Ueber die Plücker'sche Complexfläche.

Von Felix Klein in Erlangen.

Aus der Discussion der Liniencomplexe zweiten Grades, wie sie Hr. Weiler in dem vorstehenden Aufsatze durchgeführt hat, geht hervor, dass die Plücker'sche Complexfläche gleich der allgemeineren Kummer'schen Fläche für unendlich viele Complexe zweiten Grades die singuläre Fläche*) bildet, und dass dieselbe also mit ganz ähnlichen Mitteln untersucht werden kann, wie dies der Verf. früher (diese Annalen Bd. II, S. 198 ff.) bei der Kummer'schen Fläche gethan hatte. Das System der sechs paarweise in Involution liegenden linearen Complexe, welches bei der Kummer'schen Fläche eine fundamentale Rolle spielte, ist bei der Complexfläche nur in dem Sinne ausgeartet, dass zwei dieser Complexe, indem sie zusammenrückten, speciell wurden und in die Doppellinie der Fläche übergingen. Mit Bezug auf die vier übrigen linearen Complexe bleiben durchaus die Schlussweisen bestehen, welche bei der Kummer'schen Fläche ihre Anwendung fanden, und man hat also insbesondere den Satz:

Eine Plücker'sche Complexfläche ist mit Bezug auf vier paarweise in Involution liegende lineare Complexe ihre eigene reciproke Polare.

Aus diesem Satze folgt ohne Weiteres, dass das Doppelverhältniss der vier singulären Punkte der Complexfläche gleich dem Doppelverhältnisse ihrer vier Ebenen sei. Indem man sodann die Complexfläche nicht mehr als singuläre Fläche eines besonderen Complexes zweiten Grades betrachtet, sondern in der Art, wie sie bei Plücker eingeführt wird, d. h. als Brennfläche derjenigen Linien eines Complexes zweiten Grades, welche eine feste Gerade schneiden, erhält man:

Die vier Punkte, in denen eine beliebige Gerade die singuläre Fläche eines Complexes zweiten Grades trifft, und die vier Ebenen, die man durch dieselbe Gerade als Tangentenebenen der singulären Fläche legen kann, haben dasselbe Doppelverhältniss.

Diesen Satz habe ich für die singuläre Fläche des allgemeinen Complexes vom zweiten Grade, d. h. für die Kummer'sche Fläche,

---

*) Ich ziehe diesen von Hrn. Voss vorgeschlagenen Ausdruck (Gött. Nachrichten 1873, p. 546) dem sonst gebräuchlichen „Singularitätenfläche" vor.

bereits in diesen Annalen Bd. II, S. 215, mitgetheilt; aber der Zusammenhang, in welchem er dort ausgesprochen ist, kann nicht als Beweis desselben gelten.

Um so lieber will ich hier eine einfache Betrachtung mittheilen, die in Anlehnung an die von Plücker begonnene Untersuchungsweise der Complexflächen (vgl. dessen Neue Geometrie S. 205 ff.) unmittelbar die vier zur Fläche gehörigen linearen Complexe nachweist und aus ihrer Existenz die Gleichheit der fraglichen Doppelverhältnisse, sowie weiterhin die Eigenschaft der Fläche erschliesst, ihre eigene reciproke Polare zu sein. Aus der Gleichheit der beiden Doppelverhältnisse wird man weiterhin, was bei Plücker in minder übersichtlicher Weise bewiesen wird, den Satz von der Identität der von den singulären Punkten gebildeten und der von den singulären Ebenen umhüllten Fläche gewinnen. Ist nämlich das Doppelverhältniss der vier Punkte, in welchen eine beliebige Gerade die erste Fläche trifft, immer gleich dem Doppelverhältnisse der vier Ebenen, welche man durch die Gerade hindurch an die zweite Fläche legen kann, so sind die Tangenten der ersten Fläche immer auch Tangenten der zweiten Fläche, d. h. die beiden Flächen sind identisch*), w. z. b. w.

Für die Singularitäten der Complexfläche, wie sie Plücker nachweist, sollen im Nachstehenden, soweit sie in Betracht kommen, die folgenden Bezeichnungen**) angewandt werden. Die vier singulären Ebenen der Fläche mögen E_1, E_2, E_3, E_4 heissen. Sie enthalten je ein Paar von Doppelpunkten der Fläche: 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'; 4, 4'. Die in ihnen verlaufenden Verbindungslinien der Doppelpunktpaare, die singulären Strahlen der Fläche, seien S_1, S_2, S_3, S_4. Dieselben schneiden die Doppellinie und die Polare der Fläche bez. in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 und q_1, q_2, q_3, q_4, die jedesmal zu den zwei auf dem singulären Strahle gelegenen Doppelpunkten harmonisch sind. Weiter sollen die vier singulären Punkte der Fläche P_1, P_2, P_3, P_4 genannt sein. Von ihnen gehen die Paare Doppelebenen I, I'; II, II'; III, III'; IV, IV' aus. Die singulären Axen endlich, in welchen sich die zusammengehörigen Doppelebenen schneiden, seien durch A_1, A_2, A_3, A_4 bezeichnet.

Die Doppelebenen der Fläche enthalten (vgl. Plücker) jedesmal vier Doppelpunkte und durch jeden Doppelpunkt gehen vier Doppel-

---

*) Der Nachweis der Identität der beiden Flächen ist durch Hrn. Pasch in seiner Habilitationsschrift (Giessen 1870) auf allgemeinere und fundamentalere Betrachtungen betr. Brennflächen von Congruenzen zurückgeführt worden. Der im Texte angegebene Beweis scheint aber immer dadurch interessant, dass er bis zum Schlusse die Vorstellung des Unendlich-Kleinen vermeidet.

**) Vgl. Clebsch's Bericht über Plücker's Neue Geometrie in den Göttinger Anzeigen, 1869.

ebenen hindurch. Man kann die festgesetzten Bezeichnungen insbesondere so wählen, dass dieses Verhältniss in dem folgenden Schema seine Darstellung findet:

Ebenen	Punkte	Ebenen	Punkte
I	1 2 3 4	*I'*	1' 2' 3' 4'
II	1 2 3' 4'	*II'*	1' 2' 3 4
III	1 2' 3 4'	*III'*	1' 2 3' 4
IV	1 2' 3' 4	*IV'*	1' 2 3 4'

Ich behaupte nun zunächst, dass es möglich ist, die 8 Doppelpunkte den 8 Doppelebenen in den folgenden vier Weisen durch lineare Complexe zuzuordnen. *Es entsprechen den Punkten:*

$$1,\quad 1',\quad 2,\quad 2',\quad 3,\quad 3',\quad 4,\quad 4'$$

bezüglich die Ebenen:

$$\begin{array}{cccccccc} I, & I', & II, & II', & III, & III', & IV, & IV' \\ II, & II', & I, & I', & IV', & IV, & III', & III \\ III, & III', & IV', & IV, & I, & I', & II', & II \\ IV, & IV', & III', & III, & II', & II, & I, & I'. \end{array}$$

Gesetzt, es sei dieses bewiesen, dann folgt unmittelbar, dass die vier betreffenden linearen Complexe paarweise in Involution liegen. Denn die Zuordnungen, wie sie durch das vorstehende Schema gegeben sind, haben ersichtlich die Eigenschaft, paarweise vertauschbar zu sein, und die Vertauschbarkeit der mit ihnen verknüpften Zuordnungen ist für lineare Complexe das Kennzeichen der involutorischen Lage (vgl. diese Annalen Bd. IV, S. 414).

Um aber den nöthigen Beweis zu führen, construire ich vier lineare Complexe aus je fünf denselben angehörigen Linien und zeige sodann, dass sie die voraufgeführten Zuordnungen zur Folge haben. Es soll dies der Kürze wegen nur mit Bezug auf die erste Zuordnung auseinandergesetzt werden. Man construire nämlich den linearen Complex, der die folgenden fünf Geraden enthält:

die Doppellinie der Fläche,

die Polare,

die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte 2, 3'; 3, 4'; 4, 2'.

Man betrachte sodann etwa die singulären Strahlen S_2 und S_3. Die Linien des linearen Complexes, welche beide schneiden, müssen eine Regelschaar bilden und vermöge derselben werden die beiden Punktreihen S_2 und S_3 projectivisch auf einander bezogen sein. Aber von dieser Regelschaar sind drei Erzeugende bekannt: die Doppellinie, die Polare und die Gerade 2, 3'. Sie ordnen den Punkten p_2, q_2, 2 von S_2 die Punkte p_3, q_3, 3' von S_3 zu. Da aber p_2, q_2 auf S_2 zu 2, 2' und p_3, q_3 auf S_3 zu 3, 3', oder, was dasselbe ist, zu 3', 3 harmonisch sind, so werden auch 2', 3 durch die Regelschaar zugeordnet werden. *Dem linearen Complexe gehört also auch die Gerade 2', 3 an.* Dasselbe beweist man in ähnlicher Weise von den Geraden 3', 4; 4', 2.

Unter den geraden Linien, die durch den Punkt 2 hindurchgehen, kennt man jetzt zwei als dem linearen Complexe angehörig, nämlich 2, 3' und 2, 4'. Dem Punkte 2 ist also im Complexe die Ebene 2, 3', 4', d. h. nach der oben festgesetzten Bezeichnung die Ebene *II* zugeordnet. Dieselbe geht ausser durch 2, 3', 4' noch durch 1 hindurch; die Gerade 1, 2 gehört also ebenfalls dem Complexe an. In gleicher Weise zeigt man, dass den Punkten 3 und 4 die Ebenen *III* und *IV* entsprechen und also auch 1, 3; 1, 4 dem Complexe angehören. Hieraus denn endlich folgt, dass dem Punkte 1 die Ebene *I* entspricht. Die Zuordnung von 1', 2', 3', 4' bez. zu *I'*, *II'*, *III'*, *IV'* ergiebt sich auf dieselbe Weise und es ist somit der geforderte Beweis erbracht.

Durch denselben linearen Complex werden einander zugeordnet, wie nicht näher ausgeführt zu werden braucht: die vier singulären Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 bez. den vier singulären Punkten P_1, P_2, P_3, P_4; die vier singulären Strahlen S_1, S_2, S_3, S_4 bez. den vier singulären Axen A_1, A_2, A_3, A_4 u. s. w. Wir haben also;

Das Singularitätensystem ist in Bezug auf den construirten linearen Complex seine eigene conjugirte Polare.

was die Gleichheit der von den vier singulären Punkten und den vier singulären Ebenen gebildeten Doppelverhältnisse als einzelne Behauptung einschliesst. Weiter aber folgt:

Die Complexfläche selbst ist in Bezug auf den Complex ihre eigene conjugirte Polare.

Denn die Polarfläche derselben ist wieder eine Fläche vierter Ordnung mit derselben Doppellinie, denselben singulären Strahlen, denselben Berührungskegelschnitten in den Doppelebenen, und durch diese Elemente ist die Fläche als Fläche vierter Ordnung mehr als vollständig bestimmt.

Hiermit sind die zu Anfang voraufgeschickten Sätze und also auch die aus ihnen gezogenen Folgerungen bewiesen.

Erlangen, October 1873.