},q^5\right)\vartheta_3\left(\tfrac{x+y}{2},q^5\right)\vartheta_3\left(\tfrac{x-y}{2},q^5\right).$$

Setzt man hierin $x = 2\varpi$, $y = \varpi$ und reducirt die rechte Seite nach § 1. (4), so ist:

$$\begin{aligned} 2q\left\{\vartheta(2\varpi,q^5)\,\vartheta_3(\varpi,q^5) + \vartheta_3(2\varpi,q^5)\,\vartheta(\varpi,q^5)\right\} &= -\frac{1}{PQ}\,4q^2\,\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)\,\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5) \\ &= rR\left(\frac{16pqPQ}{rrRR}\right)^{\frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

Nun folgt aber aus § 4. (20) und (21)

$$rR\left(\frac{16pqPQ}{rrRR}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{r}{R}(PQ - pq) = Qp - Pq).$$

Da dieses ebenso bei den beiden analogen Formeln statt hat, so haben wir:

$$(1)\quad \begin{cases} 2q\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta(2\varpi,q^5) + \vartheta(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\} = \frac{(p-P)(q+Q)-(q-Q)(p+P)}{2} \\ 2q\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5) - \vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\} = \frac{(r-R)(p+P)-(p-P)(r+R)}{2} \\ 2q\{\vartheta(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5) + \vartheta(2\varpi,q^5)\,\vartheta_2(\varpi,q^5)\} = \frac{(r+R)(q+Q)-(r-R)(q-Q)}{2}. \end{cases}$$

Aus § 4. (4) aber folgt

$$(2)\quad \begin{cases} 2q\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta(2\varpi,q^5) - \vartheta(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\} = \frac{(p-P)(q+Q)+(q-Q)(p+P)}{2} \\ 2q\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5) + \vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\} = \frac{(r-R)(p+P)+(p-P)(r+R)}{2} \\ 2q\{\vartheta(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5) - \vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta(2\varpi,q^5)\} = \frac{(r+R)(q+Q)+(r-R)(q-Q)}{2}. \end{cases}$$

Durch die Addition und Subtraction der entsprechenden Gleichungen in (1) und (2) folgt:

$$(3)\quad \begin{cases} 4q\,\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta(2\varpi,q^5) = (p-P)(q+Q) \\ 4q\,\vartheta(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5) = (p+P)(Q-q) \\ 4q\,\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5) = (p+P)(r-R) \\ 4q\,\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5) = (p-P)(r+R) \\ 4q\,\vartheta(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5) = (r+R)(q+Q) \\ 4q\,\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta(2\varpi,q^5) = (r-R)(Q-q). \end{cases}$$

Multiplicirt man hierin die 1. und 4. Gleichung und beachtet § 4. (3), so ist:

$$(p^2 - P^2)(r - R)(Q - q) = (p - P)^2(q + Q)(r + R),$$

also in Folge von § 4. (16):

$$(4)\quad \begin{cases} (p+P)(r-R)(Q-q) = \\ (p-P)(q+Q)(r+R) = 4PQR \end{cases}$$

eine Formel, die wir schon in § 4. (17) angeführt haben.

Ganz ähnliche Formeln, wie die in (3) und (4) bestehen aber auch für die reelle Periode. Setzt man nämlich in die 3 letzten Formeln § 4. (2) einmal $x = \frac{\pi}{5}$, $y = 0$ und dann $y = \frac{\pi}{5}$, $x = 0$, so resultiren folgende sechs Formeln:

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=PQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^{\mu}q^{\mu\mu}e^{\frac{4\mu i\pi}{5}}\vartheta\,(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=PQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^{\mu}q^{\mu\mu}e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\vartheta\,(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=RP+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}q^{\mu\mu}e^{\frac{4\mu i\pi}{5}}\vartheta_2(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$-\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=RP+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}q^{\mu\mu}e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\vartheta_2(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$-\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=RQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^{\mu}q^{\mu\mu}e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\vartheta\,(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\mu\varpi,q^5)$$

$$\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=RQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^{\mu}q^{\mu\mu}e^{\frac{4\mu i\pi}{5}}\vartheta\,(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\mu\varpi,q^5).$$

Führt man diese Summen aus, so treten als Factoren $\cos\frac{\pi}{5}$ und $\cos\frac{2\pi}{5}$ an die Glieder. Führt man schliesslich die Werthe dieser ein, nämlich $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, so wie die Werthe aus den Systemen (1) und (2), so folgt:

$$(5)\qquad\begin{cases}4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,P+p)\,(\sqrt{5}\,Q-q)\\4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\\4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,R+r)\\4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,P+p)\,(r-\sqrt{5}\,R)\\4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,Q-q)\,(r-\sqrt{5}\,R)\\4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=(\sqrt{5}\,R+r)\,(\sqrt{5}\,Q+q).\end{cases}$$

Multiplicirt man hier wieder die erste mit der vierten Formel und beachtet § 4. (5) so ist:

$$(6)\qquad\begin{cases}(\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,R+r)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\\=(\sqrt{5}\,P+p)\,(\sqrt{5}\,R-r)\,(q-\sqrt{5}\,Q)=4\,pqr\end{cases}$$

eine ebenfalls schon § 4. (17) angegebene Beziehung. Es würde sich nun eine Darstellung für $\vartheta_3(\varpi,q^5)$ etc. ergeben, wenn man die Formeln § 1. (17) benutzt. Es wäre dann nämlich:

$$\vartheta_3{}^4(\varpi,q^5)-\vartheta_2{}^4(\varpi,q^5)=Q^3\,\vartheta(2\varpi,q^5).$$

Multiplicirt man dieses mit $4^4 q^4 \vartheta^4(2\varpi, q^5)$, trägt links die Werthe aus (3) ein und reducirt durch die Beziehung (4), so ergiebt sich:

$$(7)\quad \begin{cases} 4^4 q^4\ \vartheta^5(2\varpi, q^5) = Q P^4 R^4 \left\{\left(\frac{1}{r+R}\right)^4 - \left(\frac{1}{p+P}\right)^4\right\} \\ 4^4 q\ \ \vartheta^5(\varpi, q^5) \ \ = Q P^4 R^4 \left\{\left(\frac{1}{p-P}\right)^4 - \left(\frac{1}{r-R}\right)^4\right\}. \end{cases}$$

Ebenso würden die übrigen Formeln für $\vartheta_3(\varpi, q)$ etc. sich ergeben. Da diese Beziehungen aber wegen der Differenz von vierten Potenzen ziemlich unbequem und auch mit den früheren Beziehungen schwierig in Einklang zu setzen sind, so übergehen wir die weitere Darstellung in dieser Form.

Setzen wir nun aber in die Formeln § 1. (22) einmal $x = y = \varpi$, und dann $x = y = 2\varpi$, so erhalten wir folgende Beziehungen:

$$(8)\quad \begin{cases} 2\vartheta^2(\varpi, q^5)\ \ \vartheta_3{}^2(\varpi, q^5) \ \ = P^2 Q\vartheta(2\varpi, q^5) + Q^2 P\vartheta_3(2\varpi, q^5) \\ 2q^1\vartheta^2(2\varpi, q^5)\ \vartheta_3{}^2(2\varpi, q^1) = Q^2 P\vartheta_3(\varpi, q^5) \ \ - P^2 Q\vartheta(\varpi, q^5) \\ 2\vartheta_3{}^2(\varpi, q^5)\ \ \vartheta_2{}^2(\varpi, q^5) \ \ = P^2 R\vartheta_2(2\varpi, q^5) + R^2 P\vartheta_3(2\varpi, q^5) \\ 2q^3\vartheta_3{}^2(2\varpi, q^1)\ \vartheta_2{}^2(2\varpi, q^5) = P^2 R\vartheta_2(\varpi, q^1) \ \ + R^2 P\vartheta_3(\varpi, q^5) \\ 2\vartheta^2(\varpi, q^5)\ \ \vartheta_2{}^2(\varpi, q^5) \ \ = RQ^2\vartheta_2(2\varpi, q^5) + R^2 Q\vartheta(2\varpi, q^5) \\ 2q^3\vartheta^2(2\varpi, q^5)\ \vartheta_2{}^2(2\varpi, q^1) = Q^2 R\vartheta_2(\varpi, q^5) \ \ - R^2 Q\vartheta(\varpi, q^5). \end{cases}$$

Setzen wir nun zur augenblicklichen Abkürzung:

$$\begin{gathered} \vartheta(\varpi, q^5) = x, \qquad \vartheta_3(\varpi, q^5) = x_1 \\ \vartheta(2\varpi, q^5) = y, \qquad \vartheta_3(2\varpi, q^5) = y_1 \\ p^2 - P^2 = B_1 \quad (Q-q)(P+p) = A \quad P^2 Q = \alpha \\ Q^2 - q^2 = A_1 \quad (p-P)(q+Q) = B \quad Q^2 P = \beta \end{gathered}$$

und combiniren die 1. Gleichung in (8) mit (3) und mit § 4. (3), so haben wir:

$$\begin{aligned} 2x^2 x_1{}^2 &= \alpha y + \beta y_1 \\ 4q x_1 y_1 &= B_1 \\ 4q x\ y &= A_1 \\ 4q x\ y_1 &= A; \end{aligned}$$

also hieraus:

$$2x^2 x_1{}^2 = \alpha y + \frac{\beta}{4qx}\cdot A$$

$$8qx^3 x_1{}^3 = 4q\alpha xy + \beta A = \alpha A_1 + \beta A = M.$$

Nun ist:

$$\frac{x_1}{x} = \frac{B_1}{A} = L,$$

also:

$$8qx^5 = \frac{M}{L^3}, \qquad 8qx_1{}^5 = ML^3.$$

Trägt man alles ein, so folgt hieraus:

$$8q\vartheta^5(\varpi, q^5) = \frac{PQ(Q-q)^3}{(p-P)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}$$
$$8q\vartheta_3{}^5(\varpi, q^5) = \frac{PQ(p-P)^3}{(Q-q)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}.$$

Aus den obigen 4 Gleichungen ergiebt sich auch $\vartheta(2\varpi, q^5)$ und $\vartheta_3(2\varpi, q^5)$ jedoch in anderer Form wie $\vartheta(\varpi, q^5)$; wir werden später davon Gebrauch machen In derselben Form aber liefert diese Grössen ein zweites System, nämlich:

$$2q^3y^2y_1{}^2 = \beta x_1 - \alpha x$$
$$4q\ x_1y_1 = B_1$$
$$4q\ x\ y = A_1$$
$$4q\ x_1y = B.$$

Verfährt man nun mit den andern beiden Gleichungen in (8) ebenso und combinirt sie immer mit (3) und § 4. (3), so ergiebt sich schliesslich für jeden Theilwerth eine doppelte Darstellung in der Form:

(9)
$$\left\{\begin{aligned}
8q\ \vartheta_3{}^5(\varpi, q^5) &= \frac{PQ(p-P)^3}{(Q-q)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}\\
&= \frac{PR(p+P)^3}{(r+R)^2}\{R(p-P)+P(r-R)\}\\
8q^4\vartheta_3{}^5(2\varpi, q^5) &= \frac{PQ(p+P)^3}{(Q+q)^2}\{Q(p-P)-P(Q-q)\}\\
&= \frac{PR(p-P)^3}{(r-R)^2}\{R(p+P)+P(r+R)\}\\
8q\ \vartheta^5(\varpi, q^5) &= \frac{PQ(Q-q)^3}{(p-P)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}\\
&= \frac{RQ(q+Q)^3}{(r-R)^2}\{R(Q-q)+Q(r+R)\}\\
8q^4\vartheta^5(2\varpi, q^5) &= \frac{PQ(q+Q)^3}{(p+P)^2}\{Q(p-P)-P(Q-q)\}\\
&= \frac{RQ(Q-q)^3}{(r+R)^2}\{Q(r-R)-R(q+Q)\}\\
8q\ \vartheta_2{}^5(\varpi, q^5) &= \frac{PR(r+R)^3}{(p+P)^2}\{R(p-P)+P(r-R)\}\\
&= \frac{QR(r-R)^3}{(q+Q)^2}\{R(Q-q)+Q(r+R)\}\\
8q^4\vartheta_2{}^5(\varpi, q^5) &= \frac{PR(r-R)^3}{(p-P)^2}\{R(p+P)+P(r+R)\}\\
&= \frac{QR(r+R)^3}{(Q-q)^2}\{Q(r-R)-R(Q+q)\}.
\end{aligned}\right.$$

Beachten wir nun, dass jedes der Systeme von je 4 Gleichungen immer

noch 2 Wurzeln liefert, so ergiebt sich eine weitere Art der Darstellung:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{rcl}
4^4 q^4 \vartheta_3{}^5(2\varpi, q^5) &=& \frac{2(Q-q)^2}{PQ(p-P)^3}\cdot\frac{(p^2-P^2)^5}{P(q+Q)+Q(p+P)} \\
&=& \frac{2(r+R)}{PR(p+P)^3}\cdot\frac{(p^2-P^2)^5}{R(p-P)+P(r-R)} \\
4^4 q^4 \vartheta_3{}^5(\varpi, q^5) &=& \frac{2(Q+q)^2}{PQ(p+P)^3}\cdot\frac{(p^2-P^2)^5}{Q(p-P)-P(Q-q)} \\
&=& \frac{2(r-R)^2}{PR(p-P)^3}\cdot\frac{(p^2-P^2)^5}{R(p+P)+P(r+R)} \\
4^4 q^4 \vartheta^5\,(2\varpi, q^5) &=& \frac{2(p-P)^2}{PQ(Q-q)^3}\cdot\frac{(Q^2-q^2)^5}{P(q+Q)+Q(p+P)} \\
&=& \frac{2(r-R)^2}{RQ(q+Q)^3}\cdot\frac{(Q^2-q^2)^5}{R(Q-q)+Q(r+R)} \\
4^4 q\ \vartheta^5\,(\varpi, q^5) &=& \frac{2(p+P)^2}{PQ(q+Q)^3}\cdot\frac{(Q^2-q^2)^5}{Q(p-P)-P(Q-q)} \\
&=& \frac{2(r+R)^2}{PQ(Q-q)^3}\cdot\frac{(Q^2-q^2)^5}{Q(r-R)-R(q+Q)} \\
4^4 q^4 \vartheta_2{}^5(2\varpi, q^5) &=& \frac{2(p-P)^2}{PR(r-R)^3}\cdot\frac{(r^2-R^2)^5}{R(p+P)+P(r+R)} \\
&=& \frac{2(Q-q)^2}{RQ(r+R)^3}\cdot\frac{(r^2-R^2)^5}{Q(r-R)-R(q+Q)} \\
4^4 q^4 \vartheta_2{}^5(\varpi, q^5) &=& \frac{2(p+P)^2}{PR(r+R)^3}\cdot\frac{(r^2-R^2)^5}{R(p-P)+P(r-R)} \\
&=& \frac{2(Q+q)^2}{RQ(r-R)^3}\cdot\frac{(r^2-R^2)^5}{R(Q-q)+Q(r+R)}\,.
\end{array}\right.$$

Nimmt man also noch (7) hinzu, so haben wir 5 verschiedene Darstellungen für unsere Grössen. Aus diesen Formeln lassen sich die früher erhaltenen rectificiren und sie enthalten eine Fülle der eigenthümlichsten Beziehungen, wenn man erwägt, dass ja p, P etc. sämmtlich unendliche Producte und Summen vorstellen.

Auch die noch fehlenden beiden Werthe für $\vartheta_1(\varpi, q^5)$ und $\vartheta_1(2\varpi, q^5)$ ergeben sich jetzt. Aus § 1. (19) folgt:

$$2^5\,\vartheta^5(\varpi, q^5)\,\vartheta_2{}^5(\varpi, q^5)\,\vartheta_3{}^5(\varpi, q^5) = P^5 Q^5 R^5 \frac{\vartheta_1{}^5(2\varpi, q^5)}{\vartheta_1{}^5(\varpi, q^5)}\,.$$

Setzt man hierein die passenden Werthe aus (9), bezeichnen den Factor:

$$\{P(q+Q)+Q(p+P\}\,\{R(Q-q)+Q(r+R)\}\,\{R(p-P)+P(r-R)\} = F$$

und beachten, dass nach (4):

$$(p-P)\,(q+Q)\,(r+R) = (p+P)\,(Q-q)\,(r-R) = 4\,PQR,$$

so ist:

$$4\,q^3\,\vartheta_1{}^5(2\varpi, q^5)\cdot P^2 Q^2 R^2 = F\,\vartheta_1{}^5(\varpi, q^5)$$

also, da nach § 4. (12):

$$q^5 \vartheta_1{}^5(\varpi, q^5)\, \vartheta_1{}^5(2\varpi, q^5) = -\left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^5,$$

so folgt:

$$(11)\quad \begin{cases} q\,\vartheta_1{}^5(\varpi, q^5) = i\,\dfrac{2PQR}{\sqrt{F}} \cdot \left\{\dfrac{pqr\,PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}} \\ q^4\vartheta_1{}^5(2\varpi, q^5) = i\,\dfrac{\sqrt{F}}{2PQR} \cdot \left\{\dfrac{pqr\,PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}}. \end{cases}$$

Es bleiben nur noch dieselben Beziehungen für die reelle Periode zu untersuchen, und zwar mit Hülfe von (5). Auch hier konnte wiederum ein mit (7) analoges System aufgestellt werden. Dieses übergehen wir. Analog dem System (8) ergiebt sich nun gleichfalls aus § 1. (22), wenn einmal $x = y = \frac{\pi}{5}$, das andere Mal $x = y = \frac{2\pi}{5}$:

$$(12)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3{}^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = q^2p\,\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) + p^2q\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_3{}^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = q^2p\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) + p^2q\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta_2{}^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3{}^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = r^2p\,\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) + p^2r\,\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta_2{}^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_3{}^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = r^2p\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) - p^2r\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2{}^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = r^2q\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) + q^2r\,\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_2{}^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = r^2q\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right) - q^2r\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right). \end{cases}$$

Setzen wir wieder für den Augenblick:

$$\vartheta\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right) = x, \quad \vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{5}, q\right) = x_1, \quad \vartheta\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right) = y, \quad \vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{5}, q\right) = y_1,$$

$$5QQ - qq = A_1, \quad 5PP - pp = B_1, \quad (\sqrt{5}P - p)\,(\sqrt{5}\,Q + q) = B,$$

so haben wir:

$$\begin{aligned} 2\,x^2x_1{}^2 &= \alpha y + \beta y_1 \\ 4\,xy &= A_1 \\ 4\,x_1y &= B_1 \\ 4\,xy_1 &= B \end{aligned}$$

und hieraus wieder:

$$8\,x^3x_1{}^3 = \alpha A_1 + \beta B = M, \quad \frac{x_1}{x} = \frac{B_1}{B} = L,$$

$$8\,x^5 = \frac{M}{L^2}, \quad 8\,x_1{}^5 = ML^3.$$

Setzt man nun wieder hierein die Werthe, so erhält man analoge Formeln wie in (9). Da dasselbe Raisonnement für die übrigen For-

meln in (12) gilt, so können wir sofort das resultirende System hinschreiben:

$$
(13)\quad
\begin{cases}
8\,\vartheta_3{}^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = \frac{pq(\sqrt{5}P+p)^3}{(\sqrt{5}Q+q)^2}\{p(\sqrt{5}Q-q)+q(\sqrt{5}P-p)\} \\
\qquad = \frac{pr(\sqrt{5}P-p)^3}{(r-\sqrt{5}R)^2}\{r(\sqrt{5}P+p)+p(\sqrt{5}R+r)\} \\
8\,\vartheta_3{}^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = \frac{pq(\sqrt{5}P-p)^3}{(\sqrt{5}Q-q)^2}\{q(\sqrt{5}P+p)+p(\sqrt{5}Q+q)\} \\
\qquad = \frac{pr(\sqrt{5}P+p)^3}{(\sqrt{5}R+r)^2}\{r(\sqrt{5}P-p)-p(r-\sqrt{5}R)\} \\
8\,\vartheta_2{}^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = \frac{pq(\sqrt{5}Q+q)^3}{(\sqrt{5}P+p)^2}\{p(\sqrt{5}Q-q)+q(\sqrt{5}P-p)\} \\
\qquad = \frac{qr(\sqrt{5}Q-q)^3}{(\sqrt{5}R+r)^2}\{r(\sqrt{5}Q+q)+q(r-\sqrt{5}R)\} \\
8\,\vartheta_2{}^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = \frac{qr(\sqrt{5}Q-q)^3}{(\sqrt{5}P-p)^2}\{q(\sqrt{5}P+p)+p(\sqrt{5}Q+q)\} \\
\qquad = \frac{qr(\sqrt{5}Q+q)^3}{(r-\sqrt{5}R)^2}\{-q(\sqrt{5}R+r)+r(\sqrt{5}Q-q)\} \\
8\,\vartheta_2{}^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = \frac{pr(r-\sqrt{5}R)^3}{(\sqrt{5}P-p)^2}\{r(\sqrt{5}P+p)+p(\sqrt{5}R+r)\} \\
\qquad = \frac{qr(\sqrt{5}R+r)^3}{(\sqrt{5}Q-q)^2}\{r(\sqrt{5}Q+q)+q(r-\sqrt{5}R)\} \\
8\,\vartheta_2{}^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = \frac{pr(\sqrt{5}R+r)^3}{(\sqrt{5}P+p)^2}\{r(\sqrt{5}P-p)-p(r-\sqrt{5}R)\} \\
\qquad = \frac{qr(r-\sqrt{5}R)^3}{(\sqrt{5}Q+q)^2}\{r(\sqrt{5}Q-q)-q(\sqrt{5}R+r)\}.
\end{cases}
$$

Die den Formeln (10) analoge Darstellung übergehen wir der Kürze halber; sie ist aus (13) leicht herstellbar.

Schliesslich folgt noch aus § 1. (19):

$$2^9\,\vartheta^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2{}^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3{}^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = 16\,p^5q^5r^5\,\frac{\vartheta_1{}^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, q\right)}.$$

Trägt man nun passende Werthe aus (13) ein, dergestalt, dass sich nach (6) gewisse Factoren fortheben und setzen:

$$\{p(\sqrt{5}Q-q)+q(\sqrt{5}P-p)\}\{r(\sqrt{5}Q+q)+q(r-\sqrt{5}R)\}\cdot\{r(\sqrt{5}P+p)+p\sqrt{5}R+r\}=G,$$

so ist:

$$4\,\vartheta_1{}^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)\cdot p^2q^2\cdot r^2 = G\,\vartheta_1{}^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right).$$

Nun folgt aber aus § 4. (6) und (12):

$$\vartheta_1^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_1^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = +25\sqrt{5}\left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{5}{8}},$$

also ist:

$$(14)\quad \begin{cases} \vartheta_1^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = \frac{10pqr}{\sqrt{G}}\sqrt[4]{5}\left\{\frac{pqrPQR}{4}\right\}^{\frac{5}{8}} \\ \vartheta_1^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = \frac{5\sqrt{G}}{2pqr}\sqrt[4]{5}\left\{\frac{pqrPQR}{4}\right\}^{\frac{5}{8}}. \end{cases}$$

§ 6.

Die Siebentheilung.

Gauss hat für die Sieben keine den im § 3. und § 4. dargestellten analoge Beziehungen angegeben. Wir werden zunächst versuchen, solche Relationen, die jenen früheren ähnlich sind, auch hier abzuleiten. Gemäss § 1. (25) bedeutet dann hier:

$$P = \vartheta_3(0, q^7), \quad Q = \vartheta(0, q^7), \quad R = \vartheta_2(0, q^7).$$

Wenn wir in § 1. (9) $\lambda = 7$ setzen: so resultirt:

$$(1)\quad \begin{cases} \vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^7) \\ \qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi, q^7)\,\vartheta_3(7x-y-7\mu\varpi, q^{56}) \\ \vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^7) \\ \qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi, q^7)\,\vartheta_3(7x-y-7\mu\varpi, q^{56}) \\ \vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^7) \\ \qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi, q^7)\,\vartheta_3(7x-y-7\mu\varpi, q^{56}) \\ \vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^7) \\ \qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^{\mu+1} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi, q^7)\,\vartheta_3(7x-y-7\mu\varpi, q^{56}). \end{cases}$$

Durch Addition und Subtraction der beiden ersten Formeln ergiebt sich:

$$\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^7)+\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^7)$$
$$=2\sum_{\mu=0}^{\mu=3} q^{4\mu\mu}e^{4\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-2\mu\varpi,q^8)\,\vartheta_3(7x-y-14\mu\varpi,q^{56})$$

$$\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^7)-\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^7)$$
$$=2\sum_{\mu=0}^{\mu=3} q^{(2\mu+1)^2}e^{2(2\mu+1)ix}\,\vartheta_3(x+y-(2\mu+1)\varpi,q^8)$$
$$\cdot\,\vartheta_3(7x-y-7(2\mu+1)\mu\varpi,q^{56}).$$

Wenn man nun rechts die Summen ausführt und die Moduln q^{56} und q^8 mit Hülfe der bekannten Formeln:

$$2\,\vartheta_3(2x,q^4)=\vartheta_3(x,q)+\vartheta(x,q)$$
$$2\,\vartheta_2(2x,q^4)=\vartheta_3(x,q)-\vartheta(x,q)\ \text{in}\ \S\ 1.\ (6)$$

auf die Moduln q^{14} resp. q^2 reducirt, so erhält man nach Anwendung der Periodenformeln in § 1. (3) und (4):

$$\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7)+\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7)$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\vartheta_3(7x+y,q^{14})+\vartheta(7x+y,q^{14})\}\{\vartheta_3(x-y,q^2)+\vartheta(x-y,q^2)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{\vartheta_2(7x+y,q^{14})+i\vartheta_1(7x+y,q^{14})\}\{\vartheta_3(x-y,q^2)+i\vartheta(x-y,q^2)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{\vartheta_3(7x+y,q^{14})-\vartheta(7x+y,q^{14})\}\{\vartheta_3(x-y,q^2)-\vartheta(x-y,q^2)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\{\vartheta_2(7x+y,q^{14})-i\vartheta_1(7x+y,q^{14})\}\{\vartheta_3(x-y,q^2)-i\vartheta(x-y,q^2)\}$$

$$\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7)-\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7)$$
$$=\tfrac{1}{2}qe^{4ix}\{\vartheta_3(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2)+\vartheta(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2)\}$$
$$\cdot\{\vartheta_3(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14})+\vartheta(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14})\}$$
$$+\tfrac{1}{2}qe^{4ix}\{\vartheta_2(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2)+i\,\vartheta_1(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2)\}$$
$$\cdot\{\vartheta_2(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14})+i\,\vartheta_1(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14})\}$$
$$+\tfrac{1}{2}qe^{4ix}\{\vartheta_3(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2)-\vartheta(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2)\}$$
$$\cdot\{\vartheta_3(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14})-\vartheta(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14})\}$$
$$+\tfrac{1}{2}qe^{4ix}\{\vartheta_2(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2)-i\,\vartheta_1(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2)\}$$
$$\cdot\{\vartheta_2(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14})-i\,\vartheta_1(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14})\}.$$

Hieraus folgt:

$$\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7)+\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7)$$
$$=\vartheta_3(x-y,q^2)\,\vartheta_3(7x+y,q^{14})+\vartheta(x-y,q^2)\,\vartheta(7x+y,q^{14})$$
$$+\vartheta_2(x-y,q^2)\,\vartheta_2(7x+y,q^{14})-\vartheta_1(x-y,q^2)\,\vartheta_1(7x+y,q^{14})$$

$$(2)\quad \begin{cases} \vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7) - \vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7) \\ \quad = q e^{4ix}\Big\{\vartheta_3\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_3\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right) \\ \qquad + \vartheta\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right) \\ \qquad + \vartheta_2\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_2\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right) \\ \qquad - \vartheta_1\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_1\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\Big\}. \end{cases}$$

Verfährt man mit den letzten beiden Formeln in (1) ebenso, oder auch, setzt man in die eben erhaltenen beiden Resultate für $y\ y+\frac{\varpi}{2}$ ein und berücksichtigt die Beziehungen § 1. (4), so ergiebt sich:

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^7) + \vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^7) \\ \quad = \vartheta_3(x-y,q^2)\,\vartheta_3(7x+y,q^{14}) - \vartheta(x-y,q^2)\,\vartheta(7x+y,q^{14}) \\ \quad + \vartheta_2(x-y,q^2)\,\vartheta_2(7x+y,q^{14}) + \vartheta_1(x-y,q^2)\,\vartheta_1(7x+y,q^{14}) \\ \vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^7) - \vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^7) \\ \quad = q e^{4ix}\Big\{\vartheta_3\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_3\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right) \\ \qquad - \vartheta\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right) \\ \qquad + \vartheta_2\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_2\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right) \\ \qquad + \vartheta_1\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_1\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right). \end{cases}$$

Dass in den Formeln für die Differenzen in (2) und (3) rechts die Argumente noch mit $\frac{\varpi}{2}$ resp. $\frac{7\varpi}{2}$ behaftet sind, rührt daher, dass in den ausgeführten Summen rechts ungerade Vielfache der Periode ϖ vorkommen.

Aus diesen Beziehungen (2) und (3) erhalten wir für $x=y=0$:

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^7) + \vartheta(0,q)\,\vartheta(0,q^7) \\ \quad = \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14}) + \vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}) + \vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}) \\ \vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(0,q^7) \\ \quad = \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14}) - \vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}) + \vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}), \end{cases}$$

ferner aus (3):

$$(5)\quad \begin{cases} \vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(0,q^7) - \vartheta(0,q)\,\vartheta(0,q^7) \\ \quad = 2q\left\{\vartheta_3\left(\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_3\left(\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right) + \vartheta\left(\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta\left(\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\} \\ \vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(0,q^7) \\ \quad = 2q\left\{\vartheta_3\left(\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_3\left(\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right) - \vartheta\left(\frac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta\left(\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}, \end{cases}$$

endlich für $x = y = \frac{\pi}{8}$ aus den ersten Formeln in (2) und (3):

$$(6)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q^7\right) \\ \qquad = \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14}) + \vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}) - \vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}) \\ 2\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q^7\right) \\ \qquad = \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14}) - \vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}) - \vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}). \end{cases}$$

Setzt man in die Formeln (4) und (6) statt q $q^{\frac{1}{2}}$ und führt die Werthe aus § 1. (14) für $\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})$, so wie aus § 1. (15) für $\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q\right)$ etc. ein, so ergeben sich sofort folgende 3 Beziehungen:

$$(7)\quad \begin{cases} pP - qQ + rR = 2\sqrt{rpRP} \\ pP + qQ - rR = 2\sqrt{pqPQ} \\ pP - qQ - rR = 2\sqrt{rqRQ}, \end{cases}$$

also hieraus:

$$(8)\quad (pP + qQ - rR)\,(pP - qQ + rR)\,(pP - qQ - rR) = 8\,pqrPQR,$$

also auch:

$$(9)\quad \begin{cases} pP = \sqrt{rpRP} + \sqrt{pqPQ} \\ qQ = \sqrt{pqPQ} - \sqrt{rqRQ} \\ rR = \sqrt{prPR} - \sqrt{rqRQ}. \end{cases}$$

Aus allen 3 letzten Formeln ergiebt sich folgende Grundbeziehung:

$$(10)\qquad \sqrt{pP} = \sqrt{qQ} + \sqrt{rR}.$$

Diese Formel enthält bekanntlich die Modulargleichung für die Sieben. Setzt man nämlich die Werthe $P = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}$, $p = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\pi}}$ etc., so ist:

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa_1\lambda_1} = 1$$

(vgl. Schröter, de aequationibus modularibus S. 18).

Es ist interessant, diese Formel (10) mit der in § 2. (5) für die Drei erhaltenen zu vergleichen, denn dort war bekanntlich:

$$pP = qQ + rR.$$

Ziehen wir nun die Formeln (6) von einander ab, so folgt nach Benutzung von § 1. (15):

$$\sqrt{\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14})}\left\{\sqrt{\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14})} - \sqrt{\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(,0q^{14})}\right\} = 2\,\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}).$$

Also mit Benutzung von § 1. (14):

$$\sqrt[4]{pqPQ}\left\{\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2+q^2)(P^2+Q^2)}-\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2-q^2)(P^2-Q^2)}\right\}=2\sqrt[4]{pqPQ}.$$

Die 1. Formel in (5) aber liefert nach dem Eintragen aus § 1. (15):

$$\sqrt{(p^2+r^2)(P^2+R^2)}-\sqrt{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}$$
$$=2\sqrt[4]{\frac{rpRP}{4}}\left\{\sqrt[4]{(r^2+p^2)(R^2+P^2)}+\sqrt[4]{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}\right\}.$$

Nach einer kleinen Umformung in den letzten beiden Formeln erhalten wir dann:

$$(11)\quad\begin{cases}\sqrt[4]{(pp+rr)(PP+RR)}-\sqrt[4]{(pp-rr)(PP-RR)}=\sqrt[4]{4rpRP}\\ \sqrt[4]{(pp+qq)(PP+QQ)}-\sqrt[4]{(pp-qq)(PP-QQ)}=\sqrt[4]{4pqPQ}.\end{cases}$$

Quadrirt man beide Formeln und benutzt (7), so ergeben sich Beziehungen, deren eine man auch aus (4) erhält, wenn man statt q $q^{\frac{1}{2}}$ schreibt. Es ist nämlich:

$$(12)\quad\begin{cases}pP+qQ+rR=\sqrt{(pp+rr)(PP+RR)}+\sqrt{(pp-rr)(PP-RR)}\\ \qquad=\sqrt{(pp+qq)(PP+QQ)}+\sqrt{(pp-qq)(PP-QQ)}.\end{cases}$$

Quadrirt man noch einmal und beachtet § 1. (23), so ergiebt sich folgende eigenthümliche Beziehung:

$$(13)\quad (pP+qQ+rR)^2=2\,pp\,PP+2\,rr\,RR+2\,qq\,QQ.$$

Es sind damit 3 Functionen gefunden, die der Functionalgleichung genügen:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2.$$

Setzen wir nun in (2) und (3):

$$x=\frac{\varpi}{8},\quad y=\frac{-7\varpi}{8},\quad \text{oder auch } y=\frac{\pi}{4},$$

so ergiebt sich:

$$(14)\quad\begin{cases}q^{\frac{1}{2}}\left\{\vartheta_3\left(\frac{\varpi}{4},q\right)\vartheta_3\left(\frac{7\varpi}{4},q\right)+\vartheta\left(\frac{\varpi}{4},q\right)\vartheta\left(\frac{7\varpi}{4},q^7\right)\right\}\\ \qquad=\vartheta_3(0,q^{14})\,\vartheta_2(0,q^2)+\vartheta_2(0,q^{14})\,\vartheta_3(0,q^2)\\ 2\left\{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4},q^2\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4},q^{14}\right)+\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4},q^2\right)\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4},q^{14}\right)\right\}\\ \qquad=\vartheta_3(0,q)\,\vartheta(0,q^7)+\vartheta(0,q)\,\vartheta_3(0,q^7).\end{cases}$$

Aus der ersten Formel in (14) folgt:

$$\sqrt[4]{4rpRP}\left\{\sqrt[4]{(p^2+r^2)(P^2+R^2)}+\sqrt[4]{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}\right\}$$
$$=\sqrt{(p^2-q^2)(P^2+Q^2)}+\sqrt{(p^2+q^2)(P^2-Q^2)},$$

also hieraus:

$$\sqrt{prPR}\,\{\sqrt{(p^2+r^2)(P^2+R^2)}+\sqrt{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}+2qQ\}$$
$$=(p^2P^2+r^2R^2-q^2Q^2),$$

oder mit Hülfe von (12):

$$(pP+3qQ+rR)\sqrt{prPR}=p^2P^2+r^2R^2-q^2Q^2.$$

Eine analoge Formel ergiebt sich aus der zweiten Gleichung in (14). Wenn man statt q $q^{\frac{1}{2}}$ setzt, so ist:

$$\sqrt{(p^2+r^2)(P^2-R^2)}+\sqrt{(p^2-r^2)(P^2+R^2)}$$
$$=2\sqrt[4]{pqPQ}\,\{\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2+q^2)(P^2+Q^2)}+\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2-q^2)(P^2-Q^2)}\}.$$

Erhebt man dieses wiederum ins Quadrat und berücksichtigt (12), so folgt:

$$p^2P^2-r^2R^2+q^2Q^2=\sqrt{pqPQ}\,\{pP+3rR+qQ\}.$$

Zu diesen beiden Formeln bietet sich aus (13) noch eine dritte analoge dar, und wir haben dann:

$$(15)\quad\begin{cases} ppPP-rrRR+qqQQ=\sqrt{pqPQ}\,\{pP+3rR+qQ\}\\ ppPP+rrRR-qqQQ=\sqrt{prPR}\,\{pP+rR+3qQ\}\\ ppPP-rrRR-qqQQ=\sqrt{rqRQ}\,\{3pP+rR+qQ\}, \end{cases}$$

oder aber mit Hülfe von (7):

$$(16\quad\begin{cases} ppPP-rrRR+qqQQ=(pP-rR+qQ)(pP+3rR+qQ)\\ ppPP+rrRR-qqQQ=(pP+rR-qQ)(pP+rR-3qQ)\\ ppPP-rrRR-qqQQ=(pP-rR-qQ)(3pP+rR+qQ). \end{cases}$$

§ 7.

Die Theilwerthe.

Wir gehen nun aus von der allgemeinsten Formel, nämlich der in § 1. (7). Setzen wir dort $r=1$, $s=2$, $p=3$, $t=1$, so ist die Bedingung erfüllt, dass r, s, p, t keinen gemeinsamen Factor haben sollen. Dann resultirt:

$$(1)\quad \vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^3)$$
$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_3(2x-y-2\mu\varpi,q^7).$$

Wenn wir in dieser Formel das eine resp. beide Argumente um die halbe Periode verändern und gemäss den Grundformeln § 1. (4) reduciren, so folgt:

$$
(2)\quad
\begin{cases}
\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^3) \\
\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=6} (-1)^\mu q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta(3x+2y-3\mu\varpi, q^{21})\, \vartheta_3(2x-y-2\mu\varpi, q^7) \\
\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^3) \\
\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=6} (q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_2(3x+2y-3\mu\varpi, q^{21})\, \vartheta_2(2x-y-2\mu\varpi, q^7) \\
\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3) \\
\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=6} (-1)^\mu q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_1(3x+2y-3\mu\varpi, q^{21})\, \vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi, q^7) \\
\vartheta(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3) \\
\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=6} (-1)^\mu q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta(3x+2y-3\mu\varpi, q^{21})\, \vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi, q^7) \\
\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3) \\
\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_2(3x+2y-3\mu\varpi, q^{21})\, \vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi, q^7) \\
-\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3) \\
\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_3(3x+2y-3\mu\varpi, q^{21})\, \vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi, q^7)\,.
\end{cases}
$$

Wir könnten die Anzahl dieser Formeln noch erheblich vermehren, begnügen uns aber der Kürze halber mit diesen, die wir im Folgenden brauchen werden.

Wenn man nun in den letzten 3 Formeln in (2) setzt $x=\varpi$, $y=2\varpi$, so wird man bemerken, dass nach gehöriger Vereinfachung mit Hülfe von § 1. (3) rechts die Grössen $\vartheta_1(\varpi, q^7)$, $\vartheta_1(2\varpi, q^7)$, $\vartheta_1(3\varpi, q^7)$ auftreten, und zwar multiplicirt mit der Summe zweier anderer ϑ-Functionen, deren Modul q^{21} ist.

Es ergiebt sich:

$$
(3)\quad
\begin{cases}
-\vartheta(o,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3) = \vartheta_1(\varpi,q^7)\left\{\vartheta(2\varpi,q^{21}) + q\,\vartheta(5\varpi,q^{21})\right\} \\
\qquad\qquad + \vartheta_1(2\varpi,q^7)\left\{q\vartheta(4\varpi,q^{21}) - q^5\vartheta(10\varpi,q^{21})\right\} \\
\qquad\qquad - \vartheta_1(3\varpi,q^7)\left\{q\vartheta(\varpi,q^{21}) + q^4\vartheta(8\varpi,q^{21})\right\} \\
-\vartheta_2(o,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3 = \vartheta_1(\varpi,q^7)\left\{\vartheta_2(2\varpi,q^{21}) - q\,\vartheta_2(5\varpi,q^{21})\right\} \\
\qquad\qquad + \vartheta_1(2\varpi,q^7)\left\{q\vartheta_2(4\varpi,q^{21}) - q^5\vartheta_2(10\varpi,q^{21})\right\} \\
\qquad\qquad + \vartheta_1(3\varpi,q^7)\left\{q\vartheta_2(\varpi,q^{21}) - q^4\vartheta_2(8\varpi,q^{21})\right\} \\
\vartheta_3(o,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3) = \vartheta_1(\varpi,q^7)\left\{\vartheta_3(2\varpi,q^{21}) - q\,\vartheta_3(5\varpi,q^{21})\right\} \\
\qquad\qquad + \vartheta_1(2\varpi,q^7)\left\{q\vartheta_3(4\varpi,q^{21}) - q^5\vartheta_3(10\varpi,q^{21})\right\} \\
\qquad\qquad + \vartheta_1(3\varpi,q^7)\left\{q\vartheta_3(\varpi,q^{21}) - q^4\vartheta_3(8\varpi,q^{21})\right\}.
\end{cases}
$$

Es ergeben sich aber dieselben Formeln in der Klammer merkwürdiger Weise aus der Dreitheilung.

Aus den Formeln § 2. (3) ergeben sich nach Veränderung der Argumente um die halben Perioden und Reduction nach den Formeln § 1. (4) folgende Beziehungen, wenn man in § 2. (3) für q q^7 schreibt:

$$(4)\quad \begin{cases} iq^{-\frac{7}{2}}e^{-iy}\vartheta_2(x,q^7)\vartheta(y,q^{14}) = \vartheta_1(x+y-7\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42}) \\ \qquad +q^7 e^{2ix}\vartheta_1(x+y-14\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42}) \\ \qquad +q^{28}e^{4ix}\vartheta_1(x+y-21\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42}) \\ iq^{-\frac{7}{2}}e^{-iy}\vartheta_3(x,q^7)\vartheta_1(y,q^{14}) = \vartheta(x+y-7\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42}) \\ \qquad +q^7 e^{2ix}\vartheta(x+y-14\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42}) \\ \qquad +q^{28}e^{4ix}\vartheta(x+y-21\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42}) \\ iq^{-\frac{7}{2}}e^{-iy}\vartheta(x,q^7)\vartheta_1(y,q^{14}) = \vartheta_3(x+y-7\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42}) \\ \qquad -q^7 e^{2ix}\vartheta_3(x+y-14\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42}) \\ \qquad +q^{28}e^{4ix}\vartheta_3(x+y-21\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42}) \\ -iq^{-\frac{7}{2}}e^{-iy}\vartheta_1(x,q^7)\vartheta_1(y,q^{14}) = \vartheta_2(x+y-7\varpi,q^{14})\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42}) \\ \qquad -q^7 e^{2ix}\vartheta_2(x+y-14\varpi,q^{14})\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42}) \\ \qquad +q^{28}e^{4ix}\vartheta_2(x+y-21\varpi,q^{14})\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42}) \end{cases}$$

Man setze nun in jede dieser Formeln:

1) $x=\varpi$, $y=2\varpi$; 2) $x=2\varpi$, $y=4\varpi$; 3) $x=3\varpi$, $y=6\varpi$,

so fällt vermöge des Baues dieser Formeln rechts immer das dritte Glied fort, wenn man beachtet, dass nach § 1. (4):

$$\vartheta(21\varpi, q^{42}) = 0.$$

Da nun aber ebenfalls aus § 1. (4) folgt, dass

$$\vartheta(7\varpi, q^{42}) = iq^{\frac{7}{2}}\vartheta_1(14\varpi, q^{42}),$$

so wird sich z. B. aus der ersten Formel ergeben:

$$-\vartheta_2(\varpi,q^7)\vartheta(2\varpi,q^{14}) = q^3\left\{\vartheta_1(4\varpi,q^{21})+q^4\vartheta_1(10\varpi,q^{21})\right\}\vartheta_1(14\varpi,q^{42}).$$

Es wird in allen Formeln auf der rechten Seite der Factor $\vartheta_1(14\varpi,q^{42})$ auftreten, während links entweder $\vartheta(2\varpi,q^{14})$, $\vartheta(4\varpi,q^{14})$, $\vartheta(6\varpi,q^{14})$, oder $\vartheta_1(2\varpi,q^{14})$, $\vartheta_1(4\varpi,q^{14})$, $\vartheta_1(6\varpi,q^{14})$ steht.

Nun ist aber nach § 1. (13):

$$\vartheta(0,q^{42})\vartheta_1(14\varpi,q^{42}) = \vartheta_1(7\varpi,q^{21})\ (\vartheta_2(7\varpi,q^{21})$$
$$\vartheta(0,q^{14})\ \vartheta(2\varpi,q^{14}) \quad = \vartheta(\varpi,q^7)\ \vartheta(2\varpi,q^7) \text{ etc.}$$

Somit tritt in allen 12 Formeln auf der rechten Seite der Factor:

$$\vartheta_1(7\varpi,q^{21})\ \vartheta_2(7\varpi,q^{21})\ \frac{\vartheta(0,q^{14})}{\vartheta(0,q^{42})}$$

auf. Nennen wir seinen reciproken Werth A und beachten, dass nach § 1. (14):

$$\vartheta(0, q^{14}) = \sqrt{PQ}$$
$$\vartheta(0, q^{12}) = \sqrt{\vartheta(0, q^{21})\ \vartheta_3(0, q^{21})},$$

nach § 2. (11):

$$iq^{\frac{7}{4}}\vartheta_1(7\varpi, q^{21}) = \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$q^{\frac{7}{4}}\vartheta_2(7\varpi, q^{21}) = \sqrt{\frac{\vartheta(0, q^{21})\ \vartheta_3(0, q^{21})}{PQ}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

so wird:

$$A = iq^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{PQR}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Wir sehen also, dass sich die für die Transformation des 7. Grades unbrauchbaren Grössen $\vartheta(0, q^{21})$ und $\vartheta_3(0, q^{21})$ herausheben, und hierauf musste eben das ganze Streben gerichtet sein, aus (4) und damit aus (3) diese Grössen herauszuschaffen.

Wir erhalten dann aus (4):

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll}
q\{\vartheta_1(2\varpi,q^{21}) - q\,\vartheta_1(5\varpi,q^{21})\} = & A\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\\
q^3\{\vartheta_1(\varpi,q^{21}) + q^3\vartheta_1(8\varpi,q^{21})\} = & -A\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
q^5\{\vartheta_1(4\varpi,q^{21}) + q^4\vartheta_1(10\varpi,q^{21})\} = & -A\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
q\{\vartheta(2\varpi,q^{21}) + q\,\vartheta(5\varpi,q^{21})\} = & A\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\\
q^3\{\vartheta(\varpi,q^{21}) + q^3\vartheta(8\varpi,q^{21})\} = & A\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
q^5\{\vartheta(4\varpi,q^{21}) - q^4\vartheta(10\varpi,q^{21})\} = & A\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
q\{\vartheta_3(2\varpi,q^{21}) - q\,\vartheta_3(5\varpi,q^{21})\} = & A\vartheta(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
q^3\{\vartheta_3(\varpi,q^{21}) - q^3\vartheta_3(8\varpi,q^{21})\} = & A\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\
q^5\{\vartheta_3(4\varpi,q^{21}) - q^4\vartheta_3(10\varpi,q^{21})\} = & A\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\\
q\{\vartheta_2(2\varpi,q^{21}) - q\,\vartheta_2(5\varpi,q^{21})\} = & -A\vartheta(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\\
q^3\{\vartheta_2(\varpi,q^{21}) - q^3\vartheta_2(8\varpi,q^{21})\} = & -A\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
q^5\{\vartheta_2(4\varpi,q^{21}) - q^4\vartheta_2(10\varpi,q^{21})\} = & -B\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^8)\,\vartheta_3(\varpi,q^7).
\end{array}\right.$$

Diese Formeln zeigen uns, dass sich dadurch die Klammergrössen in den Formeln (3) eliminiren lassen. Tragen wir alle Werthe aus (5) in (3) ein, sowie A und den Werth $\vartheta_1(\varpi, q^3)$ aus § 2. (11), der in (3) links steht, so ergeben sich folgende 3 Beziehungen:

$$\left\{\begin{array}{l}
q\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = q\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
\qquad\qquad - q^3\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
\qquad\qquad + q^4\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^8)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)
\end{array}\right.$$

$$(6)\quad \begin{cases} -r\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = q\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7) \\ \qquad\qquad + q^3\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7) \\ \qquad\qquad + q^4\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7) \\ -p\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = q\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7) \\ \qquad\qquad + q^3\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7) \\ \qquad\qquad + q^4\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7); \end{cases}$$

Es ist selbstverständlich, dass links q immer das Gauss'sche Zeichen für $\vartheta(0,q)$, rechts aber der Modul q ist, der ja überhaupt immer nur in Verbindung mit $\vartheta(\varpi,q^3)$ etc. auftreten kann.

Nun folgt aus § 1. (19):

$$\begin{aligned} 2\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7) &= PQR\,\vartheta_1(2\varpi,q^7) \\ 2q\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7) &= PQR\,\vartheta_1(3\varpi,q^7) \\ 2q^5\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7) &= PQR\,\vartheta_1(\varpi,q^7). \end{aligned}$$

Dann sind die Beziehungen (6) anders zu schreiben, was sich sogleich als wichtig erweisen wird.

Es ist dann:

$$(7)\quad \begin{cases} q\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\,\vartheta(\varpi,q^3)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\} \\ \qquad = q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7) \\ \qquad + q^3\vartheta_1^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7) \\ \qquad - q^4\vartheta_1^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7) \\ -r\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\} \\ \qquad = q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7) \\ \qquad + q^3\vartheta_1^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) \\ \qquad + q^4\vartheta_1^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) \\ -p\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\} \\ \qquad = q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7) \\ \qquad + q^3\vartheta_1^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7) \\ \qquad + q^4\vartheta_1^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7). \end{cases}$$

Wir setzen nun in § 1. (8) $\alpha = 1$, $\beta = 6$. Dann folgt:

$$\begin{cases} \vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^6) \\ \qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^7)\,\vartheta_3(6x-y-6\mu\varpi,q^{42}) \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \text{und hieraus:} \\ \vartheta_2(x,q)\ \vartheta_2(y,q^6) \\ \qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\ \vartheta_2(x+y-\mu\varpi, q^7)\ \vartheta_3(6x-y-6\mu\varpi, q^{42}) \\ \vartheta_2(x,q)\ \vartheta_1(y,q^6) \\ \qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\ \vartheta_1(x+y-\mu\varpi, q^7)\ \vartheta(6x-y-6\mu\varpi, q^{42}), \end{cases}$$

für $x = 3\varpi$, $y = 2\varpi$ ergiebt sich hieraus:

$$\begin{aligned} (9)\quad \vartheta_2(o,q)\ \vartheta_1(2\varpi,q^6) &= \vartheta_1(\varpi,q^7)\left\{q\vartheta(8\varpi,q^{42}) - q^9\vartheta(20\varpi,q^{42})\right\} \\ &+ \vartheta_1(2\varpi,q^7)\left\{\vartheta(2\varpi,q^{42}) + q^6\vartheta(16\varpi,q^{42})\right\} \\ &+ \vartheta_1(3\varpi,q^7)\left\{q\vartheta(4\varpi,q^{42}) + q^3\vartheta(10\varpi,q^{42})\right\}. \end{aligned}$$

Diese Formel hat mit denen in (3) eine gewisse Analogie, und es existiren auch zu (9) noch 2 ähnliche Formeln für $\vartheta_3(0,q)\ \vartheta_1(2\varpi,q^6)$ und $\vartheta(0,q)\ \vartheta_1(2\varpi,q^6)$. Dieselben sind jedoch zur weiteren Untersuchung nicht geeignet, da rechts die Function ϑ_1 nicht erscheint.

Nun folgt aber analog wie in (4) aus den Formeln der Dreitheilung in § 2. (3):

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x,q^7)\ \vartheta_1(y,q^{14}) &= \vartheta_1(x+y,q^{21})\ \vartheta(2x-y,q^{42}) \\ &+ q^7\ e^{2ix}\vartheta_1(x+y-7\varpi,q^{21})\ \vartheta(2x-y-14\varpi,q^{42}) \\ &+ q^{28}e^{4ix}\vartheta_1(x+y-14\varpi,q^{21})\ \vartheta(2x-y-28\varpi,q^{42}). \end{aligned}$$

Setzen wir hierein:

$$\begin{aligned} &1)\ x = \varpi\ \ y = 6\varpi \\ &2)\ x = 3\varpi\ \ y = 4\varpi \\ &3)\ x = 5\varpi\ \ y = 2\varpi, \end{aligned}$$

so erhält man folgende 3 Formeln:

$$(10)\quad \begin{cases} \vartheta_2(\varpi,q^7)\vartheta_1(6\varpi,q^{14}) = \vartheta_1(7\varpi,q^{21})\left\{\vartheta(4\varpi,q^{42}) + q^2\vartheta(10\varpi,q^{42})\right\} \\ \vartheta_2(3\varpi,q^7)\vartheta_1(4\varpi,q^{14}) = \vartheta_1(7\varpi,q^{21})\left\{\vartheta(2\varpi,q^{42}) + q^6\vartheta(16\varpi,q^{42})\right\} \\ \vartheta_2(2\varpi,q^7)\vartheta_1(2\varpi,q^{14}) = q^3\vartheta_1(7\varpi,q^{21})\left\{\vartheta(8\varpi,q^{42}) + q^8\vartheta(20\varpi,q^{42})\right\}. \end{cases}$$

Setzt man diese 3 Werthe in (9) ein und erwägt, dass:

$$\begin{aligned} iq^{\frac{7}{3}}\vartheta_1(7\varpi,q^{21}) &= \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ iq^{\frac{2}{3}}\vartheta_1(2\varpi,q^6) &= iq^{\frac{2}{3}}\vartheta^{-1}(0,q^6)\ \vartheta_2(\varpi,q^3)\ \vartheta_1(\varpi,q^3 \\ &= \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{pq}}, \end{aligned}$$

so folgt schliesslich:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} -r\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} &= q\,\vartheta_1{}^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\\ &\quad + q^3\vartheta_1{}^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\ &\quad + q^4\vartheta_1{}^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,. \end{aligned}\right.$$

Nun folgt aber aus (7):

$$\begin{aligned} -r\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\} &= q\,\vartheta_1{}^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\\ &\quad + q^3\vartheta_1{}^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\ &\quad + q^4\vartheta_1{}^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7). \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die beiden rechten Seiten vollkommen identisch. Daher folgt:

$$\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\}\,.$$

Zieht man dieses Resultat gehörig zusammen, so ergiebt sich:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\\ &\text{oder auch:}\\ &8q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}\,. \end{aligned}\right.$$

Man vgl. dieses Resultat mit § 2. (11), § 4. (18) sowie § 9. (14) und (16). Es hat sich somit bei allen bis jetzt betrachteten Theilungen eine vollkommene Analogie herausgestellt.

Nun folgt aus § 1. (13):

$$\begin{aligned} 2\,\vartheta_3(2\varpi,q^{14})\,\vartheta_2(2\varpi,q^{14}) &= \vartheta_2(0,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\ 2\,\vartheta_3(4\varpi,q^{14})\,\vartheta_2(4\varpi,q^{14}) &= \vartheta_2(0,q^7)\,\vartheta_2(4\varpi,q^7)\\ 2\,\vartheta_3(6\varpi,q^{14})\,\vartheta_2(6\varpi,q^{14}) &= \vartheta_2(0,q^7)\,\vartheta_2(6\varpi,q^7)\,. \end{aligned}$$

Man multiplicire diese 3 Formeln und wende auf der rechten Seite § 1. (3) an; sodann trage man die Werthe aus (12) ein und bringe alles mit Hülfe der Formeln § 1. (14) auf den Modul q resp. q^7, so folgt:

$$(13)\qquad 8\,q^2\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{p}{P}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}\,.$$

Endlich folgt aus § 1. (17):

$$\begin{aligned} P\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7) - R\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\ = Q\,\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta\,(3\varpi,q^7), \end{aligned}$$

also ist mit Hülfe von (13) und (12):

$$8\,q^2\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7) = \frac{1}{Q}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}\left\{P\sqrt{\frac{p}{P}} - R\sqrt{\frac{r}{R}}\right\},$$

also nach § 6. (10):

$$(14)\qquad 8\,q^2\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{q}{Q}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}.$$

Wenn man nun erwägt, dass zu jeder Function $\vartheta_1(h\varpi, q^\alpha)$ ein Factor $iq^{\frac{hh}{\alpha}}$ hinzutritt, so muss den Formeln (12), (13) und (14) vermöge der Beziehungen § 1. (13) folgende Formel zu Grunde liegen:

$$(15)\quad \begin{cases} -iq^2\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\varpi,q^3)\,\vartheta_1(3\varpi,q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \qquad \vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\varpi,q^3)\,\vartheta_1(3\varpi,q^3) = q^3\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1{}^2(7\varpi,q^{21}). \end{cases}$$

Auch diese Formel wird später aus der allgemeinen Untersuchung als specieller Fall hervorgehen.

Fassen wir diese Resultate noch einmal zusammen, so haben wir:

$$(16)\quad \begin{cases} -iq^2\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = A \\ 8\,q^2\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta\,(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{q}{Q}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{RP}{rp}}\cdot A \\ 8\,q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\cdot A \\ 8\,q^2\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{p}{P}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\cdot A. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergeben sich mit Hülfe der Jacobi'schen Transformationsformeln in § 1. (24) die folgenden vier Formeln für die reelle Periode. Die Ausführung unterlassen wir an dieser Stelle, da sie in § 9. für den allgemeinen Fall jeder ungeraden Zahl dargelegt ist:

$$(17)\quad \begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{7},q\right) = \sqrt{7}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{7}\cdot B \\ 8\vartheta\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\frac{3\pi}{7},q\right) = \sqrt{\frac{Q}{q}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{7}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{rp}{RP}}\cdot B \\ 8\vartheta_2\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\frac{3\pi}{7},q\right) = \sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{7}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot B \\ 8\vartheta_3\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\frac{3\pi}{7},q\right) = \sqrt{\frac{P}{p}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{7}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} = 8\sqrt{\frac{rq}{RQ}}\cdot B. \end{cases}$$

Wir wollen schliesslich noch aufmerksam machen auf die einfachen Beziehungssysteme, die nun in Folge von (16) und (17) und der Combination mit den Formeln § 1. (17) hervorgehen. Es ist:

$$
(18)\quad\left\{\begin{aligned}
&p\vartheta_3(\varpi,q^7)+r\vartheta_2(\varpi,q^7)+q\vartheta\,(\varpi,q^7)\\
&\qquad=2\sqrt{\frac{rp}{RP}}\cdot q\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(\varpi,q^7)-r\vartheta_2(\varpi,q^7)-q\vartheta(\varpi,q^7)\\
&\qquad=2\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot q\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(\varpi,q^7)-r\vartheta_2(\varpi,q^7)+q\vartheta(\varpi,q^7)\\
&\qquad=2\sqrt{\frac{rq}{RQ}}\cdot q\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(2\varpi,q^7)+r\vartheta_2(2\varpi,q^7)-q\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad=2\sqrt{\frac{pr}{PR}}\cdot q^2\vartheta_3(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi q^7)\\
&-p\vartheta_3(2\varpi,q^7)+r\vartheta_2(2\varpi,q^7)-q\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad=2\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot q^2\vartheta_3(3\varpi,q^7)\,\vartheta\,(3\varpi,q^7)\\
&-p\vartheta_3(2\varpi,q^7)+r\vartheta_2(2\varpi,q^7)+q\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad=2\sqrt{\frac{rq}{RQ}}\cdot q^2\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta\,(3\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(3\varpi,q^7)+q\vartheta(3\varpi,q^7)+r\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad=2\sqrt{\frac{pr}{PR}}\cdot q^{-1}\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
&-p\vartheta_3(3\varpi,q^7)+q\vartheta(3\varpi,q^7)+r\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad=2\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot q^{-1}\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
&-p\vartheta_3(3\varpi,q_7)-q\vartheta(3\varpi,q^7)+r\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad=2\sqrt{\frac{qr}{QR}}\cdot q^{-1}\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7),
\end{aligned}\right.
$$

für die reelle Periode aber:

$$
(19)\quad\left\{\begin{aligned}
&P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\,\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\\
&P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)-Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\,\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\\
&P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)-Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RP}{rp}}\,\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\\
&P\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\,\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\\
&-P\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\,\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\\
&-P\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RP}{rp}}\,\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)
\end{aligned}\right.
$$

$$\left|\begin{array}{l} P\vartheta_3\left(\frac{3\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\frac{3\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\frac{3\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\,\vartheta\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{7},q\right) \\ -P\vartheta_3\left(\frac{3\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\frac{3\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\frac{3\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RP}{rp}}\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{7},q\right) \\ -P\vartheta_3\left(\frac{3\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\frac{3\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\frac{3\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\frac{\pi}{7},q\right). \end{array}\right.$$

§ 8.

Allgemeines Theorem für die Primzahlen von der Form $6p+1$.

Die nachstehende Untersuchung soll zeigen, wie die vorhergehenden Resultate verallgemeinert werden können. Wir werden finden, dass ein analoges Resultat wie in § 7. (6) für sämmtliche Primzahlen von der Form $12m+7$ gilt, sowie für das Dreifache sämmtlicher Primzahlen von der Form $12m+1$. Das Eigenthümliche ist, dass auch hierbei die Transformation dritten Grades in die Untersuchung eingeht.

Es lässt sich nämlich jede Primzahl von der Form $6p+1$ zerlegen in A^2+3B^2, und es ist in dieser Form entweder A gerade und B ungerade oder umgekehrt. Es zeigt sich nun, dass für die Zahlen $12m+7$ A gerade ist, B ungerade, desgleichen für das Dreifache der Primzahlen von der Form $12m+1$ (vgl. den Anhang in § 10.). Diese Voraussetzung brauchen wir grade, um eine Anwendung der allgemeinen Formel § 1. (7) auf diese Fälle zu haben.

Setzen wir dort hinein $r=1$, $p=3$, so ist:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} \vartheta_3(tx+sy,q)\ \vartheta_3(sx-3ty,q^3) \\ =\sum_{\mu=0}^{\mu=s^2+3t^2-1} q^{\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_3\left\{(s^2+3t^2)\,y-s\mu\varpi,q^{s^2+3t^2}\right\} \\ \qquad\cdot\vartheta_3\left\{(s^2+3t^2)\,x-3t\mu\varpi,q^{3(s^2+3t^2)}\right\}. \end{array}\right.$$

Et ist nun $s^2+3t^2=p$, wo p eine Primzahl von der Form $12m+7$ oder das Dreifache einer Primzahl von der Form $12m+1$ ist, d. h. entweder

$$p=12m+7$$

oder

$$p=3(12m+1),$$

dann ist s eine gerade, t aber eine ungerade Zahl. Wir haben also dann:

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} \vartheta_3(tx+sy,q)\ \vartheta_3(sx-3ty,q^3) \\ =\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_3(py-s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_3(px-3t\mu\varpi,q^{3p}). \end{array}\right.$$

Setzen wir nun hierein für y und x $y - \frac{\varpi}{2}$ und $x - \frac{3\varpi}{3}$ und beachten, dass nach § 1. (3):

$$q^{\frac{1}{4}(s+3t)^2}\,\vartheta_3(tx+sy-\frac{s+3t}{2}\varpi, q) = e^{-i(tx+sy)(s+3t)}\,\vartheta_2(tx+sy,q)$$

$$q^{\frac{3}{4}(s-t)^2}\,\vartheta_3(sx-3ty-\frac{s-t}{2}3\varpi, q^3) = e^{-i(sx-3ty)(s-t)}\,\vartheta_2(sx-3ty,q^3)\,.$$

ferner dass:

$$q^{\frac{p}{4}}\,\vartheta_3(py-\frac{p\varpi}{2}-s\mu\varpi, q^p) = e^{-i(py-s\mu\varpi)}\,\vartheta_2(py-s\mu\varpi, q^p)$$

$$q^{\frac{3p}{4}}\,\vartheta_3(px-\frac{3p\varpi}{2}-3t\mu\varpi, q^p) = e^{-i(px-3t\mu\varpi)}\,\vartheta_2(px-3t\mu\varpi, q^p)\,,$$

so folgt, wenn man dieses in (2) einsetzt:

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta_2(tx+sy, q)\;\vartheta_2(sx-3ty, q^3) \\ = \sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_2(py-s\mu\varpi, q^p)\;\vartheta_2(px-3t\mu\varpi, q^{3p})\,. \end{cases}$$

Setzt man hierein für y $y+\frac{\pi}{2}$ und bedenkt, dass t eine ungerade, s aber eine gerade Zahl ist, so folgt nach § 1. (3) und (4):

$$\vartheta_2(tx+sy+\tfrac{s\pi}{2}, q) = (-1)^{\frac{s}{2}}\,\vartheta_2(tx+sy, q)$$

$$\vartheta_2(tx-3ty-\tfrac{3t\pi}{2}, q^3) = (-1)^{\frac{3t-1}{2}}\,\vartheta_1(sx-3ty, q^2)$$

$$\vartheta_2(py+\tfrac{p\pi}{2}-s\mu\varpi, q^p) = (-1)^{\frac{p+1}{2}}\,\vartheta_1(py-s\mu\varpi, q^p)\,.$$

Setzen wir dies in (3) ein, so folgt:

$$(4)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s+3t-p}{2}}\,\vartheta_2(tx+sy, q)\;\vartheta_1(sx-3ty, q^3) \\ = \sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_2(px-3t\mu\varpi, q^{3p})\;\vartheta_1(py-s\mu\varpi, q^p)\,. \end{cases}$$

Hierein werde gesetzt:

$$tx+sy = t\varpi\,,\quad sx-3ty = s\varpi\,,$$

also

$$px = (3t^2+s^2)\varpi = p\varpi\,,\quad py = 0\,.$$

Man beachte dann, dass:

$$\vartheta_2(t\varpi, q) = q^{-tt}\,\vartheta_2(0, q)\,,$$

ferner, dass:

$$\vartheta_1(s\varpi, q^3) = (-1)^s\, q^{\frac{-s+1}{3}(s-1)}\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,,$$

da s immer eine gerade Zahl ist; dass ferner:

$$q^{tt+\frac{s+1}{3}(s-1)} = q^{\frac{p-1}{3}}$$

und

$$(-1)^{\frac{s+3t-p}{2}} = (-1)^{\frac{st+2t^2-p}{2}} = (-1)^{\frac{s(t-s)}{2}} = (-1)^{\frac{s}{2}}.$$

Es ergiebt sich dann aus (4):

$$(5)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3) \\ = q^{\frac{p-1}{3}} \sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu-2\mu t}\,\vartheta_2(p\varpi-3t\mu\varpi,q^{3p})\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,. \end{cases}$$

Da s gerade ist, so beachte man, dass nach § 1. (3):

$$\vartheta_1\{(p-1)s\varpi,q^p\} = -q^{(2-p)s^2}\,\vartheta_1(s\varpi,q^p) \text{ etc.}$$

und ferner im letzten Gliede:

$${}_2\vartheta\{p\varpi-3t(p-1)\varpi,q^{3p}\} = q^{1-2t}q^{p-2t}\,\vartheta_2(2p\varpi-3t\varpi,q^{3p})$$

und dass sich die Hälfte aller Glieder ebenso transformiren lassen. Dann folgt schliesslich:

$$(6)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3) \\ = q^{\frac{p-1}{3}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu-2\mu t}\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\{\vartheta_2(p\varpi-3t\mu\varpi,q^{3p})-q^{p-2\mu t}\vartheta_2(2p\varpi-3t\mu\varpi,q^{3p}\} \\ = q^{1-2t}\,\vartheta_1(s\varpi,q^p)\{\vartheta_2(p\varpi-3t\varpi,q^{3p})-q^{p-2t}\vartheta_2(2p\varpi-3t\varpi,q^{3p})\} \\ + q^{4-4t}\,\vartheta_1(2s\varpi,q^p)\{\vartheta_2(p\varpi-6t\varpi,q^{3p})-q^{p-4t}\vartheta_2(2p\varpi-6t\varpi,q^{3p})\} \\ + q^{9-6t}\,\vartheta_1(3s\varpi,q^p)\{\vartheta_2(p\varpi-9t\varpi,q^{3p})-q^{p-6t}\vartheta_2(2p\varpi-9t\varpi,q^{3p})\} \\ + \cdots\cdots \end{cases}$$

Genau dieselben Combinationen wie in den Klammergrössen treten aber wieder in Folge der Formeln § 2. (3) der Dreitheilung auf. Aus den dortigen Beziehungen folgt:

$$(7)\quad \begin{cases} -iq^{\frac{-p}{2}}\,\vartheta_1(x,q^p)\,\vartheta(y,q^{2p}) = \vartheta_2(x+y-p\varpi,q^{3p})\,\vartheta(2x-y+p\varpi,q^{6p}) \\ \qquad - q^p\,e^{2ix}\,\vartheta_2(x+y-2p\varpi,q^{3p})\,\vartheta(2x-y-p\varpi,q^{6p}) \\ \qquad + q^{4p}e^{4ix}\,\vartheta_2(x+y-3p\varpi,q^{3p})\,\vartheta(2x-y-3p\varpi,q^{6p}) \end{cases}$$

Aus dieser Formel ergiebt sich ohne Schwierigkeit allgemein:

$$(8)\quad \begin{cases} -\vartheta_1(\mu t\varpi,q^p)\,\vartheta(2\mu t\varpi,q^{2p}) \\ = q^{p-2\mu t}\vartheta_1(2p\varpi,q^{6p})\{\vartheta_2(p\varpi-3t\mu\varpi,q^{3p})-q^{p-2\mu t\varpi}\vartheta_2(2p\varpi-3\mu t\varpi,q^{3p})\} \end{cases}$$

wo für μ nach und nach alle ganzen Zahlen $1, 2, 3 \ldots \frac{p-1}{2}$ zu setzen sind. Es ist charakteristisch, dass auch hier wie bei der Sieben die Grössen in (6), welche den Modul q^{3p} enthalten, mit Hülfe von (8) eliminirt werden.

Es ist dann:

$$(9)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}+1}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2p\varpi,q^{6p}) \\ = q^{\frac{p-1}{3}} \sum_{0}^{\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu-p}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(\mu t\varpi,q^p)\,\vartheta(2\mu t\varpi,q^{2p}) . \end{cases}$$

Nun folgt aus § 1. (13):

$$\vartheta(0,q^{2p})\,\vartheta(2\mu t\varpi,q^{2p}) = \vartheta(\mu t\varpi,q^p)\,\vartheta_3(\mu t\varpi,q^p)$$

und aus § 2. (11):

$$(10)\quad \begin{cases} q^{\frac{2p+1}{3}}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\mu\varpi,q^{6p})\,\vartheta(0,q^{2p}) \\ \qquad = -r\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \end{cases}$$

worin also nach § 1. (25) $P = \vartheta_3(0,q^p)$ etc. Demgemäss folgt:

$$(11)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}} r\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \qquad = \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_3(t\mu\varpi,q^p) \end{cases}$$

und auf gleiche Weise leitet man ohne Schwierigkeit die beiden analogen Formeln her:

$$(11)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}} p\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \qquad = \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_2(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta(t\mu\varpi,q^p) \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}} q\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \qquad = \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\mu} q^{\mu\mu}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_2(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_3(t\mu\varpi,q^p) \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgen die in § 7. (6) für die Siebentheilung hergeleiteten als specielle Fälle, wenn man $p = 7 = 2^2 + 3 \cdot 1^2$, also $s = 2$, $t = 1$ setzt.

§ 9.

Allgemeine Untersuchungen für alle ungeraden Zahlen.

Bei der Dreitheilung § 2. (11) hatten wir gefunden:

$$2\,q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_2(\varpi, q^3) = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{3}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}},$$

für die Fünftheilung hatte sich ergeben:

$$4\,q\,\vartheta_2(\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\varpi, q^5) = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4pqr)^{\frac{5}{6}}}$$

und ich hatte bei meiner eignen Untersuchung für die Sieben gefunden § 7. (12):

$$8\,q^2\,\vartheta_2(\varpi, q^7)\,\vartheta_2(2\varpi, q^7)\,\vartheta_2(3\varpi, q^7) = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}.$$

Diese vollkommene Uebereinstimmung liess vermuthen, dass hier wohl ein allgemeines Gesetz zu Grunde liegen möge. Die nachfolgenden Theoreme, welche für alle ungeraden Zahlen gültig sind, enthalten in der That jene Beziehungen, sowie die mit ihnen zugleich auftretenden als specielle Fälle in sich. Wegen ihrer eigenthümlichen Analogie mit Gauss'schen Beziehungen für die trigonometrischen Functionen sin und cos sind sie als charakteristisch für die Eigenschaften der Jacobi'schen Transcendenten ϑ anzusehen.

Gauss hat in seiner grossen Abhandlung: Summatio quarundam serierum singularium (vgl. Gesammte Werke Bd. II, Göttingen 1863) einige bemerkenswerthe Beziehungen und zwar auf einem an sich eigenthümlichnn Wege abgeleitet. Eine von diesen Formeln ist die folgende: Wenn α eine Zahl von der Form $4\mu + 1$ oder $4\mu + 3$ ist, also allgemein eine ungerade Zahl von der Form $2n + 1$, so ist:

$$2^n \sin\frac{2\pi}{\alpha} \sin 3\cdot\frac{2\pi}{\alpha} \sin 5\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\cdots\sin(\alpha-2)\cdot\frac{2\pi}{\alpha} = \sqrt{\alpha}$$

(vgl. Gauss a. a. O. S. 26).

Da nun

$$\sin(\alpha-2)\cdot\frac{2\pi}{\alpha} = \sin\left(2\pi - 2\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\right) = -\sin 2\cdot\frac{2\pi}{\alpha} \text{ etc.},$$

so ist auch:

$$(-1)^{\mu}\,2^n \sin\frac{2\pi}{\alpha}\cdot\sin 2\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\cdot\sin 3\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\sin 4\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\cdots\sin n\cdot\frac{2\pi}{\alpha} = \sqrt{\alpha},$$

Wir werden nun folgende Formel ableiten:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, q\right)\cdots\cdots\vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \sqrt{\alpha}\cdot A.$$

Die vollkommenste Analogie ist hierin in die Augen springend. A wird sich als ein transcendenter Factor herausstellen, der von den 6 fundamentalen Grössen p, q, r, P, Q, R abhängt, nämlich:

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \vartheta_1^{n-1}\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{\alpha}{3}}\right) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Wir nehmen 3 Ausgangspunkte, nämlich zuerst die Formel § 1. (9), sodann die Productbeziehungen der Grundformeln in § 1. (1) und schliesslich drittens die Jacobi'schen Transformationsformeln zwischen der reellen und imaginären Periode in § 1. (24).

1.

Die Reihen, mit denen wir es hier zu thun haben, sind der Hauptsache nach:

$$(1)\quad \begin{cases} P = \vartheta_3(0, q^\alpha) = 1 + 2q^\alpha + 2q^{4\alpha} + 2q^{9\alpha} + 2q^{16\alpha} + \cdots \\ Q = \vartheta\ (0, q^\alpha) = 1 - 2q^\alpha + 2q^{4\alpha} - 2q^{9\alpha} + 2q^{16\alpha} \mp \cdots \\ R = \vartheta_2(0, q^\alpha) = 2q^{\frac{\alpha}{4}} + 2q^{\frac{9\alpha}{4}} + 2q^{\frac{25\alpha}{4}} + 2q^{\frac{29\alpha}{4}} + \cdots \\ q^{\frac{hh}{\alpha}}\vartheta_3(h\varpi, q^\alpha) = q^{\frac{hh}{\alpha}} + q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha+h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha-h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha+h)^2} + \\ q^{\frac{hh}{\alpha}}\vartheta\ (h\varpi, q^\alpha) = q^{\frac{hh}{\alpha}} - q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-h)^2} - q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha+h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha-h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha+h)^2} \mp \\ q^{\frac{hh}{\alpha}}\vartheta_2(h\varpi, q^\alpha) \\ \qquad = q^{\frac{(\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(3\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(3\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(5\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(5\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + \\ q^{\frac{hh}{\alpha}}\vartheta_1(h\varpi, q^\alpha) \\ \qquad = q^{\frac{(\alpha-2h)^2}{4\alpha}} - q^{\frac{(\alpha+2h)^2}{4\alpha}} - q^{\frac{(3\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(3\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(5\alpha-2h)^2}{4\alpha}} - q^{\frac{(5\alpha+2h)^2}{4\alpha}} \mp \end{cases}$$

In diesen Reihen ist α irgend eine ungerade Zahl, also:

$$\alpha = 2n + 1,$$

und dann bedeutet $h\varpi$ etc., dass für h alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu setzen sind. Es resultiren dann daraus die n oder $\frac{\alpha-1}{2}$ fundamentalen Theilwerthe $\vartheta_3(\varpi, q^\alpha)$, $\vartheta_3(2\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_3(n\varpi, q^\alpha)$ und ebenso bei den übrigen 3 Functionen. Die Bezeichnung ist nach § 1. (25) die von Gauss eingeführte, allgemein:

$$P = \vartheta_3(0, q^\alpha), \quad Q = \vartheta(0, q^\alpha), \quad R = \vartheta_2(0, q^\alpha)$$
$$p = \vartheta\ (0, q), \quad q = \vartheta\ (0, q), \quad r = \vartheta_2(0, q).$$

Der Kürze halber möge nun noch für das Product sämmtlicher

n Theilwerthe, dem ja hier unsere Untersuchung gilt, eine neue Bezeichnung eingeführt werden.

Es sei nämlich:

$$(2)\quad \begin{cases} \vartheta_3(\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_3(2\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_3(n\varpi, q^\alpha) = \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta_3] \\ \vartheta_2(\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_2(2\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_2(n\varpi, q^\alpha) = \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_2(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta_2] \\ \vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_1(2\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_1(n\varpi, q^\alpha) = \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_1(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta_1] \\ \vartheta(\varpi, q^\alpha)\ \vartheta(2\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta(n\varpi, q^\alpha) = \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta] \end{cases}$$

und entsprechend für die reelle Periode:

$$\begin{cases} \vartheta_3\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \cdots \vartheta_3\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta_3) \\ \vartheta_2\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \cdots \vartheta_2\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_2\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta_2) \\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \cdots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_1\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta_1) \\ \vartheta\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \cdots \vartheta\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta)\,. \end{cases}$$

Die Multiplication läuft also über ein halbes Restesystem, da

$$n = \frac{\alpha - 1}{2}\,.$$

Dann folgt aus § 1. (19):

$$\begin{aligned} &2\vartheta(\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_2(\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_3(\varpi, q^\alpha) = PQR\,\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha) \\ &2\vartheta(2\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_2(2\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_3(2\varpi, q^\alpha) = PQR\,\vartheta_1(4\varpi, q^\alpha) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &2\vartheta(n\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_1(n, \varpi, q^\alpha)\ \vartheta_2(n\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_3(n\varpi, q^\alpha) = PQR\,\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\,. \end{aligned}$$

Multipliciren wir diese n Gleichungen, so folgt:

$$(3)\quad 2^n[\vartheta][\vartheta_1][\vartheta_2][\vartheta_3] = P^n Q^n R^n \vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_1(4\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\,.$$

Von den Gliedern auf der rechten Seite lassen sich eine gewisse Anzahl mit Hülfe der Beziehungen § 1. (3) reduciren. Wir unterscheiden 2 Fälle.

1. Fall: n ist eine gerade Zahl. Dann sind $\frac{n}{2}$ Glieder nach § 1. (3) zu transformiren, nämlich die Glieder:

$$\vartheta_1\{(n+2)\varpi, q^\alpha\}, \quad \vartheta_1\{(n+4)\varpi, q^\alpha\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).$$

Nun ist nach § 1. (3):

$$\vartheta_1(x-\varpi, q) = -q^{-1}e^{-2ix}\vartheta_1(x, q),$$

also

$$\vartheta_1(x-\alpha\varpi, q^\alpha) = -q^{-\alpha}e^{-2ix}\vartheta_1(x, q^\alpha)$$

und es folgt hieraus:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1\{(n+2)\varpi, q^\alpha\} &= q^{-3}\vartheta_1\{(n-1)\varpi, q^\alpha\}\\
\vartheta_1\{(n+4)\varpi, q^\alpha\} &= q^{-7}\vartheta_1\{(n-3)\varpi, q^\alpha\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha) &= q^{-2n+1}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha),
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1\{(n+2)\varpi, q^\alpha\}\ \vartheta_1\{(n+4)\varpi, q^\alpha\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\\
&= q^{-(3+7+11+\cdots 2n-1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1((n-1)\varpi, q^\alpha).
\end{aligned}$$

Nun sind in der arithmetischen Reihe $\frac{n}{2}$ Glieder vorhanden, also ist:

$$q^{-(3+7+11+\cdots 2n-1)} = q^{-\frac{n}{2}(n+1)},$$

also das Product der transformirten Glieder:

$$\begin{aligned}
(4)\quad &\vartheta_1\{(n+2)\varpi, q^\alpha\}\ \vartheta_1\{(n+4)\varpi, q^\alpha\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\\
&= q^{-\frac{n}{2}(n+1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1\{(n-1)\varpi, q^\alpha\}.
\end{aligned}$$

2. Fall: n ist eine ungerade Zahl. Dann sind $\frac{n+1}{2}$ Glieder zu transformiren, nämlich:

$$\vartheta_1\{(n+1)\varpi, q^\alpha\}, \quad \vartheta_1\{(n+3)\varpi, q^\alpha\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).$$

Es folgt nun wieder aus § 1. (3):

$$\begin{aligned}
\vartheta_1((n+1)\varpi, q^\alpha) &= q^{-1}\vartheta_1(n\varpi, q^\alpha)\\
\vartheta_1((n+3)\varpi, q^\alpha) &= q^{-5}\vartheta_1((n-2)\varpi, q^\alpha)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha) &= q^{-2n+1}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha),
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
(5)\quad &\vartheta_1\{(n+1)\varpi, q^\alpha\}\ \vartheta_1\{(n+3)\varpi, q^\alpha\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\\
&= q^{-(1+5+\cdots 2n-1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1(n\varpi, q^\alpha)\\
&= q^{-\frac{n}{2}(n+1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_1(3\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_1(n\varpi, q^\alpha).
\end{aligned}$$

In beiden Fällen, sowohl in (4) als auch in (5), liefert also das Product der zu transformirenden Glieder in (3) genau das Product der fehlenden ungeraden Theilwerthe, so dass nun rechts ebenfalls $[\vartheta_1]$ entsteht.

Darum ist also:

$$(6)\quad \begin{cases} 2^n q^{\frac{n}{2}(n+1)} [\vartheta] [\vartheta_2] [\vartheta_3] = (PQR)^n \\ \text{oder auch anders geschrieben:} \\ 2^n q^{\frac{n}{2}(n+1)} \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta(h\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_2(h\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_3(h\varpi, q^\alpha) = (PQR)^n . \end{cases}$$

Hieraus folgt z. B.:

$$2^2 q^3 \prod_{h=1}^{h=2} \vartheta(h\varpi, q^5)\ \vartheta_2(h\varpi, q^5)\ \vartheta_3(h\varpi, q^5) = P^2Q^2R^2$$

$$2^3 q^6 \prod_{h=1}^{h=3} \vartheta(h\varpi, q^7)\ \vartheta_2(h\varpi, q^7)\ \vartheta_3(h\varpi, q^7) = P^3Q^3R^3$$

$$2^5 q^{15} \prod_{h=1}^{h=5} \vartheta(h\varpi, q^{11})\ \vartheta_2(h\varpi, q^{11})\ \vartheta_3(h\varpi, q^{11}) = P^5Q^5R^5 \text{ etc.}$$

Dieselbe Untersuchung lässt sich auch für die reelle Periode führen und ist hier einfacher einzusehen. Wir haben hier die n Theilungswerthe:

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right);\quad \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \cdots \vartheta_3\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) \text{ etc.}$$

Vermöge § 1. (19) ist dann:

$$2\,\vartheta\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)$$

$$2\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\frac{4\pi}{\alpha}, q\right)$$

. . . . . .

$$2\,\vartheta\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, q\right).$$

Nun ist:

$$\vartheta_1\left(\frac{2n\pi}{\alpha}, q\right) = \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right),\quad \vartheta_1\left(\frac{(2n-2)\pi}{\alpha}, q\right) = \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, q\right) \text{ etc.},$$

also:

$$(7)\quad \begin{cases} 2^n (\vartheta)(\vartheta_2)(\vartheta_3) = (pqr)^n \\ \text{oder:} \\ 2^n \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (pqr)^n . \end{cases}$$

Aus der Combination mit (6) folgt noch:

$$(8)\qquad q^{\frac{n}{2\alpha}(\alpha+1)} \prod_{h=1}^{h=n} \frac{\vartheta\left(\frac{h\varpi}{\alpha}, q\right)}{\vartheta\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)} \cdot \frac{\vartheta_2\left(\frac{h\varpi}{\alpha}, q\right)}{\vartheta_2\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)} \cdot \frac{\vartheta_3\left(\frac{h\varpi}{\alpha}, q\right)}{\vartheta_3\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)} = 1 .$$

2.

Wir werden jetzt die fundamentalen Producte $[\vartheta]$, $[\vartheta_1]$, $[\vartheta_3]$ etc. einzeln darstellen. Wir gehen aus von den Jacobi'schen Fundamentalformeln der Producte.

Es ist bekanntlich:

$$(9)\quad \begin{cases} q = \vartheta\,(0,q) = \prod_{h=1}^{h=\infty} \frac{1-q^h}{1+q^h} = \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})\,(1-q^{2h-1})^2 \\ p = \vartheta_3(0,q) = \prod_{h=1}^{h=\infty} \frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}} \cdot \frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}} = \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1+q^{2h-1})^2 \\ r = \vartheta_2(0,q) = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{h=1}^{h=\infty} \frac{1-q^{4h}}{1-q^{4h-2}} = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})\,(1+q^{2h})^2 . \end{cases}$$

Es folgt hieraus, dass:

$$\prod_{h=1}^{h=\infty} (1+q^h)\,(1-q^{2h-1}) = 1$$

und mit Hülfe hiervon:

$$(10)\qquad \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = q^{\frac{1}{12}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h}) = i q^{\frac{1}{3}}\, \vartheta_1(\varpi, q^3) .$$

Dass

$$q^{\frac{1}{12}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h}) = i q^{\frac{1}{3}}\, \vartheta_1(\varpi, q^3) ,$$

kann man sowohl mit Hülfe von § 2. (11) erschliessen, oder abhängig hiervon leicht daraus, dass

$$\vartheta_1(x,q) = 2\,q^{\frac{1}{4}} \sin x \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})\,(1-2\,q^{2h}\cos 2\,x + q^{4h}) ,$$

wobei man zu beachten hat, dass:

$$\prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{6h})\,(1-q^{6h-2})\,(1-q^{6h-4}) = \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h}) .$$

Aus dieser Formel für $\vartheta_1(x,q)$ ergiebt sich nun aber ganz allgemein:

$$(11^a)\quad i\vartheta_1(m\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(q^{-m}-q^{+m})(1-q^{2h\alpha-2m})(1-q^{2h\alpha+2m}).$$

Hierin möge m eine der Zahlen $1, 2 \cdots n$ bedeuten. Nun ist aber ebenfalls allgemein:

$$\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha+2m})=\frac{1}{1-q^{2m}}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-m)}),$$

also folgt jetzt:

$$(11^b)\quad i\vartheta_1(m\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-m}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2m})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-m)}).$$

Hieraus nun folgt:

$$i\vartheta_1(\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-1}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-1)})$$

$$i\vartheta_1(2\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-2}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-4})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-2)})$$

$$i\vartheta_1(3\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-3}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-6})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-3)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i\vartheta_1(n\varpi,q^\alpha)=q^{\frac{\alpha}{4}-n}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2n})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-n)}).$$

Multipliciren wir alle diese Gleichungen, so schliessen sich rechts alle Factoren an einander; denn wir haben im Exponenten:
$2h\alpha-2,\ 2h\alpha-4,\ 2h\alpha-6, \cdots 2h\alpha-2n,\ 2h\alpha-2n-2, \cdots 2h\alpha-4n.$
Wir erhalten demgemäss:

$$i^n[\vartheta_1]=q^{\frac{n\alpha}{4}-\frac{n+1}{2}n}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})^{n-1}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2})\cdots(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-1)}).$$

Nun folgt aber aus (10), wenn man für h nach einander setzt $\alpha h,\ \alpha h-1,\ \alpha h-2 \cdots$ bis $\alpha h-(\alpha-1)$:

$$\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=iq^{\frac{1}{3}}\vartheta_1(\varpi,q^3)=q^{\frac{1}{12}}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2})(1-q^{2h\alpha-4})\cdots(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-1)},$$

also ergiebt sich jetzt schliesslich:

$$(12)\qquad [\vartheta_1]=q^{\frac{n(\alpha-1)}{2}}\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1{}^{n-1}(\alpha\varpi,q^{3\alpha}).$$

Dieses ist eine von den Fundamentalformeln, welche abzuleiten wir uns vorgesetzt hatten.

Setzen wir hierin $\alpha = 5$, so resultirt als specieller Fall die Jacobi'sche Formel für die Fünftheilung aus § 4. (11), nämlich:

$$\vartheta_1(\varpi, q^5)\ \vartheta_1(2\varpi, q^5) = q\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\ \vartheta_1(5\varpi, q^{15}).$$

Ebenso folgt:

$$\vartheta_1(\varpi, q^7)\ \vartheta_1(2\varpi, q^7)\ \vartheta_1(3\varpi, q^7) = q^3\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\ \vartheta_1^2(7\varpi, q^{21}),$$

vgl. § 7. (15).

Da nun:

$$iq^{\frac{1}{3}}\ \vartheta_1(\varpi, q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

so ist:

$$i^{n-1} q^{\frac{n-1}{3}}\ \vartheta_1^{n-1}(\alpha\varpi, q^{3\alpha}) = \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}$$

und es folgt somit aus (12):

$$i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\ [\vartheta_1] = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}. \tag{13}$$

Die übrigen analogen Beziehungen erlangen wir mit Hülfe der folgenden aus § 1. (13):

$$\vartheta_1(x, q)\ \vartheta_2(x, q) = \vartheta(0, q^2)\ \vartheta_1(2x, q^2)$$
$$2\,\vartheta(x, q^2)\ \vartheta_1(x, q^2) = \vartheta_2(0, q)\ \vartheta_1(x, q)$$

und der Beziehung (6).

Es ist nämlich:

$$\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_2(\varpi, q^\alpha) = \vartheta(0, q^{2\alpha})\ \vartheta_1(2\varpi, q^{2\alpha})$$
$$\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\ \vartheta_2(2\varpi, q^\alpha) = \vartheta(0, q^{2\alpha})\ \vartheta_1(4\varpi, q^{2\alpha}) \text{ etc.}$$

Multipliciren wir diese n Formeln, so folgt:

$$[\vartheta_2] = \vartheta^n(0, q^{2\alpha})\ [\vartheta_1]_{q=q^2}\ [\vartheta_1]^{-1}.$$

Es ist aber:

$$q^{\frac{n(n+1)}{3}}\ [\vartheta_1]_{q=q^2} = \left(\tfrac{1}{2}\vartheta(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^2)\right)^{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{1}{2}\vartheta(0,q^{2\alpha})\,\vartheta_3(0,q^{2\alpha})\,\vartheta_2(0,q^{2\alpha})\right)^{\frac{n-1}{3}}$$
$$= \left(\frac{i^2}{4}\sqrt{pq}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R^2}{4}\sqrt{PQ}\right)^{\frac{n-1}{3}} \text{ nach § 1. (14)}$$

und

$$\vartheta^n(0, q^{2\alpha}) = (PQ)^{\frac{n}{2}}.$$

Dann folgt:

$$2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\ [\vartheta_2] = \sqrt{\frac{r}{R}}\ \frac{(4PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}. \tag{14}$$

Andrerseits folgt aus der zweiten Formel:

$$2^n\ [\vartheta] = \vartheta_2^n(0, q^{\frac{\alpha}{2}})\ [\vartheta_1]_{q=q^{\frac{1}{2}}}\ [\vartheta_1]^{-1}.$$

Nun folgt aus § 1. (14):

$$[\vartheta_1]_{q=q^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{q^2}{2}\sqrt{2rp}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{1}{2}\,Q^2\sqrt{2\,RP}\right)^{\frac{n-1}{3}}$$

$$\vartheta_2{}^n\,(0, q^{\frac{\alpha}{2}}) = (2\,RQ)^{\frac{n}{2}},$$

also:

$$2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta] = \sqrt{\frac{q}{Q}}\;\frac{(4\,PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}}. \tag{15}$$

Multipliciren wir nun (14) mit (15) und dividiren in (6), so ergiebt sich eine ebensolche Beziehung für $[\vartheta_3]$. Wenn wir mit dieser die erlangten Resultate zusammenstellen, so haben wir:

$$\left\{\begin{aligned}
i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_1] &= \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \\
2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta\,] &= \sqrt{\frac{q}{Q}}\;\frac{(4\,PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}} \\
2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_2] &= \sqrt{\frac{r}{R}}\;\frac{(4\,PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}} \\
2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_3] &= \sqrt{\frac{p}{P}}\;\frac{(4\,PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}},
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

oder die 3 letzten Beziehungen auch in dieser Form, wenn

$$\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} = A$$

$$\left\{\begin{aligned}
q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta\,] &= A\sqrt{\frac{PR}{pr}} \\
q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_2] &= A\sqrt{\frac{PQ}{pq}} \\
q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_3] &= A\sqrt{\frac{QR}{qr}}.
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Diese Formeln enthalten alle früheren als specielle Fälle in sich, nämlich die Formeln in § 2. (11), in § 4. (18) und § 7. (16).

3.

Um nun auf einem möglichst eleganten Wege zu denselben Formeln für die reelle Periode zu gelangen, gehen wir von einer dritten Quelle aus, nämlich den Jacobi'schen Transformationsformeln zwischen der reellen und imaginären Periode. Mit Hülfe derselben werden wir die Formeln (12), (13), (16) einfach übertragen.

Es ist § 1. (24):

$$(18)\quad \begin{cases} \vartheta_1(x, e^p) = i\sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_1\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta\ (x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_2\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_2(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta\ \left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_3(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_3\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right), \end{cases}$$

worin $p = \log q$, also $e^p = q$.

Aus diesen Formeln folgt, dass:

$$(19)\quad \begin{cases} q = \vartheta\ (0, q) = \vartheta\ (0, e^p) = i\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}) \\ r = \vartheta_2(0, q) = \vartheta_2(0, e^p) = i\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta\ (0, e^{\frac{\pi^2}{p}}) \\ p = \vartheta_3(0, q) = \vartheta_3(0, e^p) = i\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}) \\ Q = \vartheta\ (0, q^\alpha) = \vartheta\ (0, e^{p\alpha}) = i\sqrt{\frac{\pi}{p\alpha}}\, \vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}) \\ R = \vartheta_2(0, q^\alpha) = \vartheta_2(0, e^{p\alpha}) = i\sqrt{\frac{\pi}{p\alpha}}\, \vartheta\ (0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}) \\ P = \vartheta_3(0, q^\alpha) = \vartheta_3(0, e^{p\alpha}) = i\sqrt{\frac{\pi}{p\alpha}}\, \vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}). \end{cases}$$

Aus (18) folgt ferner:

$$\vartheta_1(x, e^{\alpha p}) = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{x^2}{\alpha p}}\, \vartheta_1\left(\frac{i\pi x}{\alpha p}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right).$$

Setzen wir hierein für x:

$$\varpi,\ 2\varpi,\ 3\varpi \cdots \text{ oder } ip,\ 2ip,\ 3ip \cdots$$

so folgt:

$$(20)\quad \begin{cases} \vartheta_1(\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-p}{\alpha}}\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \\ \vartheta_1(2\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-4p}{\alpha}}\ \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \\ \vartheta_1(3\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-9p}{\alpha}}\ \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vartheta_1(n\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-n^2 p}{\alpha}}\ \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right). \end{cases}$$

Somit ist:

$$[\vartheta_1] = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\right)^n e^{-\frac{p}{\alpha}(1+4+9+\cdots n^2)} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \cdots$$

$$\cdots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right)$$

und da

$$1 + 4 + \cdots nn = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)}{6}\alpha$$

so ist:

$$e^{-\frac{p}{\alpha}(1+4+9+\cdots nn)} = q^{-\frac{n(n+1)}{6}}.$$

Also folgt jetzt mit Hülfe der Formeln (16) und (19):

$$(21)\begin{cases} i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_1] = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \\ = \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta_3(0, e^p)\, \vartheta(0, e^p)\, \vartheta_2(0, e^p)\right\}^{\frac{1}{3}} \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta_3(0, e^{\alpha p})\, \vartheta(0, e^{\alpha p})\, \vartheta_2(0, e^{\alpha p})\right\}^{\frac{n-1}{3}} \\ = i^n \left(\frac{\pi}{\alpha p}\right)^{\frac{n}{2}} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \cdots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right). \end{cases}$$

Setzen wir nun hierein statt

$$\frac{1}{p} \cdots \frac{p\alpha}{\pi^2},$$

also statt:

$$p \cdots \frac{\pi^2}{p\alpha}$$

und statt

$$\frac{\pi^2}{p\alpha} \cdots p,$$

so folgt:

$$\left\{\tfrac{1}{2}\vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}})\, \vartheta(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}})\, \vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}})^{\frac{1}{3}}\right\} \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta(0, e^{\frac{\pi^2}{p}})\, \vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{p}})\, \vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{p}})\right\}$$

$$= i^n \left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^n \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^p\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^p\right) \cdots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^p\right).$$

Hieraus ergiebt sich durch Anwendung der Beziehungen (19):

$$\left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\alpha p}{\pi}}\right) \quad \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta(0, e^{\alpha p})\, \vartheta_2(0, e^{\alpha p})\, \vartheta_3(0, e^{\alpha p})\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$\cdot \left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^{n-1} \left\{\tfrac{1}{2}\vartheta(0, e^p)\ \vartheta_2(0, e^p)\ \vartheta_3(0, e^p)\right\}^{\frac{n-1}{3}}$$

$$= i^n \left(\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)^n \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^p\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^p\right) \cdots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^p\right).$$

Nach der Transformation erscheint rechts i^{2n} und dies ist immer $= +1$. Führen wir also unsere alten Bezeichnungen ein, so folgt:

$$(22)\quad \begin{cases} (\vartheta_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \sqrt{\alpha}\ \vartheta_1^{n-1}\left(\frac{\pi}{3}, q^3\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{\alpha}{3}}\right) \\ \text{oder} \\ (\vartheta_1) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Als specielle Fälle fliessen hieraus:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = \sqrt{5}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

vgl. § 4. (6) und (12) combinirt.

Ferner:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{7}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{7}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{7}, q\right) = \sqrt{7}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

vgl. § 7. (17).

Aehnlich wie für die imaginäre Periode ergeben sich auch für die reelle die Formeln für (ϑ), (ϑ_2) und (ϑ_3) mit Hülfe von (7) und von § 1. (13).

Mit Hülfe der beiden dortigen Formeln

$$\vartheta_1(x, q)\ \vartheta_2(x, q) = \vartheta(0, q^2)\ \vartheta_1(2x, q^2)$$

und

$$2\,\vartheta(x, q)\ \vartheta_1(x, q) = \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})\ \vartheta_1(x, q^{\frac{1}{2}})$$

folgt nämlich:

$$(\vartheta_2) = \vartheta^n(0, q^2)\,(\vartheta_1)_{q=q^2}\,(\vartheta_1)^{-1}$$

und

$$2^n(\vartheta) = \vartheta_2{}^n(0, q_{\frac{1}{2}})\ (\vartheta_1)_{q=q_{\frac{1}{2}}}\,(\vartheta_1)^{-1}.$$

Reducirt man dann die Grössen $(\vartheta_1)_{q=q^2}$ und $(\vartheta_1)_{q=q_{\frac{1}{2}}}$, sowie $\vartheta(0, q^2)$ und $\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})$ nach den Formeln § 1. (14), so folgt:

$$(23)\quad \begin{cases} 2^n(\vartheta) = \sqrt{\frac{Q}{q}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \\ 2^n(\vartheta_2) = \sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \\ 2^n(\vartheta_3) = \sqrt{\frac{P}{p}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \end{cases}$$

oder wenn man

$$\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} = B$$

setzt, während

$$\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = A,$$

in (17) also

$$AB = \left(\frac{PQRpqr}{4}\right)^{\frac{n}{3}}$$

so folgt aus (22) und (23):

$$(24)\quad \begin{cases} (\vartheta_1) = \sqrt{\alpha}\cdot B \\ (\vartheta) = B\sqrt{\frac{pr}{PR}} \\ (\vartheta_2) = B\sqrt{\frac{pq}{PQ}} \\ (\vartheta_3) = B\sqrt{\frac{qr}{QR}}\,. \end{cases}$$

Als specielle Fälle fliessen hieraus die Formeln § 2. (11), ferner § 4. (19) und § 7. (17).

Auf die Analogie der Formel (22) mit den Gauss'schen Resultaten für die sinus-Producte haben wir schon in der Einleitung zu diesem Paragraphen hingewiesen. Durch Vergleichung von (22), (23), (24) mit (16) und (17) resultiren dann noch folgende Beziehungen zwischen der reellen und imaginären Periode:

$$(25)\quad \begin{cases} i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_1]\,(\vartheta_1) = \sqrt{\alpha}\,AB = \sqrt{\alpha}\left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta]\,(\vartheta) = \left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_2]\,(\vartheta_2) = \left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_3]\,(\vartheta_3) = \left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}}. \end{cases}$$

Also hieraus:

$$(26)\quad \frac{i^n}{\sqrt{\alpha}}\,[\vartheta_1]\,(\vartheta_1) = [\vartheta]\,(\vartheta) = [\vartheta_2]\,(\vartheta_2) = [\vartheta_3]\,(\vartheta_3)\,,$$

Endlich noch:

$$(27)\quad \begin{cases} i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,\frac{[\vartheta_1]}{(\vartheta_1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\left[\frac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n-2}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,\frac{[\vartheta]}{(\vartheta)} = \frac{q}{Q}\cdot\left[\frac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n+1}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,\frac{[\vartheta_2]}{(\vartheta_2)} = \frac{r}{R}\left[\frac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n+1}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,\frac{[\vartheta_3]}{(\vartheta_3)} = \frac{p}{P}\left[\frac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n+1}{3}}. \end{cases}$$

§ 10.

Anhang.

Es ist im § 7. behauptet worden, dass sämmtliche Primzahlen von der Form $6m + 1$ sich zerlegen lassen in die Summe eines einfachen und eines dreifachen Quadrats, wenn also p eine solche Primzahl ist, so ist:

$$p = A^2 + 3B^2. \tag{1}$$

Die Zahlentheorie beweist diesen Satz für das 4-fache jeder solchen Primzahl, nämlich dass sich immer zerlegen lässt:

$$4p = \alpha^2 + 2\beta^2 \tag{2}$$

(vgl. Bachmann: Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig 1872. S. 138 und 139.).

Hieraus lässt sich aber das oben angegebene Resultat auf einfache Weise herleiten und erweitern.

Es ist nämlich klar, dass in (2) sowohl α als β entweder zugleich grade oder ungrade Zahlen sein müssen. Im ersteren Falle wäre die Gleichung (1) sofort bewiesen. In der That liefert aber die Zahlentheorie den Fall, dass sowohl α als auch β ungerade sind. Z. B.

$$4 \cdot 13 = 5^2 + 3 \cdot 3^2$$
$$4 \cdot 19 = 7^2 + 3 \cdot 3^2.$$

Wenn α und β nun 2 ungerade Zahlen sind, so ist entweder immer $\alpha - \beta$ oder $\alpha + \beta$ durch 4 theilbar, denn es ist entweder:

1) $\alpha = 4m_1 \pm 1 \qquad \beta = 4m_2 \pm 1$

oder

2) $\alpha = 4m_1 \pm 1 \qquad \beta = 4m_2 \mp 1.$

Im Falle 1) aber ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha - \beta) = m_1 - m_2,$$

im Falle 2) ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha + \beta) = m_1 + m_2.$$

In dem ersten Falle ist dann aber zugleich $\alpha + 3\beta$, im zweiten Falle $\alpha - 3\beta$ durch 4 theilbar, denn im 1) Falle ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha + 3\beta) = m_1 + 3m_2 \pm 1,$$

im Falle 2)

$$\tfrac{1}{4}(\alpha - 3\beta) = m_1 - 3m_2 \pm 1.$$

Wir sehen also, dass jedenfalls immer folgende 2 Gleichungen zusammen bestehen müssen.

$$(3)\qquad \begin{cases} \text{I.}\quad \alpha - \beta = 4t_1 \\ \qquad\ \alpha + 3\beta = 4s_1 \\ \text{oder} \\ \text{II.}\quad \alpha + \beta = 4t_2 \\ \qquad\ \alpha - 3\beta = 4s_2 . \end{cases}$$

Aus I. aber folgt:

$$\alpha = s_1 + 3t_1, \qquad \beta = s_1 - t_1$$

aus II.

$$\alpha = s_2 + 3t_2, \qquad \beta = t_2 - s_2.$$

Es wird sich also jedenfalls immer setzen lassen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha = A + 3B \\ \beta = \pm (A - B). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen müssen immer bestehen, mögen die Grössen α und β in (2) einen Werth haben, welchen sie wollen, wenn sie nur beide ungerade sind.

Setzt man die Werthe (3) in (2) ein, so folgt:

$$(5)\qquad 4p = (A + 3B)^2 + 3(A - B)^2 .$$

Führt man beide Quadrate aus, so sieht man sofort, dass hieraus den beiden andern Gleichungen folgen:

$$(6)\qquad \begin{cases} 4p = (A - 3B)^2 + 3(A + B)^2 \\ 4p = (2A)^2 \qquad\ + 3(2B)^2 . \end{cases}$$

Die Gleichungen (5) und (6) bestehen also immer mit (2) zusammen, und es zeigt sich:

„Dass jedes Vierfache einer solchen Primzahl p von der Form
„$6m + 1$ auf dreifache Weise darstellbar ist als $A^2 + 3B^2$,
„also in der Summe eines einfachen und eines dreifachen
„Quadrats."

In der That ist:

$$4 \cdot 7 = 1^2 + 3 \cdot 3^2 = 5^2 + 3 \cdot 1^2 = 4^2 + 3 \cdot 2^2$$
$$4 \cdot 13 = 7^2 + 3 \cdot 1^2 = 5^2 + 3 \cdot 3^2 = 2^2 + 3 \cdot 4^2$$
$$4 \cdot 19 = 1^2 + 3 \cdot 5^2 = 7^2 + 3 \cdot 3^2 = 8^2 + 3 \cdot 2^2 \text{ etc.}$$

Sodann aber ergiebt sich aus der zweiten Gleichung in (6) sofort:

$$(7)\qquad p = A^2 + 3B^2,$$

also unsere Gleichung (1), d. h.:

„Jede Primzahl von der Form $6m + 1$ ist immer und zwar
„nur auf eine Art zerlegbar in die Summe eines einfachen
„und eines dreifachen Quadrates."

Wenn aber die Gleichung (7) besteht, so ist damit auch bewiesen, dass sich das λ^2- und das $3\lambda^2$-fache dieser Primzahlen von der Form $6p+1$ auf eben dieselbe Weise darstellen lasse, wobei λ ganz beliebig ist. Denn es ist auch:

$$(8)\qquad \begin{cases} \lambda^2 p = (\lambda A)^2 + 3(\lambda B)^2 \\ 3\lambda^2 p = (3\lambda B)^2 + 3(\lambda A)^2 . \end{cases}$$

Es folgt aber aus (6) auch:

„Dass ein Product aus n Primzahlen von der Form $6m+1$
„sich immer auf 2 Arten in A^2+3B^2 zerlegen lasse."

Denn es sei:

$$p_1 = \alpha_1^2 + 3\beta_1^2$$
$$p_2 = \alpha_2^2 + 3\beta_2^2 ;$$

so folgt:

$$(9)\qquad \begin{cases} p_1 p_2 = (\alpha_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2)^2 + 3(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2 \\ \qquad = (\alpha_1\alpha_2 - 3\beta_1\beta_2)^2 + 3(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)^2 . \end{cases}$$

Nimmt man noch eine dritte Zahl p_3 hinzu, so ist $p_1 p_2 p_3$ offenbar auf 4 Arten zerlegbar, p_1, p_2, p_3, p_4 wäre auf 8, d. h. 2^3 Arten zerlegbar, und so schliesst man weiter, woraus offenbar obiger Lehrsatz resultirt.

Wenn man nun folgende Tabelle der bis 100 vorhandenen Zahlen p betrachtet:

$$\begin{aligned} 7 &= 2^2 + 3\cdot 1^2 \\ 13 &= 1^2 + 3\cdot 2^2 = 3^2 + 2^2 \\ 19 &= 4^2 + 3\cdot 1^2 \\ 31 &= 2^2 + 3\cdot 3^2 \\ 37 &= 5^2 + 3\cdot 2^2 = 6^2 + 1^2 \\ 43 &= 4^2 + 3\cdot 3^2 \\ 61 &= 7^2 + 3\cdot 2^2 = 5^2 + 6^2 \\ 67 &= 8^2 + 3\cdot 1^2 \\ 73 &= 5^2 + 3\cdot 4^2 = 8^2 + 3^2 \\ 79 &= 2^2 + 3\cdot 5^2 \\ 97 &= 7^2 + 3\cdot 4^2 = 9^2 + 4^2 \\ 103 &= 10^2 + 3\cdot 1^2 , \end{aligned}$$

so bemerkt man sofort den Unterschied zwischen den Zahlen von der Form $12m+7$ und denen von der Form $12m+1$, welche letztere ja auch in die Summe zweier Quadrate zerlegbar sind.

Bei den letzteren nämlich ist A ungrade, B grade, während dies bei denen von der Form $12m+7$ umgekehrt ist. Jedoch ist gemäss (8) auch für $3(12m+1)$ A gerade, B ungerade.

Da unsere Untersuchung in § 7. erforderte, dass s eine gerade, t aber eine ungerade Zahl sei, so gilt sie somit für die Primzahlen von der Form $12m+7$ und für das Dreifache aller Primzahlen von der Form $12m+1$.

Dass in der Zerlegung von $12m+1$ A immer ungerade, B immer gerade sein muss, hat Dirichlet bewiesen. (Vgl. Lejeune-Dirichlet: Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré. Crelle, Bd. 3, S. 69.)

Wir wollen diesen zahlentheoretischen Ausführungen schliesslich noch eine kurze Bemerkung hinzufügen, welche darlegen soll, wie doch auch manche der vorher gefundenen analytischen Resultate geeignet sind die Fruchtbarkeit der höheren Analysis zur Herleitung zahlentheoretischer Wahrheiten zu bekunden, eine Beziehung zwischen beiden Feldern der Mathematik, welche durch die grossen Arbeiten Jacobi's und Dirichlet's zu so merkwürdigen Ergebnissen geführt hat.

Aus der Dreitheilung in § 2. (5) haben wir die Formel:

$$qQ + rR = pP.$$

Nun aber ist, wenn die folgenden Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ gerechnet werden:

$$(10)\qquad \begin{cases} p = \sum q^{hh}, & P = \sum q^{3hh} \\ q = \sum (-1)^h q^{hh}, & Q = \sum (-1)^h q^{3hh} \\ r = \sum q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2}, & R = \sum q^{\frac{3}{4}(2h+1)^2}. \end{cases}$$

Trägt man dieses ein, so folgt:

$$(11)\qquad \sum q^{kk+3hh} - \sum (-1)^{k+h} q^{kk+3hh} = \sum q^{\frac{1}{4}(2k+1)^2+\frac{3}{4}(2h+1)^2}.$$

Links blieben alle solche Formen $kk+3hh$ stehen, in denen h und k nicht zugleich grade oder ungrade sind, und zwar kommen dann die betreffenden Glieder sämmtlich positiv vor. Die übrigen Glieder, in denen h und k zugleich grade und ungrade sind, fallen heraus.

Rechts aber stehen offenbar alle Zahlen von der Form:

$$(12)\qquad A = kk + k + 3hh + h + 1$$

worin für k und h alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu combiniren sind. Aus A können immer nur ungrade Zahlen resultiren, da $kk+k$ sowohl als $3hh+3h$ immer grade sind, wie auch k und h beschaffen sein mögen. Da nun die Ausdrücke $hh+h$ und $kk+k$ die Reihe

aller dreieckigen Zahlen bilden, wenn k und h von $+\infty$ bis $-\infty$ geht, so folgt:

„Die Summe aus dem Doppelten einer dreieckigen Zahl und „dem Sechsfachen einer zweiten dreieckigen Zahl, vermehrt „um die Einheit, lässt sich immer durch $A^2 + 3B^2$ darstellen, „worin A und B nicht gleichzeitig grade oder ungrade sind."

Setzt man rechts erst $h = 0$, sodann $k = 0$, so folgt:

„Das Doppelte jeder dreieckigen Zahl vermehrt um die Einheit, „sowie das Sechsfache jeder dreieckigen Zahl um die Einheit „vermehrt, sind immer darstellbar durch die Summe eines ein- „fachen und eines dreifachen Quadrates."

Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.

Von R. Beez zu Plauen im Voigtlande.

Im Folgenden wird diejenige n-fache Mannigfaltigkeit betrachtet werden, welche vermöge einer gegebenen Gleichung

$$F(x_0, x_1, \cdots x_n) = 0 \tag{1}$$

ausgesondert ist aus der $(n+1)$-fachen Mannigfaltigkeit $(x_0, x_1, \cdots x_n)$. Letztere mag als eine *absolut* gegebene oder (nach Riemann) als eine *ebene* Mannigfaltigkeit angesehen werden.

Auf $F = 0$ seien gegeben die unendlich nahen Punkte A und $A^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$, mit den Coordinaten $x_0, x_1, \cdots x_n$ und $x_0 + d_i x_0$, $x_1 + d_i x_1, \cdots x_n + d_i x_n$; so dass also die Formeln stattfinden:

$$F_0 d_i x_0 + F_1 d_i x_1 + \cdots + F_n d_i x_n = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots n), \tag{2}$$

wo unter F_0, F_1, $\cdots$ F_n die Ableitungen von F zu verstehen sind. Ferner sei B ein *ausserhalb* $F = 0$ beliebig gegebener Punkt mit den Coordinaten $y_0, y_1, \cdots y_n$; dann ist das Volumen des durch die Punkte A, $A^{(i)}$ und B bestimmten Parallelepipedums dargestellt durch die Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} y_0 - x_0 & d_1 x_0 & d_2 x_0 & \cdots & d_n x_0 \\ y_1 - x_1 & d_1 x_1 & d_2 x_1 & \cdots & d_n x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n - x_n & d_1 x_n & d_2 x_n & \cdots & d_n x_n \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Ferner seien dw_0, dw_1, $\cdots$ dw_n die Partialdeterminanten von R, genommen nach den Gliedern der ersten Vertikale; und endlich sei dw definirt durch:

$$(dw)^2 = (dw_0)^2 + (dw_1)^2 + \cdots (dw_n)^2. \tag{4}$$

Zufolge der soeben für dw_0, dw_1, $\cdots$ dw_n gegebenen Definition finden die identischen Gleichungen statt:

$$dw_0 \cdot d_i x_0 + dw_1 \cdot d_i x_1 + \cdots + dw_n \cdot d_i x_n = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots n);$$

hieraus ergeben sich mit Rücksicht auf (2) die Proportionen

$$dw_0 : dw_1 : \cdots : dw_n = F_0 : F_1 : \cdots : F_n ;$$

aus diesen aber folgt mit Rücksicht auf (4):

$$(5) \qquad \frac{dw_k}{dw} = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n) .$$

Die Formeln (5) lassen erkennen, dass die Quotienten $\frac{dw_k}{dw}$ angesehen werden können als die Richtungscosinus der im Punkte A (oder $x_0, x_1, \ldots x_n$) auf der Mannigfaltigkeit $F = 0$ errichteten *Normale*.

Die Grössen $dw_0, dw_1, \ldots dw_n$ sind definirt als gewisse Partialdeterminanten von R; und es findet daher die identische Gleichung statt:

$$R = dw_0 (y_0 - x_0) + dw_1 (y_1 - x_1) + \cdots + dw_n (y_n - x_n) ,$$

eine Gleichung, welche auch so dargestellt werden kann:

$$\frac{R}{(AB) \cdot dw} = \frac{dw_0}{dw} \frac{y_0 - x_0}{(AB)} + \frac{dw_1}{dw} \frac{y_1 - x_1}{(AB)} + \cdots + \frac{dw_n}{dw} \frac{y_n - x_n}{(AB)} ,$$

wo (AB) die gegenseitige Entfernung der Punkte A und B bezeichnen soll. Die rechte Seite der letzten Formel repräsentirt, weil die $\frac{dw_k}{dw}$ die Richtungscosinus der Normale vorstellen, den Cosinus desjenigen Winkels φ, unter welchem diese Normale gegen die Linie (AB) geneigt ist, so dass man also erhält:

$$\frac{R}{(AB)\, dw} = \cos \varphi ,$$

oder was dasselbe ist*):

$$(6) \qquad dw = \frac{R}{(AB) \cos \varphi} .$$

---

*) Diese Formel (6) scheint mir wenig im Einklang zu stehen mit einer gewissen Bemerkung, welche Kronecker in seiner ausgezeichneten Abhandlung: „*Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variablen*“ (Ber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1869, S. 170) gemacht hat. Denn, übertragen in die von mir angewandte Bezeichnungsweise, würde jene Bemerkung etwa so auszusprechen sein:

Wenn man für die $(n + 1)$ der Mannigfaltigkeit $F = 0$ angehörigen Punkte A, A_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ und für irgend einen $(n + 2)^{\text{ten}}$ *ausserhalb* dieser Mannigfaltigkeit liegenden Punkt B die Inhaltsdeterminante R bildet, und dieselbe durch die Entfernung

$$AB = \sqrt{(y_0 - x_0)^2 + (y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

dividirt, so nähert sich dieser Quotient dem Werthe des Elementes dw, sobald man den Punkt B ins Unendliche rückt.

Dass der in Rede stehende Mangel an Einklang in einem geringfügigen Versehen (respective Druckfehler) seinen Grund hat, dürfte wohl keinem Zweifel unterliegen.

Offenbar repräsentirt $(AB)\cos\varphi$ die *Höhe* des mit R bezeichneten Parallelepipedums. Dividirt man aber das Volumen R des Parallelepipedums durch seine *Höhe*, so erhält man seine *Basis*. Die Formel (6) lässt also erkennen, dass diese *Basis* gleich dw ist; *und es kann daher dw aufgefasst werden als ein unendlich kleines Element der gegebenen Mannigfaltigkeit* $F = 0$.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir über zur Darstellung des *Krümmungsmaasses* der gegebenen Mannigfaltigkeit $F = 0$. Je zwei Punkte der Mannigfaltigkeit $F = 0$ und der (kugelförmigen) Mannigfaltigkeit

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1 \tag{7}$$

mögen *correspondirende* genannt werden, sobald zwischen ihren Coordinaten $x_0, x_1, \ldots x_n$ und $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ die Relationen stattfinden:

$$\xi_k = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \tag{8}$$

Sind nun insbesondere $\mathsf{A}(\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n)$ und $\mathsf{A}^{(i)}(\xi_0 + d_i\xi_0, \xi_1 + d_i\xi_1, \ldots \xi_n + d_i\xi_n)$ die den Punkten A und $A^{(i)}$ correspondirenden, und setzt man [analog mit (3), (4)]:

$$\mathsf{P} = \begin{vmatrix} \eta_0 - \xi_0 & d_1\xi_0 & d_2\xi_0 \ldots d_n\xi_0 \\ \eta_1 - \xi_1 & d_1\xi_1 & d_2\xi_1 \ldots d_n\xi_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_n - \xi_n & d_1\xi_n & d_2\xi_n \ldots d_n\xi_n \end{vmatrix}, \tag{9}$$

und

$$(d\omega)^2 = (d\omega_0)^2 + (d\omega_1)^2 + \cdots + (d\omega_n)^2, \tag{10}$$

wo $d\omega_0, d\omega_1, \ldots d\omega_n$ die Partialdeterminanten von P nach den Gliedern der ersten Vertikale vorstellen sollen, so wird [analog mit (5)]:

$$\frac{d\omega_k}{d\omega} = \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}} = \frac{\xi_k}{1}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \tag{11}$$

Aus (5) und (11) ergiebt sich mit Rücksicht auf (8) sofort:

$$\frac{d\omega_k}{d\omega} = \frac{dw_k}{dw}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \tag{12}$$

Das *von Gauss eingeführte Krümmungsmaass* $K = \frac{d\omega}{dw}$ kann daher, wie aus (12) folgt, dargestellt werden durch:

$$K = \frac{d\omega}{dw} = \frac{d\omega_0}{dw_0} = \frac{d\omega_1}{dw_1} = \cdots = \frac{d\omega_n}{dw_n}. \tag{13}$$

Bei der weiteren Entwickelung des Ausdruckes von K mögen nun der Reihe nach drei Fälle unterschieden werden.

Erster Fall.

Die Gleichung (1) der betrachteten Mannigfaltigkeit sei aufgelöst nach x_0, also gegeben in der Form:

$$x_0 - f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 . \tag{14}$$

Alsdann besitzen die Relationen (8) die Gestalt:

$$\xi_0 = \frac{1}{s}, \quad \xi_j = -\frac{f_j}{s}, \quad (j = 1, 2, \ldots n) , \tag{15a}$$

wo $f_1, f_2, \ldots f_n$ die partiellen Ableitungen von f vorstellen, während s definirt ist durch:

$$s^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 . \tag{15b}$$

Die Coordinaten $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sind in diesem Falle nur abhängig von den n Argumenten $x_1, x_2, \ldots x_n$ (nicht von x_0); so dass man Formeln von folgender Gestalt erhält:

$$d_i\xi_k = \xi_{k1} d_i x_1 + \xi_{k2} d_i x_2 + \cdots + \xi_{kn} d_i x_n . \tag{16}$$

Beachtet man also, dass die Partialdeterminanten w_0 und ω_0 definirt worden sind durch:

$$w_0 = \begin{vmatrix} d_1x_1 & d_2x_1 & \ldots & d_nx_1 \\ d_1x_2 & d_2x_2 & \ldots & d_nx_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_1x_n & d_2x_n & \ldots & d_nx_n \end{vmatrix}, \qquad \omega_0 = \begin{vmatrix} d_1\xi_1 & d_2\xi_1 & \ldots & d_n\xi_1 \\ d_1\xi_2 & d_2\xi_2 & \ldots & d_n\xi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_1\xi_n & d_2\xi_n & \ldots & d_n\xi_n \end{vmatrix},$$

so erhält man auf Grund der Formel (13) und unter Anwendung des Multiplicationstheorems der Determinanten sofort:

$$K = \frac{d\omega}{dw} = \frac{d\omega_0}{dw_0} = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix} . \tag{17}$$

Durch Differentiation von (15a) findet man:

$$\xi_{jp} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_p} = \frac{1}{s^3}\left(f_j \cdot \sum_{k=1}^{k=n} f_k f_{kp} - s^2 f_{jp}\right), \tag{18}$$

wo die f_{kp}, f_{jp} die zweiten Ableitungen von f bezeichnen. Substituirt man diese Werthe (18) in (17), so folgt:

$$K = \frac{1}{s^{3n}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & \ldots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \ldots & f_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^2 - s^2 & f_2 f_1 & \ldots & f_n f_1 \\ f_1 f_2 & f_2^2 - s^2 & \ldots & f_n f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1 f_n & f_2 f_n & \ldots & f_n^2 - s^2 \end{vmatrix} . \tag{19}$$

Die zweite Determinante, welche für den Augenblick mit $\varphi(s^2)$ be-

zeichnet werden mag, reducirt sich auf den Werth $(-1)^n \cdot s^{2n-2}$. Denn ihre Entwickelung nach Potenzen von s^2 giebt:

$$\varphi(s^2) = \Delta_n - s^2 \Sigma\Delta_{n-1} + s^4 \Sigma\Delta_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s^{2n-2} \Sigma\Delta_1 + (-1)^n s^{2n},$$

worin $\Sigma\Delta_m$ die Summe aller Partialdeterminanten m^{ten} Grades von $\Delta_n = \varphi(0)$ bedeutet; diese Summen aber sind identisch Null mit alleiniger Ausnahme der letzten $\Sigma\Delta_1$; so dass man erhält:

$$\begin{aligned}\varphi(s^2) &= (-1)^{n-1} s^{2n-2} \Sigma\Delta_1 + (-1)^n s^{2n}, \\ &= (-1)^n [s^{2n} - s^{2n-2}(f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2)], \\ &= (-1)^n s^{2n-2}, \quad [\text{vgl. } (15^b)].\end{aligned}$$

Man erhält also schliesslich:

$$K = \frac{(-1)^n}{s^{n+2}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Zweiter Fall.

Die betrachtete n-fache Mannigfaltigkeit sei, wie in (1), gegeben durch die Gleichung:

$$F(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0. \tag{21}$$

Um diesen Fall auf den früheren zurückzuführen, sei zuvörderst auf die Proportionen aufmerksam gemacht:

$$1 : (-f_1) : (-f_2) : \cdots : (-f_n) = F_0 : F_1 : F_2 : \cdots : F_n, \tag{22^a}$$

sowie auf die hieraus entspringenden Formeln:

$$f_k = -\frac{F_k}{F_0}, \tag{22^b}$$

$$\frac{1}{s} = +\frac{F_0}{S}, \quad \frac{f_k}{s} = -\frac{F_k}{S}, \quad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{22^c}$$

wo s und S zur Abkürzung stehen für die Wurzelgrössen:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2}, \\ S &= \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2}. \end{aligned} \tag{22^d}$$

Aus (22^b) folgt sofort:

$$\begin{aligned} df_k &= \frac{F_k dF_0 - F_0 dF_k}{F_0^2}, \\ &= \frac{(F_k F_{00} - F_0 F_{k0}) dx_0 + (F_k F_{01} - F_0 F_{k1}) dx_1 + \cdots + (F_k F_{0n} - F_0 F_{kn}) dx_n}{F_0^2}; \end{aligned}$$

nun ist aber

$$dx_0 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n = (-1)\frac{F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_n dx_n}{F_0};$$

substituirt man diesen Werth für dx_0 in die letzte Formel, so erhält man das Differential df_k ausgedrückt durch die n Differentiale dx_1, dx_2, ... dx_n (exclusive dx_0); und hieraus folgt alsdann sofort:

$$f_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{U_{ki}}{F_0^3}, \tag{23}$$

wo unter U_{ki} die Determinante zu verstehen ist:

$$U_{ki} = \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_k \\ F_0 & F_{00} & F_{k0} \\ F_i & F_{i0} & F_{ki} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Substituirt man die Werthe (23) in (20), und bezeichnet man dabei die aus den n^2 Grössen U_{ki} zusammengesetzte Determinante kurzweg mit U, so erhält man:

$$K = \frac{(-1)^n U}{s^{n+2} F_0^{3n}}. \tag{25}$$

Nun ist aber nach $(22^{a,b,c,d})$: $s = \frac{S}{F_0}$. Somit folgt:

$$K = \frac{(-1)^n U}{S^{n+2} F_0^{2n-2}}. \tag{26}$$

Diese Formel ist, wie sogleich näher dargelegt werden soll, identisch mit der von Kronecker*) gegebenen Formel:

$$K = -\frac{1}{S^{n+2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \ldots & F_n \\ F_0 & F_{00} & F_{10} & \ldots & F_{n0} \\ F_1 & F_{01} & F_{11} & \ldots & F_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{0n} & F_{1n} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix} = -\frac{R}{S^{n+2}}. \tag{27}$$

Multiplicirt man nämlich in dieser Kronecker'schen Determinante — sie mag R genannt werden — sämmtliche Vertikalreihen von der dritten an mit F_0, und zieht die respective mit F_1, F_2, ... F_n multiplicirte zweite Vertikalreihe von denselben ab, so erhält man jene Determinante in folgender Gestalt:

---

*) Dieser Ausdruck (27) des Krümmungsmaasses K ist von Kronecker auf anderem Wege gefunden, nämlich aus dem Satze abgeleitet worden, dass die Krümmung der n-fachen Mannigfaltigkeit dargestellt wird durch den reciproken Werth des Productes der n Hauptkrümmungshalbmesser. (Vgl. d. Ber. der Berliner Ak. der Wiss. 1869, S 695.)

$$R = \frac{1}{F_0^n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_0 & 0 & \cdots & 0 \\ F_0 & F_{00} & F_0 F_{10} - F_1 F_{00} & \cdots & F_0 F_{n0} - F_n F_{00} \\ F_1 & F_{01} & F_0 F_{11} - F_1 F_{01} & \cdots & F_0 F_{n1} - F_n F_{01} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_n & F_{0n} & F_0 F_{1n} - F_1 F_{0n} & \cdots & F_0 F_{nn} - F_n F_{0n} \end{vmatrix},$$

wofür offenbar einfacher geschrieben werden kann:

$$R = -\frac{1}{F_0^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} F_0 & F_0 F_{10} - F_1 F_{00} & \cdots & F_0 F_{n0} - F_n F_{00} \\ F_1 & F_0 F_{11} - F_1 F_{01} & \cdots & F_0 F_{n1} - F_n F_{01} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_n & F_0 F_{1n} - F_1 F_{0n} & \cdots & F_0 F_{nn} - F_n F_{0n} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun in dieser letzten Determinante jede Horizontalreihe von der zweiten an mit F_0, und subtrahirt die respective mit $F_1, F_2, \cdots F_n$ multiplicirte erste Horizontalreihe, so verschwinden sämmtliche Glieder der ersten Vertikalreihe bis auf F_0 und man erhält:

$$R = \frac{(-1)^{n+1} U}{F_0^{2n-2}},$$

wo U die schon früher genannte Bedeutung hat. Substituirt man aber diesen Werth der Determinante R in die Kronecker'sche Formel (27), so folgt:

$$K = \frac{(-1)^n U}{S^{n+2} F_0^{2n-2}},$$

und dieser Ausdruck ist in der That identisch mit dem in (26) gefundenen.

Dritter Fall.

Die betrachtete n-fache Mannigfaltigkeit sei gegeben durch die $(n+1)$ simultanen Gleichungen:

$$x_k = f_k(p_1, p_2, \cdots p_n), \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n). \tag{28}$$

Unter A und A mögen folgende Determinanten verstanden werden:

$$A = \begin{vmatrix} y_0 - x_0 & \frac{\partial x_0}{\partial p_1} & \frac{\partial x_0}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial x_0}{\partial p_n} \\ y_1 - x_1 & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial x_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n - x_n & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{vmatrix} \eta_0 - \xi_0 & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial \xi_0}{\partial p_n} \\ \eta_1 - \xi_1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial \xi_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_n - \xi_n & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial \xi_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}; \tag{29}$$

ferner seien $A_0, A_1, \cdots A_n$ und $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \cdots \mathsf{A}_n$ die Partialdeterminanten von A und A, genommen nach den Gliedern der ersten Vertikalen; ausserdem sei H definirt durch:

$$H^2 = A_0^2 + A_1^2 + \cdots + A_n^2. \tag{30}$$

Alsdann finden, falls man die früher mit $d_1, d_2, \cdots d_n$ bezeichneten Verschiebungen den Parametern $p_1, p_2, \cdots p_n$ entsprechen lässt, zwischen den Determinanten dw_k, $d\omega_k$ und A_k, A_k die einfachen Beziehungen statt:

$$(31)\quad dw_k = A_k\, dp_1\, dp_2 \cdots dp_n\,, \quad d\omega_k = \mathsf{A}_k\, dp_1\, dp_2 \cdots dp_n\,.$$

Nun ist nach (11) und (12):

$$(32)\quad \xi_k = \frac{dw_k}{dw} = \frac{dw_k}{\sqrt{(dw_0)^2 + (dw_1)^2 + \cdots + (dw_n)^2}},$$

oder weil nach (31) die dw_k mit den A_k proportional sind, und mit Rücksicht auf (30):

$$(33)\quad \xi_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2 + \cdots + A_n^2}} = \frac{A_k}{H};$$

hieraus folgt sofort:

$$(34)\quad \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} = \frac{1}{H^2}\left(H\frac{\partial A_k}{\partial p_i} - A_k\frac{\partial H}{\partial p_i}\right).$$

Um im gegenwärtigen Falle einen geeigneten Ausdruck für das Krümmungsmaass K zu finden, gehen wir aus von der Formel (13), welche mit Rücksicht auf (31) so dargestellt werden kann:

$$(35)\quad K = \frac{d\omega}{dw} = \frac{d\omega_0}{dw_0} = \frac{\mathsf{A}_0}{A_0}\,.$$

Substituirt man hier für A_0 seine eigentliche Bedeutung [vgl. (29)], indem man dabei für die $\frac{\partial \xi_k}{\partial p_i}$ die Werthe (34) einsetzt, so folgt nach einer leichten Umformung:

$$(36)\quad K = \frac{1}{A_0\, H^{n+2}}\begin{vmatrix} HH & A_1 \cdot & A_2 & \cdots & A_n \\ H\frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial A_1}{\partial p_1} & \frac{\partial A_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ H\frac{\partial H}{\partial p_n} & \frac{\partial A_1}{\partial p_n} & \frac{\partial A_2}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}.$$

Substituirt man in diese Determinante die Werthe der HH und $H\frac{\partial H}{\partial p_k}$ (30), und subtrahirt von der ersten Vertikalreihe die Summe der respective mit $A_1, A_2, \cdots A_n$ multiplicirten übrigen Vertikalreihen, so folgt sofort:

$$(37)\quad K = \frac{1}{H^{n+2}}\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \frac{\partial A_0}{\partial p_1} & \frac{\partial A_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial A_0}{\partial p_n} & \frac{\partial A_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial p_n} \end{vmatrix};$$

und hiermit ist also das Krümmungsmaass K in sehr einfacher Weise ausgedrückt durch die mit $A_0, A_1, \cdots A_n$ bezeichneten Partialdeterminanten [vgl. (29)] *und durch die Grösse H* (30).

Es mag schliesslich der erhaltene Ausdruck (37) noch einer gewissen Transformation unterworfen werden, durch welche er in Analogie tritt zu dem von Gauss gegebenen Ausdruck. Zu diesem Zwecke sei zunächst bemerkt, dass zufolge der für $A_0, A_1, \cdots A_n$ gegebenen Definition die identischen Gleichungen stattfinden:

$$(38^a) \qquad 1 = \frac{1}{H^2} \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_n} & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix},$$

$$(38^b) \qquad 0 = A_0 \frac{\partial x_0}{\partial p_k} + A_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_k} + \cdots + A_n \frac{\partial x_n}{\partial p_k};$$

ausserdem werde die Abkürzung eingeführt:

$$(39) \qquad D_{ik} = \frac{\partial A_0}{\partial p_i}\frac{\partial x_0}{\partial p_k} + \frac{\partial A_1}{\partial p_i}\frac{\partial x_1}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial p_i}\frac{\partial x_n}{\partial p_k},$$
$$= -\left(A_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_i \partial p_k} + A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} + \cdots + A_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k}\right).$$

Durch Multiplication von (37) mit (38^a) ergiebt sich alsdann sofort:

$$(40) \qquad K = \frac{1}{H^{n+2}} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{vmatrix}.$$

Hiermit ist unser Ziel erreicht. Denn die vorstehende Formel (40) *verwandelt sich in der That für $n = 2$ in die bekannte Gauss'sche Formel:*

$$K = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2},$$

(Gauss' Werke, Bd. IV, S. 234). Kaum bedarf es der Bemerkung, dass bei Gauss $A_0 = A$, $A_1 = B$, $A_2 = C$, ferner $p_1 = p$, $p_2 = q$, endlich $D_{11} = D$, $D_{12} = D_{21} = D'$, $D_{22} = D''$ gesetzt ist.

Plauen im Voigtlande. April, 1873.

Ueber die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Kugeln.

Von D. Bobylew in St. Petersburg.

In den Lehrbüchern der Elektrostatik wird, bei Betrachtung der gegenseitigen ponderomotorischen Einwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Kugeln *gleicher* Grösse, auf Fälle aufmerksam gemacht*), in denen jene Einwirkung Null ist. Doch existiren solche Fälle auch dann, wenn die Kugeln von *ungleicher* Grösse sind. In der That kann man — und dies zu zeigen ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes — die in Rede stehende Einwirkung zwischen zwei (einander nicht berührenden) Kugeln jedesmal zum Verschwinden bringen, sobald man nur dem Verhältniss der auf den beiden Kugeln angehäuften Elektricitätsmengen einen geeigneten Werth zuertheilt; und zwar existiren für *jede gegebene Entfernung* g der beiden Kugelmittelpunkte *zwei* solche Werthe, welche sich darstellen als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten bestimmte Functionen von g sind; diese Wurzeln sind stets reell.

§ 1.

Allgemeine Betrachtungen**).

Ein System elektrischer Conductoren A', A'', $\cdots$, deren jeder isolirt ist, sei geladen respective mit den Elektricitätsmengen E', E'', $\cdots$. Ferner sei *das Potential des Systems auf sich selber* bezeichnet mit

$$W = \tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma \frac{e Ds \cdot e_1 Ds_1}{r}; \tag{1}$$

*) Beer. Einleitung in die Elektrostatik. Braunschweig, 1865. S. 93. — Köttertzsch. Lehrbuch der Elektrostatik. (Leipzig, 1872.) S. 314.

**) Diese allgemeinen Betrachtungen, obwohl schon von Thomson angestellt und benutzt [vgl. Philosophical Magazine, Ser. 4, Vol. V, p. 292, Formel (f), und p. 294, Formel (18)], scheinen dennoch im Ganzen wenig bekannt zu sein. Die Redaction der Annalen hat sich daher der Mühe unterzogen, diese Betrachtungen, welche für das Verständniss des Bobylew'schen Aufsatzes unentbehrlich sind, im vorliegenden § in Kürze zu reproduciren.

hier bedeuten e, e_1 die in irgend zwei Oberflächenelementen Ds, Ds_1 vorhandenen elektrischen Dichtigkeiten, und r die Entfernung der beiden Elemente von einander; sowohl die Summation nach Ds, als auch diejenige nach Ds_1 ist ausgedehnt über *sämmtliche* Oberflächenelemente des ganzen Systemes. Die Formel (1) kann auch so geschrieben werden:

$$W = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\left(eDs\,\Sigma\,\frac{e_1 Ds_1}{r}\right) = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(VeDs)\,, \tag{2}$$

wo alsdann V *das Potential des Systems auf einen Punkt* repräsentirt. Die Summe $\Sigma(VeDs)$ kann, entsprechend den einzelnen Conductoren A', A'', ..., in ebenso viele einzelne Summen zerlegt werden; so dass man erhält:

$$W = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(V'e'Ds') + \tfrac{1}{2}\,\Sigma(V''e''Ds'') + \cdots \tag{3}$$

Befindet sich nun die elektrische Materie bei der gegebenen räumlichen Lage des Systemes A', A'', $\cdots$ in ihrem Gleichgewichtszustande, so wird das Potential V auf jedem Conductor von *constantem* Werthe sein. Bezeichnet man diese den einzelnen Conductoren entsprechenden constanten Werthe mit C', C'', $\cdots$ so folgt aus (3):

$$W = \tfrac{1}{2}\,C'\,\Sigma(e'Ds') + \tfrac{1}{2}\,C''\,\Sigma(e''Ds'') + \cdots, \tag{4}$$

oder was dasselbe ist:

$$W = \tfrac{1}{2}\,C'\,E' + \tfrac{1}{2}\,C''\,E'' + \cdots, \tag{5}$$

wo E', E'', $\cdots$ die schon genannten Bedeutungen besitzen, nämlich die elektrischen Ladungen der einzelnen Conductoren repräsentiren.

Lassen wir das System A', A'', $\cdots$ aus seiner ursprünglichen räumlichen Lage in eine benachbarte Lage übergehen, so wird, nach Eintritt des entsprechenden elektrischen Gleichgewichtszustandes, die elektrische Vertheilung auf jedem einzelnen Conductor eine etwas andere sein als früher. Bezeichnen wir für diese neue räumliche Lage und den neuen elektrischen Gleichgewichtszustand das Potential des Systemes auf sich selber mit $W + dW$, so wird der Zuwachs dW zerlegbar sein in zwei partielle Zuwüchse δW und ΔW, von denen der erstere herrührt von den Aenderungen der *räumlichen Lage*, während letzterer den Aenderungen der *elektrischen Dichtigkeiten* entspricht. Wir erhalten also mit Rücksicht auf (1) folgende Formeln:

$$dW = \delta W + \Delta W, \tag{6}$$

$$\delta W = -\,\tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\left(\frac{eDs\cdot e_1 Ds_1}{r^2}\,dr\right), \tag{7}$$

$$\Delta W = +\,\tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\,\frac{de\,Ds\cdot e_1 Ds_1 + eDs\cdot de_1 Ds_1}{r}, \tag{8}$$

wo die Aenderungen der r mit dr, und diejenigen der e, e_1 mit de, de_1 bezeichnet sind.

Die Formel (8) kann, wie leicht zu übersehen ist, einfacher dargestellt werden, nämlich so:

$$\Delta W = \Sigma\Sigma \frac{de\,Ds \cdot e_1 Ds_1}{r} = \Sigma\left(de\,Ds \cdot \Sigma \frac{e_1 Ds_1}{r}\right),$$

oder, wenn man V in genau derselben Bedeutung wie früher (2) braucht:

$$\Delta W = \Sigma(V\,de\,Ds).$$

Hieraus aber folgt, wenn man die Summe, entsprechend den einzelnen Conductoren A', A'', $\cdots$, in ebenso viele einzelne Summen zerlegt:

$$\Delta W = \Sigma(V'\,de'\,Ds') + \Sigma(V''\,de''\,Ds'') + \cdots.$$

Diese Formel endlich kann, weil $V' = C'$, $V'' = C''$, $\cdots$ ist, auch so geschrieben werden:

$$\Delta W = C' \cdot \Sigma(de'\,Ds') + C'' \cdot \Sigma(de''\,Ds'') + \cdots,$$

oder auch so:

$$\Delta W = C' \cdot dE' + C'' \cdot dE'' + \cdots,$$

oder schliesslich, weil die zuertheilten Ladungen E', E'', $\cdots$ unveränderlich sind, auch so:

$$\Delta W = 0. \tag{9}$$

Aus (6) und (9) ergiebt sich:

$$dW = \delta W. \tag{10}$$

Die von den elektrischen Kräften in dem gegebenen System während der betrachteten Lagenveränderung verrichtete ponderomotorische Arbeit drückt sich bekanntlich*) aus durch $-\delta W$, und kann daher, zufolge (10), auch dargestellt werden durch $-dW$. Somit ergiebt sich folgender Satz:

(11) *Befindet sich ein aus lauter isolirten und mit Elektricität geladenen Conductoren bestehendes System in beliebig gegebener Lage, und die in ihm enthaltene elektrische Materie in dem entsprechenden Gleichgewichtszustande, so wird die von den elektrostatischen Kräften beim Uebergange des Systems in irgend eine benachbarte Lage verrichtete ponderomotorische Arbeit darstellbar sein durch $-dW$, wo W und $W + dW$ diejenigen Werthe bezeichnen, welche das elektrostatische Potential des Systemes auf sich selber bei der ursprünglichen und bei der neuen Lage, jedes mal nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes, annimmt.*

Hieraus ergiebt sich durch Anwendung auf ein System von zwei Kugeln ein specieller Satz, welcher, wenn man den Centralabstand der beiden Kugeln mit g bezeichnet, folgendermassen auszusprechen ist:

---

*) Vgl. Neumann: Die elektrischen Kräfte. (Leipzig, 1873.) S. 24 bis 33.

(12) *Befinden sich zwei isolirte und elektrisch geladene Kugeln in einer beliebig gegebenen Lage* (g), *und befindet sich die in ihnen vorhandene elektrische Materie in dem entsprechenden Gleichgewichtszustande, so wird zwischen den beiden Kugeln eine ponderomotorische Kraft vorhanden sein, welche, repulsiv gerechnet, gleich* $-\frac{dW}{dg}$ *ist. Hier bedeuten* W *und* $W + dW$ *diejenigen Werthe, welche das elektrostatische Potential des Systemes auf sich selber bei den Lagen* (g) *und* $(g + dg)$, *jedesmal nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes, annimmt.*

Ferner ergiebt sich aus (11), wie beiläufig bemerkt sein mag, auch noch folgender Satz:

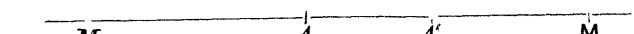
(13) *Ist von den beiden isolirten und elektrisch geladenen Kugeln die eine fest aufgestellt, die andere aber drehbar um einen gegebenen Durchmesser, und denkt man sich die in ihnen enthaltene elektrische Materie wiederum im Gleichgewichtszustande, so wird das von der ersten Kugel auf die zweite ausgeübte ponderomotorische Drehungsmoment gleich Null sein.*

§ 2.

Die ponderomotorische Kraft F, mit welcher zwei elektrisch geladene Kugeln auf einander einwirken.

Wir betrachten zwei isolirte, mit irgend welchen Elektricitätsmengen E und H geladene Kugeln, in beliebig gegebener Lage und im Zustande des elektrischen Gleichgewichts; und stellen uns die Aufgabe, die ponderomotorische Kraft F, mit welcher die beiden Kugeln auf einander einwirken, unter Anwendung des Satzes (12) näher zu berechnen.

Es seien M und M die Mittelpunkte der beiden Kugeln. Auf der Verbindungslinie $M\mathsf{M}$ construiren wir diejenigen beiden Punkte A und A', in denen sie geschnitten wird von einer auxiliären Kugelfläche, die orthogonal ist zu jeder der beiden gegebenen Kugelflächen. Diese Punkte A und A benutzen wir als die



Pole eines dipolaren Coordinatensystemes. Ist also Q ein beliebiger Punkt des Raumes, und sind QA und QA' die von ihm nach jenen Polen hinlaufenden Linien, so werden die *dipolaren Coordinaten* ϑ, ω des Punktes Q definirt zu denken sein durch die Formeln:

$$(14^a) \qquad \begin{cases} \vartheta = \log \frac{QA'}{QA}, \\ \omega = \sphericalangle AQA'. \end{cases}$$

Ferner seien T und Θ die ϑ-Coordinaten der beiden Mittelpunkte M und M, und $\Theta - T = \Delta$; so dass also

$$(14^b) \qquad T = \text{pos.}, \quad \Theta = \text{neg.}, \quad \Delta = \text{neg.}$$

Gleichzeitig werde gesetzt:

$$(14^c) \quad e^{-\frac{1}{2}T} = p, \quad e^{+\frac{1}{2}\Theta} = \varpi, \quad e^{\frac{1}{2}\Delta} = e^{\frac{1}{2}(\Theta - T)} = q; \text{ (wo } e = 2{,}718\ldots);$$

so dass also die Relation stattfindet

$$(14^d) \qquad p\varpi = q\,.$$

Endlich mögen die Radien der beiden Kugeln mit r und ϱ, und die Entfernungen $M\mathsf{M}$ und AA' respective mit g und $2a$ bezeichnet sein. Die Grössen r, ϱ sind alsdann unveränderlich gegeben; während hingegen T, Θ, Δ, p, ϖ, q, a abhängig von der augenblicklichen Entfernung der beiden Kugeln, also Functionen von g sind. Besonders hervorzuheben ist,

(15) dass die Grössen p, ϖ, q (falls die beiden Kugeln endlich sind und einander nicht berühren) *positive ächte Brüche* sind, zwischen denen, je nachdem $r > \varrho$ oder $r = \varrho$ ist, die Relationen stattfinden:

$$p > \varpi > q \quad \text{für} \quad r > \varrho,$$
$$p = \varpi > q \quad \text{für} \quad r = \varrho\,.$$

Denken wir uns die beiden Kugeln in der Centraldistanz g, und die auf ihnen vorhandene elektrische Materie im entsprechenden Gleichgewichtszustande, so wird *das elektrische Potential V der beiden Kugeln auf irgend einen Punkt* (ϑ, ω), *der ausserhalb* der Kugeln liegt, ausgedrückt sein durch*):

$$(16) \quad V = \sqrt{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \begin{array}{l} C\dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\vartheta - T)} - e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\Delta - \vartheta)}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}} \\ + \Gamma\dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\Theta - \vartheta)} - e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\Delta + \vartheta)}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}} \end{array} \right\} P^{(n)}(\cos\omega),$$

wo unter C und Γ diejenigen constanten Werthe zu verstehen sind, welche das Potential V *innerhalb* der Kugeln, sowie auch *an ihren Oberflächen* besitzt; dabei repräsentirt $P^{(n)}$ die bekannte Laplace'sche Function.

Mit Hülfe der Formel (16) gelangt man in bekannter Weise**) zu gewissen Ausdrücken für die elektrischen Dichtigkeiten und Ladungen. Setzt man zur Abkürzung:

---

*) C. Neumann. Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird. (Halle, 1862.) S. 55.

**) Neumann l. c. p. XII (der Einleitung).

$$(17)\quad \begin{cases} L = 2a \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(2n+1)T}}{1-e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}} = 2a \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{p^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}, \\ H = 2a \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}}{1-e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}} = 2a \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}, \\ J = 2a \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Theta}}{1-e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}} = 2a \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varpi^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}, \end{cases}$$

so sind die für die elektrischen Ladungen E und H der beiden Kugeln resultirenden Ausdrücke folgende:

$$(18)\quad \begin{cases} E = +CL - \Gamma H \\ \mathsf{H} = -CH + \Gamma J. \end{cases}$$

Bezeichnet endlich W *das Potential des Systemes der beiden Kugeln auf sich selbst*, so ist nach (5):

$$(19)\quad W = \tfrac{1}{2} CE + \tfrac{1}{2} \Gamma \mathsf{H}.$$

Analoge Formeln werden sich nun offenbar ergeben, wenn man (ohne sonst irgend welche Aenderungen vorzunehmen) an Stelle der bisher gegebenen Centraldistanz $M\mathsf{M} = g$ eine etwas andere Centraldistanz $g + dg$ der Betrachtung zu Grunde legt. Bezeichnet man die Werthe, welche C, Γ, L, H, J, W alsdann annehmen, mit $C + dC$, $\Gamma + d\Gamma$, $L + dL$, $H + dH$, $J + dJ$, $W + dW$, und beachtet man, dass die elektrischen Ladungen E, H *dieselben* sein sollen, wie früher, so ergeben sich aus (18) und (19) folgende Relationen:

$$(20)\quad \begin{cases} 0 = +LdC - Hd\Gamma + CdL - \Gamma dH, \\ 0 = -HdC + Jd\Gamma - CdH + \Gamma dJ, \end{cases}$$

$$(21)\quad dW = \tfrac{1}{2}(EdC + \mathsf{H}d\Gamma).$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen (20) respective mit C und Γ, und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (18):

$$(22)\quad 0 = (EdC + \mathsf{H}d\Gamma) + (C^2 dL - 2C\Gamma dH + \Gamma^2 dJ);$$

endlich folgt aus (21) und (22):

$$(23)\quad dW = -\tfrac{1}{2}(C^2 dL - 2C\Gamma dH + \Gamma^2 dJ).$$

Nach dem Satze (12) ist nun aber die ponderomotorische Kraft F, mit welcher die beiden Kugeln bei der Centraldistanz g repulsiv auf einander wirken, gleich $-\frac{dW}{dg}$. Somit folgt aus (23):

$$(24)\quad F = \tfrac{1}{2}\left(C^2 \frac{dL}{dg} - 2C\Gamma \frac{dH}{dg} + \Gamma^2 \frac{dJ}{dg}\right).$$

Bei einer *gegebenen* Centraldistanz g wird daher die Kraft F verschwinden, sobald man den Quotienten

$$x = \frac{C}{\Gamma} \tag{25}$$

der Art einrichtet, dass der quadratischen Gleichung

$$x^2 \frac{dL}{dg} - 2x \frac{dH}{dg} + \frac{dJ}{dg} = 0 \tag{26}$$

Genüge geschieht. Jener Quotient $x = \frac{C}{\Gamma}$ hängt aber, wie aus (18) folgt, mit den Quotienten $\frac{E}{\mathsf{H}}$ durch die Relation zusammen:

$$\frac{E}{\mathsf{H}} = \frac{xL - H}{J - xH}. \tag{27}$$

Somit ergiebt sich folgendes Resultat:

(28) *Bezeichnet man für eine beliebig gegebene Centraldistanz g die Wurzeln der quadratischen Gleichung* (26) *mit x' und x'', so wird, um die Kraft F bei dieser Centraldistanz zum Verschwinden zu bringen, nur erforderlich sein, dass man dem Quotienten $\frac{E}{\mathsf{H}}$ einen der beiden Werthe*

$$\frac{x'L - H}{J - x'H}, \qquad \frac{x''L - H}{J - x''H}$$

zuertheilt.

In den nachfolgeneden Expositionen soll gezeigt werden, dass die in Rede stehenden beiden Wurzeln x', x'' stets *reell* sind.

§ 3.

Nähere Untersuchung derjenigen quadratischen Gleichung, von welcher das Verschwinden der Kraft F abhängig ist.

Beachtet man die relative Lage der vier Punkte M, M, A, A':

$$\overline{M \qquad\qquad A \qquad A' \qquad\qquad \mathsf{M}}$$

so ergeben sich mit Rücksicht auf ($14^{a, b, c, d}$) die Relationen:

$$MA' + A'\mathsf{M} = MA + A\mathsf{M} = M\mathsf{M} = g, \tag{29a}$$

$$MA' - MA = \mathsf{M}A - \mathsf{M}A' = AA' = 2a. \tag{29b}$$

Ferner ergiebt sich aus ($14^{a, b, c, d}$):

$$p^{-2} = e^T = \frac{MA'}{MA}, \quad \varpi^2 = e^\Theta = \frac{\mathsf{M}A'}{\mathsf{M}A}, \tag{30}$$

oder was dasselbe ist:

$$p^{-2} = \frac{(MA')^2}{MA \cdot MA'}, \qquad \varpi^2 = \frac{(\mathsf{M}A')^2}{\mathsf{M}A \cdot \mathsf{M}A'}.$$

Hiefür aber kann, weil $MA \cdot MA' = r^2$ und $\mathsf{M}A \cdot \mathsf{M}A' = \varrho^2$ ist*), auch geschrieben werden:

$$(31) \qquad p^{-2} = \frac{(MA')^2}{r^2}, \qquad \varpi^2 = \frac{(\mathsf{M}A')^2}{\varrho^2}.$$

Endlich folgt aus (30) und (31)

$$(32) \qquad \begin{cases} MA' = rp^{-1}, & \mathsf{M}A' = \varrho\varpi, \\ MA = rp, & \mathsf{M}A = \varrho\varpi^{-1}; \end{cases}$$

und hierdurch erlangen die Relationen ($29^{a,b}$) folgende Gestalt:

$$(33^a) \qquad rp^{-1} + \varrho\varpi = rp + \varrho\varpi^{-1} = g,$$

$$(33^b) \qquad r(p^{-1} - p) = \varrho(\varpi^{-1} - \varpi) = 2a.$$

Wir haben nun r, ϱ als gegebene *Constanten*, hingegen g als eine *Variable* anzusehen; von g abhängig sind die Grössen T, Θ, Δ, p, ϖ, q, a ($14^{a,b,c,d}$), somit auch die Grössen L, H, J (17). *Es handelt sich nun um die Bildung der Differentialquotienten* $\frac{dL}{dg}$, $\frac{dH}{dg}$, $\frac{dJ}{dg}$, *d. i. um die Bildung der Coefficienten der quadratischen Gleichung* (26).

Durch Differentiation der Gleichungen (33^a) nach g erhält man:

$$(34^a) \qquad r\frac{dp}{dg} = -\frac{1+\varpi^2}{1-q^2}p^2, \qquad \varrho\frac{d\varpi}{dg} = -\frac{1+p^2}{1-q^2}\varpi^2;$$

und in analoger Weise findet man aus (33^b):

$$(34^b) \qquad 2\frac{da}{dg} = -\frac{1+p^2}{p^2}r\frac{dp}{dg} = -\frac{1+\varpi^2}{\varpi^2}\varrho\frac{d\varpi}{dg}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (34^a) respective mit den aus (33^b) entspringenden Relationen:

$$\frac{2a}{r} = \frac{1-p^2}{p}, \qquad \frac{2a}{\varrho} = \frac{1-\varpi^2}{\varpi},$$

so ergiebt sich:

$$(35^a) \quad 2a\frac{dp}{dg} = -\frac{(1+\varpi^2)(1-p^2)p}{1-q^2}, \qquad 2a\frac{d\varpi}{dg} = -\frac{(1+p^2)(1-\varpi^2)\varpi}{1-q^2}.$$

Ferner folgt aus (34^b) mit Rücksicht auf (34^a):

$$(35^b) \qquad 2\frac{da}{dg} = +\frac{(1+p^2)(1+\varpi^2)}{1-q^2}.$$

Endlich ist nach (14^d): $q = p\varpi$; so dass also der Differentialquotient $\frac{dq}{dg}$ ausdrückbar ist durch $\frac{dp}{dg}$ und $\frac{d\varpi}{dg}$. Somit erhält man unter Benutzung der Formeln (35^a):

*) Neumann l. c. p. 29.

$$(35^c) \qquad 2a\frac{dq}{dg} = -2q\,.$$

Wir gehen nunmehr über zu den Grössen L, H, J. Der Ausdruck L (17) kann folgendermassen umgestaltet werden:

$$L = 2a\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{p^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} = 2a\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{i=0}^{i=\infty}(p^{2n+1}q^{(2n+1)i}),$$

$$= 2a\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(q^i p\sum_{n=0}^{n=\infty}(q^{2ni}p^{2n})\right),$$

$$= 2a\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{q^i p}{1-q^{2i}p^2}\,.$$

In solcher Weise erhält man aus (17) im Ganzen folgende Formeln:

$$(36)\quad \begin{cases} L = 2a\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{q^i p}{1-q^{2i}p^2}, \qquad J = 2a\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{q^i\varpi}{1-q^{2i}\varpi^2}\,. \\ H = 2a\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{q^{i+1}}{1-q^{2i+2}} = 2a\cdot\sum_{j=1}^{j=\infty}\frac{q^j}{1-q^{2j}}\,. \end{cases}$$

Differenzirt man nun den ersten dieser Ausdrücke, nämlich L nach der Entfernung g, so findet man mit Rücksicht auf $(35^{a,b,c})$ und nach einigen Reductionen:

$$(\alpha) \qquad \frac{dL}{dg} = -2\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(\frac{q^i p}{(1-q^{2i}p^2)^2}f_i\right);$$

hier hat f_i die Bedeutung:

$$(\beta) \qquad f_i = \left(i - p^2\frac{1-q^{2i}}{1-q^2}\right) + \left(iq^{2i}p^2 - q^2\frac{1-q^{2i}}{1-q^2}\right),$$

und kann daher auch so dargestellt werden:

$$(\gamma) \qquad f_i = \sum_{k=1}^{k=i}(1-p^2q^{2(i-k)}) + \sum_{k=1}^{k=i}(q^{2i}p^2 - q^{2k}),$$

oder auch so:

$$(\delta) \qquad f_i = \sum_{k=1}^{k=i}(1-q^{2k})(1-p^2q^{2(i-k)})\,.$$

Substituirt man diesen Werth für f_i in die Formel (α), und beachtet man, dass dieses f_i, wie aus (β) folgt, *für* $i=0$ *verschwindet*, so ergiebt sich:

$$(37)\quad \frac{dL}{dg} = -2\cdot\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{q^i p}{(1-q^{2i}p^2)^2}\sum_{k=1}^{k=i}(1-q^{2k})(1-p^2q^{2i-2k})\right);$$

denn in Folge des eben genannten Verschwindens kann als untere

Grenze der Summe $i = 1$ (statt des früheren $i = 0$) genommen werden.

Offenbar ergiebt sich für den Ausdruck J (36) ein analoges Resultat; nämlich:

$$(38)\quad \frac{dJ}{dg} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i \varpi}{(1-q^{2i}\varpi^2)^2} \sum_{k=1}^{k=i} (1-q^{2k})(1-\varpi^2 q^{2i-2k}) \right).$$

Endlich erhält man aus (36) für den Differentialquotienten von H nach g den Werth:

$$\frac{dH}{dg} = -\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \left(2i(1+q^{2i}) - (1+p^2)(1+\varpi^2)\frac{1-q^{2i}}{1-q^2} \right);$$

und hieraus folgt nach einigen Umformungen:

$$(39)\quad \frac{dH}{dg} = -\sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \cdot \sum_{k=1}^{k=i} (1-p^2 q^{2i-2k})(1-\varpi^2 q^{2k-2}) \right)$$
$$-\sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \cdot \sum_{k=1}^{k=i} (1-q^{2i-2k})(1-q^{2k}) \right).$$

Die Formeln (37), (38), (39) lassen, wenn man Rücksicht nimmt auf die Bemerkungen (15), sofort erkennen,

(40) dass die Differentialquotienten $\frac{dL}{dg}$, $\frac{dJ}{dg}$, $\frac{dH}{dg}$ stets *negativ* sind.

Durch eine weitere Transformation lassen sich die Differentialquotienten (17); (18), (19) in eine für unsere Zwecke bequemere Gestalt versetzen. Um diese Transformationen darlegen zu können, betrachten wir zuvörderst die beiden Ausdrücke:

$$(a)\quad \Phi = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i \xi}{(1-q^{2i}\xi^2)^2} \sum_{k=1}^{k=i} (1-q^{2k})(1-\xi^2 q^{2i-2k}) \right),$$

$$(b)\quad \Psi = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \sum_{k=1}^{k=i} (1-p^2 q^{2i-2k})(1-\varpi^2 q^{2k-2}) \right),$$

wo in dem erstern ξ einen beliebigen ächten Bruch vorstellen soll. Vertauscht man in Φ und Ψ die Reihenfolge der Summationen, so wird:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left((1-q^{2k})\,\xi \cdot \sum_{i=k}^{i=\infty} \frac{q^i (1-\xi^2 q^{2i-2k})}{(1-\xi^2 q^{2i})^2} \right),$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left((1-\varpi^2 q^{2k-2}) \cdot \sum_{i=k}^{i=\infty} \frac{q^i (1-p^2 q^{2i-2k})}{(1-q^{2i})^2} \right).$$

Entwickelt man jetzt die Ausdrücke $\frac{1}{(1-\xi^2 q^{2i})^2}$ und $\frac{1}{(1-q^{2i})^2}$ mit Hülfe

der bekannten Formel $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1)\alpha^s$, vertauscht man sodann die Summationen nach i und s, und bringt man endlich die Summation nach i zur wirklichen Ausführung, so erhält man:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left((1-q^{2k})\,\xi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1)\,\xi^{2s} \left[\frac{q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\xi^2 q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+3}} \right] \right),$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left((1-\varpi^2 q^{2k-2}) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1) \left[\frac{q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+1}} - \frac{p^2 q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+3}} \right] \right).$$

Wird nunmehr Vertauschung vorgenommen zwischen den Summationen nach k und s, und die Summation nach k zur Ausführung gebracht, so ergiebt sich:

$$(a') \quad \Phi = \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1) \left[\frac{\xi^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\xi^{2s+3}}{1-q^{2s+3}} \right] \left[\frac{q^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{q^{2s+3}}{1-q^{2s+3}} \right],$$

$$(b') \quad \Psi = \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1) \left[\frac{p^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{p^{2s+3}}{1-q^{2s+3}} \right] \left[\frac{\varpi^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\varpi^{2s+3}}{1-q^{2s+3}} \right].$$

Substituirt man in Φ, (a), (a') für ξ die Grössen p und ϖ, so erhält man die Ausdrücke für $\frac{dL}{dg}$ (37) und $\frac{dJ}{dg}$ (38). Substituirt man ferner daselbst $\xi = 1$, so erhält man die *zweite* Zeile des Ausdrucks für $\frac{dH}{dg}$ (39); während die *erste* Zeile desselben durch Ψ, (b), (b') dargestellt ist. Somit ergiebt sich:

$$(41) \qquad \begin{cases} \frac{dL}{dg} = -2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1)\, Y_s Z_s, \\ \frac{dJ}{dg} = -2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1)\, \mathsf{H}_s Z_s, \\ \frac{dH}{dg} = -1 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1)\, (\mathsf{H}_s Y_s + Z_s^2), \end{cases}$$

wo Y_s, H_s, Z_s die Bedeutungen haben:

$$(42) \qquad \begin{cases} Y_s = \frac{p^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{p^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}, \\ \mathsf{H}_s = \frac{\varpi^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\varpi^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}, \\ Z_s = \frac{q^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{q^{2s+3}}{1-q^{2s+3}} = \frac{1}{1-q^{2s+1}} - \frac{1}{1-q^{2s+3}}. \end{cases}$$

§ 4.

Fortsetzung. Untersuchung der Wurzeln der quadratischen Gleichung.

Wie bereits bemerkt (15), sind p, ϖ, q positive ächte Brüche. Mit Rücksicht hierauf folgt aus (42) sofort,

(43) dass die Grössen Y_s, H_s, Z_s sämmtlich *positiv* sind; auch lässt sich nachweisen, dass zwischen diesen Grössen, je nachdem $r > \varrho$ oder $r = \varrho$ ist, folgende Relationen stattfinden:

$$Y_s > H_s > Z_s \text{ für } r > \varrho,$$
$$Y_s = H_s > Z_s \text{ für } r = \varrho.$$

Um diesen Nachweis zu führen, sind die Differenzen $Y_s - H_s$ und $H_s - Z_s$ einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen.

Setzt man zur Abkürzung $2s + 1 = n$, so folgt aus (42):

$$Y_s - H_s = \frac{p^n - \varpi^n}{1 - q^n} - \frac{p^{n+2} - \varpi^{n+2}}{1 - q^{n+2}},$$

oder was dasselbe ist:

$$Y_s - H_s = \frac{(1-p^2)(1-\varpi^2)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\left(\frac{p^n(1-\varpi^{2n+2})}{1-\varpi^2} - \frac{\varpi^n(1-p^{2n+2})}{1-p^2}\right);$$

und hieraus folgt:

$$Y_s - H_s = \frac{(1-p^2)(1-\varpi^2)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})} \sum_{k=0}^{k=n} F,$$

wo F die Bedeutung hat:

$$F = p^n \varpi^{2k} - \varpi^n p^{2k},$$
$$= (p\varpi)^{2k}(p^{n-2k} - \varpi^{n-2k}),$$
$$= (p\varpi)^n(\varpi^{2k-n} - p^{2k-n}).$$

Nun ist offenbar:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} F + \sum_{k=s+1}^{k=n} F,$$

oder, wenn man für F seinen Werth (bald in dieser, bald in jener Gestalt) substituirt:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} (p\varpi)^{2k}(p^{n-2k} - \varpi^{n-2k}) + \sum_{k=s+1}^{k=n} (p\varpi)^n(\varpi^{2k-n} - p^{2k-n}).$$

Beachtet man, dass $p\varpi = q$ ist, und substituirt man in der zweiten Summe rechter Hand an Stelle von k einen anderen Index k', mit k verbunden durch die Relation $k + k' = 2s + 1 = n$, so erhält man:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} q^{2k}(p^{n-2k} - \varpi^{n-2k}) + \sum_{k'=0}^{k'=s} q^n(\varpi^{n-2k'} - p^{n-2k'}).$$

Schreibt man endlich k für k', so folgt durch Zusammenziehung der beiden Summen:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} q^{2k}(1-q^{n-2k})(p^{n-2k}-\varpi^{n-2k}).$$

Wir erhalten daher schliesslich:

$$(44)\quad Y_s - \mathsf{H}_s = \frac{(1-p^2)(1-\varpi^2)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})} \cdot \sum_{k=0}^{k=s} q^{2k}(1-q^{n-2k})(p^{n-2k}-\varpi^{n-2k}),$$

wo n zur Abkürzung steht für $2s+1$. — Aus dieser Formel (44) folgt mit Rücksicht auf (15) sofort, dass die Differenz $Y_s - \mathsf{H}_s$ stets positiv ist, oder (genauer ausgedrückt), dass sie positiv oder null sein wird, je nachdem p grösser oder gleich ϖ ist. Mit andern Worten: wir erkennen,

$$\begin{aligned} &\text{dass} && Y_s > \mathsf{H}_s \text{ ist für } r > \varrho, \\ &\text{und dass} && Y_s = \mathsf{H}_s \text{ ist für } r = \varrho. \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung (43) *erwiesen, insoweit dieselbe auf* Y_s *und* H_s *Bezug hat.*

Setzt man wiederum $2s+1=n$, so folgt aus (42):

$$\mathsf{H}_s - Z_s = \frac{\varpi^n - q^n}{1-q^n} - \frac{\varpi^{n+2} - q^{n+2}}{1-q^{n+2}},$$

oder was dasselbe ist:

$$\mathsf{H}_s - Z_s = \frac{(1-q)(1-\varpi)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\left(\varpi^n(1+\varpi)\frac{1-q^n}{1-q} - q^n(1+q)\frac{1-\varpi^n}{1-\varpi}\right);$$

und hieraus folgt:

$$\mathsf{H}_s - Z_s = \frac{(1-q)(1-\varpi)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})} \cdot \sum_{k=0}^{k=n-1} F,$$

wo F einen Ausdruck repräsentirt, der (mit Rücksicht auf die Relation $p\varpi = q$) in folgenden verschiedenen Gestalten dargestellt werden kann

$$\begin{aligned} F &= \varpi^n(1+\varpi)q^k - q^n(1+q)\varpi^k, \\ &= \varpi^n q^k\left[(1+\varpi) - (1+q)\left(\frac{q}{\varpi}\right)^n\left(\frac{\varpi}{q}\right)^k\right], \\ &= \varpi^n q^k[(1+\varpi) - (1+q)p^{n-k}]. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher schliesslich:

$$(45)\quad \mathsf{H}_s - Z_s = \frac{(1-q)(1-\varpi)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})} \cdot \sum_{k=0}^{k=n-1} \varpi^n q^k[(1+\varpi) - (1+q)p^{n-k}],$$

wo n zur Abkürzung steht für $2s+1$. — Aus dieser Formel folgt mit Rücksicht auf (15) sofort, dass die Differenz $\mathsf{H}_s - Z_s$ jederzeit

positiv und von Null verschieden sein wird, einerlei ob $p > \varpi$ oder $p = \varpi$ ist. Es ergiebt sich also die Relation:

$$\mathsf{H}_s > Z_s \text{ als gültig für } r > \varrho,$$
$$\text{und auch für } r = \varrho,$$

Somit ist die Behauptung (43) *erwiesen, insofern dieselbe auf* H_s *und* Z_s *Bezug hat.*

Aus den Formeln (41) folgt augenblicklich:

$$2\frac{dH}{dg} - \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right) = -2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1)(Y_s - Z_s)(\mathsf{H}_s - Z_s);$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf die Relationen (43):

$$2\frac{dH}{dg} - \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right) < 0. \tag{46}$$

Andererseits folgt aus der Bemerkung (40):

$$2\frac{dH}{dg} + \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right) < 0. \tag{47}$$

Aus diesen beiden Formeln (46) und (47) erkennt man, dass die Grösse $2\frac{dH}{dg}$ ihrem *absoluten Betrage* nach höher steht als die Grösse $\left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right)$; so dass man also schreiben kann:

$$4\left(\frac{dH}{dg}\right)^2 > \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right)^2. \tag{48}$$

Nun ist aber bekanntlich für zwei beliebig gegebene reelle Grössen α und β jederzeit $(\alpha + \beta)^2 \geqq 4\alpha\beta$; folglich wird:

$$\left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right)^2 \geq 4\frac{dL}{dg}\frac{dJ}{dg}. \tag{49}$$

Aus (48) und (49) resultirt endlich:

$$\left(\frac{dH}{dg}\right)^2 > \frac{dL}{dg}\frac{dJ}{dg}; \tag{50}$$

und hieraus endlich folgt, dass die beiden Wurzeln x', x'' *der zu untersuchenden quadratischen Gleichung* (26) *in der That stets reell sind; w. z. z. w.*

Petersburg, Juni 1873.

Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre*).

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

(Avec deux planches lithographiées.)

I. Définitions, propriétés connues ou évidentes.

1. Nous appelons *branche complète* la partie d'une courbe plane qui peut être parcourue d'une manière continue par un point qui, après en avoir passé une fois tout point fixe, revient au point de départ. En ne nous occupant ici que de propriétés projectives, nous ne regardons pas comme interruption de la continuité le passage par l'infini, si seulement le point mobile a la même direction limite en s'éloignant à l'infini et en en retournant.

Il y a**) deux espèces de branches complètes: les branches d'ordre pair, que toute droite rencontre en un nombre pair de points, et les branches d'ordre impair, que toute droite rencontre en un nombre impair de points. — Une branche d'ordre pair rencontre tante autre branche complète en un nombre pair de points, mais deux branches d'ordre impair se rencontrent en un nombre impair de points. — Une branche d'ordre pair sans points multiples, divise le plan en deux parties, dont l'une qui renferme des branches d'ordre impair s'appelle *l'externe*, l'autre qui n'en renferme aucune s'appelle *l'interne*.

Note. Il n'est pas nécessaire de sortir du plan pour prouver ces propriétés connues des branches complètes. Désignons par a une branche complète, par A et M un point fixe et un point mobile de cette branche. Si l'on prend le point A pour point de départ du mouvement de M, un des deux segments déterminés sur la droite infinie AM par les deux points A et M, commencera par être nul, pendant que l'autre est la droite entière. La même chose aura lieu au retour

---

*) Une *partie* des résultats de cette recherche ont été publiés dans les *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences* 28 juillet 1873, et dans un mémoire inséré au *Tidsskrift for Mathematik* 1873.

**) Voir v. Staudt: Geometrie der Lage.

de M à A. Il se présente ici deux cas différents: 1° celui où le segment qui commence par être nul finit par être nul, et 2° celui où ce segment finit par être la droite entière.

Désignons par b une autre branche complète dans le même plan. Toutes les fois que le point mobile M passe un point d'intersection avec la branche b, un des points d'intersection de la droite AM et de la branche b, passe de l'un des segments de AM à l'autre. Comme le segment AM qui commence par être nul commence par n'avoir aucun point d'intersection avec la branche b, on voit que le nombre des points d'intersection de a et b est pair au impair suivant que ce segment AM finit par rencontrer b en un nombre pair ou impair de points. S'il finit par être nul il finira, comme il commençait, par n'avoir aucun point d'intersection avec b: alors la branche a rencontre toute autre branche (y compris les droites) en un nombre pair de points. S'il finit par être la droite entière AM, la branche a rencontre, premièrement, toute droite en un nombre impair de points, et ensuite on voit qu'elle rencontre aussi toute autre branche douée de cette même propriété, qui caractérise les branches d'ordre impair, en un nombre impair de points.

Si la branche a, que nous supposons dénuée de points multiples, est d'ordre pair, si A est un point fixe placé au dehors de la branche, et M un point qui se meut sans la passer jamais, les nombres de points d'intersection avec a qui se trouvent sur les deux segments de AM restent, pendant tout le mouvement de M, pairs ou impairs. Dans le dernier cas on ne peut parvenir de M à A sans passer la branche. On voit ainsi qu'elle divise le plan en deux parties. Comme deux branches d'ordre impair se rencontrent toujours, il est impossible qu'il peut y en avoir dans toutes les deux parties séparées par une branche d'ordre pair. Mais on peut prouver qu'il y en a dans l'une. En effet, on peut construire une série de branches complètes (c), voisines à la branche donnée a et à une droite (branche d'orde impair) b, qui ne rencontrent pas a et qui aient le même nombre d'intersections avec une autre droite que celle-ci a avec a et b. Ce nombre étant impair, il faut qu'une des branches (c) soit d'ordre impair.

2. Une courbe algébrique sans points multiples, ne peut avoir plus d'une branche d'ordre impair. Si la courbe est d'ordre pair toutes ses branches complètes sont d'ordre pair, si elle est d'ordre impair l'une de ses branches est d'ordre impair, les autres d'ordre pair.

Une courbe du quatrième ordre (*quartique*) a, au plus, quatre branches externes l'une à l'autre, ou deux branches dont l'une se trouve dans la partie du plan interne à l'autre, et, dans ce dernier cas, la branche interne ne peut avoir des tangentes doubles ou d'inflexion.

Car, s'il en était autrement on pourrait construire des coniques rencontrant la courbe en plus de 8 points, ou des droites la rencontrant en plus de 4 points.

3. Une tangente double *réelle* d'une *quartique* peut être 1° une tangente double d'une seule branche, 2° une droite tangente à la courbe en deux points imaginaires, et 3° une tangente commune à deux branches différentes. Dans le premier cas les *points de contact ne peuvent être séparés par les points d'intersection avec deux autres tangentes doubles*; car l'une ou l'autre de celles-ci rencontrerait alors la courbe en un point différent de ses points de contact. La même chose a lieu, évidemment, si les points de contact sont imaginaires. Dans ces deux cas nous appelons les tangentes doubles *tangentes doubles de la première espèce*, respectivement *à contacts réels* et *à contacts imaginaires*. Les tangentes communes à des branches différentes s'appellent *tangentes doubles de la seconde espèce*.

4. Une tangente double de la première espèce à contacts réels, se trouve en entier dans la partie du plan externe à la branche qu'elle touche; car, s'il en était autrement elle rencontrerait la quartique en deux points différents des points de contact. La branche a entre les points de contact un arc rentrant, dont une partie, limitée par deux points d'inflexion, tourne sa convexité vers la partie interne du plan. Réciproquement, tout arc tournant sa convexité vers la partie interne du plan, occasionne une tangente double de la première espèce à contacts réels. On voit ainsi que *le nombre d'inflexions réelles d'une quartique, est égal au double du nombre de ses tangentes doubles de la première espèce à contacts réels.*

II. Nombre de tangentes doubles de la première espèce.

5. *Le nombre de tangentes doubles de la première espèce d'une quartique quelconque sans points multiples, est égal à quatre.*

Nous commencerons par prouver que *deux quartiques quelconques sans points multiples ont le même nombre de tangentes doubles de la première espèce.* Placées dans un même plan, les deux courbes déterminent un faisceau, où elles séparent deux séries de quartiques réelles*): les déformations infiniment petites que subissent successivement la courbe variable du faisceau dans l'une ou l'autre de ces séries, constituent une déformation finie, qui conduit de l'une des courbes données à l'autre. Il suffit donc de démontrer qu'aucune de ces déformations infiniment petites n'altère le nombre de tangentes doubles de la première espèce.

*) Nous appelons ici réelle toute courbe dont l'équation ne contient que des coëfficients réels.

On peut s'imaginer deux manières dont ce nombre pourrait être altéré: 1° si deux tangentes doubles de la première espèce coïncident pour devenir ensuite imaginaires, ou réciproquement, ou 2° si des tangentes doubles de première espèce se transforment en tangentes doubles de seconde espèce, ou réciproquement. La seule manière dont deux tangentes doubles d'une quartique peuvent coïncider, c'est si elle a un point double; car une quartique ne peut avoir, ni des tangentes triples, ni des tangentes doubles dont un des contacts soit du second ordre. Si une tangente double de première espèce à contacts réels se transforme en une tangente double de seconde espèce il faut que la branche tangente à la tangente double se divise en deux. Au moment de transition la courbe a un point double à branches réelles. Il n'existe aucune transition immédiate*) de tangentes doubles réelles à contacts imaginaires, à des tangentes doubles de seconde espèce.

Nous n'aurons donc à nous occuper que des transitions de la courbe variable du faisceau par les *courbes réelles données d'un point double*, et il sera permis de négliger les cas où d'autres singularités s'ajoutent au point double (tels que celui où la courbe a deux points doubles, ou un point d'inflexion coïncide avec le point double etc.). En effet, on peut éviter ces cas, qui ne se présentent que dans les faisceaux dont les constantes satisfont à des équations particulières, en disposant des positions des deux courbes données, ou en faisant subir à celles-ci des déformations assez legères pour n'affecter pas le nombre dont il s'agit — ce qui est possible, parceque les courbes données n'ont pas elles-mêmes des points doubles.

Un point double peut être réel ou imaginaire, et, dans le premier cas, avoir des branches réelles ou imaginaires. Notre faisceau ne contient aucune courbe réelle douée d'un *point double imaginaire*; car alors elle en aurait deux. Les deux tangentes doubles qui se confondent en une tangente menée d'un *point* isolé, sont de la seconde espèce; car un point isolé résulte du resserrement d'une branche qui va s'évanouir, ou il est le commencement d'une branche qui va naître. Dans le cas enfin d'un *point double à branches réelles***), les tangentes doubles de première espèce qui vont être imaginaires ou tangentes doubles de seconde espèce ont des contacts réels, et il n'y en a pas dont les contacts aillent être en même temps imaginaires, ou réciproquement. On doit donc prouver que le nombre de tangentes doubles de première

*) En des cas particuliers les deux transitions suivantes peuvent avoir lieu *à la fois*: 1° celle de tangente double à contacts imaginaires à tangente double d'une seule branche, et 2° celle à tangente double de seconde espèce. La dernière transition demande un point double.

**) On trouvera dans les n° 17. et suiv. une discussion de ce cas plus détaillée que nécessaire pour la démonstration actuelle.

espèce à contacts réels, reste inaltéré dans cette transition. Ce nombre est (n° 4.) la moitié de celui des inflexions réelles. Or, chacune des deux tangentes au point double est la position limite de trois tangentes d'inflexion, dont une seule est réelle soit avant soit après la transition par la courbe à point double*), et cette courbe singulière n'a pas d'autres tangentes d'inflexion coïncidentes. Donc, le nombre d'inflexions réelles ne subit aucune altération, et, par conséquent, le nombre dont il s'agit ni non plus.

Le nombre des tangentes doubles de première espèce d'une quartique sans points singuliers, a donc une valeur constante. Pour savoir quelle est cette valeur il suffit de connaître les tangentes doubles d'une seule courbe. Or la courbe qui a servi à Plücker d'exemple d'une quartique présentant 28 tangentes doubles réelles en a *quatre* qui sont de la première espèce. Donc etc.

Nous ajouterons à la démonstration dont nous nous sommes servis la remarque suivante. Un faisceau de quartiques ne contient pas en général d'autres courbes singulières**) — c'est à dire des courbes qui ont d'autres points ou tangentes singuliers qu'une courbe quelconque du faisceau — que celles qui ont un point double, et celles dont deux tangentes d'inflexion, coïncidant avec une tangente double, forment une tangente à contact du troisième ordre. Par ces tangentes doubles singulières se fait la transition de tangentes doubles de première espèce à contacts réels, à des tangentes doubles à contacts imaginaires. C'est donc seulement le nombre total des tangentes doubles de première espèce qui reste constant, et non pas ceux des deux classes de ces tangentes doubles.

6. Deux branches d'une quartique externes l'une à l'autre ont quatre tangentes communes, placées comme celles de deux coniques externes l'une à l'autre. Une cinquième, s'il y en avait, rencontrerait nécessairement la courbe en des points différents des points de contact, ce qui est impossible. Comme une quartique a 4, 3, 2, 1, 0 branches externes l'une à l'autre, elle aura 24, 12, 4, 0 tangentes doubles de seconde espèce. Le nombre total des tangentes doubles réelles sera donc 28, 16, 8, 4.

---

*) On le *voit* en faisant une figure; mais j'en ai aussi montré la raison algébrique dans les n^{os} 10—11 d'un Mémoire intitulé: *Almindelige Egenskaber* .... Recherche des propriétés générales des Systèmes de Courbes Planes, suivie d'une application à la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires du 4^{me} ordre (imprimé avec un Résumé en français dans les Mémoires de l'*Académie danoise des Sciences,* Ser. V, Vol. 10).

**) La première et la troisième partie du Mémoire que je viens de citer contiennent des recherches sur les courbes singulières d'un système.

Plücker avait présumé*), et plus tard d'autres savants ont-ils prouvé (voir dans ce qui suit le n° 18.), que le nombre de tangentes doubles réelles ne peut avoir d'autres valeurs que 28, 16, 8, 4, 0; nous voyons ici qu'il faut aussi exclure le cas dernier.

Le nombre total des tangentes doubles de la première espèce d'une quartique étant égal à quatre, celui des tangentes doubles de la première espèce à contacts réels est au plus quatre. On voit donc qu'*une quartique ne peut avoir plus de 8 inflexions réelles.*

III. Propriétés des tangentes doubles de première espèce.

7. La propriété principale des tangentes doubles de première espèce est celle que nous avons déjà mentionnée (n° 3.), que tous les points d'intersection d'une de ces tangentes doubles avec les autres tangentes doubles de la quartique, se trouvent sur un seul des deux segments limités par les points de contact. En ayant égard à cette propriété on peut déduire les autres des propriétés générales des tangentes doubles.

On sait, par exemple, que toute tangente double d'une quartique est rencontrée par 27 des 63 systèmes de coniques ayant quatre contacts avec la quartique en des séries de couples en involution, et qu'à chacune de ces séries appartiennent le couple formé des points de contact, et cinq couples formés des points d'intersection avec dix autres tangentes doubles. Si la tangente double dont il s'agit est de la première espèce, on voit que toutes ces 27 involutions ont des points doubles réels. Mais nous n'insisterons pas à d'autres propriétés des tangentes doubles de la première espèce, que celles dont nous aurons à faire usage dans la classification des formes différentes des quartiques. C'est de ces propriétés que nous allons nous occuper.

8. Si les côtés d'un triangle ABC sont des tangentes doubles d'une quartique, D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2 étant les points de contact, on sait, suivant le théorème de Carnot, que

$$\frac{BD_1 \cdot BD_2}{CD_1 \cdot CD_2} \cdot \frac{CE_1 \cdot CE_2}{AE_1 \cdot AE_2} \cdot \frac{AF_1 \cdot AF_2}{BF_1 \cdot BF_2} = \pm 1 .$$

Aux cas où l'on sait seulement que le premier membre de cette équation est positif, on voit qu'il a la valeur de $+1$, et que, par conséquent, les six points de contact se trouvent sur une même conique. Or $\frac{BD_1 \cdot BD_2}{CD_1 \cdot CD_2} \lesseqgtr 0$, suivant que B et C *séparent* D_1 et D_2 ou non. Par conséquent, si, dans le triangle formé de trois tangentes doubles d'une quartique, aucun des couples de points de contact n'est séparé

*) Theorie der algebraischen Curven p. 253.

par les sommets du triangle, ou si deux couples sont séparés, les six points de contact se trouvent sur une même conique.

On trouve en particulier que *les points de contact de trois tangentes doubles de première espèce se trouvent sur une même conique*, et que du même *les points de contact d'une tangente double de seconde espèce, et ceux de deux tangentes doubles de première espèce qui ne séparent pas les points de contact de la tangente double de seconde espèce, se trouvent sur une conique.*

9. Si, de quatre couples de points, toutes les combinaisons à trois se trouvent sur des coniques, les quatre coniques ainsi déterminées coïncident. En effet, si l'on désigne par $\varphi = 0$ une de ces quatre coniques, et par $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ les droites dont les points d'intersection avec φ font trois des quatre couples, les autres coniques seront représentées par des équations des formes suivantes:

$$yz + a\varphi = 0,$$
$$zx + b\varphi = 0,$$
$$xy + c\varphi = 0,$$

où a, b et c sont des constantes. Toutes ces coniques doivent passer par les points du quatrième couple. Ces *deux* points doivent, par conséquent, satisfaire aux équations

$$ax \cdot \varphi = by \cdot \varphi = cz \cdot \varphi,$$

ce qui est impossible à moins que φ passe par un de ces points. Mais alors φ coïncide avec les trois autres coniques $C \cdot F \cdot D$.

En appliquant ce lemme aux tangentes doubles de première espèce, on voit que *tous les points de contact des tangentes doubles de la première espèce d'une quartique se trouvent sur une conique.* Ce théorème montre de nouveau que le nombre des tangents doubles de première espèce est au plus quatre (mais non pas qu'il a toujours cette valeur).

10. Le lemme du n° 9. nous fournit encore le théorème suivant:

Aucun des triangles formés de trois tangentes doubles) de première espèce ne peut renfermer deux branches externes l'une à l'autre.*

En effet, s'il y en avait deux dans un seul triangle les points de contact des quatre tangentes communes aux deux branches se trouveraient (selon les n° 8 et 9.) sur la conique passant par les points de contact des tangentes doubles de première espèce. Cette conique rencontrerait ainsi la quartique en plus de 8 points, ce qui est impossible.

---

*) Trois droites forment, dans la géométrie projective, quatre triangles. Quatre droites forment trois quadrilatères et quatre triangles. Chaque segment, fait sur une des droites par les autres, est à la fois côté d'un quadrilatère et d'un triangle. Deux quelconques des droites contiennent des côtés consécutifs de deux quadrilatères, et des côtés opposés du troisième.

On conclut du théorème prouvé que toutes les branches de la courbe doivent se trouver, soit dans les trois quadrilatères, soit dans les quatre triangles, formés des quatre tangentes doubles de première espèce, et qu'aucune de ces sept parties du plan ne contient deux branches externes l'une à l'autre. Car un quadrilatère quelconque ajouté à un triangle quelconque, fait un triangle limité par trois tangentes doubles de première espèce.

IV. Énumération des formes des quartiques sans points multiples.

11. Quant à sa forme une quartique appartient toujours (selon les n^{os} 2. et 10.) à une des trois classes suivantes:

Quartiques composées de deux branches dont l'une se trouve dans la partie du plan interne à l'autre. Nous appelons ces courbes, qui sont toujours renfermées dans un seul quadrilatère ou triangle*), *quartiques annulaires.*

Quartiques composées de trois branches, au plus, distribuées dans les trois quadrilatères. Nous appelons ces courbes *quartiques quadrilatérales.*

Quartiques composées de quatre branches, au plus, distribuées dans les quatre triangles. Nous appelons ces courbes *quartiques trilatérales.*

On aura des divisions ultérieures des quartiques en ayant égard, 1° au nombre des tangentes doubles de première espèce à contacts réels, et à la distribution de ces tangentes doubles aux différentes branches, ou 2° au nombre des branches réelles. Nous ne ferons usage que de la première de ces deux bases de division. Toutefois il sera clair qu'au moins les branches ayant des tangentes doubles de première espèce sont réelles.

12. Il s'agit notamment de se rendre compte des différentes positions que peut prendre la conique φ qui passe par les 8 points de contact des tangentes doubles de la première espèce. Comme tous ses deux points d'intersection avec une des droites, si elle en a de réels, se trouvent sur un seul des trois segments de la droite, elle pénètre, au plus, dans $r + 1$ de sept parties du plan si elle a des intersections réelles avec r des quatre droites. Cette considération nous montrera l'impossibilité de quelques cas qui se présentent (voir III., IV. et VII. dans l'énumération suivante).

---

*) Nous désignons ici et dans ce qui suit, par les seuls mots de „quadrilatères" et „triangles" les trois quadrilatères et les quatre triangles que forment les tangentes doubles de première espèce. Nous y appliquerons aussi le nom commun de „parties du plan".

I. *La conique φ rencontre tous les côtés d'un quadrilatère.* Elle pénètre alors dans ce quadrilatère et dans les quatre triangles.

II. *La conique φ rencontre trois côtés d'un quadrilatère et un côté d'un autre.* Elle pénètre alors dans ce quadrilatère et dans trois des triangles; elle rencontre deux côtés de l'un de ceux-ci.

III. *La conique φ rencontre deux côtés de deux quadrilatères.* On ne peut avoir des côtés opposés de tous les deux quadrilatères (voir la note du n° 10.), ni non plus des côtés consecutifs de tous les deux quadrilatères. En effet, dans ce dernier cas la conique pénètrerait dans six parties du plan (les deux quadrilatères et tous les quatre triangles, ce qu'on voit sans difficulté au moyen d'une figure). Il ne reste donc que le cas où *les côtés de l'un des quadrilatères sont opposés, eux de l'autre consécutifs.* Alors la conique pénètre seulement dans quatre parties du plan: les deux quadrilatères et deux triangles; elle rencontre aussi deux côtés de chacun de ceux-ci.

IV. *La conique φ rencontre deux côtés d'un quadrilatère, et un côté de chacun des deux autres.* On apercevra sans difficulté que les deux côtés du premier quadrilatère sont *opposés,* que la conique pénètre dans les trois quadrilatères et dans deux triangles, et qu'elle rencontre tous les trois côtés de l'un de ceux-ci.

V. *La conique φ rencontre trois côtés d'un quadrilatère.* Elle pénètre alors dans ce quadrilatère et dans trois triangles.

VI. *La conique φ rencontre deux côtés opposés d'un quadrilatère et un côté d'un autre.* Elle pénètre alors dans les deux quadrilatères et dans deux triangles, et elle rencontre deux côtés de l'un de ceux-ci.

VII. *La conique φ rencontre deux côtés consécutifs d'un quadrilatère, et un côté du quadrilatère où les côtés, segments des mêmes tangentes doubles que les deux côtés du premier quadrilatère, sont opposés.* Elle pénètre alors dans les deux quadrilatères et dans deux triangles, et elle rencontre deux côtés de l'un de ceux-ci.

VIII. *La conique rencontre les trois côtés d'un triangle* (un côté de chacun des quadrilatères). Elle pénètre dans le triangle et dans les trois quadrilatères.

IX et X. *La conique φ rencontre deux côtés, soit opposés, soit consécutifs, d'un quadrilatère.* Elle pénètre dans le quadrilatère et dans deux triangles.

XI. *La conique φ rencontre deux côtés d'un triangle.* Elle pénètre dans le triangle et dans deux quadrilatères.

XII. *La conique φ rencontre un côté d'un quadrilatère* (triangle). Elle pénètre dans le quadrilatère et dans le triangle.

XIII. *La conique φ ne rencontre aucune des quatre droites.*

On voit sans difficulté que toutes les positions de φ, énumérées ici, sont possibles.

13. En indiquant les quartiques annulaires, quadrilatérales et trilatérales qui correspondent aux positions de la conique φ définies dans le n° précédent, nous aurons une énumération des différentes formes des quartiques qui sera, du moins, *complète*. Nous montrerons qu'elle n'est pas *trop étendue*, en donnant des exemples de toutes les formes énumérées.

Nous appellerons, dans notre énumération, *r-folium* une branche d'ordre pair, douée de r tangentes doubles de première espèce. Une branche d'ordre pair, sans aucune tangente double de première espèce ($r = 0$), s'appelle un ovale (quand même elle rencontre la droite à l'infini). Les nombres indiqués pour des ovales ne sont que des *maxima*; seulement une quartique annulaire deviendrait quadrilatérale ou trilatérale, si son ovale interne cessait d'être réel. Les nombres I., II. etc. indiquent, suivant le n° précédent, les positions des points de contact des tangentes doubles de première espèce. L'indication de ces positions fait une partie essentielle de la définition de chaque forme.

I.

1) Quartique annulaire, composée d'1 *quadrifolium* et d'1 ovale interne. (Fig. 1.)

2) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *quadrifolium* et de 2 ovales. (Courbe 1 de la fig. 2.)

3) Quartique trilatérale, composée de 4 *unifolia*. (Courbe 2 de la fig. 2.)

II.

4) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *trifolium*, d'1 *unifolium* et d'1 ovale. (Courbe 1 de la fig. 3.)

5) Quartique trilatérale, composée d'1 *bifolium*, de 2 *unifolia* et d'1 ovale. (Courbe 2 de la fig. 3.)

III.

6) Quartique quadrilatérale, composée de 2 *bifolia* et d'1 ovale. (Courbe 1 de la fig. 4.)

7) Quartique trilatérale, composée de 2 *bifolia* et de 2 ovales. (Courbe 2 de la fig. 4.)

IV.

8) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *bifolium* et de 2 *unifolia*. (Courbe 1 de la fig. 5.)

9) Quartique trilatérale, composée d'1 *trifolium*, d'1 *unifolium* et de 2 ovales. (Courbe 2 de la fig. 5.)

V.

10) Quartique annulaire, composée d'1 *trifolium* et d'1 ovale interne.

11) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *trifolium* et de 2 ovales.

12) Quartique trilatérale, composée de 3 *unifolia* et d'1 ovale.

VI. et VII.

13) et 15) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *bifolium*, d'1 *unifolium* et d'1 ovale.

14) et 16) Quartique trilatérale, composée d'1 *bifolium*, d'1 *unifolium* et de 2 ovales.

VIII.

17) Quartique annulaire, composée d'1 *trifolium* et d'un ovale interne.

18) Quartique quadrilatérale, composée de 3 *unifolia*.

19) Quartique trilatérale, composée d'1 *trifolium* et de 3 ovales.

IX. et X.

20) et 23) Quartique annulaire, composée d'1 *bifolium* et d'1 ovale interne.

21) et 24) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *bifolium* et de 2 ovales.

22) et 25) Quartique trilatérale, composée de 2 *unifolia* et de 2 ovales.

XI.

26) Quartique annulaire, composée d'1 *bifolium* et d'1 ovale interne.

27) Quartique quadrilatérale, composée de 2 *unifolia* et d'1 ovale.

28) Quartique trilatérale, composée d'1 *bifolium* et de 3 ovales.

XII.

29) et 30) Quartique annulaire, composée d'1 *unifolium*, placé, soit dans un quadrilatère, soit dans un triangle, et d'1 ovale interne.

31) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *unifolium* et de 2 ovales.

32) Quartique trilatérale, composée d'1 *unifolium* et de 3 ovales.

XIII.

33) et 34) Quartique annulaire, composée d'un ovale, placé, soit dans un quadrilatère, soit dans un triangle, et un ovale interne.

35) Quartique quadrilatérale, composée de 3 ovales.

36) Quartique trilatérale, composée de 4 ovales.

Les 9 premières de ces différentes formes suffiront à donner une idée assez claire de la variété des formes des quartiques; car les autres n'en sont que les simplifications qu'on trouve si les contacts d'une ou plusieurs tangentes doubles deviennent imaginaires. Plusieurs de ces

dernières formes ne diffèrent entre elles que par la position, peu essentielle, de tangentes doubles à contacts imaginaires.

V. Démonstration de l'existence de toutes les formes énumérées.

14. On sait q'une quartique quelconque peut être représentée par une équation de la forme

$$xyzu + k\varphi^2 = 0, \tag{1}$$

où $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$ sont quatre tangentes doubles dont les points de contact se trouvent sur une même conique $\varphi = 0$. Comme $xyzu$ change son signe toutes les fois que le point représenté franchit une des quatre tangentes doubles, cette quantité a un signe différent, suivant que le point se trouve dans un des quadrilatères ou dans un des triangles que forment ces quatre droites. Supposons, pour fixer les idées, que $xyzu < 0$ si le point se trouve dans un des quadrilatères, et que $xyzu > 0$ s'il se trouve dans un des triangles. Alors *tous les points de la quartique représentée par l'équation* (1) *se trouveront dans un des quadrilatères si* $k > 0$, *dans un des triangles, si* $k < 0$. Nous voyons ainsi que l'une des deux propriétés des quatre tangentes doubles de première espèce dont nous avons parlé à la fin du n° 10., est une propriété générale de quatre tangentes doubles dont les points de contact sont placés sur une conique.

Si les tangentes doubles sont de la première espèce il *faut* que la conique φ ait une des 13 positions énumérées dans le n° 12.; mais cette condition ne *suffit* pas. Cependant, on peut prouver que, pour ces positions de φ, *si* k *diffère peu de zéro, la courbe est une quartique quadrilatérale ou trilatérale ayant* x, y, z, u *pour tangentes doubles de première espèce.*

En effet, *si* $k = 0$ l'équation (1) représentera une courbe composée des quatre tangentes doubles. On voit ainsi que, si k diffère très peu de zéro, la courbe doit être composée, soit d'une seule branche dans chaque quadrilatère si $k > 0$, soit d'une seule branche dans chaque triangle si $k < 0$. Alors, suivant notre supposition sur la position de φ, aucune des quatre tangentes doubles ne peut être tangente à deux branches différentes. Elles sont donc de la première espèce, et la courbe est une quartique quadrilatérale ou trilatérale suivant que $k \gtrless 0$.

Comme toutes les 13 positions de la conique φ sont possibles, nous voyons, non seulement que toutes les différentes quartiques quadrilatérales et trilatérales que nous avons énumérées existent, mais aussi que leurs nombres d'ovales peuvent atteindre aux *maxima* que nous avons indiqués.

15. Aussi pour démontrer l'existence des *quartiques annulaires* nous ferons usage de l'équation (1). Commençons par supposer que

la conique φ soit tangente aux quatre droites x, y, z, u. Alors la conique φ se trouve nécessairement dans un des quadrilatères, formés par ces droites. Pour $k > 0$ le même quadrilatère contiendra une branche de la quartique, qui, aux points de contact de φ, a des contacts du 3me ordre avec les droites x, y, z, u, et qui reste par conséquent, au voisinage de ces points de contact, dans la partie du plan externe à la conique. Comme ces points sont les seuls où elle rencontre φ, elle entoure cette conique. Or on peut déterminer k ainsi que la quartique (1) passe par un point quelconque interne à la conique φ. Ce point appartient nécessairement à une branche de la courbe déterminée interne à celle dont nous venons de parler. La courbe est donc une quartique annulaire.

En faisant subir à une des quartiques annulaires qu'on trouve ainsi (où l'ovale interne ne se réduit pas à un point isolé) des altérations assez petites, pour que l'ovale interne ne s'évanouisse, ni ne se confonde avec la branche externe, on peut obtenir des exemples de toutes les quartiques annulaires, renfermées dans un quadrilatère, dont nous avons parlé. Il suffit de remplacer les tangentes x, y, z, u de la conique φ, par d'autres droites très voisines qui n'y sont plus tangentes.

Quant aux quartiques annulaires renfermées dans un triangle, on procède de la même manière, en commençant seulement du cas où φ est renfermée dans un des triangles formés par x, y, z, u, et tangente à ses côtés.

16. L'existence des 36 formes énumérées est donc démontrée; mais nous croyons bon de regarder encore, dans un certain cas, les variations d'une courbe du faisceau que représente l'équation (1)

$$xyzu + k\varphi^2 = 0 ,$$

si k est un paramètre variable. Le cas auquel nous nous bornons est celui où φ rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère, formé par x, y, z, u, en des points placés ainsi que le faisceau contienne des quartiques annulaires. Nous supposerons que la valeur de k croisse de 0 par ∞ à 0.

Pour $k = 0$, la courbe est composée de quatre droites; elle a donc six points doubles à branches réelles.

Pour de petites valeurs positives de k, la courbe est une quartique quadrilatérale (forme 2) douée de deux ovales réels. Pour des valeurs croissantes de k, ces ovales doivent disparaître, avant que la courbe devienne une quartique annulaire. Au moment de la disposition ils se réduisent à des points isolés. Il y a donc, dans cette série de quartiques quadrilatérales, faisant partie du faisceau, deux courbes douées

d'un point isolé (ou, en particulier, une courbe douée de deux points isolés).

La transition aux quartiques annulaires (forme 1) se fait par une courbe composée d'un *quadrifolium* et d'un point isolé interne. Ce point est le commencement d'un ovale interne, qui croît, jusqu'à ce qu'il se confond avec le quadrifolium, qui l'entoure, et qui s'est retréci jusqu'à présent. La courbe de transition est douée d'un point double à branches réelles.

Après cette transition, on rencontre une nouvelle série de quartiques quadrilatérales consistant en un seul *quadrifolium*, qui se retrécit de plus en plus, jusqu'à ce qu'il se divise en deux branches, puis en trois et enfin en quatre branches. Chacune de ces trois divisions se fait par une courbe présentant un point double à branches réelles. Les courbes à deux branches ont seulement deux des droites x, y, z, u pour tangentes doubles de première espèce, les courbes à trois branches, une, et, pour les courbes à quatre branches, toutes ces quatre tangentes doubles sont de la seconde espèce. Ces trois séries de courbes du faisceau peuvent présenter de différentes formes; on peut, *par exemple*, en rencontrer la suite suivante: quartiques trilatérales composées de deux *bifolia* (forme 7 sans ovales), puis quartiques quadrilatérales composées d'un *bifolium* et de deux *unifolia* (forme 8), et enfin quartiques trilatérales composées de quatre *unifolia* (forme 3). Quelque que soit du reste cette suite, qui peut consister en plus de trois formes différentes, on finira toujours, pour des valeurs de k croissant à l'infini, par trouver les courbes composées de quatre *unifolia* dont nous venons de parler; car, pour $k = \infty$, la courbe du faisceau se réduit à la conique double φ^2 ayant pour sommets*) les huit points d'intersection avec les droites x, y, z, u, et, par conséquent, pour de très grandes valeurs positives de k, elle doit être composée de quatre branches, qui tendent à couvrir deux fois les quatre arcs de la conique φ qui se trouvent dans le *quadrilatère*.

Dès que le paramètre k, après avoir été infini, prend des valeurs négatives, la courbe du faisceau, venant de couvrir deux fois les quatre arcs de φ qui se trouvent dans *les triangles*, devient de nouveau une quartique trilatérale composée de quatre unifolia; mais à présent les droites x, y, z, u en sont les tangentes doubles de la première espèce. Elle garde cette forme, jusqu'à ce qu'elle coïncide, pour $k = 0$, avec les quatre droites fixes.

Nous avons vu que la courbe du faisceau qui correspond à $k = 0$ a 6 points doubles. Elle compte donc pour 6 courbes du faisceau

*) On appelle *sommet* un point d'une courbe singulière d'un système qui a la propriété que toute droite passant par lui est tangente à la courbe.

douées de points doubles. Nous avons encore rencontré, dans le faisceau, 7 courbes réelles douées de points doubles; trois de ces points sont isolés, quatre ont des branches réelles. Il y a enfin dans le faisceau une conique double. Or on peut prouver*) qu'il y a, en général, dans un faisceau de quartiques 27 courbes douées de points doubles, mais qu'une conique double en absorbe 14. Nous voyons donc qu'il n'y a pas, dans le faisceau actuel, à côté des courbes réelles que nous avons nommées, des courbes imaginaires douées de points doubles.

VI. Quartiques douées de points doubles.

17. Les résultats que nous avons trouvés en étudiant les formes des quartiques générales, sont aussi applicables aux cas limites où les courbes présentent des points singuliers.

Seulement, on doit se rendre compte du nombre des tangentes doubles de la première espèce qui prennent alors des positions particulières. Si nous nous bornons aux courbes douées de points doubles, nous aurons à nous occuper séparément des espèces suivantes de points doubles: *1° points isolés, 2° points de connexion de deux branches dont l'une est interne à l'autre, 3° points de connexion de deux branches, externes l'une à l'autre, 4° points d'intersection des deux parties d'une branche qui se divise en deux branches d'ordre impair, 5° points doubles imaginaires.*

18. *Un point isolé* n'est qu'un ovale infiniment petit, et les tangentes qu'on peut en mener aux autres branches de la courbe sont, nous l'avons dit dans le n° 5., des positions limites de tangentes doubles de la seconde espèce.

Une courbe présentant des points isolés est toujours une forme limite de courbes présentant (au moins) le même nombre d'ovales**); mais nous étant bornés, quant à la réalité des ovales des différentes formes, à en indiquer le nombre *maximum*, nous ne discuterons, ni non plus, combien de ces ovales peuvent se réduire, à la fois, à des points isolés.

19. Par un *point de connexion de deux branches dont l'une est interne à l'autre* ne passe aucune droite réelle qui est tangente à la courbe en un autre point. Une courbe présentant de ces points doubles, comme une courbe présentant des points isolés, *garde donc toutes ses quatre tangentes doubles de première espèce.* Les différentes formes de ces courbes sont des limites de quartiques annulaires; elles n'ont donc

*) Voir mon Mémoire déjà cité sur les *Systèmes de Courbes* p. 83.

**) Nous ne parlons pas ici de points isolés formés par la coïncidence de *plusieurs* points doubles en cuspidaux.

pas d'autres branches que celles que joignent ces points singuliers. Il n'est pas difficile de prouver que, réciproquement, toute forme de quartiques annulaires, présentant r tangentes doubles à contacts réels, conduit à des courbes douées de $1, 2 \cdots r$ des points doubles dont nous nous occupons. S'il y a plus d'un de ces points on peut aussi les regarder comme des points de connexion de branches externes l'une à l'autre et jointes d'une manière cyclique (voir le n° suivant). Il n'existe pas des quartiques qui aient à la fois des points de connexion de deux branches dont l'une est interne à l'autre, et d'autres points doubles.

20. Un *point de connexion de deux branches externes l'une à l'autre*, a la propriété, qui le distingue des points dont nous venons de parler, d'être centre d'un faisceau qui contient, soit des droites qui rencontrent encore en deux points la branche unique composée des deux branches qui forment le point double, soit des droites qui ne la rencontrent qu'en ce point. Les premières de ces droites sont séparées des dernières par deux droites tangentes à la branche dont il s'agit en des points différents du point double. Si l'on regarde la courbe comme limite de courbes où les deux branches sont séparées, chacune de ces deux tangentes est à la fois la position limite d'une tangente double de première espèce, et d'une tangente commune aux deux branches. Les tangentes menées du point double aux autres branches de la courbe sont des positions limites de tangentes doubles de seconde espèce. On voit donc que *les tangentes menées du point double absorbent deux tangentes doubles de première espèce.* La courbe en a donc encore deux.

On aurait aussi pu considérer la courbe comme limite de courbes dont une seule branche tend à se diviser en deux. Alors toutes les tangentes menées du point double sont des limites de tangentes doubles imaginaires, pendant que les deux tangentes communes aux deux branches sont des limites de tangentes doubles de première espèce.

Si une quartique a plusieurs points de connexion de branches externes l'une à l'autre, et qu'on la regarde comme limite de courbes où ces branches sont séparées, on voit — de la même manière, à peu près, que dans les cas où il n'y avait qu'un seul de ces points — que chacun de ces points doubles est position limite de points de contact de deux tangentes doubles de première espèce. Il s'ensuit que, pour déduire les formes de quartiques douées de ces points des formes de quartiques générales, énumérées dans le n° 13., il faut seulement faire passer la conique φ par des points d'intersection des tangentes doubles de première espèce, ou faire coïncider deux de ces tangentes doubles (à contacts réels). Dans ce dernier cas la courbe est composée de deux branches liées par deux points doubles d'une manière *cyclique*, c'est à dire ainsi qu'elles *divisent la partie du plan externe à elles en*

deux parties. Alors on peut aussi regarder la courbe comme composée de deux branches d'ordre pair qui se rencontrent en deux points. — Deux branches peuvent aussi avoir deux points de connexion sans être liées d'une manière cyclique. Cela arrivera si la conique φ passe par deux sommets opposés d'un quadrilatère: alors deux branches des quartiques quadrilatérales, limites des formes 2, 4 et 6 de l'énumération au n° 13., forment une seule branche complète d'ordre pair, qui passe deux fois par chacun des sommets du quadrilatère, et qui rencontre toute droite en deux ou quatre points. — Si deux tangentes doubles de première espèce à contacts réels coïncident, en même temps que la conique φ passe par le point d'intersection des deux autres, on obtient une courbe dont les deux branches, liées d'une manière cyclique, ont encore un troisième point de connexion: Ces deux branches forment une seule branche complète d'ordre pair à trois points doubles, qui rencontre toute droite en deux ou quatre points. — Trois branches peuvent être liées, *soit* les deux à la troisième par deux points de connexion, *soit* les deux entre elles (d'une manière non cyclique) par deux points de connexion, et la troisième à une d'elles par un troisième point de connexion, *soit* d'une manière cyclique par trois points de connexion. Dans tous ces trois cas les trois branches en forment une seule. — Quatre branches peuvent être liées, *soit* d'une manière *successive* par trois points de connexion, *soit* les trois à la quatrième par trois points de connexion. Les quatre branches en forment une seule. — Pour compléter ces considérations on pourrait regarder aussi des quartiques composées de deux coniques.

Une courbe ayant des points de connexion de branches externes l'une à l'autre peut avoir, en même temps, des points isolés.

21. *Deux branches d'ordre impair dont se compose une branche d'ordre pair* d'une quartique ont la propriété de rencontrer toute droite en un ou en trois points. Comme, de plus, le nombre total des intersections d'une droite avec les deux branches est au plus quatre, ces deux branches ne se rencontrent qu'en un seul point, qui est un *point double* de la quartique, et le faisceau de droites par ce point double se divise en quatre parties, dont les deux contiennent des droites rencontrant encore en deux points l'une ou l'autre des deux branches, les deux autres, qui séparent les deux premieres, des droites qui ne rencontrent des deux branches qu'au point double. Les limites de ces quatre parties du faisceau sont quatre droites tangentes aux deux branches en des points différents du point double. Deux de ces tangentes se trouvent dans l'une, et deux, dans l'autre des deux parties du plan séparées par les deux branches. Si la branche composée est la limite d'une série de branches d'ordre pair ordinaires, l'une des deux parties du plan devient externe, l'autre interne. Les deux tangentes

qui se trouvent dans la partie externe sont les positions limites des quatre tangentes doubles de première espèce, les deux tangentes dans la partie interne sont les limites de quatre tangentes imaginaires, qui vont être tangentes doubles de la première espèce, si, par la courbe singulière, il se fait une transition à des courbes où les parties externe et interne du plan sont changées entre elles.

On voit ainsi qu'une branche d'ordre pair qui tend à se diviser en deux branches d'ordre impair a quatre tangentes doubles de première espèce à contacts réels, et, par conséquent, 8 inflexions. Chacune des deux branches d'ordre impair a donc 3 inflexions réelles, ce qui est aussi, comme pour la branche d'ordre impair d'une cubique, une conséquence de la circonstance qu'elles rencontrent toute droite en un ou trois points.

Une quartique douée d'une des branches composées qui nous occupent peut avoir encore une seule branche, qui est nécessairement un ovale. Celui-ci peut être joint à un des branches d'ordre impair par un point double, ou se réduire à un point isolé. On peut obtenir toutes ces formes en assujétissant des quartiques composées d'une cubique et d'une droite qui n'en rencontre que la branche d'ordre impair en un seul point à des petites altérations. Pour les déduire des formes générales du n° 13., il faut faire coïncider les tangentes doubles de première espèce deux à deux, et faire passer la conique φ par leur point d'intersection.

22. Si une quartique réelle est douée de *deux points doubles imaginaires* quatre tangentes doubles coïncident avec la droite réelle qui joint ces deux points singuliers. On peut donc regarder la quartique comme courbe de transition de courbes où deux de ces tangentes doubles sont réelles à des courbes où elles sont imaginaires: alors les deux autres passeront en même temps de l'imaginaire au réel. En effet, comme le nombre de tangentes doubles de première espèce doit rester constant, il faut que la courbe variable en reprenne autant qu'elle perd. Or les tangentes doubles qui coïncident, au moment de transition, avec la droite joignant les deux points doubles sont de la première espèce tant qu'elles sont réelles, leurs points de contact étant imaginaires. Par conséquent, comme deux d'entre elles sont réelles avant, et imaginaires après la transition, il faut que les deux autres se comportent de la manière inverse. On voit ainsi que *la droite joignant les deux points doubles imaginaires absorbe deux tangentes doubles de la première espèce.* La courbe singulière en a donc encore deux.

On peut déduire les différentes formes de quartiques douées de deux points doubles imaginaires des formes 23—36 de quartiques gé-

nérales énumérées dans le n° 13., en faisant coïncider deux tangentes doubles de première espèce à contacts imaginaires. Comme, dans ce cas, la différence des triangles et des quadrilatères cesse, on obtient ainsi chaque forme deux fois. On voit que la courbe est renfermée dans deux triangles qui ont pour base commune un segment de la droite joignant les deux points doubles, pendant que leurs deux autres côtés sont des segments différents des deux tangentes doubles de première espèce, et qu'aucun de ces deux triangles ne contient des branches externes l'une à l'autre. La quartique peut avoir un point isolé ou un point de connexion de deux branches, mais aucun des points doubles dont nous avons parlé au n° 21.

VII. Applications à l'étude des surfaces du troisième ordre.

23. M. Geiser, dans son intéressant mémoire sur les tangentes doubles d'une quartique*), a montré qu'il est possible d'inscrire à un cône quelconque du quatrième ordre des surfaces du troisième ordre qui passent par le sommet du cône. On prend pour plan tangent z de la surface cubique en ce point un des 28 plans tangents doubles du cône. Si $\varphi_2 = 0$ est l'équation d'un cône du second ordre passant par les génératrices de contact de ce plan, l'équation du cône quartique est de la forme

$$z\varphi_3 - \varphi_2^2 = 0.$$

On voit donc que l'équation

$$\varphi_3 + 2\,\varphi_2 u + u^2 z = 0,$$

où $u = 0$ est un plan qui ne passe pas par le sommet, réprésente une surface cubique inscrite au cône.

Si le cône quartique donné et son plan tangent double z sont réels, il suffit, pour trouver une surface cubique réelle, de prendre pour φ_2 et u un cône et un plan réels. Or, nous avons prouvé que toute quartique plane a au moins, quatre tangentes doubles réelles; un cône quartique a donc au moins quatre plans tangents doubles réels. On voit ainsi *qu'il est toujours possible d'inscrire à un cône quartique réel des surfaces cubiques réelles.* Par conséquent, on peut appliquer à *toute* quartique plane des résultats déduits de propositions sur les surfaces cubiques, lors même que, dans ces propositions, on a égard à la réalité.

24. Nous pouvons, en nous servant d'un procédé réciproque à celui dont nous venons de parler, appliquer quelques-uns des résultats relatifs aux quartiques planes que nous avons trouvés, à l'étude des surfaces cubiques.

*) Mathematische Annalen I.

Nous avons vu (n° 6.) que le nombre total des tangentes doubles d'une quartique a toujours une des valeurs suivantes 28, 16, 8, 4. Or, les plans tangents doubles des cônes circonscrits à une surface cubique, et ayant pour sommets des points de la surface, sont 1° le plan tangent de la surface au sommet, et 2° les plans qui joignent le sommet aux droites de la surface. On voit ainsi qu'une surface cubique contient 27, 15, 7, 3 droites réelles, résultat trouvé par M. Schläfli*).

Nous avons vu, de plus, que le nombre des tangentes doubles de première espèce d'une courbe quartique est toujours égal à quatre. Si on prend pour sommets de cônes circonscrits à une même surface cubique différents points de cette surface, tous ces cônes auront les mêmes nombres totaux de plans tangents doubles. Ils auront, par conséquent, aussi les mêmes nombres de plans tangents doubles de seconde espèce, c'est à dire de plans tangents communs à deux nappes complètes. [Nous appelons nappe complète d'un cône la partie du cône qui projette une branche complète d'une courbe plane.] *Le cône circonscrit à une surface cubique douée de 27, 15 ou 7 droites réelles (1re, 2me, 3me species de M. Schläfli), et ayant un point de la surface pour sommet, sera donc composée de 4, 3, 2 nappes complètes externes l'une à l'autre.*

Le cône circonscrit à une cubique douée de 3 droites réelles ne consistera qu'en 1 ou 0 nappes ou en 2 dont l'une est interne à l'autre. Dans ce cas la surface peut être composée d'une nappe d'ordre pair et d'une nappe d'ordre impair (4me species), ou seulement d'une nappe d'ordre impair (5me species) **). Une droite menée d'une nappe d'ordre pair d'une surface cubique ne peut être tangente à la nappe d'ordre impair; mais d'un point d'une nappe d'ordre impair on peut toujours mener des tangentes, soit à cette même nappe, soit à la nappe d'ordre pair s'il y en a, et ces tangentes doivent appartenir à de différentes nappes du cône. On voit ainsi qu'*un cône quartique circonscrit à une surface cubique de la 4me species, n'a aucune nappe réelle si le sommet se trouve sur la nappe d'ordre pair de la surface, mais une nappe interne à une autre si le sommet se trouve sur la nappe d'ordre impair de la surface.*

Un cône quartique circonscrit à une surface cubique de la 5me species consiste en une seule nappe. En effet, suivant une remarque que

---

*) *Quart. Math. Journal* vol. II, et *Philosophical Transactions* vol. 153, 1863.

**) C'est M. Klein qui a montré que la surface est, dans ces deux cas, respectivement de la 4me et de la 5me species (Phys. med. Societät zu Erlangen 5 mai 1873). Nous le montrerons d'une autre manière dans le n° 26.

nous venons de faire, il a au moins une nappe. S'il avait encore une nappe interne, la surface cubique devrait se trouver soit entre les deux cônes, soit dans les parties de l'espace interne au cône interne et externe au cône externe. Dans le premier cas le sommet du cône serait un point singulier de la surface, et dans le second cas la surface aurait une nappe d'ordre pair, et serait, par conséquent, de la *4me species.*

25. Si le sommet du cône quartique est placé sur une droite réelle de la surface, cette droite devient une génératrice double du cône. Les plans tangents au cône le long de la droite sont les plans tangents de la surface aux points doubles de l'involution, formée par les couples de points de contact de la surface avec les plans passant par la droite. Cas deux plans tangents peuvent être réels ou imaginaires; dans le dernier cas la droite est génératrice isolée du cône. Par la droite passent encore les plans tangents au cône qui sont: 1° le plan tangent à la surface au sommet du cône, et 2° les cinq plans qui contiennent les couples de droites de la surface qui rencontrent la droite donnée. Le premier plan est réel, les autres sont réels ou imaginaires.

Comme le nombre de nappes du cône quartique circonscrit est indépendant de la position du sommet sur la surface, les cônes à génératrice double ne sont pas des formes de transition à des cônes ayant une autre connexion des nappes, mais seulement des formes limites: les mêmes nappes et les mêmes plans tangents doubles sont réels avant et après le passage du sommet de l'un côté d'une droite de la surface à l'autre*). Aux plans tangents doubles, réels avant et après le passage, appartiennent toujours le plan tangent de la surface au sommet du cône, et le plan, qui tend à coïncider avec celui-ci, passant par la droite de la surface dont il s'agit, et, par conséquent, au moins deux autres plans tangents doubles qui tendent à coïncider. On voit donc que la génératrice double ne peut être une génératrice de connexion d'une nappe avec une nappe interne, ni non plus une génératrice de connexion de deux nappes qui sont réunies avant et après le passage du sommet au delà de la droite. Mais elle peut être une génératrice isolée, ou une génératrice de connexion de deux nappes, externes l'une à l'autre, qui sont séparées avant et après le

*) Dans le système de courbes d'intersections d'un plan avec les cônes circonscrits dont les sommets se trouvent sur une courbe C de la surface, la courbe d'intersection avec le cône ayant pour sommet un point d'intersection de la courbe C avec une droite de la surface, compte pour un nombre *pair* (6) de courbes à point double.

passage, ou une génératrice d'intersection de deux nappes d'ordre impair résultant de la division d'une nappe d'ordre pair. (Voir les n^{os} 17. — 21.) Dans le dernier cas, deux (ou quatre s'il y a une nappe interne) des plans tangents réels au cône singulier qui passent par sa génératrice double sont des positions limites de plans tangents doubles imaginaires. Chacun de ces plans réels renferme donc deux droites imaginaires de la surface.

26. Ces considérations fournissent une nouvelle démonstration des théorèmes de M. Schläfli*) sur la réalité des plans des triangles formés par trois droites de la surface.

1re et 2^{me} species. Aucune des 4 ou 3 nappes ne peut se diviser en deux nappes d'ordre impair (n° 21.). Un cône circonscrit dont le sommet est placé sur une des 27 ou 15 droites a donc cette droite pour génératrice isolée, ou pour génératrice de connexion de deux nappes. On voit donc que par chacune des droites réelles de la surface passent 5 *(1re species)* ou 3 *(2^{me} species)* plans de triangle, et que toutes les droites de ces plans sont réelles. On trouve ainsi 45 ou 15 plans réels.

3^{me} species. Si la génératrice double d'un cône circonscrit dont le sommet est placé sur une des 7 droites de la surface, est une génératrice isolée ou génératrice de connexion de 2 nappes du cône, un seul plan de triangle passe par elle. Si, au contraire, la génératrice est droite d'intersection de deux nappes d'ordre impair, tous les 5 plans de triangle qui passent par elle sont réels, et dans 3 de ces plans toutes les droites sont réelles (voir 21.). La droite rencontre dans le premier cas seulement 2 autres droites de la surface, dans le dernier, toutes les six autres droites. Le plan d'un triangle formé par trois droites réelles, est donc rencontré par toutes les autres 4 droites en des points d'une seule de ces trois droites. On voit ainsi que *tous les plans de triangle passent par une seule droite, et qu'il y en a 5*, dont les deux contiennent des couples de droites imaginaires.

4^{me} species. Comme les cônes quartiques circonscrits n'ont plus des nappes externes l'une à l'autre, on ne trouve pas ici des cônes ayant une génératrice de connexion, ni non plus des cônes ayant une génératrice isolée; car par celle-ci, s'il y en avait, on ne pourrait mener des plans tangents réels. Les seuls cônes à génératrice double qu'on trouve ici ont une nappe composée de deux nappes d'ordre impair. Une autre nappe se trouve du côté qui devient l'interne si le sommet s'éloigne de la droite. *Par chacune des 3 droites réelles de la surface passent donc 5 plans de triangles*, dont les quatre contiennent

des couples de droites imaginaires. Il y a, en tout, 13 plans de triangle réels.

5^me^ species. Ce cas est analogue au précedent. Comme le cône n'a plus aucune nappe interne, seulement *3 plans de triangle passent par chacune des 3 droites réelles de la surface:* deux de ces 3 plans contiennent des couples de droites imaginaires. Le nombre total des plans de triangle réels est 7.

15 octobre 1873.

Ueber den grössten gemeinsamen Factor.

Von Gordan in Giessen.

Herr Brill hat (Annalen IV. Bd. S. 530) einen Determinantensatz veröffentlicht, dessen Illustration der Gegenstand dieser Untersuchung sein soll. Ich will ihn hier dazu benutzen, um einige Eigenschaften des grössten gemeinsamen Factors zweier Functionen einer Veränderlichen herzuleiten.

Der Brill'sche Satz kann folgendermassen ausgedrückt werden:

„I. Es seien:

rn Grössen x_{ik} und sn Grössen u_{ik}

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{s1} & u_{s2} & \dots & u_{sn} \end{vmatrix}$$

gegeben, wo wir r und s so wählen, dass:

$$r + s = n$$

ist. Zwischen diesen n^2 Grössen mögen rs Relationen:

$$(1) \qquad u_{k1} x_{i1} + u_{k2} x_{i2} \dots \dots u_{kn} x_{in} = 0$$

bestehen. Die r-reihigen Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_{1 i_1} & x_{1, i_2} & \dots & x_{1, i_r} \\ x_{2, i_1} & \cdot & \cdot & x_{2, i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r, i_1} & \cdot & \cdot & x_{r, i_r} \end{vmatrix} = (i_1, i_2 \dots i_r)_x$$

des Systems der x sind alsdann den s-reihigen Determinanten

$$(k_1 k_2 \dots k_s)_u$$

des Systems der u proportional, welche ihnen der Art entsprechen, dass die Indices:

$$i_1 i_2 \dots i_r k_1 \dots k_s$$

eine Permutation der Zahlen:

$$1 2 \dots n$$

bilden."

Wir wollen aus diesem Brill'schen Satze einen andern herleiten, indem wir zunächst die sn Grössen u_{ik} durch die Coefficienten c_{ik} von r Functionen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \psi_1 = c_{1,n}x^{n-1} + c_{1,n-1}x^{n-2} \ldots\ldots c_{11} \\ \psi_2 = c_{2,n}x^{n-1} + c_{2,n-1}x^{n-2} \ldots\ldots c_{2,1} \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_s = c_{s,n}x^{n-1} + c_{s,n-1}x^{n-2} \ldots\ldots c_{s,1}, \end{cases}$$

sodann aber die rn-Grössen x_{ik}

$$x_{i,k} = \pi_i^{k-1}$$

durch die Potenzen von r Grössen:

$$\pi_1; \quad \pi_2; \ldots \pi_r$$

ersetzen. Wir erhalten durch diese Einsetzung folgenden neuen Satz:

„II. Haben die s-Gleichungen:

$$\psi_1 = 0 \ldots\ldots \psi_s = 0$$

die r Wurzeln:

$$\pi_1, \quad \pi_2 \ldots \pi_r$$

gemein, so sind die r reihigen Determinanten $(i_1, i_2 \ldots\ldots i_r)_\pi$ des Potenzensystems:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \pi_1^2 & \ldots & \pi_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_r & \pi_r^2 & \ldots & \pi_r^{n-1} \end{vmatrix}$$

(wo $\begin{vmatrix} \pi_1^{i_1-1} & \ldots & \pi_1^{i_r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_r^{i_1-1} & \ldots & \pi_r^{i_r-1} \end{vmatrix} = (i_1 \ldots i_r)_\pi$ gesetzt ist) den s-reihigen Determinanten $(k_1, k_2 \ldots k_s)_c$ des Coefficientensystems:

$$\begin{vmatrix} c_{k_1 1} & \ldots\ldots & c_{k_1 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k_s 1} & \ldots\ldots & c_{k_s n} \end{vmatrix}$$

proportional, welche ihnen so entsprechen, dass:

$$i_1 i_2 \ldots i_r k_1 \ldots k_s$$

eine Permutation der Zahlen $1 \ldots n$ ist."

Zunächst will ich den Brill'schen Satz in dieser zweiten Form dazu anwenden, um gewisse bekannte Relationen zwischen den Coefficienten und Wurzeln *einer* Gleichung herzustellen.

Die Gleichung:

$$f = a_\mu x^\mu + a_{\mu-1}x^{\mu-1} \ldots a_0$$

möge die Wurzeln:

$$\pi_1, \quad \pi_2 \ldots \pi_\mu$$

besitzen. Setzt man im Satze II. $n = \mu + 1$; $r = \mu$; $s = 1$ und ersetzt man ψ_1 durch f, so gelangt man zu folgendem Satze:

„III. Die Coefficienten

$$a_{i_{\mu+1}}$$

einer Gleichung $f = 0$ sind den μ reihigen Determinanten $(i_1, i_2 \ldots i_\mu)$ des Grössensystems:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \ldots\ldots & \pi_1^{\mu} \\ 1 & \pi_2 & \ldots\ldots & \pi_2^{\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 1 & \pi_\mu & \ldots\ldots & \pi_\mu^{\mu} \end{vmatrix}$$

proportional multiplicirt mit $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl der Inversionen der Permutation:

$$i_1, i_2 \ldots\ldots i_{\mu+1}$$

grade oder ungrade ist.“ —

Etwas verwickeltere Beziehungen zwischen den Coefficienten α und den Wurzeln π kann man folgendermassen erhalten. — Ersetzt man in dem Satze II. die Functionen ψ durch die Functionen

$$f,\ xf,\ x^2 f, \ldots\ldots x^{\mu-1} f,$$

so gelangt man zu dem folgenden Satz:

„IV. Die μ-reihigen Determinanten $(i_1 \ldots\ldots i_\mu)_\pi$ des Systems der Wurzeln sind den ν-reihigen Determinanten $(i_{\mu+1} \ldots\ldots i_{\mu+\nu})_a$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu+1} & \ldots\ldots & a_0 & 0 & \ldots\ldots \\ 0 & a_\mu & \ldots\ldots & a_0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & a_\mu & \ldots\ldots & a_0 \end{vmatrix}$$

proportional.“

Für $\nu = 1$ geht dieser Satz in den vorigen über.

Ist in dem vorigen Satze $\mu = 1$, also:

$$f = a_1 x + a_0$$

so werden die Determinanten des Systems:

$$1\ \pi_1\ \pi_1^2 \ldots\ldots \pi_1^{\nu}$$

denen des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & a_1 & a_0 & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

proportional. Hieraus lässt sich leicht der folgende Satz ableiten:

V. „Die Potenzen:

$$1\, x\, x^2 \ldots . x^\mu$$

sind den μ-reihigen Determinanten des Systems:

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & -x & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -x & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1-x \end{vmatrix}$$

gleich."

Aus dem Satze IV. lassen sich Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln *mehrerer* Gleichungen ableiten.

Die Gleichungen

$$f = a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} \ldots . a_0$$
$$\varphi = b_\nu x^\nu + b_{\nu-1} x^{\nu-1} \ldots . b_0$$

mögen die Wurzeln haben:

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu; \quad \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu$$

Die Determinanten:

$$(i_1\, i_2 \ldots . i_\nu)_a \text{ und } (i_{\nu+1}\, i_{\nu+2} \ldots i_{\mu+\nu})_b$$

sind dann nach Satz IV. den Determinanten:

$$(i_{\nu+1}\, i_{\nu+2} \ldots . i_{\mu+\nu})_\alpha \text{ und } (i_1\, i_2 \ldots . i_\nu)_\beta$$

proportional, die Proportionalitätsfactoren haben die Werthe:

$$\frac{\begin{vmatrix} a_\mu & \ldots & a_{\mu-\nu+1} \\ 0 & a_\mu & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & a_\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{\mu-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_\mu & \ldots & \alpha_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}} = \frac{a^\nu}{\Pi(\alpha_i - \alpha_k)} \text{ und } \frac{b_\nu^\mu}{\Pi(\beta_i - \beta_k)}$$

und man hat also die Identität:

$$\Sigma(i_1 \ldots i_\nu)_a \cdot (i_{\nu+1} \ldots i_{\mu+\nu})_b = \frac{a_\mu^\nu\, b_\nu^\mu}{\Pi(\alpha_i - \alpha_k)\, \Pi(\beta_i - \beta_k)} \Sigma(i_1 \ldots i_\nu)_\beta (i_{\nu+1} \ldots i_{\mu+\nu})_\alpha .$$

Nun ist nach dem Zerlegungssatz einer Determinante in Partialdeterminanten-Producte:

$$T = \begin{vmatrix} a_\mu \ldots\ldots a_0\, 0 \ldots 0 \\ 0\ a_\mu \ldots\ldots a_0 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_\mu \ldots a_0 \\ b_\nu \ldots\ldots b_0\, 0 \ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots b_\nu \ldots b_0 \end{vmatrix} = \Sigma_i (i_1 \ldots i_\nu)_a \cdot (i_{\nu+1} \ldots i_{\mu+\nu})_b$$

$$\begin{vmatrix} 1\ \alpha_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_1^{\mu+\nu-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1\ \alpha_\mu \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_\mu^{\mu+\nu-1} \\ 1\ \beta_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \beta_1^{\mu+\nu-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1\ \beta_\nu \ldots\ldots\ldots\ldots \beta_\nu^{\mu+\nu-1} \end{vmatrix} = \Sigma_i (i_1 \ldots i_\nu)_\beta (i_{\nu+1} \ldots i_{\mu+\nu})_\alpha$$

$$= \Pi(\alpha_i - \alpha_k)\, \Pi(\beta_i - \beta_k)\, \Pi(\alpha_i - \beta_k)$$

mithin ist:

$$T = a_\mu^\nu\, b_\nu^\mu\, \Pi(\alpha_i - \beta_k)$$

In ähnlicher Weise, wie wir so eben die Determinante T aus den Coefficienten zweier Gleichungen zusammengesetzt haben, kann man auch Determinanten aus denen von mehr Gleichungen bilden.

Wir wollen uns hier auf die Untersuchung von 3 Gleichungen

$$f = a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} \ldots\ldots\ldots a_0 = 0$$
$$\varphi = b_\nu x^\nu + b_{\nu-1} x^{\nu-1} \ldots\ldots\ldots b_0 = 0$$
$$\psi = c_\varrho x^\varrho + c_{\varrho-1} x^{\varrho-1} \ldots\ldots\ldots c_0 = 0$$

beschränken, und ihre Wurzeln durch:

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu; \quad \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu; \quad \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_\varrho$$

bezeichnen. Wir bilden aus ihnen das System der Formeln:

$$f = 0; \quad xf = 0; \ldots\ldots x^{N-\mu-1} f = 0$$
$$\varphi = 0; \quad x\varphi = 0; \ldots\ldots x^{N-\nu-1} \varphi = 0$$
$$\psi = 0; \quad x\psi = 0; \ldots\ldots x^{N-\varrho-1} \psi = 0$$

welche linear in den N Potenzen sind:

$$1,\ x,\ x^2 \ldots\ldots x^{N-1}$$

und wählen N so, dass die Anzahl unserer Formeln ebenfalls N ist, also:

$$N = N - \mu + N - \nu + N - \varrho = \frac{\mu + \nu + \varrho}{2}$$

Die Determinante unseres Systems:

$$S = \begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & a_{\mu-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & 0_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_\mu & a_{\mu-1} & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & b_\nu & b_{\nu-1} & b_0 \\ c_\varrho & c_{\varrho-1} & c_{\varrho-2} & \dots & c_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & c_\varrho & c_{\varrho-1} & c_0 \end{vmatrix}$$

kann folgendermassen transformirt werden.

Nach Satz III. sind den $(N-\mu)$-reihigen Determinanten $(i_1 i_2 \dots i_{N-\mu})_a$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

den μ-reihigen Determinanten $(i_{N-\mu+1}, i_{N-\mu+1} \dots i_N)_\alpha$ des Systems

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \dots & \alpha_1^{N-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \dots & \alpha_2^{N-1} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \alpha_\mu & \alpha_\mu^2 & \dots & \dots & \alpha_\mu^{N-1} \end{vmatrix}$$

proportional, der Proportionalitätsfactor ist:

$$\frac{a_\mu^{N-\mu}}{\Pi(\alpha_i - \alpha_k)}.$$

Ordnet man nun S nach Producten von Unterdeterminanten der $N-\mu$ 1^{ten} Zeilen, trägt für diese ihre Werthe ein und wendet sodann den Multiplicationssatz an, so entsteht die Formel:

$$S \cdot \Pi(\alpha_i - \alpha_k) = a_\mu^{N-\mu} \begin{vmatrix} \alpha_1^{N-\nu-1}\varphi(\alpha_1) & \alpha_1^{N-\nu-2}\varphi(\alpha_1) \dots \varphi(\alpha_1) & \alpha_1^{N-\varrho-1}\psi(\alpha_1) & \alpha_1^{N-\varrho-2}\psi(\alpha_2) \dots \psi(\alpha_2) \\ \alpha_2^{N-\nu-1}\varphi(\alpha_2) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_\varrho^{N-\nu-1}\varphi(\alpha_\varrho) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Ordnet man diese Determinante nach Producten von Unter-Determinanten aus den $N-\nu$ ersten und $N-\varrho$ letzten Colonnen, so wird:

$$S \cdot \Pi(\alpha_i - \alpha_k) = a_\mu^{N-\mu} \Sigma \varphi(\alpha_{i_1}) \varphi(\alpha_{i_2}) \ldots \varphi(\alpha_{i_{N-\nu}}) \psi(\alpha_{i_{N-\nu+1}}) \ldots \psi(\alpha_{i_\varrho}) \cdot$$

$$\tau \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{i_1} & \alpha_{i_1}^2 & \ldots & \alpha_{i_1}^{N-\nu-1} \\ 1 & \alpha_{i_2} & \alpha_{i_2}^2 & \ldots & \alpha_{i_2}^{N-\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{i_{N-\nu}} & \alpha_{i_{N-\nu}}^2 & \ldots & \alpha_{i_{N-\nu}}^{N-\nu-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{i_{N-\nu+1}} & \ldots & \alpha_{i_{N-\nu+1}}^{N-\varrho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{i_\varrho} & \ldots & \alpha_{i_\varrho}^{N-\varrho-1} \end{vmatrix}$$

wo die Summation sich über alle Combinationen $i_1, i_2 \ldots i_{N-\nu}$ der Zahlen $1 \ldots \mu$ erstreckt und τ das Vorzeichen $+1$ oder -1 bedeutet, ja nachdem die Permutation $i_1 \cdots i_\varrho$ eine grade oder ungrade Anzahl Inversionen besitzt.

Die Determinanten rechter Hand sind gleich Producten von Differenzen der α; hebt man dieselben gegen das Product linker Hand weg, so wird:

$$(4^a) \qquad S = a_\mu^{N-\mu} \Sigma_i \frac{\varphi(x) \cdot \cdots \cdot \varphi(\alpha_{i_{N-\nu}}) \, \psi(\alpha_{i_{N-\nu+1}}) \cdot \cdots \cdot \psi(\alpha_{i_\mu})}{\prod_{r=1}^{1=N-\nu} \prod_{s=N-\nu+1}^{s=\mu} (\alpha_{i_r} - \alpha_{i_s})} \tau \cdot$$

In ähnlicher Weise kann man die beiden andern Formeln ableiten:

$$(4^b) \quad S = (-1)^{(N-1)(N-\mu)} b_\nu^{N-\nu} \Sigma_i \frac{\psi(\beta_{i_1}) \cdots \psi(\beta_{i_{N-\varrho}}) f(\beta_{i_{N-\varrho+1}}) \cdots f(\beta_{i_\nu})}{\prod_{r=1}^{r=N-\varrho} \prod_{s=N-\varrho+1}^{s=\nu} (\beta_{i_r} - \beta_{i_s})} \tau$$

$$(4^c) \quad S = (-1)^{(N-1)\varrho} c_\varrho^{N-\varrho} \Sigma_i \frac{f(\gamma_{i_1}) \cdots f(\gamma_{i_{N-\mu}}) \, \varphi(\gamma_{i_{N-\mu+1}}) \cdots f(\gamma_{i_\varrho})}{\prod_{r=1}^{r=N-\mu} \prod_{s=N-\mu+1}^{s=\varrho} (\gamma_{i_r} - \gamma_{i_s})} \tau \cdot$$

Wir wollen nun die Voraussetzung machen, dass die Formeln f und φ die λ Wurzeln:

$$\pi_1, \; \pi_2 \ldots \ldots \pi_\lambda$$

gemeinsam haben und dass dieselben mit den Wurzeln:

$$\alpha_\mu, \; \alpha_{\mu-1} \ldots \ldots \alpha_{\mu-\lambda+1}$$

von f und:

$$\beta_\nu, \; \beta_{\nu-1} \ldots \ldots \beta_{\nu-\lambda+1}$$

von φ übereinstimmen, dass also die Ausdrücke:

$$f(\pi_1) \ldots f(\pi_\lambda), \quad \varphi(\pi_1) \ldots \varphi(\pi_\lambda)$$

identisch verschwinden.

Wir wollen zwei Fälle untersuchen, in denen:

$$\lambda > \frac{\mu + \nu - \varrho}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{\mu + \nu - \varrho}{2}$$

ist. — Im ersten Falle verschwinden in der Formel (4^a) alle Glieder rechter Hand, da in der Zahlenreihe:

$$i_1, \; i_2 \ldots \ldots i_{N-\nu}$$

mindestens eine der Zahlen:

$$\mu,\ \mu-1\ldots\mu-\lambda+1$$

vorkommt, also mindestens einer der Factoren:

$$\varphi(\alpha_{i_1})\ldots\ldots\varphi(\alpha_{i_{N-\nu}})$$

verschwindet. — Hieraus folgt der Satz:

VI. „Haben die Gleichungen f und φ mehr als:

$$\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$$

Wurzeln gemein, so verschwindet die Determinante S für beliebige Werthe der Coefficienten c. Es verschwinden dann die ϱ-reihigen Determinanten des Systems:

$$\begin{array}{l}
a_\mu\ a_{\mu-1}\ldots\ldots a_0\ 0\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0\\
0\ \ a_\mu\ldots\ldots\ a_0\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0\ \ 0\ldots\ldots\ 0\ a_\mu\ a_{\mu-1}\ldots\ldots\ldots a_0\\
b_\nu\ b_{\nu-1}\ldots\ldots\ldots b_0\ 0\ldots\ldots\ldots 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0\ \ 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ b_\nu\ b_{\nu-1}\ldots b_0
\end{array}$$

(Man kann diesen Satz auch direct beweisen.)

In dem zweiten Falle, wo:

$$\lambda=\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$$

ist, verschwinden alle Glieder rechter Hand, bei denen die Combination

$$i_1,\ i_2\ldots\ldots i_{N-\nu}$$

eine der Zahlen: $\mu,\ \mu-1,\ \mu-2\ldots\mu-\lambda+1$ enthält, es bleibt also nur das Glied übrig, wo die Combination:

$$i_1,\ i_2\ldots i_{N-\nu}$$

mit der Combination

$$1,\ 2\ldots\ldots N-\nu$$

übereinstimmt. Statt der Formel II. haben wir in diesem Falle die Relation:

$$S=a_\mu^{N-\mu}\,\frac{\varphi(\alpha_1)\cdots\cdots\varphi(\alpha_{N-\lambda})\,\psi(\alpha_{N-\lambda+1})\cdots\cdots\psi(\alpha_\mu)}{\prod_{r=1}^{r=N-\nu}\ \prod_{s=N-\lambda+1}^{s=\mu}(\alpha_r-\alpha_s)}$$

oder:

$$(5)\qquad S=a_\mu^{N-\mu}\,\frac{\varphi(\alpha_1)\cdots\varphi(\alpha_{N-\lambda})\,\psi(\pi_1)\cdots\cdots\psi(\pi_{\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}})}{\prod_{r=1}^{r=N-\nu}\ \prod_{s=1}^{s=\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}}(\alpha_r-\pi_s)}.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

VII. „Die Determinante S verschwindet in 2 Fällen:

1. Wenn f und φ mehr als $\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$ Wurzeln gemein haben.

2. Wenn f und φ $\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$ Wurzeln gemein haben und eine dieser Wurzeln ψ befriedigt."

Der zweite Theil lässt sich sehr leicht direct nachweisen.

Die obigen Formeln geben uns die Mittel an die Hand, den grössten gemeinsamen Factor:

$$\Theta = \Theta_\lambda x^\lambda + \Theta_{\lambda-1} x^{\lambda-1} \ldots\ldots \Theta_0 = \Theta_\lambda (x-\pi_1)(x-\pi_2)\ldots(x-\pi_\lambda)$$

der Functionen f und φ zu berechnen.

Zunächst erhält man Relationen zur Bestimmung der Coefficienten Θ_i mit Hülfe des Satzes IV. Nach demselben sind die ϱ-reihigen Determinanten $(i_1, i_2 \ldots i_\varrho)_\Theta$ des Systemes:

$$\begin{vmatrix} \Theta_\lambda & \Theta_{\lambda-1} & \ldots & \Theta_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Theta_\lambda & \ldots & \ldots & \Theta_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \Theta_\lambda & \ldots & \Theta_0 \end{vmatrix}$$

der Coefficienten der Formeln:

$$(6^a) \qquad \Theta = 0; \quad x\Theta = 0 \ldots\ldots x^{\varrho-1}\Theta = 0$$

den $N-\varrho$-reihigen Determinanten $(i_{\varrho+1} \ldots i_N)$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \ldots & \pi_1^{N-1} \\ 1 & \pi_2 & \ldots & \pi_2^{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_{N-\varrho} & \ldots & \pi_{N-\varrho}^{N-1} \end{vmatrix}$$

proportional. Nach Satz II. sind nun die ϱ-reihigen Determinanten $(i_1 \ldots i_\varrho)_{ab}$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_\mu & \ldots & \ldots & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_\nu & \ldots & \ldots & b_0 \end{vmatrix}$$

der Formeln:

$$(6^b) \quad f=0;\ xf=0 \ldots x^{N-\mu-1}f=0;\ \varphi=0;\ x\varphi=0 \ldots\ldots x^{N-\nu-1}\varphi=0$$

gleichfalls den Determinanten $(i_{\varrho+1} \ldots i_N)_\pi$ proportional, mithin auch den Determinanten $(i_1 \ldots i_\varrho)_\Theta$. Aus diesen Proportionen lassen sich die Grössen Θ bestimmen. Man kann diese Relationen auch daraus folgern, dass das Formelsystem (6^b) eine lineare Folge des Systems (6^a) ist.

Um Θ direct zu berechnen, ersetze man die Gleichung $\psi = 0$ durch die Gleichung

$$x - \xi = 0,$$

die Determinante S geht durch diese Substitution in die Determinante:

$$S_1 = 0 \left| \begin{array}{cccccccccccccc} a_\mu & a_{\mu-1} & a_{\mu-1} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & & \cdots & b_0 & 0 & & & & & & & 0 \\ \cdots & & & & & & & & & & & & \\ \cdots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & \cdots & & & & & & & & & b_0 \\ 0 & 0 & & \cdots & & 1 & -\xi & 0 & & \cdots & & & 0 \\ & & & \cdots & & 0 & 1 & -\xi & & \cdots & & & \\ \cdots & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & -\xi \end{array} \right|$$

über. Derselbe hat nach F. (5) den Werth:

$$S_1 = a_\mu^{N-\mu} \frac{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})(\pi_1-\xi)(\pi_2-\xi)\cdots(\pi_\lambda-\xi)}{\prod(\alpha_r-\pi_s)}$$

$$(7) \qquad S_1 = \frac{(-1)^\lambda}{\Theta_\lambda} a_\mu^{N-\mu}\, \Theta(\xi)\, \frac{\varphi(\alpha_1)\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})}{\prod(\alpha_r-\pi_s)}$$

ist also dem grössten gemeinsamen Factor von f und φ proportional. — Man kann ihr nach Satz V. die Form geben:

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{cccccccc} a_\mu x^\lambda + a_{\mu-1}x^{\lambda-1} & \cdots & a_{\mu-\lambda} & a_{\mu-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_\mu x^{\lambda-1} & \cdots & a_{\mu-\lambda+1} & a_{\mu-2} & \cdots & a_0 & & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ & & & & & & & & a_0 \\ b_\nu x^\lambda + b_{\nu-1}x^{\lambda-1} & \cdots & b_{\nu-\lambda} & b_{\nu-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_\nu x^{\lambda-1} & \cdots & b_{\nu-\lambda+1} & b_\nu & \cdots & b_0 & & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ \cdots & & & & & & & & \\ & & & & & & & & b_0 \end{array} \right| = S_1 .$$

Wir sind oben, um die Resultante zweier Functionen f und φ vom m^{ten} und n^{ten} Grade zu bilden, von dem Formelsystem:

$$(9) \quad f=0;\ xf=0 \ldots . x^{n-1}f=0;\ \varphi=0;\ x\varphi=0 \ldots \ldots . x^{m-1}\varphi=0$$

ausgegangen, und haben die Determinante T ihrer Coefficienten gebildet. Man kann nun, ohne den Werth T zu ändern, Combinationen dieser Formeln einführen. (Vgl. Baltzers Determinanten. 3. Aufl. S. 169.)

Wählen wir $n \geqq m$ und bezeichnen wir den Quotienten:

$$(10) \qquad F(x,y) = \frac{f(x)\varphi(y) - \varphi(x)f(y)}{x-y} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\, x_y^{i-1\,k-1},$$

so werden erstens die Coefficienten c_{ik} und c_{ki} einander gleich.

Ferner werden die Gleichungen:

$$(11) \qquad \begin{cases} \psi_1 = c_{1,n-1}x^{n-1} + c_{1,n-2}x^{n-2} \ldots\ldots\ldots c_{11} = 0 \\ \psi_2 = c_{2,n-1}x^{n-1} + c_{2,n-2}x^{n-2} \ldots\ldots\ldots c_{21} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_n = c_{n,n-1}x^{n-1} + c_{n,n-2}x^{n-2} \ldots\ldots\ldots c_{n1} = 0 \end{cases}$$

Combinationen der Formeln (9) und werden wie diese durch die gemeinsamen Wurzeln:

$$\pi_1,\ \pi_2 \ldots\ldots \pi_\lambda$$

von f und φ befriedigt; endlich ist die Determinante:

$$(12) \qquad R = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots\ldots & c_{1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots\ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & \cdot & \ldots\ldots & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

gleich der Resultante T von f und φ.

Die Partialdeterminanten dieser Determinante sind:

$$\frac{\partial_\lambda R}{\partial c_{i_1,k_1}\partial c_{i_2,k_2}\cdots\partial c_{i_\lambda,k_\lambda}} = \varepsilon \begin{vmatrix} c_{i_{\lambda+1},k_{\lambda+1}} & \ldots\ldots & c_{i_{\lambda+1},k_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{i_n,k_{\lambda+1}} & \ldots\ldots & c_{i_n,k_n} \end{vmatrix}$$

wo $i_1\, i_2 \ldots i_n$; $k_1 \ldots k_n$ irgend welche Permutationen der Zahlen $1 \ldots n$ bedeuten und ε die Zahl $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl der Inversionen in diesen beiden Permutationen zusammen grade oder ungrade ist. — Ich will diese Partialdeterminanten durch

$$\binom{i_1\, i_2 \ldots i_\lambda}{k_1\, k_2 \ldots k_\lambda}_c = \binom{k_1 k_2 \ldots k_\lambda}{i_1\, i_2 \ldots i_\lambda}_c$$

bezeichnen.

Da die Wurzeln π die Gleichungen (11) befriedigen, so folgt aus Satz II., dass die Determinanten $\binom{i_1\, i_2 \ldots i_\lambda}{k_1 k_2 \ldots k_\lambda}_c$ aus den Coefficienten der $n - \lambda$ Formeln $\psi_{k_{\lambda+1}} \ldots \psi_{k_n}$ den Determinanten $(i_1 i_2 \ldots i_\lambda)_\pi$ (vgl. Satz II.) proportional sind, dass also der Quotient:

$$\frac{\binom{i_1\, i_2 \ldots i_\lambda}{k_1 k_2 \ldots k_\lambda}_c}{(i_1\, i_2 \ldots i_\lambda)_\pi}$$

von der Indices i unabhängig ist. — Da aus dem nämlichen Grunde der Quotient:

$$\frac{\binom{k_1 k_2 \ldots . k_\lambda}{i_1 i_2 \ldots . i_\lambda}_c}{(k_1 k_2 \ldots . k_\lambda)_\pi}$$

von den Indices k unabhängig ist, so folgt hieraus, dass der Quotient:

$$\frac{\binom{i_1 \ldots . i_\lambda}{k_1 \ldots . k_\lambda}_c}{(i_1 \ldots . i_\lambda)_\pi (k_1 \ldots . k_\lambda)_\pi}$$

von den Indices i und k unabhängig ist. Dieser Quotient hat den Werth:

$$\frac{\binom{1\,2 \ldots \lambda}{1\,2 \ldots \lambda}_c}{(1 \ldots . \lambda)_\pi^2} = \frac{\binom{1\,2 \ldots \lambda}{1\,2 \ldots \lambda}_c}{\Pi(\pi_i - \pi_k)^2} = C, \tag{13}$$

wir wollen ihn durch C bezeichnen und gelangen so zu dem Formelsystem:

$$\binom{i_1 \ldots . i_\lambda}{k_1 \ldots . k_\lambda}_c = C(i_1 \ldots . i_\lambda)_\pi (k \ldots . k_\lambda)_\pi. \tag{14}$$

Um diese Formeln in eine einzige zusammenzuziehen, führe ich 2λ neue Functionen ein:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= p_{1,n} x^{n-1} + p_{1,n-1} x^{n-2} \ldots . p_{11} \\
P_2(x) &= p_{2,n} x^{n-1} + p_{2,n-1} x^{n-2} \ldots . p_{21} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_\lambda(x) &= p_{\lambda,n} x^{n-1} + p_{\lambda,n-1} x^{n-2} \ldots . p_{\lambda,1} \\
Q_1(x) &= q_{1,n} x^{n-1} + q_{1,n-1} x^{n-2} \ldots . q_{11} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_\lambda(x) &= q_{\lambda,n} x^{n-1} + q_{\lambda,n-1} x^{n-2} \ldots . q_{\lambda,1}
\end{aligned}$$

und transformire die Determinante:

$$U = \begin{vmatrix}
c_{11} \ldots . c_{1n}\, p_{11} \ldots . p_{\lambda 1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{n1} \ldots . c_{nn}\, p_{1n} \ldots . p_{\lambda n} \\
q_{11} \ldots . q_{1n}\; 0 \ldots . 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_{\lambda 1} \ldots . q_{\lambda n}\; 0 \ldots . 0
\end{vmatrix}. \tag{15}$$

Man kann für dieselbe leicht den Werth finden:

$$U = \Sigma \binom{i_1\, i_2 \ldots . \, i_\lambda}{k_1 k_2 \ldots . \, k_\lambda}_c (i_1\, i_2 \ldots i_\lambda)_p \, (k_1\, k_2 \ldots k_\lambda)_q ,$$

wo sich die Summe über alle Combinationen $i_1 \ldots . \, i_\lambda$, $k_1 \ldots . \, k_\lambda$ der Zahlen $1 \ldots . \, n$ erstreckt. — Nach Formel (14) erhalten wir demnach:

$$(16)\quad U = C\, \Sigma_i (i_1\, i_2 \ldots i_\lambda)_\pi (i_1 i_2 \ldots i_\lambda)_p \; \Sigma_k (k_1 \ldots . \, k_\lambda)_p \, (k_1 \ldots . \, k_\lambda)_\pi .$$

Nun ist nach dem Multiplikationssatze:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \ldots . & \pi_1^{n-1} \\ 1 & \pi_2 & \ldots . & \pi_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_\lambda & \ldots . & \pi_\lambda^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots . & p_{1,n-1} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots . & p_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{\lambda 1} & p_{\lambda 2} & \ldots . & p_{\lambda, n-1} \end{vmatrix} = \Sigma_i (i_1 i_2 \ldots i_\lambda)_\pi (i_1 \ldots i_\lambda)_p$$

$$= \begin{vmatrix} P_1(\pi_1) & P_1(\pi_2) & \ldots . & P_1(\pi_\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_\lambda(\pi_1) & \ldots . & \ldots . & P_\lambda(\pi_\lambda) \end{vmatrix}$$

und ebenso:

$$\Sigma_k (k_1 \ldots k_\lambda)_\pi (k_1 \ldots k_\lambda)_q = \Sigma \pm Q_1(\pi_1) \ldots . \, Q_\lambda(\pi_\lambda) ,$$

mithin:

$$(17)\quad U = C\, \Sigma \pm P_1(\pi_1) \ldots . \, P_\lambda(\pi_\lambda) \; \Sigma \pm Q_1(\pi_1) \ldots . \, Q_\lambda(\pi_\lambda) .$$

Um den grössten gemeinsamen Factor:

$$\Theta(x) = \Theta_\lambda x^\lambda \ldots . \, \Theta_0$$

zu erhalten, gehe ich von der Relation aus:

$$\Theta(x) \cdot \Pi(\pi_i - \pi_k) = \Theta_\lambda \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots . & x^\lambda \\ 1 & \pi_1 & \ldots . & \pi_1^\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_\lambda & \ldots . & \pi_\lambda^\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \Theta_\lambda \left[(2,3 \ldots \lambda+1)_\pi - x\,(1,3,4 \ldots \lambda+1)_\pi \ldots . \ldots . (-1)^\lambda \, (1,2,3 \ldots \lambda)_\pi x^\lambda \right]$$

und wende darauf die Formel (14) an. Es wird dann:

$$\frac{1}{\Theta_\lambda} C(1 \ldots . \lambda)_\pi \Theta(x) \Pi(\pi_i - \pi_k)$$
$$= \binom{1 \ldots . \lambda+1}{1 \ldots . \lambda}_c - x \binom{1\,2 \ldots \lambda+1}{1\,2 \ldots \lambda}_c \ldots . + (-1)^\lambda \binom{1\,2 \ldots \lambda+1}{1\,2 \ldots \lambda}_c x^\lambda,$$

also nach Formel (13):

$$\frac{1}{\Theta_\lambda} (1 \ldots \lambda)_c (1 \ldots \lambda)_\pi \Theta(x)$$
$$= \begin{vmatrix} c_{\lambda+1,\lambda+1} x^\lambda + c_{\lambda+1,\lambda} x^{\lambda-1} \ldots . c_{\lambda+1,1} & c_{\lambda+1,\lambda+2} & c_{\lambda+1,\lambda+3} \ldots . c_{\lambda+1,n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ c_{n,\lambda+1} \quad x^\lambda + c_{n,\lambda} \quad x^{\lambda-1} \ldots . c_{n,1} & c_{n,\lambda+2} & c_{n,\lambda+3} \quad \ldots . c_{n,n} \end{vmatrix};$$

mithin stellt die Determinante rechter Hand den grössten gemeinsamen Factor von f und φ dar. In ähnlicher Weise kann man viele Determinanten bilden, welche dem Θ proportional sind, man kann alle diese Bildungen in eine einzige Formel zusammen fassen.

Um dieselbe zu erhalten, führe ich $n - \lambda = \mu$ neue Variable:

$$x_1, \; x_2 \ldots x_\mu$$

ein und bilde die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 \; x_1 \ldots . x_1^{n-1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1 \; x_\mu \ldots . x_\mu^{n-1} \\ 1 \; \pi_1 \ldots . \pi_1^{n-1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1 \; \pi_\lambda \ldots . \pi_{\lambda-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \Pi(x_i - x_k) \Pi(\pi_i - \pi_k) \Pi(x_i - \pi_k) = \frac{1}{\Theta_\lambda^\mu} \Pi(x_i - x_k) \Pi(\pi_i - \pi_k) \Pi\Theta(x_i).$$

Ordnet man sie nach Producten von Partialdeterminanten, so erhält man für sie die Summe:

$$\Sigma_i \varepsilon(i_1 \, i_2 \ldots i_\mu)_x (i_{\mu+1} \ldots i_n)_\pi,$$

welche sich über alle Combinationen $i_1 \ldots i_\mu$ von $1 \ldots n$ erstreckt und worin ε das Vorzeichen bedeutet, welches in bekannter Weise von der Permutation der i abhängt.

So entsteht die Formel:

$$\Theta_\lambda^\mu \Sigma_i \varepsilon(i_1 \ldots i_\mu)_x (i_{\mu+1} \ldots . i_n)_\pi = \Pi(x_i - x_k) \Pi(\pi_i - \pi_k) \Pi\Theta(x_i)$$

und wenn man μ neue Variable

$$y_1, y_2 \ldots . y_\mu$$

einführt, auch:

$$\Theta_\lambda^\mu \Sigma_k \varepsilon (k_1 \ldots k_\mu)_y (k_{\mu+1} \ldots . k_n)_\pi = \Pi(y_i - y_k) \Pi(\pi_i - \pi_k) \Pi\Theta(y_i).$$

Multiplicirt man diese beiden Formeln mit einander und wendet die Formel (14) an, so wird:

$$\Theta_\lambda^{2\mu} \Sigma \varepsilon \binom{i_{\mu+1}\ i_{\mu+2} \cdots i_n}{k_{\mu+1}\ k_{\mu+2} \ldots k_n}_c (i_1 \ldots i_\mu)_x (k_1 \ldots k_\mu)_y$$
$$= C \Pi(x_i - x_k) \Pi(y_i - y_k) \Pi(\pi_i - \pi_k)^2 \Pi\Theta(x_i) \Theta(y_i),$$

oder nach Formel (13):

$$(18)\quad \Theta_\lambda^{2\mu} \Sigma_{i,k} \cdot (i_1 \ldots i_\mu)_x (k_1 \ldots k_\mu)_y \Sigma \pm c_{i_1,k_1} c_{i_2,k_2} \ldots . c_{i_\mu,k_\mu}$$
$$= \binom{1 \ldots \lambda}{1 \ldots \lambda}_c \Pi(x_i - x_k) \Pi(y_i - y_k) \Pi\Theta(x_i) \Theta(y_i).$$

Nun ist nach dem Multiplicationssatze:

$$\begin{vmatrix} c_{1,k_1} & c_{2,k_1} & \ldots . & c_{n,k_1} \\ c_{1,k_2} & c_{2,k_2} & \ldots . & c_{n,k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1,k_\mu} & c_{2,k_\mu} & \ldots . & c_{n,k_\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots . & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots . & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_\mu & \ldots . & x_\mu^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_i (i_1 \ldots i_\mu)_x \Sigma \pm c_{i_1,k_1} c_{i_2,k_2} \ldots . c_{i_\mu,k_\mu} = \begin{vmatrix} \psi_{k_1}(x_1) & \psi_{k_1}(x_2) & \ldots . & \psi_{k_1}(x_\mu) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{k_\mu}(x_1) & \psi_{k_\mu}(x_2) & \ldots . & \psi_{k_\mu}(x_\mu) \end{vmatrix}$$

und ebenso:

$$(19)\quad \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_2(x_1) & \ldots . & \psi_n(x_1) \\ \psi_1(x_2) & \ldots & \ldots & \psi_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1(x_\mu) & \psi_2(x_\mu) & \ldots . & \psi_n(x_\mu) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \ldots . & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & \ldots . & y_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & y_\mu & \ldots . & y_\mu^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_k (k_1 \ldots k_\mu)_y \Sigma \pm \psi_{k_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2) \ldots \psi_{k_\mu}(x_\mu)$$

$$= \begin{vmatrix} F(x_1, y_1) & F(x_1, y_2) & \ldots . & F(x_1, y_\mu) \\ F(x_2, y_1) & F(x_2, y_2) & \ldots . & F(x_2, y_\mu) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F(x_\mu, y_1) & F(x_\mu, y_2) & \ldots . & F(x_\mu, y_\mu) \end{vmatrix} = V,$$

mithin:

$$\Theta_\lambda^{2\mu} V = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \lambda \\ 1 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_c \Pi(x_i - x_k)\, \Pi(y_i - y_k)\, \Pi\Theta(x_i)\, \Theta(y_i)\,.$$

Sieht man hier x_1 als variabel, die übrigen Grössen x, y als constant an, so ist der Quotient:

$$\frac{V}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots\cdots (x_1 - x_\mu)}$$

der grösste gemeinsame Factor von f und φ.

Giessen, im October 1873.

Quadratische Transformationen des elliptischen Differentiales $\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}}$ unter der Voraussetzung $f(xxx) = 0$.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

Die Transformation dritter Ordnung des Differentiales

$$\frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{\sqrt{a x_1^4 + 4 b x_1^3 x_2 + \cdots + c x_2^4}}$$

lässt sich bekanntlich in eleganter Weise an die Invariantentheorie knüpfen und ist in diesem Sinne nach dem Vorgange Hermite's und Cayley's noch jüngst von Clebsch in seiner Theorie der binären Formen ausführlich dargelegt worden. Den Ausgangspunkt der hierzu gehörigen Untersuchungen bildet eine merkwürdige typische Darstellung des simultanen Systems von zwei binären cubischen Formen. Da drei ternäre quadratische Formen in ganz analoger Weise typisch dargestellt werden können (vgl. Hermite in Band 57 des Borchardt'schen Journals S. 373), so lassen sich ähnliche Ergebnisse für die quadratischen Transformationen des Differentiales

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 f'_{x_1} + c_2 f'_{x_2} + c_3 f'_{x_3}}, \quad f \equiv a_{111} x_1^3 + 3 a_{112} x_1^2 x_2 + \cdots + 6 a_{123} x_1 x_2 x_3 = 0,$$

erwarten. Sollen in der That drei ternäre Formen zweiten Grades χ_i $(i = 1, 2, 3)$ so bestimmt werden, dass vermöge der Substitutionen

$$\varrho x_1 = \chi_1 (u_1 u_2 u_3) \quad \varrho x_2 = \chi_2 (u_1 u_2 u_3) \quad \varrho x_3 = \chi_3 (u_1 u_2 u_3)$$

der Ausdruck

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 f'(x_1) + c_2 f'(x_2) + c_3 f'(x_3)}$$

in einen von der Form übergeht

$$\frac{\Sigma \pm k_1 u_2 du_3}{k_1 X'(u_1) + k_2 X'(u_2) + k_3 X'(u_3)},$$

worin

$$X(u_1 u_2 u_3) \equiv b_{111} u_1^3 + 3 b_{112} u_1^2 u_2 + \cdots + 6 b_{123} u_1 u_2 u_3 = 0,$$

so kann man nach den eben erwähnten Resultaten Hermite's von vornherein annehmen, dass die χ_i die partiellen Differentialquotienten

einer und derselben ganzen homogenen Function dritten Grades $\chi(u_1 u_2 u_3)$ seien. Der Zweck der vorliegenden Note ist, drei solche Formen χ anzugeben, für deren jede die Gleichungen

$$\varrho x_i = \frac{\partial \chi}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

eine solche Substitution bilden.

Die Contravariante $S_f = S_f(u_1 u_2 u_3)$ der Form f*) geht durch die Transformation

$$(1) \qquad u_1 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 \qquad u_2 = f_2 \qquad u_3 = f_3$$

über in:

$$S_f(f_1, f_2, f_3) = \tfrac{3}{2} S f^2 - \tfrac{1}{6}\Delta^{2**}) = \tfrac{1}{6}(3\sqrt{S}f - \Delta)(3\sqrt{S}f + \Delta).$$

Hieraus und aus den Formeln, die in der Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan S. 51 entwickelt sind, ergiebt sich unmittelbar, dass unter Voraussetzung der Gleichungen

$$S_f = 0 \text{ und } \Psi = 3\sqrt{S}f + \Delta = 0$$

mit dem Systeme (1) gleichzeitig auch die Relation besteht:

$$\frac{\Sigma \pm c_1 u_2 d u_3}{c_1 \frac{\partial S_f}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial S_f}{\partial u_2} + c_3 \frac{\partial S_f}{\partial u_3}} = \frac{18\,\Delta\,\Sigma \pm k_1 x_2 d x_3}{(3\sqrt{S}f - \Delta)\left(k_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}\right)}$$
$$= \frac{-9\,\Sigma \pm k_1 x_2 d x_3}{k_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}},$$

worin die k_i, wie die c_i, völlig willkührlich sein können. Lässt man in der letzten Gleichung an Stelle der Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\iota}$ von f die Coefficienten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ der Conjugirten P_f treten, so erhält man nach den von mir in Bd. IV. dieser Zeitschr. S. 144—163 bewiesenen Resultaten den Satz:

I. *Unter Zugrundelegung der Gleichungen*

$$\Delta = \tfrac{1}{36}\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0 \text{ und } \mathsf{P} \equiv 3P_f + \sqrt{R}S_f = 0$$

wird vermöge der Substitutionen

$$x_1 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial P_f}{\partial u_1} \qquad x_2 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial P_f}{\partial u_2} \qquad x_3 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial P_f}{\partial u_3}:$$

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 d x_3}{c_1 \Delta'(x_1) + c_2 \Delta'(x_2) + c_3 \Delta'(x_3)} = \frac{-36\sqrt{R}\,\Sigma \pm k_1 u_2 d u_3}{k_1 \mathsf{P}'(u_1) + k_2 \mathsf{P}'(u_2) + k_3 \mathsf{P}'(u_3)}.$$

*) Die hier angewandte Bezeichnungsweise stimmt genau mit der von mir in Band IV. dieser Zeitschrift S. 144—163 angegebenen überein.

**) Vgl. Gordan in Band I. dieser Zeitschrift S. 106, Tafel X, 2.

Mit Hülfe dieses Theoremes lassen sich nun auch leicht drei quadratische Transformationen finden, welche das Differential

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 d x_3}{c_1 f'(x_1) + c_2 f'(x_2) + c_3 f'(x_3)}$$

selbst in ein anderes gleicher Art verwandeln.

Es giebt bekanntlich drei Formen φ, für welche $\Delta\varphi = f$. Setzt man nämlich $\varphi = \varkappa f - \lambda\Delta$, so wird $\Delta(\varkappa f - \lambda\Delta) = f$, sobald $\varkappa$ und λ den Gleichungen genügen

$$G_1(\varkappa\lambda) = \tfrac{1}{4}\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa} = 0 \text{ und } G_2(\varkappa\lambda) = \tfrac{1}{4}\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda} = 1,$$

$$\varkappa^4 - 6S\varkappa^2\lambda^2 + 8T\varkappa\lambda^3 - 3S^2\lambda^4 = G(\varkappa\lambda)$$

gesetzt. Indem man das Theorem I. auf jede dieser drei Formen φ (anstatt auf f) anwendet, erhält man endlich:

II. *Unter Annahme der Gleichungen*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

und

$$\mathsf{X} \equiv 3\sqrt{G(\varkappa\lambda)}\cdot R(\varkappa P_f - \lambda R_f) + S_1(\varkappa\lambda)R_f + S_2(\varkappa\lambda)P_f = 0$$

besteht, vermöge der Substitutionen

$$x_i = \tfrac{1}{3}\frac{\partial(\varkappa P_f - \lambda R_f)}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

die Relation

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 d x_3}{c_1 f'(x_1) + c_2 f'(x_2) + c_3 f'(x_3)} = \frac{-36R(\Sigma \pm k_1 u_2 d u_3) G_2(\varkappa\lambda)}{k_1\frac{\partial\mathsf{X}}{\partial u_1} + k_2\frac{\partial\mathsf{X}}{\partial u_2} + k_3\frac{\partial\mathsf{X}}{\partial u_3}},$$

sobald $\frac{\varkappa}{\lambda}$ *eine Wurzel der cubischen Gleichung* $G_1(\varkappa\lambda) = 0$.

Die durch diesen Satz (II) gelöste Aufgabe:

Aus einer gegebenen Curve dritter Ordnung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ *eine Curve dritter Classe* $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ *derart abzuleiten, dass* $f(\varphi'(u_1), \varphi'(u_2), \varphi'(u_3)) = 0$ *das Product zweier Curven dritter Classe darstellt,*

ist, wie eine einfache Abzählung lehrt, völlig bestimmt und besitzt ausser den drei hier mitgetheilten Lösungen sicherlich keine weiteren. Ich konnte jedoch bis jetzt keinen strengen *analytischen* Beweis hierfür finden.

Tübingen, im October 1873.

Ueber das simultane System zweier binären cubischen Formen.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

Im 57. Bande des Borchardt'schen Journals S. 375 hat Hermite zum ersten Male auf eine typische Darstellung dieses Systems aufmerksam gemacht, bei der die beiden gegebenen Formen als Differentialquotienten einer und derselben Function vierten Grades erscheinen. Clebsch hat alsdann im 67. Bande derselben Zeitschrift S. 360 und später in seiner Theorie der binären Formen (S. 221—228, 392—405) diese typische Darstellung aufs genaueste studirt und namentlich die dabei auftretenden Coefficienten durch die Invarianten des vollständigen Systemes ausgedrückt, allerdings mit Hülfe weitläufiger und künstlicher Rechnungen. In der folgenden Note sollen diese Ergebnisse übersichtlicher gruppirt und in bedeutend einfacherer Weise abgeleitet werden. Den Schluss bildet eine interessante Anwendung auf die Curven dritten Grades.

Seien

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^3 = a_x^3 = b_x^3 = \cdots$$
$$\varphi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^3 = \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \cdots$$

die beiden gegebenen Formen und

$$R = (ab)^2 (cd) (ac) (bd)$$

die Discriminante von f. Ferner setze man R, gebildet für irgend eine lineare Combination $z_1 f + z_2 \varphi$:

$$(1) \quad R_{z_1 f + z_2 \varphi} = z_1^4 R + 4 z_1^3 z_2 S + 6 z_1^2 z_2^2 T + 4 z_1 z_2^3 \Sigma + z_2^4 \mathsf{P}$$
$$= \Phi (z_1, z_2)$$

und

$$J = (a\alpha)^3 = (f, \varphi)^3, \qquad \vartheta = (a\alpha) a_x^2 \alpha_x^2 = (f, \varphi) = \vartheta_x^4.$$

Um vollständige Uebereinstimmung mit der Bezeichnungsweise von Clebsch herbeizuführen, definiren wir endlich p, π und Ω durch die Gleichungen:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} -\tfrac{4}{3}(\vartheta b)^3\vartheta_x &= p_1x_1 + p_2x_2 = \quad p\,,\\ \tfrac{4}{3}(\vartheta\beta)^3\vartheta_x &= \pi_1x_1 + \pi_2x_2 = \quad \pi\,,\\ (p_1\pi_2 - p_2\pi_1) &= -2\,\Omega\,. \end{aligned}\right.$$

Führen wir alsdann p und π durch die Formeln (2) als neue Variabeln ein, so gehen $-8\,\Omega^3 f$ und $-8\,\Omega^3\varphi$ in cubische Formen von p und π über, die wir beziehungsweise f' und φ' nennen wollen. Da

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{4}\left\{(\alpha p)a_x^2 + (a\pi)a_x^2\right\} &= (\vartheta\alpha)(\vartheta a)\left\{(\vartheta a)^2a_x^2 - (\vartheta\alpha)^2a_x^2\right\}\\ &= (\vartheta\alpha)(\vartheta a)\left\{(\vartheta a)a_x + (\vartheta\alpha)a_x\right\}(\alpha a)\vartheta_x\\ &= \tfrac{1}{2}(\vartheta\vartheta')^3\vartheta_x\vartheta_x' \equiv \varOmega\,,\end{aligned}$$

so sind wegen der Relationen

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi'}{\partial\pi} &= \quad 4\,\Omega^2\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}p_2 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}p_1\right\} = \quad 12\,\Omega^2(\alpha p)a_x^2\\ \frac{\partial f'}{\partial p} &= -4\,\Omega^2\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}\pi_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2}\pi_1\right\} = -12\,\Omega^2(a\pi)a_x^2\end{aligned}$$

$\frac{\partial\varphi'}{\partial\pi}$ und $\frac{\partial f'}{\partial p}$ identisch, und man hat also vermöge der Substitutionen (2) Gleichungen von der Gestalt

$$(3)\qquad -8\,\Omega^3 f = \tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial\pi} \text{ und } -8\,\Omega^3\varphi = \tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p}\,,$$

worin $F = F(\pi, p)$ eine gewisse biquadratische Form von π und p. Die Invarianten i und j dieser Form lassen sich durch Ω und J ausdrücken. Da nämlich die Covariante ϑ_x sowie die Invariante J durch die lineare Transformation (2) nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante $(p\pi) = -2\,\Omega$ sich ändern, so ergiebt sich nach (3):

$$64\,\Omega^6\vartheta = \frac{1}{4^2\cdot 3^2}\left\{\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\pi}\cdot\frac{\partial F}{\partial p} - \partial\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial\pi} - \partial\frac{\partial F}{\partial\pi}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}\right\}(p\pi),$$

$$64\,\Omega^6(f,\varphi)^3 = \left(\tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial\pi}, \tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p}\right)^3(p\pi)^3,$$

oder

$$(4)\qquad 64\,\Omega^6\vartheta = \frac{2}{4^2\cdot 3^2}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial p^2}\frac{\partial^2F}{\partial\pi^2} - \left(\frac{\partial^2F}{\partial p\,\partial\pi}\right)^2\right\} = H_F\,,$$

$$(5)\qquad 16\,\Omega^6J = (F,F)^4 = i_F\,,$$

Aehnlich wird nach (4) und (3)

$$-8\cdot 64\,(\vartheta, f\pi_x + \varphi p_x)^4\,\Omega^8 = (H_F, F)^4(p\pi)^4\,,$$

oder, weil

$$(\vartheta, f\pi_x + \varphi p_x)^4 = (\vartheta a)^3(\vartheta\pi) + (\vartheta\alpha)^3(\vartheta p) = -\tfrac{3}{4}(p\pi) + \tfrac{3}{4}(\pi p) = 3\,\Omega,$$

$$(6)\qquad -96\,\Omega^5 = (H_F, F)^4 = j_F.$$

Vermittelst (5) und (6) findet sich nunmehr F leicht. Bildet man nämlich die Discriminante irgend einer linearen Combination $-8\Omega^3(z_1 f + z_2 \varphi)$, so unterscheidet sich diese nur um $(p\pi)^6$ von der Discriminante der in p und π cubischen Form $z_1 \frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial \pi} + z_2 \frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p}$. Da die letztere gleich $\frac{1}{3} j_F F(z_1, z_2) - \frac{1}{2} i_F H_{F(z_1, z_2)}$*), so hat man mit Rücksicht auf (1):

$$8^4\Omega^{12}\Phi(z_1, z_2) = \left(\tfrac{1}{3} j_F F(z_1 z_2) - \tfrac{1}{2} i_F H_{F(z_1, z_2)}\right)(p\pi)^6,$$

oder, indem man die völlig willkührlichen z_1 und z_2 resp. durch π und p ersetzt,

$$-8\,\Omega^3\Phi(\pi, p) = -8\,\Omega^3\Phi = 4\,\Omega^2 F + J H_F, \tag{7}$$

also auch nach bekannten Sätzen über biquadratische binäre Formen:

$$24\,\Omega^3 H_\Phi = -4\,J^2\Omega^2 F + H_F(6\,\Omega - J^3).$$

Durch Auflösung der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich endlich

$$\begin{cases} F = (\frac{1}{3} J^3 + 2\,\Omega)\,\Phi - J H_\Phi \\ H_F = 4\,(H_\Phi - \frac{1}{3} J^2 \Phi)\,\Omega^2, \end{cases} \tag{8}$$

so dass sämmtliche Coefficienten in F durch die fünf Invarianten R, S, $\cdots$ P und durch J und Ω ausgedrückt sind. Die zwei Relationen zwischen den sieben letzteren ergeben sich sofort, indem man die Invarianten i und j der Form $8\,\Omega^3\Phi$ aus (7) berechnet:

$$j_\Phi = 2\,J^4 + 24\,\Omega J$$
$$9\,j_\Phi = 2\,J^6 + 108\,\Omega^2 + 36\,\Omega J^3.$$

Ueberhaupt lässt sich, nachdem einmal F als Combination von Φ und H_Φ gefunden, ohne Mühe aus jedem Satze über binäre biquadratische Formen ein entsprechender für das vorliegende System ableiten. Als einziges Beispiel einer solchen Uebertragung führen wir hier noch die Berechnung von i_ϑ an, um daraus Schlüsse auf die Theorie der Curven dritter Ordnung ziehen zu können. Man hat nach (4) und (5)

$$64\,\Omega^{10}_{i_\vartheta} = i_{H_F}(p\pi)^4 = \frac{i_F^2}{6}(p\pi)^4 = \frac{16^3}{6}\,\Omega^{10} J^2,$$

d. h.

$$i_\vartheta = \frac{32}{3} J^2,$$

eine Formel, welche den Satz giebt:

Das Verschwinden von J ist nothwendig und hinreichend, damit das Doppelverhältniss aus den 4 Wurzeln der Gleichung $\vartheta = 0$ gleich einer imaginären Cubikwurzel der Einheit werde.

*) $F(z_1, z_2)$ geht aus F vermöge Ersetzung von π durch z_1 und von p durch z_2 hervor.

Geometrisch ausgedrückt lautet dieses Theorem:

Wenn die vier Doppelpunkte der Involution $\varkappa f + \lambda\varphi = 0$ *äquianharmonisch liegen, ist* $J = 0$, *und umgekehrt.*

Durch ein bekanntes Uebertragungsprincip erhält man hieraus für die Curvenlehre:

Alle Geraden $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, *welche von Curven eines Büschels dritter Ordnung* $\varkappa f(x_1 x_2 x_3) + \lambda\varphi(x_1 x_2 x_3) \equiv \varkappa a_x^3 + \lambda\alpha_x^3 = 0$ *in vier äquianharmonisch liegenden Punkten berührt werden, hüllen eine Curve dritter Classe ein, deren symbolische Gleichung* $(a\alpha u)^3 = 0$.

Wofern $\varphi(x_1 x_2 x_3) = \Delta f$, gleich der Hesse'schen Determinante von f, verschwindet $(a\alpha u)^3$ *) identisch, so dass man sagen kann:

Die vier Punkte, in denen irgend eine Gerade von vier Curven des syzygetischen Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta f = 0$ *berührt wird, liegen äquianharmonisch* **)

Mit diesem Satze hängt vermöge geometrischer Betrachtungen aufs engste zusammen ein anderer, der die Untersuchungen von Rosanes und Schröter in den Math. Annal. II, S. 549—562 ergänzt und in einem neuen Lichte erscheinen lässt:

Wenn zwei Dreiecke auf sechsfache Art perspectivisch liegen, so sind ihre 9 Schnittpunkte die Wendepunkte jeder durch sie gelegten Curve dritter Ordnung.

Der Beweis kann überaus leicht geführt werden. Sind nämlich $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ die Gleichungen der Scheitel des einen Dreiseits, so ist das Product der Ecken des andern Dreiseits nach dem von Rosanes auf S. 551 l. c. ausgesprochenen Theorem in der Form

$$a u_1^3 + b u_2^3 + c u_3^3 + 6\, d u_1 u_2 u_3 = 0$$

darstellbar, was offenbar den fraglichen Satz erhärtet.

Tübingen, im October 1873.

---

*) $(a\alpha u)^3 \equiv 0$ kommt überein mit der bekannten Salmon'schen Identität

$$a_x^3\alpha_y^3 - 3\,a_x^2 a_y\,\alpha_x\alpha_y^2 + 3\,a_x a_y^2\,\alpha_x^2\alpha_y - a_y^3\alpha_x^3 = 0,$$

wenn man

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \qquad a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \qquad a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

setzt.

**) Dieses Theorem ist umkehrbar und also für syzygetische Büschel charakteristisch.

Untersuchungen über orthogonale Flächensysteme.

Von A. Enneper in Göttingen.

Die ungemeinen Schwierigkeiten, welche die Aufstellung orthogonaler Flächensysteme darbietet, sowie die Wahrscheinlichkeit, dass die allgemeine Integration der drei Gleichungen, welche ausdrücken, dass sich die Flächen orthogonal schneiden, mit den vorhandenen Hülfsmitteln der Analysis kaum vollständig gelingen wird, führt von selbst darauf, dem allgemeinen Probleme noch weitere geometrische Beschränkungen beizufügen, welche es gestatten, die Coordinaten eines Punktes im Raume explicite in Function dreier Parameter darzustellen. In den nachfolgenden Untersuchungen sind zu den bisher bekannten Systemen einige neue Systeme von ziemlicher Allgemeinheit hinzugefügt, insofern die Ausdrücke für die Coordinaten willkührliche Functionen enthalten. Der grössern Deutlichkeit wegen sind die fundamentalen Gleichungen, soweit wie nöthig, kurz vorausgeschickt.

I.

Sind x, y, z die Coordinaten eines gemeinschaftlichen Punktes von drei gegenseitig zu einander orthogonalen Flächen, ferner u, v, w die drei Parameter des Systems, so finden bekanntlich die Gleichungen statt:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0. \end{cases}$$

Setzt man:

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = P^2, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = Q^2, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 = R^2, \end{cases}$$

bedeutet t eine der drei Coordinaten x, y, z, so findet man zur Bestimmung von t aus den Gleichungen (1) und (2) die folgenden sechs partiellen Differentialgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 t}{\partial u^2} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial u} - \dfrac{P}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial v} - \dfrac{P}{R^2}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial v^2} = -\dfrac{Q}{P^2}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial v} - \dfrac{Q}{R^2}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial w^2} = -\dfrac{R}{P^2}\dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial u} - \dfrac{R}{Q^2}\dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial v} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial w}. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial w} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial v\,\partial w} = \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial v} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial w}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergeben sich endlich die folgenden sechs Differentialgleichungen zur Bestimmung der drei Quantitäten P, Q und R:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{P}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\right) + \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial Q}{\partial w} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial P}{\partial w}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{P}\dfrac{\partial R}{\partial u}\right) + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial R}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\right) + \dfrac{1}{P^2}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial R}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial v\,\partial w} = \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial Q}{\partial w} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial R}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial u\,\partial w} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial P}{\partial w} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\dfrac{\partial R}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial P}{\partial v} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial Q}{\partial u}. \end{cases}$$

Die Krümmungsverhältnisse einer der Flächen des Systems hängen bekanntlich von P, Q, R und den Differentialquotienten dieser Quantitäten nach u, v, w ab. Wird eine der Flächen dadurch geometrisch definirt, dass eine oder mehrere der Quantitäten P, Q, R bestimmte Werthe annehmen, so scheint es am einfachsten zu sein, zur analytischen Lösung sich der obigen Gleichungen zu bedienen. Einigen neuen Anwendungen dieser Gleichungen möge ein Verfahren vorangehn, mit dessen Hülfe es in manchen Fällen möglich ist, aus einem bestimmten orthogonalen Flächensysteme ein anderes System, oder unendlich viele Systeme abzuleiten, für den Fall, dass sich die Integration einer linearen, partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vollständig bewerkstelligen lässt.

II.

Dem Punkte (x, y, z) möge der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf beliebige Weise entsprechen. Die Cosinus der Winkel, welche die Verbindungslinie der beiden Punkte mit jeder der Normalen zu einer der drei orthogonalen Flächen, welche sich im Punkte (x, y, z) schneiden, seien respective:

$$\frac{f}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}, \quad \frac{g}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}, \quad \frac{h}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}},$$

wo f, g, h beliebige Functionen von u, v, w sind. Für x_1, y_1, z_1 hat man dann die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = x + f\frac{1}{P}\frac{\partial x}{\partial u} + g\frac{1}{Q}\frac{\partial x}{\partial v} + h\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial w}, \\ y_1 = y + f\frac{1}{P}\frac{\partial y}{\partial u} + g\frac{1}{Q}\frac{\partial y}{\partial v} + h\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial w}, \\ z_1 = z + f\frac{1}{P}\frac{\partial z}{\partial u} + g\frac{1}{Q}\frac{\partial z}{\partial v} + h\frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial w}. \end{cases}$$

Die Quantitäten f, g, h lassen sich so bestimmen, dass der Punkt (x_1, y_1, z_1) ebenfalls einem orthogonalen Systeme angehört und dieses System lässt sich weiter dahin bestimmen, dass die drei Normalen in correspondirenden Punkten beider Flächensysteme parallel sind. Analytisch betrachtet kommt dieses auf die Gleichungen:

$$(2) \quad \frac{\frac{\partial x_1}{\partial s}}{\frac{\partial x}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial s}}{\frac{\partial y}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial s}}{\frac{\partial z}{\partial s}}$$

heraus, wo successive u, v, w statt s zu setzen ist. Bildet man aus (1) die Differentialquotienten von x_1, y_1, z_1 nach u, v, w, so lassen sich die rechten Seiten der Gleichungen für:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial w}$$

mit Hülfe der Gleichungen (3) und (4) von I. auf die Form bringen:

$$\frac{H}{P}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{H_1}{Q}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{H_2}{R}\frac{\partial x}{\partial w}.$$

Nimmt man in den Gleichungen (2) $s = u$, bedeutet σ eine Unbestimmte, so hat man:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \sigma\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u} = \sigma\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} = \sigma\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Die vorstehenden Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (1) von I. geben:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}=0,$$

Diese Gleichungen zeigen, dass in dem Ausdrucke von $\frac{\partial x_1}{\partial u}$ die Factoren von $\frac{\partial x}{\partial v}$ und $\frac{\partial x}{\partial w}$ verschwinden müssen. Auf diese Art erhält man aus der Doppelgleichung (2) für $s=u, v, w$ die folgenden sechs Gleichungen:

$$(3)\quad \frac{\partial g}{\partial u}=\frac{f}{Q}\frac{\partial P}{\partial v}, \qquad (4)\quad \frac{\partial h}{\partial u}=\frac{f}{R}\frac{\partial P}{\partial w},$$
$$(5)\quad \frac{\partial f}{\partial u}=\frac{g}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}, \qquad (6)\quad \frac{\partial h}{\partial v}=\frac{g}{R}\frac{\partial Q}{\partial w},$$
$$(7)\quad \frac{\partial f}{\partial w}=\frac{h}{P}\frac{\partial R}{\partial u}, \qquad (8)\quad \frac{\partial g}{\partial w}=\frac{h}{Q}\frac{\partial R}{\partial v}.$$

Die vorstehenden sechs Gleichungen reduciren sich durch Elimination zweier der Functionen f, g, h auf zwei lineare, partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die dritte der bemerkten Functionen. Aus (5) und (7) folgt nämlich:

$$(9)\qquad g=\frac{P}{\frac{\partial Q}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad h=\frac{P}{\frac{\partial R}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Setzt man diese Werthe von g und h in die Gleichungen (6) und (8), so reduciren sich diese Gleichungen in Folge der Gleichungen (5) und (6) aus I. auf eine Gleichung, nämlich auf die folgende:

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial w}\frac{\partial R}{\partial u}}{\frac{\partial Q}{\partial u}}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\frac{1}{Q}\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial Q}{\partial u}}{\frac{\partial R}{\partial u}}.$$

Die Substitution der Werthe von g und h aus den Gleichungen (9) in die Gleichungen (3) und (4) giebt:

$$(11)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}\right)}{\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}}+\frac{f}{PQ}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial Q}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial w}=\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}\right)}{\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}}+\frac{f}{PR}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial R}{\partial u}. \end{cases}$$

Differentiirt man die erste Gleichung (11) nach w, die zweite nach v, bildet die Differenz der erhaltenen Resultate, so erhält man mittelst der Gleichungen (5) und (6) von I. die Gleichung (10). Man findet

überhaupt, dass von den drei Gleichungen (10) und (11) immer eine Folge der beiden andern ist, so dass also zur Bestimmung von f sich zwei Gleichungen ergeben, welche wesentlich von einander verschieden sind. Eine sehr einfache Anwendung der Gleichungen (10) und (11) liefert das System von drei orthogonalen Kugelflächen. Nimmt man:

$$x = \frac{w}{D}, \quad y = \frac{v}{D}, \quad z = \frac{w}{D}, \tag{12}$$

wo:

$$D = u^2 + v^2 + w^2, \tag{13}$$

so ist:

$$P = Q = R = \frac{1}{D}. \tag{14}$$

Die Gleichung (10) giebt dann:

$$D\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial w} = 0.$$

Wegen des Werthes von D aus (13) lässt sich die vorstehende Gleichung kürzer schreiben:

$$\frac{\partial^2 Df}{\partial v\,\partial w} = 0. \tag{15}$$

Die Gleichungen (11) lassen sich nach (13) und (14) auf folgende Formen bringen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) = \left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right)\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) = \left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right)\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial w},$$

d. h. es ist:

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right)$$

sowohl von v wie von w unabhängig. Bedeutet U_1 eine Function von u allein, so ist:

$$\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u} = DU_1,$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{Df}{u} = \frac{DU_1}{u} = (v^2 + w^2)\frac{U_1}{u} + uU_1.$$

Durch Integration folgt:

$$\frac{Df}{u} = (v^2 + w^2)\int\frac{U_1}{u}\partial u + \int uU_1\,\partial u + \tau,$$

wo τ von u unabhängig ist. Wegen der Gleichung (15) ist $\frac{\partial^2 \tau}{\partial v\,\partial w} = 0$, also $\tau = V + W$, wo V und W respective beliebige Functionen der Argumente v und w sind. Es ist also:

$$\frac{Df}{u} = V + W + \int u U_1 \partial u + (v^2 + w^2) \int \frac{U_1}{u} \partial u,$$

oder $v^2 + w^2 = D - u^2$ gesetzt:

$$\frac{Df}{u} = V + W + \int u U_1 \partial u - u^2 \int \frac{U_1}{u} \partial u + D \int \frac{U_1}{u} \partial u .$$

Nimmt man endlich zur Vereinfachung:

$$\int u U_1 \partial u - u^2 \int \frac{U_1}{u} \partial u = U ,$$

so ist:

$$-2u \int \frac{U_1}{u} \partial u = \frac{\partial U}{\partial u} = U' ,$$

also:

$$Df = (U + V + W) u - \tfrac{1}{2} D U'. \tag{16}$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (9) folgt:

$$\begin{cases} Dg = (U + V + W) v - \tfrac{1}{2} D V', \\ Dh = (U + V + W) w - \tfrac{1}{2} D W'. \end{cases} \tag{17}$$

Mittelst der Gleichungen (12), (13), (16) und (17) ergeben sich aus (1) für x_1, y_1, z_1 folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 = uH - \tfrac{1}{2} U', \quad y_1 = vH - \tfrac{1}{2} V', \quad z_1 = wH - \tfrac{1}{2} W', \\ H = \dfrac{uU' - U + vV' - V + wW' - W + 1}{u^2 + v^2 + w^2} . \end{cases} \tag{18}$$

Man kann die Gleichungen (18) leicht in etwas anderer Weise darstellen. Setzt man: $U - uU' = 2R$, so folgt durch Differentiation nach u die Gleichung:

$$-\tfrac{1}{2} \frac{\partial U'}{\partial u} = \frac{1}{u} \frac{\partial R}{\partial u} .$$

Diese Gleichung nach u integrirt giebt, mit Weglassung einer unnöthigen Constanten:

$$-\tfrac{1}{2} U' = \int \frac{\partial R}{u} ,$$

oder $u^2 = \varrho$ gesetzt:

$$-\tfrac{1}{2} U' = \int \frac{R' \partial \varrho}{\sqrt{\varrho}} .$$

Nimmt man ferner $v^2 = \varrho_1$, $w^2 = \varrho_2$, $V - vV' = 2R_1$, $W - wW' + 1 = 2R_2$, so treten an Stelle der Gleichungen (18) die folgenden:

$$x_1 = -H\sqrt{\varrho} + \int \frac{R' \partial \varrho}{\sqrt{\varrho}},$$

$$y_1 = -H\sqrt{\varrho_1} + \int \frac{R_1' \partial \varrho_1}{\sqrt{\varrho_1}},$$

$$z_1 = -H\sqrt{\varrho_2} + \int \frac{R_2' \partial \varrho_2}{\sqrt{\varrho_2}},$$

$$H = \frac{R + R_1 + R_2}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2}.$$

Diese Gleichungen hat zuerst Darboux gegeben, bei Aufstellung der Systeme orthogonaler Flächen, für welche alle Krümmungslinien plan sind. (Mémoires scientifiques de l'école normale supérieure. Année 1866, t. III, p. 129.) Die obige Ableitung scheint der einfachste Weg zu sein, auf welchem man zu den Gleichungen (18) gelangt.

Legt man drei confocale Flächen zweiten Grades zu Grunde, so hat man:

$$\frac{x^2}{a^2 - s^2} + \frac{y^2}{b^2 - s^2} + \frac{z^2}{c^2 - s^2} = 1,$$

wo successive u, v, w statt s zu setzen ist. Bildet man die Werthe von P, Q, R, so nimmt die Gleichung (10) folgende Form an:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{w(v^2 - u^2)}{(w^2 - u^2)(w^2 - v^2)} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{v(w^2 - u^2)}{(v^2 - u^2)(w^2 - v^2)},$$

wo $w > v > u$ angenommen ist. Führt man w_1 und v_1 als Variabele mittelst der Gleichungen:

$$\frac{1}{w^2 - u^2} = w_1, \qquad \frac{1}{v^2 - u^2} = v_1$$

ein, so geht die obige Differentialgleichung über in:

$$2(v_1 - w_1) \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial w_1} + \frac{\partial f}{\partial v_1} - \frac{\partial f}{\partial w_1} = 0.$$

Die vorstehende Gleichung ist nicht in endlicher Form integrabel, wie sich ergiebt, wenn man eine von Laplace ausgearbeitete Methode anwendet. Uebrigens ist die Gleichung auch als specieller Fall in einer allgemeinen Gleichung enthalten, welche Laplace als Beispiel der zuerst von Euler entdeckten Integrationsmethode untersucht hat. (Mémoires de l'Académie pour l'année 1773. Paris 1777, pag. 376.)

III.

Besteht ein System von Krümmungslinien einer Fläche aus Kreisen, so ist dieselbe die Enveloppe einer Kugelfläche von variabelem Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige Raumcurve beschreibt. Sind beide Systeme Kreise, so kann die Fläche als Enveloppe einer Kugelfläche angesehen werden, welche drei gegebene Kugelflächen berührt. Diese Enveloppe, welche nach Dupin die Cyclide genannt wird, lässt sich so bestimmen, dass dieselbe einem orthogonalen Flächensysteme angehört, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Die Werthe der

Coordinaten geben, wegen der darin enthaltenen willkührlichen Functionen, zu manchen interessanten besondern Fällen Veranlassung. Für eine Fläche, welche einem orthogonalen Systeme angehört, seien u und v die Argumente der Krümmungslinien. Durch die Tangente zur Krümmungslinie, für welche u allein variabel ist, werde im Punkte (x, y, z) der Fläche der Normalschnitt gelegt und dessen Krümmungshalbmesser durch R_u bezeichnet. Nach bekannten Formeln ergiebt sich aus I.:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{1}{PR} \frac{\partial P}{\partial w} .$$

Ist dieser Krümmungshalbmesser constant, so muss R_u von u unabhängig sein, d. h. R_u kann nur Function von v und w sein. Ist $\psi(v, w)$ eine beliebige Function von v und w, setzt man einfach ψ statt $\psi(v, w)$, so folgt:

$$(1) \qquad \frac{1}{PR} \frac{\partial P}{\partial w} = \frac{1}{\psi} \text{ oder } \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial w} = \frac{P}{\psi} .$$

Ist $\varphi(u, w)$ eine beliebige Function von u und w, welche einfach durch φ bezeichnet werde, so enthält die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{1}{QR} \frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{1}{\varphi} \text{ oder } \frac{1}{R} \frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{Q}{\varphi}$$

die Bedingung, dass das System der Krümmungslinien, für welche v allein variirt, gleichzeitig plan und sphärisch ist, d. h. aus Kreisen besteht.

Die Gleichung (1) werde nach v, die Gleichung (2) nach u differentiirt. Mit Zuziehung der Gleichungen (6) von I. folgt dann:

$$\frac{1}{QR} \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{P}{\psi} ,$$
$$\frac{1}{PR} \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{Q}{\varphi} .$$

Wegen der Gleichungen (1) und (2) gehen diese Gleichungen über in:

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{P}{\psi} \text{ oder } \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}\right) P = 0 ,$$
$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{Q}{\varphi} \text{ oder } \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi}\right) Q = 0 .$$

Ist φ_1 nur von u und w abhängig, ψ_1 nur von v und w abhängig, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

$$\left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}\right) P = \frac{\varphi_1}{\varphi} , \qquad \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi}\right) Q = \frac{\psi_1}{\psi} ,$$

oder:

$$(3) \qquad P(\varphi - \psi) = \varphi_1 \psi , \qquad Q(\psi - \varphi) = \psi_1 \varphi .$$

Diese Werthe von P und Q in die Gleichungen (1) und (2) substituirt geben:

$$(4)\qquad \begin{cases} R = \dfrac{\psi}{\varphi_1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial w} + \dfrac{\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial w} - \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}}{\varphi-\psi}, \\ R = \dfrac{\varphi}{\psi_1}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial w} + \dfrac{\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial w} - \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}}{\varphi-\psi}. \end{cases}$$

Der doppelte Werth von R giebt:

$$\frac{1}{\varphi\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial w} = \frac{1}{\psi\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial w}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nur von u und w, die rechte nur von v und w abhängt, so folgt:

$$(5)\qquad \frac{1}{\varphi\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial w} = \frac{1}{\psi\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial w} = E,$$

wo E eine beliebige Function von w ist. Die beiden Gleichungen (4) reduciren sich wegen (5) auf folgende Gleichung:

$$(6)\qquad R = E\varphi\psi + \frac{\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial w} - \psi\dfrac{\partial\psi}{\partial w}}{\varphi-\psi}.$$

Die erste der Gleichungen (5) von I. nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial Q}{\partial w} = 0$$

wie nach (1), (2) und (3):

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{(\varphi-\psi)\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{(\psi-\varphi)\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{1}{(\varphi-\psi)^2} = 0,$$

Führt man die Differentiationen aus, so folgt:

$$(7)\qquad \varphi\Psi + \psi\Phi = -1 + \Phi_1 + \Psi_1,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(8)\qquad \Psi = \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right), \qquad \Phi = \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right).$$

$$(9)\qquad \Psi_1 = \psi\Psi - \left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2, \qquad \Phi_1 = \varphi\Phi - \left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2.$$

Die Functionen Φ und Φ_1 hängen nur von u und w ab, die Functionen Ψ und Ψ_1 enthalten nur v und w. Differentiirt man die Gleichung (7) zuerst nach u und darauf nach v, so folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} = 0.$$

Diese Gleichung giebt unmittelbar:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = -D\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial u} = D\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

oder:

$$\Phi = C - D\varphi\,, \qquad \Psi = B + D\psi\,, \tag{10}$$

wo B, C, D von u und v unabhängig sind. Für diese Werthe von Φ und Ψ giebt die Gleichung (7):

$$C\psi + B\varphi = -1 + \Phi_1 + \Psi_1\,,$$

oder:

$$\Phi_1 - B\varphi = -(\Psi_1 - C\psi - 1)\,.$$

Da die eine Seite dieser Gleichung unabhängig ist von u, die andere unabhängig von v, so folgt:

$$\Phi_1 - B\varphi = -A\,, \qquad \Psi_1 - C\psi = 1 + A\,, \tag{11}$$

wo A nur von w abhängt. Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$\partial\frac{\varphi\Phi - \Phi_1}{\partial u} = \frac{2}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$

$$\partial\frac{\psi\Psi - \Psi_1}{\partial v} = \frac{2}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right),$$

d. i. nach (8):

$$\partial\frac{\varphi\Phi - \Phi_1}{\partial u} = 2\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,, \qquad \partial\frac{\psi\Psi - \Psi_1}{\partial v} = 2\Psi\frac{\partial\psi}{\partial v}\,.$$

Setzt man hierin für Φ, Φ_1, Ψ, Ψ_1 ihre Werthe aus (10) und (11), so folgt $B + C = 0$. Setzt man ferner die Werthe von Φ, Φ_1, Ψ, Ψ_1 aus (10) und (11) in die Gleichungen (9), nimmt $B = -C$, so ist:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = A + 2C\varphi - D\varphi^2\,, \\ \left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = -1 - A - 2C\psi + D\psi^2\,. \end{cases} \tag{12}$$

Sollen die rechten Seiten dieser Gleichungen gleichzeitig positiv sein, so kann keine der Quantitäten $AD + C^2$ und $(A+1)D + C^2$ verschwinden. Zur Abkürzung setze man:

$$\begin{cases} p = \sqrt{A + 2C\varphi - D\varphi^2}\,, \\ q = \sqrt{-1 - A - 2C\psi + D\psi^2}\,. \end{cases} \tag{13}$$

Die Gleichungen (12) lassen sich dann ersetzen durch:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = p\,, \qquad \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v} = q\,. \tag{14}$$

Differentiirt man diese Gleichungen logarithmisch in Beziehung auf w, so folgt mit Rücksicht auf die Doppelgleichung (5):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{1}{p}\frac{dp}{\partial w} + E\varphi\,, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial v\,\partial w}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial w} + E\psi\,. \end{cases} \tag{15}$$

Da die Quantitäten A, C, D, E nur von u und v unabhängig sind, so sind dieselben allgemein Functionen von w. Die erste Gleichung (13) nach u differentiirt giebt:

$$p\frac{\partial p}{\partial u} = (C - D\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial u}. \tag{16}$$

Differentiirt man diese Gleichung nach w, so folgt mittelst der ersten Gleichung (15):

$$p\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial w} = \left[\frac{\partial C}{\partial w} - \varphi\frac{\partial D}{\partial w} - D\frac{\partial \varphi}{\partial w} + (C - D\varphi)E\varphi\right]\frac{\partial \varphi}{\partial u}. \tag{17}$$

Differentiirt man die Gleichung (6) nach u, so folgt, in Verbindung mit den Gleichungen (3) und (15):

$$\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u} = \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi} - \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial w} - E\psi\right)\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

d. i. nach (14):

$$\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u} = p\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi} - \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial w} - E\psi\right). \tag{18}$$

Analog folgt:

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial R}{\partial v} = q\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi} - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial w} - E\varphi\right). \tag{19}$$

Die Gleichung (18) nach u differentiirt, giebt nach (14) und (16):

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}\right) &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi}\left(\frac{-p^2}{\varphi - \psi} + C - D\varphi\right)\\ &+ \frac{p\frac{\partial p}{\partial w} + p^2 E\varphi}{\varphi - \psi} - (C - D\varphi)(\varphi + \psi)E\\ &- \frac{\partial C}{\partial w} + \varphi\frac{\partial D}{\partial w} + D\frac{\partial \varphi}{\partial w}.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial w}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\frac{P}{\psi} = \frac{\partial}{\partial w}\frac{\varphi_1}{\varphi - \psi},$$

d. i. nach (5):

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial w}\right) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{(\varphi - \psi)^2} + \frac{E\varphi}{\varphi - \psi}. \tag{21}$$

Die Gleichungen (3) und (14) geben:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\varphi_1(\varphi - \psi)} = -\frac{q}{\varphi - \psi}.$$

Aus dieser Gleichung und (19) folgt durch Multiplication:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{1}{Q^2}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial w}-\frac{\partial\psi}{\partial w}}{(\varphi-\psi)^2}q^2+\frac{q\frac{\partial q}{\partial w}+q^2E\varphi}{\varphi-\psi}.$$

Addirt man diese Gleichung zur Summe der Gleichungen (20) und (21), so verschwindet in Folge der zweiten Gleichung (5) von I. die linke Seite. Es ist also:

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial w}-\frac{\partial\psi}{\partial w}}{\varphi-\psi}\left(C-D\varphi-\frac{1+p^2+q^2}{\varphi-\psi}\right)$$
$$+\frac{p\frac{\partial p}{\partial w}+q\frac{\partial q}{\partial w}+(1+p^2+q^2)E\varphi}{\varphi-\psi}$$
$$-(C-D\varphi)(\varphi+\psi)E-\frac{\partial C}{\partial w}+\varphi\frac{\partial D}{\partial w}+D\frac{\partial\varphi}{\partial w}=0.$$

Da nun nach (13):

$$1+p^2+q^2=2C(\varphi-\psi)-D(\varphi^2-\psi^2),$$

so geht die obige Gleichung über in:

$$(\varphi-\psi)\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial w}+CE\right)=0,$$

d. i.

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial w}+CE=0. \tag{22}$$

Zu demselben Resultate führt die dritte Gleichung (5) von I. Die bisher entwickelten Werthe von P, Q, R in Verbindung mit den Gleichungen (5), (12) und (23) genügen den sämmtlichen sechs Gleichungen (5) und (6) von I. Es bleibt übrig, die Werthe von x, y, z in Function von u, v, w so darzustellen, dass dieselben den Gleichungen (1) und (2) von I. genügen.

Die beiden letzten Gleichungen (4) von I. lassen sich schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right)=\frac{1}{PR}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial t}{\partial u},$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right)=\frac{1}{QR}\frac{\partial Q}{\partial w}\frac{\partial t}{\partial v}.$$

In Folge der Gleichungen (1) ist also:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right)=\frac{1}{\psi}\frac{\partial t}{\partial u},\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right)=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial t}{\partial v}.$$

Setzt man successive x, y, z statt t, sind

ξ, η, ζ nur abhängig von u und w,
ξ_1, η_1, ζ_1 nur abhängig von v und w,

so erhält man durch Integration die folgenden sechs Gleichungen:

$$x-\xi_1=\frac{\psi}{R}\frac{\partial x}{\partial w}, \qquad x-\xi=\frac{\varphi}{R}\frac{\partial x}{\partial w},$$
$$y-\eta_1=\frac{\psi}{R}\frac{\partial y}{\partial w}, \qquad y-\eta=\frac{\varphi}{R}\frac{\partial y}{\partial w},$$
$$z-\zeta_1=\frac{\psi}{R}\frac{\partial z}{\partial w}, \qquad z-\zeta=\frac{\varphi}{R}\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Diese Gleichungen geben:

$$(23)\qquad x=\frac{\xi\psi-\xi_1\varphi}{\psi-\varphi}, \quad y=\frac{\eta\psi-\eta_1\varphi}{\psi-\varphi}, \quad z=\frac{\zeta\psi-\zeta_1\varphi}{\psi-\varphi}.$$

$$(24)\qquad \frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial w}=\frac{\xi-\xi_1}{\psi-\varphi}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial w}=\frac{\eta-\eta_1}{\psi-\varphi}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\zeta-\zeta_1}{\varphi-\psi}.$$

Differentiirt man die Gleichungen (23) nach u, dividirt die so erhaltenen Differentialquotienten durch P, so folgt mittelst der Gleichungen (3):

$$(25)\qquad \begin{cases} \frac{1}{P}\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\xi-\xi_1}{\varphi-\psi}\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ \frac{1}{P}\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\eta}{\partial u}+\frac{\eta-\eta_1}{\varphi-\psi}\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ \frac{1}{P}\frac{\partial z}{\partial u}=-\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\zeta}{\partial u}+\frac{\zeta-\zeta_1}{\varphi-\psi}\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}. \end{cases}$$

Ebenso erhält man durch Differentiation nach v:

$$(26)\qquad \begin{cases} \frac{1}{Q}\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}+\frac{\xi-\xi_1}{\varphi-\psi}\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \\ \frac{1}{Q}\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial v}+\frac{\eta-\eta_1}{\varphi-\psi}\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \\ \frac{1}{Q}\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\zeta_1}{\partial v}+\frac{\zeta-\zeta_1}{\varphi-\psi}\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}. \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate der Gleichungen (24) führt auf folgende Gleichung:

$$(27)\qquad (\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2=(\varphi-\psi)^2.$$

Diese Gleichung giebt unmittelbar durch Differentiation nach u und v:

$$(28)\qquad \begin{cases} (\xi-\xi_1)\frac{\partial\xi}{\partial u}+(\eta-\eta_1)\frac{\partial\eta}{\partial u}+(\zeta-\zeta_1)\frac{\partial\zeta}{\partial u}=(\varphi-\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ (\xi-\xi_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial v}+(\eta-\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial v}+(\zeta-\zeta_1)\frac{\partial\zeta_1}{\partial v}=(\varphi-\psi)\frac{\partial\psi}{\partial v}. \end{cases}$$

Bildet man die Summe der Quadrate der Gleichungen (25) und ebenso der Gleichungen (26), so erhält man mittelst der vorstehenden Gleichungen und der Gleichungen (12):

$$(29)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\varphi_1^2}\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2\right\}=1+A+2C\varphi-D\varphi^2, \\ \frac{1}{\psi_1^2}\left\{\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial v}\right)^2\right\}=-A-2C\psi+D\psi^2. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen (24) — (28) werden zwei der Fundamentalgleichungen (1) von I. identisch, die dritte giebt:

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}+\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\eta_1}{\partial v}+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta_1}{\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\,. \tag{30}$$

Diese Gleichung folgt auch, wenn die Gleichung (27) successive nach u und v differentiirt wird.

Bildet man aus (23) die Werthe der Differentialquotienten von x, y, z nach w, substituirt aus (6) den Werth von R, so gehen die Gleichungen (24) über in:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\xi}{\partial w}-E\xi=\frac{1}{\psi}\frac{\partial\xi_1}{\partial w}-E\xi_1\,,\\
&\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\eta}{\partial w}-E\eta=\frac{1}{\psi}\frac{\partial\eta_1}{\partial w}-E\eta_1\,,\\
&\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\zeta}{\partial w}-E\zeta=\frac{1}{\psi}\frac{\partial\zeta_1}{\partial w}-E\zeta_1\,,
\end{aligned}\right. \tag{31}$$

Die beiden ersten Gleichungen (3) von I. geben für $t=x$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{1}{Q^2}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial w}=0\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\frac{1}{P^2}\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial Q}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial w}=0\,.$$

Hieraus erhält man, unter Zuziehung der Gleichungen (1), (3), (13), (14), (24), (25) und (26):

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)+\frac{\xi-\xi_1}{\varphi-\psi}(C-D\psi)\\
&\qquad-\frac{1}{\varphi-\psi}\left(\frac{1}{\varphi_1^2}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{1}{\psi_1^2}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\right)=0\,,\\
&\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right)-\frac{\xi-\xi_1}{\varphi-\psi}(C-D\varphi)\\
&\qquad+\frac{1}{\varphi-\psi}\left(\frac{1}{\varphi_1^2}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{1}{\psi_1^2}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)=0\,.
\end{aligned}\right. \tag{32}$$

Die Summe dieser Gleichungen giebt:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)+D\xi+\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right)-D\xi_1=0\,.$$

Bezeichnet F eine Function von w, so zerfällt die vorstehende Gleichung in die beiden folgenden:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)+D\xi=F\,,$$
$$\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right)-D\xi_1=-F.$$

Die beiden Gleichungen (32) reduciren sich hierdurch auf:

$$\frac{1}{\varphi_1^2}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \xi\,(C - D\varphi) - F\varphi$$
$$+ \frac{1}{\psi_1^2}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \xi_1\,(C - D\psi) + F\psi = 0\,,$$

d. i.

$$\frac{1}{\varphi_1^2}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \xi\,(C - D\varphi) - F\varphi = -G,$$
$$\frac{1}{\psi_1^2}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \xi_1\,(C - D\psi) + F\psi = G\,,$$

wo G nur von w abhängt. Die erste der vorstehenden Gleichungen multiplicire man mit $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, die zweite mit $\frac{\partial\psi}{\partial v}$, führe nach (14) die Werthe von p und q ein. Es folgt dann:

$$p^2\frac{\partial\xi}{\partial u} - \xi\,p\frac{\partial p}{\partial u} - F\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,,$$
$$q^2\frac{\partial\xi_1}{\partial v} - \xi_1 q\frac{\partial q}{\partial v} + F\psi\frac{\partial\psi}{\partial v} = G\frac{\partial\psi}{\partial v}\,,$$

oder:

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\xi}{p} = \dfrac{F}{p^3}\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{G}{p^3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\xi_1}{q} = -\dfrac{F}{q^3}\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial v} + \dfrac{G}{q^3}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\,. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(34)\qquad AD + C^2 = a^2\,,\quad (A+1)D + C^2 = b^2\,,$$

berücksichtigt die Werthe von p und q aus (13), so geben die Gleichungen (33) durch Integration:

$$\xi = pf_1 + \frac{CF - DG}{a^2}\varphi + \frac{AF + CG}{a^2}\,,$$
$$\xi_1 = qf_2 + \frac{CF - DG}{b^2}\psi + \frac{(A+1)F + CG}{b^2}\,,$$

wo f_1 und f_2 nur von w abhängen. Die vorstehenden Gleichungen schreibe man kürzer:

$$\xi = pf_1 + \frac{f}{a^2}\varphi - \frac{C}{2a^2b^2}f + f_0\,,$$
$$\xi_1 = qf_2 + \frac{f}{b^2}\psi + \frac{C}{2a^2b^2}f + f_0\,,$$

wo $CF - DG = f$ und:

$$\frac{AF + CG}{a^2} + \frac{(A+1)F + CG}{b^2} = 2f_0$$

gesetzt ist. Sind nun f, g, h; f_1, g_1, h_1; f_2, g_2, h_2 und f_0, g_0, h_0 Functionen von w, so erhält man auf die vorhin angegebene Art folgende Gleichungen:

$$(35)\qquad \begin{cases} \xi = pf_1 + \frac{f}{a^2}\varphi - \frac{Cf}{2a^2b^2} + f_0, \\ \eta = pg_1 + \frac{g}{a^2}\varphi - \frac{Cg}{2a^2b^2} + g_0, \\ \zeta = ph_1 + \frac{h}{a^2}\varphi - \frac{Ch}{2a^2b^2} + h_0, \end{cases}$$

$$(35)\qquad \begin{cases} \xi_1 = qf_2 + \frac{f}{b^2}\psi + \frac{Cf}{2a^2b^2} + f_0, \\ \eta_1 = qg_2 + \frac{g}{b^2}\psi + \frac{Cg}{2a^2b^2} + g_0, \\ \zeta_1 = qh_2 + \frac{h}{b^2}\psi + \frac{Ch}{2a^2b^2} + h_0, \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen (13), (14) und (35) geht die erste Gleichung (29) in folgende über:

$$(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2)(C - D\varphi)^2 + 2p(C - D\varphi)\frac{ff_1 + gg_1 + hh_1}{a^2}$$
$$+ \frac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4}(A + 2C\varphi - D\varphi^2) = 1 + A + 2C\varphi - D\varphi^2.$$

Soll nun φ nicht von u unabhängig sein, so kann die vorstehende Gleichung nur bestehen, wenn:

$$(37)\qquad \begin{cases} ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0, \\ D\left\{D(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) - \frac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} + 1\right\} = 0, \\ C\left\{D(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) - \frac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} + 1\right\} = 0, \\ C^2(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) + A\frac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} = 1 + A. \end{cases}$$

Da C und D nicht gleichzeitig wegen der Gleichungen (12) verschwinden können, so lässt sich das letzte System von Gleichungen durch folgende Gleichungen ersetzen:

$$(38)\qquad \begin{cases} ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0, \\ D(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) = \frac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} - 1, \\ a^2(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) = 1. \end{cases}$$

Die letzte der vorstehenden Gleichungen folgt aus der letzten Gleichung (37) mit Rücksicht auf den Werth von a^2 aus (34). Auf ganz ähnliche Weise geben die Gleichungen (36) in Verbindung mit den Gleichungen (13), (14) und der zweiten Gleichung (29) die folgenden Relationen:

$$(39)\qquad \begin{cases} ff_2 + gg_2 + hh_2 = 0, \\ -D(f_2^2 + g_2^2 + h_2^2) = \frac{f^2 + g^2 + h^2}{b^4} - 1, \\ C^2(f_2^2 + g_2^2 + h_2^2) = 1. \end{cases}$$

Die Gleichung (30) endlich giebt, da φ und ψ nicht unabhängig von u und v sein sollen:

$$f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2 = 0\,,$$
$$f^2 + g^2 + h^2 = (ab)^2\,.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (38) und (39) zeigen, dass:

$$\begin{array}{lll} af_1\,, & ag_1\,, & ah_1\,; \\ bf_2\,, & bg_2\,, & bh_2\,; \\ \dfrac{f}{ab}\,, & \dfrac{g}{ab}\,, & \dfrac{h}{ab} \end{array}$$

als die Cosinus der Winkel angesehen werden können, welche drei gegenseitig orthogonale Richtungen im Raume bestimmen. Man nehme diese Richtungen respective parallel der Tangente, der Normalen zur Krümmungsebene und dem Krümmungsradius einer Curve doppelter Krümmung. Sind:

$$\begin{array}{l} \alpha;\ \beta,\ \gamma; \\ l,\ m,\ n; \\ \lambda,\ \mu,\ \nu \end{array}$$

die Winkel, welche die bemerkten Geraden mit den Coordinatenaxen bilden, so setze man:

$$\begin{array}{lll} af_1 = \cos\alpha\,, & ag_1 = \cos\beta\,, & ah_1 = \cos\gamma\,, \\ bf_2 = \cos l\,, & bg_2 = \cos m\,, & bh_2 = \cos n\,, \\ \dfrac{f}{ab} = \cos\lambda\,, & \dfrac{g}{ab} = \cos\mu\,, & \dfrac{h}{ab} = \cos\nu\,. \end{array}$$

Hierdurch werden die Gleichungen (35) und (36):

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi = \dfrac{p}{a}\cos\alpha + \left(\varphi\dfrac{b}{a} - \dfrac{C}{2ab}\right)\cos\lambda + f_0\,, \\ \eta = \dfrac{p}{a}\cos\beta + \left(\varphi\dfrac{b}{a} - \dfrac{C}{2ab}\right)\cos\mu + g_0\,, \\ \zeta = \dfrac{p}{a}\cos\gamma + \left(\varphi\dfrac{b}{a} - \dfrac{C}{2ab}\right)\cos\nu + h_0\,, \end{array}\right.$$

$$(51)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi_1 = \dfrac{q}{b}\cos l + \left(\psi\dfrac{a}{b} + \dfrac{C}{2ab}\right)\cos\lambda + f_0\,, \\ \eta_1 = \dfrac{q}{b}\cos m + \left(\psi\dfrac{a}{b} + \dfrac{C}{2ab}\right)\cos\mu + g_0\,, \\ \zeta_1 = \dfrac{q}{b}\cos n + \left(\psi\dfrac{a}{b} + \dfrac{C}{2ab}\right)\cos\nu + h_0\,, \end{array}\right.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen und den Gleichungen (23) ergeben sich zur Bestimmung von x, y, z leicht die folgenden Gleichungen:

$$(42)\quad \begin{cases} (x-f_0)\cos\alpha + (y-g_0)\cos\beta + (z-h_0)\cos\gamma = \dfrac{p}{a}\dfrac{\psi}{\psi-\varphi}, \\ (x-f_0)\cos\lambda + (y-g_0)\cos\mu + (z-h_0)\cos\nu = \dfrac{q}{b}\dfrac{\varphi}{\varphi-\psi}, \\ (x-f_0)\cos l + (y-g_0)\cos m + (z-h_0)\cos n = \dfrac{D\varphi\psi - \frac{1}{2}C(\varphi+\psi)}{\psi-\varphi}. \end{cases}$$

Um die Differentialquotienten der Functionen f_0, g_0, h_0 nach w einfach darstellen zu können, muss man auf die Gleichungen (15) zurückgehen. Wegen der Gleichungen (13) giebt die erste Gleichung (15):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w} = \frac{C-D\varphi}{p^2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial w} + \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial A}{\partial w} + 2\varphi\frac{\partial C}{\partial w} - \varphi^2\frac{\partial D}{\partial w}}{p^2}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + E\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Diese Gleichung mit $\frac{1}{p}$ multiplicirt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{-\frac{1}{2}(C-D\varphi)\frac{\partial A}{\partial w} + (A+C\varphi)\frac{\partial C}{\partial w}}{p} - \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{p^3}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial w} + \frac{E}{p}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

wo a durch die Gleichung (34) bestimmt ist. Die vorstehende Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$(43)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{A+C\varphi}{2a^2}\frac{\partial D}{\partial w} + E\varphi\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{-\frac{1}{2}(C-D\varphi)\frac{\partial A}{\partial w} + (A+C\varphi)\frac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}(A+C\varphi)\varphi\frac{\partial D}{\partial w}}{p}.$$

Im ersten Terme rechts setze man nach (22) $\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial w} = -CE$. Es ist dann:

$$\frac{1}{p}\left(\frac{A+C\varphi}{2a^2}\frac{\partial D}{\partial w} + E\varphi\right) = -\frac{AE}{a^2}\frac{C-D\varphi}{p}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\frac{AE}{a^2}\frac{\partial p}{\partial u},$$

da $C - D\varphi = p\frac{\partial p}{\partial u}$. Die rechte Seite der Gleichung (43) ist also ein vollständiger Differerentialquotient. Bezeichnet W eine Function von w, so folgt durch Integration:

$$(44)\quad \frac{1}{p}\frac{\partial\varphi}{\partial w} = W - \frac{AE}{a^2}p + \frac{1}{a^2 p}\left\{-\frac{1}{2}(C-D\varphi)\frac{\partial A}{\partial w} + (A+C\varphi)\frac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}(A+C\varphi)\varphi\frac{\partial D}{\partial w}\right\}.$$

Mittelt dieser Gleichung und der Gleichung (22) erhält man leicht die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial w}\frac{p}{a} = \frac{C-D\varphi}{a}W + \frac{p}{a}E\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\varphi\frac{b}{a}=pW\frac{b}{a}+\frac{\varphi}{a}\frac{\partial b}{\partial w}+\frac{b}{a}E\varphi^2$$
$$+\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial w}\frac{C}{a}+\frac{A\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}C\frac{\partial A}{\partial w}-A(A+1)E}{ab}.$$

Mit Rücksicht auf diese Differentialquotienten führt die Gleichung (40) zu folgendem Resultate:

(45)
$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\xi}{\partial w}-E\xi=\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial w}+bW\cos\lambda\right)\frac{p}{a\varphi}$$
$$+\left\{\frac{\partial f_0}{\partial w}+\frac{CW}{a}\cos\alpha-\frac{C}{2ab}\frac{\partial\cos\lambda}{\partial w}-\frac{\cos\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{C}{ab}\right.$$
$$\left.+\frac{A\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}C\frac{\partial A}{\partial w}-A^2E}{a^3}-b\cos\lambda\right\}\frac{1}{\varphi}$$
$$-E\left(f_0-\frac{C}{2ab}\cos\lambda\right)-\frac{DW}{a}\cos\alpha+\frac{\cos\lambda}{a}\frac{\partial b}{\partial w}+\frac{b}{a}\frac{\partial\cos\lambda}{\partial w}=0.$$

In den Gleichungen (31) sind die linken Seiten nur von u und w, die rechten Seiten nur von v und w abhängig, hieraus folgt, dass in den bemerkten Gleichungen jede Seite nur Function von w sein kann. Mit Beziehung hierauf folgt, dass in der Gleichung (45) die rechte Seite von u unabhängig sein muss, was nur stattfindet, wenn die Factoren von $\frac{p}{\varphi}$ und $\frac{1}{\varphi}$ verschwinden. Es ist also:

(46)
$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial w}+bW\cos\lambda=0.$$

(47)
$$\frac{\partial f_0}{\partial w}+\frac{CW}{a}\cos\alpha-\frac{C}{2ab}\frac{\partial\cos\lambda}{\partial w}-\frac{\cos\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{C}{ab}$$
$$+\frac{A\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}C\frac{\partial A}{\partial w}-A^2E}{a^3}-b\cos\lambda=0.$$

Ist ds das Bogenelement, ferner ϱ der Krümmungsradius, r der Torsionsradius, welche den Winkeln α, l etc. entsprechen, so hat man bekanntlich:

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial w}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w}\cos\lambda,\quad\frac{\partial\cos l}{\partial w}=\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial w}\cos\lambda,$$
$$\frac{\partial\cos\lambda}{\partial w}=-\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho}+\frac{\cos l}{r}\right)\frac{\partial s}{\partial w}.$$

Die Gleichung (46) giebt dann:

(48)
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w}=-bW.$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (45) und (47) über in:

$$(49)\qquad \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\xi}{\partial w} - E\xi = -E\left(f_0 - \frac{C}{2ab}\cos\lambda\right) + \frac{\cos\lambda}{a}\frac{\partial b}{\partial w} - \left(\frac{1}{\varrho}\frac{a}{b}\cos\alpha + \frac{1}{r}\frac{b}{a}\cos l\right)\frac{\partial s}{\partial w}.$$

$$(50)\qquad \frac{\partial f_0}{\partial w} - \left(\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos l}{r}\right)\frac{C}{2ab}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{\cos\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{C}{ab} + \frac{A\frac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}C\frac{\partial A}{\partial w} - A^2E}{a^3}b\cos\lambda = 0.$$

Multiplicirt und dividirt man in der Gleichung (49) den Factor von $\cos\lambda$ mit C, so lässt sich die Gleichung zur Bestimmung von f_0 auf folgende Form bringen:

$$(51)\qquad \frac{\partial f_0}{\partial w} = \left(\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos l}{r}\right)\frac{C}{2ab}\frac{\partial s}{\partial w} + \frac{ab}{4C}\cos\lambda\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{A}{a^2} + \frac{A+1}{b^2}\right).$$

Vertauscht man in den Gleichungen (49) und (50) α, l, λ respective mit β, m, μ und γ, n, ν, so geht f_0 über in g_0 und h_0.

Analog wie die Gleichung (44) erhält man aus der zweiten Gleichung (15):

$$(52)\qquad \frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial w} = W_1 + \frac{(A+1)E}{b^2}q + \frac{1}{b^2q}\left\{\frac{1}{2}(D\psi - C)\frac{\partial A}{\partial w} + (A+1+C\psi)\left(\frac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}\psi\frac{\partial D}{\partial w}\right)\right\},$$

wo W_1 eine Function von w allein ist. Aus dieser Gleichung und der ersten Gleichung (41) stelle man die rechte Seite der ersten Gleichung (31) her. Da der erhaltene Ausdruck von v unabhängig sein muss, so erhält man entsprechend den Gleichungen (48)—(50) die folgenden:

$$(53)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial w} = -aW_1.$$

$$(54)\qquad \frac{1}{\psi}\frac{\partial\xi_1}{\partial w} - E\xi_1 = -E\left(f_0 + \frac{C}{2ab}\cos\lambda\right) + \frac{\cos\lambda}{b}\frac{\partial a}{\partial w} - \left(\frac{1}{\varrho}\frac{a}{b}\cos\alpha + \frac{1}{r}\frac{b}{a}\cos l\right)\frac{\partial s}{\partial w}.$$

$$(55)\qquad \frac{\partial f_0}{\partial w} - \left(\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos l}{r}\right)\frac{C}{2ab}\frac{\partial s}{\partial w} + \frac{\cos\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{C}{ab} + \frac{(A+1)\frac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}C\frac{\partial A}{\partial w} - (A+1)^2E}{b^3}a\cos\lambda = 0.$$

Man beweist ohne Schwierigkeit, dass die rechten Seiten der Gleichungen (49) und (54) identisch sind, wie das auch in Folge der ersten Gleichung (31) der Fall sein muss. Analog wie die Gleichung (50) lässt sich auch die Gleichung (55) auf die Form der Gleichung (51) bringen.

Die Gleichungen (40) und (41) zeigen unmittelbar, dass für ein constantes w jeder der Punkte (ξ, η, ζ) und (ξ_1, η_1, ζ_1) auf einem Kegelschnitte liegt, deren Ebenen normal zu einander sind. Liegt der eine Punkt auf einer Ellipse, so liegt der andere auf einer Hyperbel, je nachdem D eine positive oder negative Grösse ist. Für $D = 0$ ergeben sich zwei Parabeln. Man findet so sehr leicht sämmtliche Eigenschaften der Cyclide wieder wie bei der directen Behandlung des Problems: Die Fläche zu finden, für welche in beiden Systemen von Krümmungslinien der Krümmungshalbmesser längs jeder der bemerkten Curven constant ist.

Die Gleichungen (44) und (52) lassen sich in manchen Fällen leicht integriren, wenn von den Functionen A, C, D, E von w eine oder mehrere constant genommen werden, wobei indessen immer die Relation (22) in Betracht zu ziehen ist. Die arbiträren Constanten, welche die Integration der Gleichungen (44) und (52) involvirt, sind respective gleich arbiträren Functionen von u und v zu setzen.

IV.

Die allgemeinen Gleichungen von I. gestatten eine sehr einfache und elegante Lösung des Problems: Welche Flächen mit einem System planer Krümmungslinien, deren Ebenen die Normalen zur Fläche enthalten, können einem orthogonalen Systeme angehören?

Sind u und w die Argumente der Krümmungslinien, so fordert die Lösung des Problems eine der Gleichungen $\frac{\partial P}{\partial w}$ 0 oder $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$. Nimmt man $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$, so reducirt sich die dritte Gleichung (6) von I. auf $\frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial Q}{\partial u} = 0$, also entweder $\frac{\partial R}{\partial v} = 0$ oder $\frac{\partial Q}{\partial u} = 0$. Sei zuerst:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = 0\,, \qquad \frac{\partial R}{\partial v} = 0\,.$$

Wegen der vorstehenden Gleichungen reducirt sich die dritte Gleichung (3) von I. auf:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial w^2} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial R}{\partial w}\,\frac{\partial t}{\partial w}\,.$$

Setzt man successive x, y, z statt t, so folgt durch Integration:

$$(1) \qquad \frac{\partial x}{\partial w} = R\cos A\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial w} = R\cos B\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial w} = R\cos C\,,$$

wo A, B, C von w unabhängig sind. Wegen der dritten Gleichung (2) von 1. geben die Gleichungen (1):

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1\,,$$

es sind also A, B, C die Winkel, welche eine Richtung, die in Beziehung auf den Parameter w constant ist, mit den Coordinatenaxen bildet.

Nimmt man in den Gleichungen (1):

$$R = \frac{\partial W}{\partial w},$$

wo W eine beliebige Function von w ist, sind X, Y, Z Functionen von u und v, so folgt:

$$(2)\quad x = X + W\cos A,\quad y = Y + W\cos B,\quad z = Z + W\cos C.$$

Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} + W\frac{\partial \cos A}{\partial u},\qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} + W\frac{\partial \cos A}{\partial v},$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen, der ähnlichen Differentialquotienten von y, z nach u, v und der Gleichungen (1) geben die drei Gleichungen (1) von I.:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial X}{\partial v} + \dfrac{\partial Y}{\partial u}\dfrac{\partial Y}{\partial v} + \dfrac{\partial Z}{\partial u}\dfrac{\partial Z}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial \cos A}{\partial v} + \dfrac{\partial Y}{\partial u}\dfrac{\partial \cos B}{\partial v} + \dfrac{\partial Z}{\partial u}\dfrac{\partial \cos C}{\partial v} + \\ \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial \cos A}{\partial u} + \dfrac{\partial Y}{\partial v}\dfrac{\partial \cos B}{\partial u} + \dfrac{\partial Z}{\partial v}\dfrac{\partial \cos C}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial \cos A}{\partial u}\dfrac{\partial \cos A}{\partial v} + \dfrac{\partial \cos B}{\partial u}\dfrac{\partial \cos B}{\partial v} + \dfrac{\partial \cos C}{\partial u}\dfrac{\partial \cos C}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \cos A\dfrac{\partial X}{\partial u} + \cos B\dfrac{\partial Y}{\partial u} + \cos C\dfrac{\partial Z}{\partial u} = 0, \\ \cos A\dfrac{\partial X}{\partial v} + \cos B\dfrac{\partial Y}{\partial v} + \cos C\dfrac{\partial Z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Da nun X, Y, Z nur von u und v abhängen, sonst gänzlich unbestimmte Functionen dieser Variabeln sind, so kann man X, Y, Z als die Coordinaten eines Punktes einer ganz beliebigen Fläche ansehen. Die Gleichungen (4) zeigen dann, dass A, B, C die Winkel sind, welche die Normale im Punkte (X, Y, Z) mit den Coordinatenaxen bildet. Aus den Gleichungen (3) folgt ferner, dass u und v die Argumente der Krümmungslinien der beliebig angenommenen Fläche sind. Die geometrische Interpretation der Gleichungen (1) gestaltet sich hierdurch sehr einfach als ein System paralleler Flächen und den beiden Systemen developpabeler Flächen, gebildet aus den Normalen zu den Krümmungslinien einer beliebigen Fläche des ersten Systems.

Die zweite Annahme $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial u} = 0$ ersetze man durch Vertauschung von u mit w durch die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial w} = 0\,, \qquad \frac{\partial Q}{\partial w} = 0\,. \tag{5}$$

Die beiden letzten Gleichungen (4) von I. geben nach (5):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial t}{\partial w}\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial t}{\partial w}\right) = 0\,,$$

d. h. es ist $\frac{1}{R}\,\frac{\partial t}{\partial w}$ nur von w abhängig. Statt t setze man successive x, y, z; haben die Winkel α, l, λ etc. analoge Bedeutungen wie in III., so kann man setzen:

$$\frac{1}{R}\,\frac{\partial x}{\partial w} = \cos\lambda\,, \quad \frac{1}{R}\,\frac{\partial y}{\partial w} = \cos\mu\,, \quad \frac{1}{R}\,\frac{\partial z}{\partial w} = \cos\nu\,. \tag{6}$$

Variiren u und v allein, so repräsentiren die linken Seiten der Gleichungen (6) die Cosinus der Winkel, welche die Normale im Punkte (x, y, z) der Fläche $w =$ const. mit den Coordinatenaxen bildet. Diese Winkel sind von u und v unabhängig, d. h. die Fläche $w =$ const. ist eine Ebene. Sind f, g, h Functionen von w, so ist die Fläche, für welche w constant ist, bestimmt durch:

$$(x - f)\cos\lambda + (y - g)\cos\mu + (z - h)\cos\nu = 0\,,$$

oder, was dasselbe ist, durch:

$$\begin{vmatrix} x - f\,, & y - g\,, & z - h \\ \cos\alpha\,, & \cos\beta\,, & \cos\gamma \\ \cos l\,, & \cos m\,, & \cos n \end{vmatrix} = 0\,.$$

Sind X und Y näher zu bestimmende Functionen von u, v, w, so lässt sich die vorstehende Gleichung ersetzen durch:

$$\left\{\begin{aligned} x &= f + X\cos\alpha + Y\cos l\,, \\ y &= g + X\cos\beta + Y\cos m\,, \\ z &= h + X\cos\gamma + Y\cos n\,, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Die Gleichungen (6) geben:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial w}\cos\alpha + \frac{\partial y}{\partial w}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial w}\cos\gamma = 0\,, \\ &\frac{\partial x}{\partial w}\cos l + \frac{\partial y}{\partial w}\cos m + \frac{\partial z}{\partial w}\cos n = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Man kann immer setzen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial w} = \dfrac{\partial W_1}{\partial w}\cos\alpha + \dfrac{\partial W_2}{\partial w}\cos l + W\cos\lambda\,, \\ \dfrac{\partial g}{\partial w} = \dfrac{\partial W_1}{\partial w}\cos\beta + \dfrac{\partial W_2}{\partial w}\cos m + W\cos\mu\,, \\ \dfrac{\partial h}{\partial w} = \dfrac{\partial W_1}{\partial w}\cos\gamma + \dfrac{\partial W_2}{\partial w}\cos n + W\cos\nu\,, \end{cases}$$

wo W, W_1, W_2 Functionen von w sind. Die Gleichungen (8) gehen mittelst der Gleichungen (7) und (9) über in:

$$\frac{\partial W_1}{\partial w} + \frac{\partial X}{\partial w} = 0\,, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial w} + \frac{\partial Y}{\partial w} = 0\,,$$

also:

$$(10)\qquad X = X_1 - W_1\,, \qquad Y = Y_1 - W_2\,,$$

wo X_1 und Y_1 von w unabhängig sind. Mit Weglassung einer Constanten giebt die erste Gleichung (9) durch partielle Integration:

$$f = W_1\cos\alpha + W_2\cos l + \int\left\{W - \frac{W_1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{W_2}{r}\frac{\partial s}{\partial w}\right\}\cos\lambda\,\partial w.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichungen (10) wird die erste Gleichung (7):

$$x = X_1\cos\alpha + Y_1\cos l + \int\left\{W - \frac{W_1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{W_2}{r}\frac{\partial s}{\partial w}\right\}\cos\lambda\,\partial w.$$

Setzt man einfach W statt $W - \frac{W_1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{W_2}{r}\frac{\partial s}{\partial w}$, so kann man, unbeschadet der Allgemeinheit, $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ setzen. In Folge der Gleichungen (10) sind dann X und Y in (7) von w unabhängig. Setzt man die Werthe von f, g, h aus (9) in (7), so erhält man schliesslich:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = \int W\cos\lambda\,\partial w + X\cos\alpha + Y\cos l\,, \\ y = \int W\cos\mu\,\partial w + X\cos\beta + Y\cos m\,, \\ z = \int W\cos\nu\,\partial w + X\cos\gamma + Y\cos n\,. \end{cases}$$

In den vorstehenden Gleichungen ist W eine beliebige Function von w. Da die Werthe von x, y, z der Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

genügen müssen, so erhält man zwischen X und Y die Relation:

$$(12)\qquad \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} = 0\,.$$

Man kann X und Y als die Coordinaten eines Punktes ansehen, welcher zu zwei Systemen von planen Curven gehören kann, je nachdem in den, übrigens willkührlichen, Ausdrücken von X und Y als Functionen von u und v der eine oder andere Parameter constant genommen wird. Die Gleichung (12) zeigt, dass zwei Curven beider Systeme sich orthogonal schneiden, also X und Y zwei beliebigen Systemen orthogonaler, ebener Curven angehören. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich folgende einfache Generation des Systems.

In einer Ebene, welche zwei Systeme orthogonaler Curven enthält, werde ein fester Punkt und zwei zu einander senkrechte, feste Geraden angenommen. Die Ebene bewege sich so, dass der feste Punkt eine Raumcurve C_1 beschreibt, während die beiden festen Geraden dabei den Tangenten und Normalen zur Krümmungsebene einer Raumcurve C parallel sind. Die Curve C_1 hängt der Art von der Curve C ab, dass ihre Tangenten den Hauptnormalen der Curve C parallel sind. Die beiden Systeme orthogonaler Curven beschreiben zwei Flächensysteme, welche in Gemeinschaft der Ebene in ihren verschiedenen Lagen ein orthogonales Flächensystem bilden.

Göttingen, im Mai 1872.