Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne.

Par J. P. Gram à Copenhague.

Dans un mémoire inséré au volume 62 du journal de Crelle*), M. Aronhold a cherché de déduire directement de la théorie des transformations linéaires les principes fondamentaux de la théorie des invariants, en montrant, comment ces fonctions se présentent naturellement, quand on cherche les conditions pour la transformation d'une forme donnée en une autre. Cette méthode a des avantages essentielles sur celle de commencer par une définition des invariants, sans montrer à priori l'existence des fonctions en question. Clebsch a fait usage du même procédé**) et quoiqu'il l'ait simplifié en quelques parties, la méthode n'a pas encore été rendue assez simple et élémentaire pour qu'on puisse s'en servir pour donner le fondament générale d'un développement élémentaire de la théorie des invariants et covariants.

C'est pour cette raison que j'ai essayé, dans ce qui va suivre, de pousser à fin la méthode de Aronhold, en appliquant seulement des considérations élémentaires. — La première partie se rattache donc assez près au mémoire cité de Aronhold, dans la seconde partie j'introduis les covariants, dont ensuite je démontre les propriétés les plus importantes par rapport aux transformations linéaires.

Quoique donc la plupart des théorèmes démontrés ne soient pas nouveaux, j'espère que dans les démonstrations de ceuxci il y aura quelque chose digne d'intérêt.

1.

Soit proposée une forme générale de l'ordre p et de n variables $x_1, x_2, \cdots x_n$. — Dans la notation symbolique***) cette forme sera représentée par

---

*) Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Crelle 62, p. 281.

**) Clebsch, Theorie der binären Formen, §§ 79., 80., p. 300.

***) Voir Clebsch, Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen, Crelle Bd. 59, et Binäre Formen p. 28.

$$a_x^p = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n)^p,$$

c'est à dire par la puissance $p^{ième}$ d'une forme linéaire où, pour toutes les valeurs des indices $\iota, \varkappa, \lambda \cdots$, on pose

$$a_1^\iota a_2^\varkappa a_3^\lambda \cdots = a_{\iota\varkappa\lambda\ldots} \quad (\iota + \varkappa + \lambda \cdots = p).$$

Si l'on transforme les variables (x) *) par les formules

$$x_i = \alpha_{i1} \xi_1 + \alpha_{i2} \xi_2 + \cdots \alpha_{in} \xi_n,$$

la forme a_x^p sera transformée en une autre de même ordre et, pourvu que le déterminant de transformation ne s'annulle pas, aussi du même nombre de variables. Cette forme, la forme transformée, sera représentée par $a_\xi'^p$, de sorte qu'on aura

$$a_\xi'^p = a_x^p.$$

Soit encore b_ξ^p une forme quelconque de l'ordre p des variables (ξ). Si par une transformation linéaire il sera possible de transformer a_x^p en b_ξ^p, il faut et il suffit que, pour toutes les valeurs des indices $\iota \varkappa \lambda \cdots$, on puisse avoir

(1) $$a'_{\iota\varkappa\lambda\ldots} = b_{\iota\varkappa\lambda\ldots}$$

Ces équations, en nombre $\mu = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}$, contiennent dans les premiers membres les coefficients (a) et les coefficients (α), encore indéterminés. Par l'élimination de ces derniers, dont le nombre est n^2, on obtient $\mu - n^2$ équations finales dans lesquelles entrent seulement les (a) et les (b), et qui en général seront les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation soit possible.

Pour pouvoir mieux étudier les équations de condition, on forme des équations (1) un système nouveau équivalent de la forme

(2) $$b_{\iota\varkappa\lambda\ldots} a'_{\varrho\sigma\tau\ldots} = b_{\varrho\sigma\tau\ldots} a'_{\iota\varkappa\lambda\ldots}$$

Ces équations seront homogènes par rapport à tous les coefficients (a), tous les (b) et tous les (α). Ils donnent comme le système primitif encore $\mu - n^2$ résultants indépendentes, qui seront homogènes, soit par rapport à tous les (a), soit à tous les (b).

Chacun de ces résultants peut être mis sous la forme

(3) $$R = A_0' B_0 + A_1' B_1 + \cdots A_\nu' B_\nu = 0,$$

les (A') désignant des fonctions entières et homogènes de même degré seulement des (a), les (B) des fontions ayant les mêmes propriétés par rapport aux (b).

---

*) En général, je dénote par (x) tout le système des variables x_i marqués des indices différents, également par (α) tous les coefficients de transformation α_{ik}, etc.

Le résultant R peut être supposé irreductible, de sorte qu'il n'existe aucune relation linéaire plus simple entre les mêmes fonctions (A'), dont les coefficients dépendent des (b).

De chaque résultant R on peut alors dériver au moins un autre plus simple.

Soit c_ζ^p une troisième forme, qui par une transformation linéaire peut se transformer en a_x^p. Entre les coefficients (c) et (a) il subsiste alors une relation analogue à $R=0$, savoir

$$R' = A_0' C_0 + A_1' C_1 + \cdots A_\nu' C_\nu = 0\,, \tag{4}$$

les fonctions (C) étant semblables aux (B). Du même, entre les coefficients (b) et (c) on a la relation

$$R'' = B_0' C_0 + B_1' C_1 + \cdots B_\nu' C_\nu = 0\,, \tag{5}$$

où (B') sont analogues aux (A') dans R.

En résolvant les égalités (3) et (4) par rapport à A_0' et en égalant les deux valeurs, on obtient

$$A_1' \frac{B_1}{B_0} + A_2' \frac{B_2}{B_0} + \cdots A_\nu' \frac{B_\nu}{B_0} = A_1' \frac{C_1}{C_0} + A_2' \frac{C_2}{C_0} + \cdots A_\nu' \frac{C_\nu}{C_0}\,. \tag{6}$$

Cette relation doit être identique. — Car par une transformation linéaire, dont les coefficients soient (β), on peut transformer b_ξ^p en c_ζ^p, supposé que a_x^p puisse se transformer en b_ξ^p, ce qui doit être le cas selon les relations (3). Si donc on exprime les (c) par (b) et (β), on obtient de (6) une relation entre les (a), les (b) et les coefficients (β) parfaitement arbitraires. Cette relation qui ne contient que ν fonctions (A') ne peut donc avoir lieu, à moins qu'elle ne soit identique. C'est à dire, il faut que

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{C_1}{C_0}, \quad \frac{B_2}{B_0} = \frac{C_2}{C_0} \text{ etc.,}$$

pour qu'on puisse transformer b_ξ^p en c_ζ^p. Du même on aura entre les coefficients de a_x^p et de b_ξ^p des égalités semblables, savoir

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1}{B_0}, \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{B_2}{B_0} \text{ etc.,} \tag{7}$$

les (A) étant les mêmes fonctions des (a) que les (B) des (b).

C'est évident, que ces égalités seront les conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité de la transformation de a_x^p en b_ξ^p, car leur nombre est au moins égal au nombre des résultants primitifs $R=0$.

Les quotients rationels $\frac{A_\iota}{A_0}$ ont donc la propriété caractéristique de rester invariables, soit qu'on les forme de coefficients d'une forme quel-

conque a_x^p, soit de coefficients d'une forme qui, par une transformation linéaire, peut être dérivée de a_x^p.

Par cette raison on les nomme *les invariants absolus* de la forme a_x^p.

L'égalité des invariants absolus est donc la condition nécessaire et suffisante pour que, par une transformation linéaire, deux formes générales se puissent réduire l'une à l'autre.

De là il suit aussi, que tous les invariants absolus seront des fonctions de $\mu - n^2$ entre elles.

Si de la même manière on cherchait les conditions de la transformation d'un système de formes en une autre par la même transformation linéaire, on trouverait aussi des équations de la forme (7), c'est à dire l'égalité des invariants absolus.

Soit $\frac{P(a)}{Q(a)}$ un invariant absolu d'un système de formes, donc je désigne les coefficients par (a). Si l'on désigne par (a') les coefficients transformés, $c \cdot a \cdot d \cdot$ les coefficients des formes transformées, on a l'égalité

$$\frac{P(a')}{Q(a')} = \frac{P(a)}{Q(a)},$$

d'où il suit que*)

(8) $$P(a') = \varrho \cdot P(a)\,; \qquad Q(a') = \varrho \cdot Q(a)\,.$$

Par une transformation linéaire quelconque le numérateur et le dénominateur des invariants absolus ne sont par conséquent altérés que par un facteur, qui évidemment ne peut dépendre des coefficients (a), mais seulement des coefficients de transformation.

Toutes les fonctions des coefficients d'un système de formes, qui ont cette propriété, sont nommées *invariants*.

Le facteur ϱ étant une fonction des (α), nous le représenterons par $\varphi(\alpha)$ ou par $\varphi(\alpha_{ik})$. — Les invariants pouvant être supposés homogènes, $\varphi(\alpha)$ doit l'être aussi par rapport à tous les coefficients (α). On a donc

$$P(a') = \varphi(\alpha) \cdot P(a)\,.$$

Si l'on transforme de nouveau les formes une fois transformées, et désigne par (a'') les nouveaux coefficients transformés, par (β) les coefficients de la dernière transformation, on obtient

$$P(a'') = \varphi(\beta)\, P(a') = \varphi(\beta)\, \varphi(\alpha)\, P(a)\,.$$

Supposons que la dernière transformation soit la réciproque de la première, $P(a'')$ est donc égal à $P(a)$ et l'on aura

(9) $$\varphi(\beta)\, \varphi(\alpha) = 1\,.$$

---

*) Voir Clebsch, Binäre Formen p. 306.

Mais pour la transformation réciproque on a

$$\beta_{ik} = \frac{r_{ki}}{r};$$

en posant le déterminant $\Sigma \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn} = r$, et r_{ki} désignant le sous-déterminant de $\alpha_{\lambda i}$ dans r.

L'égalité (9) peut donc s'écrire ainsi

$$\varphi(\alpha_{i\lambda}) \cdot \varphi\left(\frac{r_{\lambda i}}{r}\right) = 1,$$

ou, en dénotant par ν le degré de la fonction homogène φ

(10) $$\varphi(\alpha_{i\lambda})\, \varphi(r_{ki}) = r^{\nu}.$$

D'où il suit, que $\varphi(\alpha)$ doit être un facteur rationel du degré ν de r^{ν}, l'autre facteur est du degré $(n-1) \cdot \nu$.

Les éléments du déterminant r étant supposés indépendents entre elles, r n'est pas résoluble en facteurs rationels. Les deux facteurs de r^{ν} doivent donc être des puissances entières de r, multipliées par un même constant numérique, qui pourtant ne peut être que l'unité positive. — Donc il faut que $\nu = n\lambda$, λ étant un nombre entier, et l'on aura

(11) $$\varphi(\alpha) = r^{\lambda}; \qquad \varphi(r_{ik}) = r^{(n-1)\lambda}.$$

D'où résulte le théorème suivant*).

Quand une fonction des coefficients d'un système de formes par une transformation linéaire des formes n'est alterée que par la multiplication par un facteur constant, alors ce facteur est nécessairement une puissance du déterminant de la transformation.

La définition complète des invariants est donc donnée par l'identité

(12) $$J(a') = r^{\lambda} \cdot J(a),$$

$J(a)$ étant un invariant quelconque.

Le théorème subsiste encore quand P contient, non seulement des coefficients, mais aussi des variables. On peut directement appliquer la même démonstration.

2.

Une transformation linéaire des variables d'une forme comporte également une transformation linéaire des coefficients, les coefficients transformés (a') étant des fonctions, linéaires par rapport aux (a), homogènes du degré n par rapport aux (α). Pour déterminer la forme

*) Voir la mémoire citée de Aronhold, le théorème V; Clebsch: Binäre Formen p. 306.

générale de ces fonctions, nous considérons en premier lieu des formes linéaires.

Soit (a_x) un système de formes linéaires contenant des variables (x) ou (y), (z) $\cdots$, cogrédients avec ceux-la. Les coefficients transformés seront alors déterminés par ce que pour toutes les formes on doit avoir identiquement

$$a'_\xi = a_x .$$

Si l'on écrit les formules de transformation des (x) ainsi

$$(13) \qquad x_\iota = \alpha_\iota \xi_1 + \beta_i \xi_2 + \gamma_i \xi_3 + \cdots \nu_\iota \xi_n , \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

on trouve pour les coefficients transformés les expressions suivantes

$$a_1{}' = a_\alpha , \quad a_2{}' = a_\beta , \quad a_3{}' = a_\gamma \cdots\cdots , a_n{}' = a_\nu .$$

En résolvant ces équations par rapport aux (a), on obtient les (a) exprimés par (a'). Le déterminant de la transformation dite est $r = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \cdots \nu_n = (\alpha\beta\gamma \cdots \nu)$.

Les coefficients symboliques d'une forme de l'ordre p étant transformés par les mêmes formules que ceux de la puissance p^{ieme} d'une forme linéaire a_x, on trouvera pour les coefficients transformés de a_x^p les expressions symboliques suivantes

$$(14) \quad a_1'^{\iota} a_2'^{\varkappa} a_3'^{\lambda} \cdots = a_\alpha^\iota a_\beta^\varkappa a_\gamma^\lambda \cdots \qquad (\iota + \varkappa + \lambda + \cdots = p) .$$

Si donc dans l'identité

$$J(a) = \frac{J(a')}{r^\lambda} ,$$

$J(a)$ désignant un invariant quelconque d'un système de formes, on remplace les coefficients de transformation (α), (β), (γ) $\cdots$ respectivement par les n systèmes différents (x), (y), (z) $\cdots$ de variables cogrédients, le déterminant $(\alpha\beta\gamma\cdots)$ devient $(xyz\cdots)$ et les coefficients transformés deviendront toutes les polaires des formes primitives par rapport aux n systèmes de variables.

De là suit le théorème suivant:

On peut exprimer rationellement tous les invariants d'un système de formes par toutes les polaires des formes données par rapport aux n systèmes de variables (x), (y), (z) $\cdots$, en remplaçant pour chaque forme le coefficient symbolique $a_1^\iota a_2^\varkappa a_3^\lambda \cdots$ par la polaire corréspondante $a_x^\iota a_y^\varkappa a_z^\lambda \cdots$, et en divisant ensuite par une puissance du déterminant $(xyz\cdots)$. Réciproquement toute fonction rationelle entière, obtenue en divisant par une puissance de $(xyz\cdots)$ un aggrégat de polaires, aura toujours la propriété caractéristique des invariants: savoir que la fonction, formée des éléments transformés, ne diffère que par un facteur, qui est une puissance du déterminant de transformation r, de celle formée des éléments primitifs.

Si une telle fonction ne contient que des coefficients elle est donc un invariant, si elle contient des variables elle s'appelle un *covariant*.

Le théorème énoncé se démontre facilement. Soit F une fonction rationelle entière des polaires, divisible par $(xyz\cdots)^\lambda$, K le quotient de division, K' la transformée de celle-ci. Par une transformation quelconque F reste invariable, toutes les polaires restant invariables, tandisque, selon la règle de la multiplication des déterminants, $(xyz\cdots) = r\,(\xi\eta\zeta\cdots)$, $(\xi)\,(\eta)\,(\zeta)\cdots$ étant les variables transformés, corréspondents aux (x), (y), $(z)\cdots$. On aura donc

$$K' = \frac{F}{(\xi\eta\zeta\cdots)^\lambda} = \frac{F}{r^{-\lambda}(xyz\cdots)^\lambda} = r^\lambda\,\frac{F}{(xyz\cdots)^\lambda} = r^\lambda\cdot K,$$

ce qui fut à démontrer.

Parmi les covariants il faut compter, soit les formes elles mêmes et leurs polaires, pour lesquelles $\lambda = 0$, soit le déterminant $(xyz\cdots)$, qu'on nomme le covariant identique.

Tous les covariants, qui ne contiennent plus de n systèmes de variables cogrédients, peuvent être obtenus par la méthode développée, ce qu'on peut vérifier en remplaçant dans un covariant quelconque comme ci-dessus (α), (β), $(\gamma)\cdots$ réspectivement par (x), (y), $(z)\cdots$. Les coefficients (a') deviennent alors des polaires, les variables $(\xi)\,(\eta)\,(\zeta)\cdots$, qu'on obtient en résolvant les équations de transformation (13), deviennent égaux à l'unité ou s'annullent, et le covariant transformé se réduit à une fonction des polaires, qui divisée par $(xyz\cdots)^\lambda$ donne le covariant primitif.

Pour les covariants qui contiennent un nombre quelconque de systèmes de variables, on peut appliquer la même représentation, ce qui est évident selon le théorème de Clebsch sur la réprésentation symbolique des covariants et invariants*). — Je n'insisterai pas sur ce sujet.

La représentation développée à quelque interêt comme se rattachant immédiatement à la définition des fonctions en question; j'en donnerai ensuite une application importante.

3.

Jusqu'ici nous avons supposé que toutes les formes considérées soient des formes générales, considérons à présent des formes spéciales.

Si entre les coefficients d'une forme ou d'un système de formes il existe une seule relation homogène, $\varphi(a) = 0$, *invariable par une trans-*

*) Crelle's Journal Bd. 59. Une démonstration élémentaire de ce théorème important est donnée par M. Zeuthen dans le „Tidesskrift for Mathematik" Copenhague 1872.

formation linéaire, il faut nécessairement que $\varphi(a)$ doit être un invariant.

Car $\varphi(a) = 0$ devant entrainer $\varphi(a') = 0$ on aura

$$\varphi(a') = c \cdot \varphi(a),$$

donc $\varphi(a)$ est un invariant.

S'il-y-avait une relation homogène $\varphi(a) = 0$, $\varphi(a)$ n'étant pas un invariant, il-y-aura nécessairement d'autres relations analogues, afin que la même relation puisse subsister pour une forme quelconque transformée.

Car on aura pour toute transformation $\varphi(a') = 0$. Si pour (a') nous substituons leurs expressions en (a) et en les coefficients de transformation (α), nous obtiendrons $\varphi(a')$ sous la forme

$$\varphi(a') = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots c_m\varphi_m,$$

les (c) étant fonctions des (α), les (φ) des (a).

La transformation étant complètement arbitraire, les (c) sont des constants arbitraires. Afin que $\varphi(a')$ soit donc égal à zéro il faut nécessairement que simultanément

$$\varphi_1(a) = 0, \quad \varphi_2(a) = 0 \cdots\cdots \varphi_m(a) = 0.$$

Remplaçons, comme nous l'avons fait plus haut, les coefficients de transformation par n systèmes de variables (x) (y) $(z)\cdots$, alors $\varphi(a')$ devient une fonction invariable composée des polaires, conséquemment un covariant, dont les coefficients évidemment seront $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$ $\cdots\cdots \varphi_m(a)$. On voit ainsi que ce covariant doit s'évanouir identiquement si la relation $\varphi(a) = 0$ aura lieu pour toute transformation linéaire.

$\varphi(a)$ est du reste elle-même un des coefficients du covariant obtenu, ou au moins une fonction linéaire à coefficients numériques de ceux-ci. Car on l'obtient de $\varphi(a')$ en posant

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = k \\ 0 \quad \text{,,} \quad i \gtrless k, \end{cases}$$

ce qui est le même que dans le covariant trouvé de poser

$$x_1 = y_2 = z_3 = \cdots\cdots = 1.$$

en égalant tous les autres variables à zéro.

Si la fonction proposée $\varphi(a)$ n'était pas homogène, on verrait facilement en la résolvant en des parties homogènes que chacune de celles-ci donnerait naissance à un covariant, qui devrait s'annuller séparément.

Ordinairement un covariant ainsi obtenu contient comme facteur une puissance du covariant identique $(xyz\cdots)$; en divisant par celle-ci on obtient un covariant plus simple, dont les coefficients sont les mêmes que ceux du covariant obtenu en premier lieu.

Du développement précédent suit immédiatement le théorème suivant bien connu*), mais tant que je sais pas encore démontré.

Toutes les relations entre les coefficients d'un système de formes, qui sont invariables par des transformations linéaires seront exprimées par l'évanouissement identique d'un certain nombre de covariants, qui ne contiennent plus de n systèmes de variables cogrédients. — Particulièrement ces covariants peuvent devenir des invariants.

Réciproquement, *si un covariant d'un système de formes s'annulle identiquement, le même sera le cas pour le covariant corréspondant d'un système transformé.*

Cela suit immédiatement de l'identité $K' = r^{\lambda} K$, les coefficients de K' étant des fonctions linéaires des coefficients de K, ce que l'on voit en introduisant pour les variables (x) (y) (z) leurs expressions en (ξ) (η) (ζ), et en comparant ensuite les coefficients des mêmes combinaisons des variables transformés.

Le théorème énoncé montre aussi, que c'est une condition *nécessaire*, afin qu'on puisse transformer deux systèmes de formes speciales l'une dans l'autre, que pour les deux systèmes les mêmes covariants s'annullent identiquement.

Cette condition sera du reste en même temps que l'égalité des invariants absolus la condition suffisante.

Soit effectivement proposé un système de formes dont les coefficients soient au nombre μ, et un autre système de formes réspectivement des mêmes ordres. Les mêmes covariants (invariants) sont supposés de s'annuller pour tous les deux systèmes, ce qui corréspond pour chacun d'eux à ν relations indépendentes entre les coefficients. Conséquemment on doit avoir $\mu - \nu - n^2$ conditions pour la possibilité de la transformation.

En même temps, entre les $\mu - n^2$ invariants absolus de chaque système de formes il subsistera ν relations en conséquence des ν relations entre les coefficients; il n'y-a donc pour chaque système que $\mu - \nu - n^2$ indépendents entre les invariants absolus. L'égalité des invariants absolus indépendents, qui seront formés de la même manière des coefficients de chaque système, sera donc la condition nécessaire et suffisante pour la transformation en question. — D'où le théorème suivant**):

---

*) Voir par exemple Clebsch: Binäre Formen p. 91.

**) Cfr. Clebsch: Binäre Formen p. 365. Il faut remarquer, que l'égalité des invariants absolus renferme que les mêmes *invariants* s'annullent, mais point toujours que les mêmes covariants s'évanouissent identiquement. De là viennent les cas spéciales par la théorème comme l'a énoncé Clebsch.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse transformer l'un à l'autre deux systèmes de formes quelconques, sont 1°, que les mêmes covariants (et invariants) s'annullent identiquement pour tous les deux systèmes et 2°, que les invariants absolus soient égaux.

Ce théorème montre comment la théorie des covariants et invariants suffit pour discuter complètement la théorie des transformations linéaires.

Toutes les formes, qui ont les mêmes covariants et invariants zéro, auront toutes les mêmes propriétés caractéristiques, indépendentes des transformations linéaires. On peut donc sur cette circonstance fonder une classification naturelle des formes de même ordre suivant leurs covariants et invariants zéro; ce qui au fond revient au même principe que la classification des courbes suivant leurs singularités.

Si l'on connait pour une forme proposée les relations invariables $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \cdots$ qui doivent subsister entre les coefficients, la méthode indiquée plus haut donne le moyen de déterminer directement les covariants ou invariants, qui doivent s'annuller.

Dans une des fonctions φ on n'a qu'à substituer des polaires pour les coefficients (a) et à reduire par division par $(xyz\cdots)$ tant que possible. On obtient par là un covariant, qui corréspond à un certain nombre de relations. — Des relations non contenues dans le covariant trouvé, on prend une nouvelle et la traite de la même manière, ce qui donne un deuxième covariant qui corréspond également à plusieurs relations; et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les relations soient consommées. — Par là on verra aussi, si quelqu'une des fonctions φ serait un invariant.

Quand le nombre n des variables surpasse deux, il peut être avantageux pour les sous-déterminants d'ordres différents de $(xyz\cdots)$ d'introduire des variables cogrédients de différents classes, ainsi comme Clebsch l'a indiqué*). Il faut alors, que tous les coefficients de la forme intermédiaire, ainsi obtenue, s'annullent. On peut ensuite, si cette forme contiendrait plusieurs systèmes de variables de même classe, égaler tous ces systèmes, pourvu que l'évanouissement de la dernière forme entraîne nécessairement que la première s'évanouisse aussi.

Pour illustrer la méthode expliquée par un simple exemple connu, nous cherchons le covariant qui doit s'annuller identiquement, afin qu'une forme ternaire cubique soit un cube parfait**).

On aura entre les coefficients d'un cube de la forme linéaire ternaire a_x des relations suivantes de second degré

*) Clebsch: Ueber ein Fundamentalproblem der Invariantentheorie, Schriften der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1872.

**) Voir Gundelfinger: Mathematische Annalen Bd. IV, p. 571.

$$(a_1 a_2 a_3)^2 = a_1{}^2 a_2 \cdot a_2 a_3{}^2 , \qquad a_1{}^3 \cdot a_2{}^3 = a_1{}^2 a_2 \cdot a_1 a_2{}^2 ,$$

et les autres analogues à celle-ci. Si donc la forme symbolique $a_x{}^3$ soit un cube parfait, on doit avoir les relations symboliques suivantes

$$a_1 a_2 a_3 \cdot b_1 b_2 b_3 = a_1{}^2 a_2 \cdot b_2 b_3{}^2 ; \quad a_1{}^3 \cdot b_2{}^3 = a_1{}^2 a_2 \cdot b_1 b_2{}^2 \text{ etc.}$$

La première donne le covariant

$$a_x a_y a_z b_x b_y b_z - a_x{}^2 a_y b_y b_z{}^2 = a_x a_y b_y b_z [a_z b_x - a_x b_z].$$

En posant $(zxy) = z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3$ on a l'identité $a_x b_y - a_y b_x = (a b u)$, et on peut donc reduire le covariant trouvé à

$$(a b u)\, a_x a_y b_y b_z ,$$

qui est égal à

$$\tfrac{1}{2}\, (a b u)\, a_y b_y\, [a_x b_z - a_z b_x] = \tfrac{1}{2}\, (a b u)\, (a b v)\, a_y b_y ,$$

(v) étant cogrédient à (u). Ce covariant est la polaire de $(a b u)^2 a_y b_y$ par rapport à v, donc il s'annulle avec ce-ci, et la relation proposée donne ainsi la forme intermédiaire

$$\Theta = (a b u)^2 a_x b_x ,$$

qui doit s'évanouir identiquement.

De même la relation $a_1{}^3 b_2{}^3 - a_1{}^2 a_2 b_1 b_2{}^2 = 0$ donne le covariant

$$a_x{}^3 b_y{}^3 - a_x{}^2 a_y b_x b_y{}^2 = a_x{}^2 b_y{}^2 [a_x b_y - a_y b_x] = (a b u)\, a_x{}^2 b_y{}^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\, (a b u)\, [a_x{}^2 b_y{}^2 - a_y{}^2 b_x{}^2] = \tfrac{1}{2}\, (a b u)^2\, [a_x b_y + a_y b_x] ,$$

qui est une polaire par rapport à (y) de la forme Θ obtenue en premier lieu. Toutes les autres relations étant tout à fait analogues aux deux relations considérées, elles ne peuvent donner quelque forme nouvelle. — La condition nécessaire et suffisante, afin qu'une forme ternaire cubique soit un cube parfait, est donc que la forme intermédiaire $\Theta = (a b u)^2 a_x b_x$ soit identiquement égale à zéro.

Copenhague, Mai 1873.