

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1874

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0007

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0019

LOG Titel: Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen.

Von PAUL DU BOIS-REYMOND in FREIBURG i. BR.

Lejeune-Dirichlet's Resultat, dass die Fourier'sche Reihe für einen Werth x_1 von x , an dessen beiden Seiten die darzustellende Function um ein Endliches verschiedene Werthe

$$\lim f(x_1 - \varepsilon) = f(x_1 - 0), \quad \lim f(x_1 + \varepsilon) = f(x_1 + 0)$$

besitzt, deren Mittelwerth

$$\frac{1}{2} (f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0))$$

annehme, ist einige Mal Gegenstand kritischer Bemerkungen gewesen*). Eine etwas eingehendere Untersuchung der sprungweisen Werthänderungen analytisch dargestellter Functionen wird daher nicht überflüssig erscheinen. Sie führt zu einem allgemeinen Satze über die Sprünge willkürliche Functionen darstellender Integrale und Reihen.

I. Allgemeine Bemerkungen über sprungweise Werthänderungen der Functionen.

1.

Die im Endlichen sprungweise sich ändernden expliciten Functionen einer reellen Veränderlichen sind Grenzwerte analytischer Ausdrücke, z. B. Reihen mit in's Unendliche wachsender Gliederzahl oder Integrale, bei denen ein Parameter oder eine Grenze einen numerischen Grenzwert annimmt. Bei unstetigen Functionen wie:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, \quad f(0 - 0) = -1, \quad f(0 + 0) = +1,$$

ist die unendliche Operation nur durch die Bezeichnung verdeckt. Denn $f(x)$ ist der Limes ($n = \infty$) der für $x = 0$ stetigen Function:

*) Siehe u. A. H. Schläfli, Borchardt's Journal, Bd. 72, S. 284.

$$\frac{x^{n-1} + \frac{x^{n-2}}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n!}}{2x^n + \frac{x^{n-1}}{1} + \cdots + \frac{1}{n!}}.$$

Wir können also allgemein die unstetige Function mit

$$f(x) = \lim_{h=\infty} f(x, h)$$

bezeichnen, wo im Falle z. B. einer Reihe h die unendlich werdende Gliederzahl vorstellt. Von der Function $f(x)$ werden wir annehmen, dass sie vor und nach der Sprungstelle stetig ist und nicht unendlich viele Maxima hat. Es wird zweckmässig sein, unsere Betrachtungen an ein einfaches Beispiel zu knüpfen und wir wählen dazu die bekannte Function:

$$f(x, h) = \operatorname{arctg} h(x_1 - x).$$

2.

Um die Unstetigkeit von $\lim f(x, h) = \lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$ für $x = x_1$ wohl zu verstehen, haben wir zu beachten, in welcher Weise die unbestimmten Grössen x und h die bestimmten Werthe x_1 und ∞ annehmen. Wir können x den Werth x_1 ertheilen:

- 1) nachdem $h = \infty$ gesetzt worden,
- 2) bevor dies geschehen,
- 3) können wir gleichzeitig h unendlich und $x_1 - x$ Null werden lassen.

Diese drei Operationen schreiben wir in Formeln, wie folgt:

$$\lim_{\varepsilon=0} \lim_{h=\infty} f(x_1 \pm \varepsilon, h), \quad \lim_{h=\infty} \lim_{\varepsilon=0} f(x_1 \pm \varepsilon, h), \\ \lim_{\varepsilon=0, h=\infty} f(x_1 \pm \varepsilon, h).$$

Sie führen zu folgenden drei Werthbestimmungen des $\lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$ für $x = x_1$.

- 1) Beschränkt man die unbestimmte Grösse x dahin, dass sie kleiner oder dass sie grösser als x_1 ist, so ergeben sich für den $\lim f(x, h)$ die Werthe $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$. Wenn man jetzt nachträglich (also nachdem $\lim f(x, h)$ einen der Werthe $\pm \frac{\pi}{2}$ angenommen) x von seinem unbestimmt gelassenen Werthe aus, den wir z. B. als $\frac{x_1}{2}$ uns denken können, bis x_1 wachsen lässt, so wird der $\lim f(x, h)$, welcher gleich $\frac{\pi}{2}$ ist und x gar nicht mehr enthält, auch nur $\frac{\pi}{2}$ bleiben können. Daher fallen nach dem ersten Verfahren auf $x = x_1$ nur die Werthe $+\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ von $\lim f(x, h)$. Noch evidentere wird dies, wenn wir dafür sorgen, dass der Limes nicht unabhängig von x wird, indem wir z. B. $f(x, h) = \operatorname{arctg} h(x_1 - x) + x^2$ setzen.

2) Nach dem zweiten Verfahren setzen wir zuerst $x = x_1$, wodurch $f(x, h)$ Null wird. Setzt man darauf $h = \infty$, so bleibt für $x = x_1$ der Werth Null bestehen. Es kommen aber auf die nämliche Weise wie unter 1) die Werthe $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ hinzu, so dass $\lim f(x, h)$ für $x = x_1$ jetzt die drei Werthe $+\frac{\pi}{2}$, 0 , $-\frac{\pi}{2}$ repräsentirt.

3) Nach dem dritten Verfahren endlich setzt man gleichzeitig $x = x_1$, $h = \infty$. Wird dabei keine besondere Beziehung zwischen dem Wachsthum von h und der Abnahme von $x_1 - x$ angenommen, so kann das Produkt $h(x_1 - x)$ an der Grenze jeden beliebigen Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ erhalten, und $\lim f(x, h)$ stellt für $x = x_1$ alle Werthe zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ vor.

Den eben entwickelten drei Auffassungen entsprechen die drei Darstellungen:

Fig. 1.

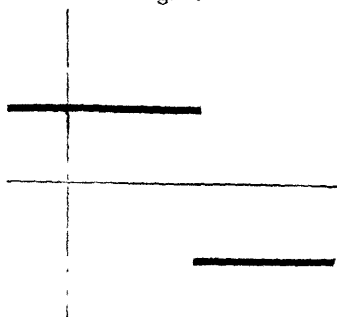


Fig. 2.

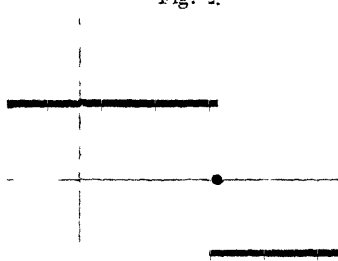
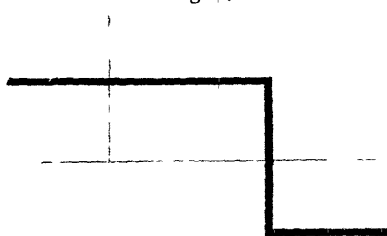


Fig. 3.

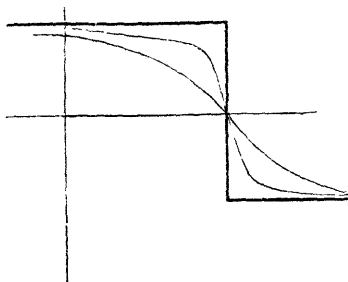


Falls der $\lim f(x, h)$ in einem bestimmtem Problem auftritt, so wird dieses darüber entscheiden, wie man ihn aufzufassen hat. Tritt

aber die Frage an uns heran, was man sich, ganz allgemein zu reden, darunter zu denken habe, so ist dies Sache individuellen Beliebens. Mir persönlich sagt es am meisten zu, Fig. 3 als Darstellung des $\lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$ mir zu denken. Ich kann meine Wahl durch folgende Gründe rechtfertigen.

Die gebrochene Linie ist offenbar die Grenzgestalt der stetigen Curve $y = \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$, wenn h noch nicht unendlich ist, wie dies Fig. 4 andeutet:

Fig. 4.



Dann lässt sich nach der dritten Auffassung die Gleichung

$$y = f(x) = \lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$$

umkehren. D. i. man kann daraus $x = \varphi(y)$ darstellen, was nach den beiden ersten Auffassungen nicht möglich ist. Denn, wie die Figur 3 zeigt, ist $x = x_1$ im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$. Nun ist auch

$$x = x_1 - \frac{\operatorname{tg} y}{h},$$

welches im nämlichen Intervalle den nämlichen $\lim x$ ergibt.

Die dritte Auffassung erschöpft den ganzen in $\lim f(x, h)$ enthaltenen Werthevorrath*), und wahrt die Stetigkeit der Reihenfolge dieser Werthe.

Diese Stetigkeit betreffend fällt noch Folgendes ins Gewicht. Die Unstetigkeiten der Fourier'schen Darstellungen willkürlicher Functionen (Reihen und Integral) sind, worauf bald des Genaueren eingegangen werden soll, ganz von derselben Beschaffenheit, wie die des $\lim \operatorname{arctg} h(x_1 - x)$. Hier lässt sich aber die dritte Auffassung besser den physikalischen Anschauungen anpassen als die beiden anderen. Denn wenn z. B. eine plötzliche Dichtigkeitsänderung eines Mediums darzustellen ist, so wird die erste Vorstellungsweise der Idee entsprechen, dass absolut ohne Uebergang zwei verschiedene Dichtigkeiten aneinander stoßen. Die zweite wird in der Trennungsfläche ohne physikalischen Grund das Mittel der angrenzenden Dichtigkeiten setzen. Die dritte

*) Wie sich Hr. C. Neumann treffend ausdrückt.

wird einem in einer unendlich dünnen Schicht stattfindenden continuirlichen Uebergang der einen Dichtigkeit in die andere mathematisch sich anschliessen, und so dem „*natura non facit saltum*“ in der analytischen Darstellung zu seinem Recht verhelfen. Hiernach ist die erste zur Noth, die dritte Vorstellung durchaus, die zweite gar nicht physikalisch gerechtfertigt. Aehnliches gilt von dem durch Fourier'sche Darstellungen auszudrückenden Anfangszustand einer Saite, der Grenzlinie einer elastischen Membran, u. s. w.

Aus allen diesen Gründen halte ich den Dirichlet'schen Mittelwerth an der Unstetigkeitsstelle — so lange man in der allgemeinen Theorie bleibt — für eine weniger natürliche Auffassung, als die geradlinige Verbindung der an die Unstetigkeitsstelle angrenzenden Werthe.

Ganz Aehnliches gilt auch von der sprungweisen Werthänderung des Differentialquotienten einer stetigen Function, wie im folgenden Artikel erörtert wird.

4.

Es möge bis zum Punkte x_1 der Differentialquotient $\frac{df}{dx} = f'(x)$ stetig sein und von da ab wieder, aber die Grösse $f'(x_1 + 0)$ sei nicht gleich $f'(x_1 - 0)$: die Curve $y = f(x)$ hat alsdann an der Stelle x_1 einen Knick. Eine kleine Veränderung der gewöhnlichen Definition des Differentialquotienten führt dazu, auch diese Unstetigkeit nach den obigen Principien behandeln zu können.

Statt unter der Ableitung $f'(x)$ den Limes ($\varepsilon = 0$) einer der Grössen:

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}, \quad \frac{f(x) - f(x - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

zu verstehen, wollen wir sie symmetrisch als:

$$\lim_{x=x'=x''} \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

auffassen, wo der Limes bedeutet, dass die unbestimmten Grössen x' und x'' auf beliebige Weise in den Werth x übergehen. Oder, was damit gleichbedeutend ist, wir setzen:

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon=0, \varepsilon_1=0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1}$$

wo die Grössen ε und ε_1 (die auch in Bezug auf ihre Zeichen beliebig sind) auf alle erdenklichen Weisen gleichzeitig oder nacheinander Null werden. Dies ist offenbar der allgemeinste, jeden anderen als speciellen Fall enthaltende Begriff vom Differentialquotienten.

Bilden wir nach dieser Definition den Differentialquotienten für eine Ecke x_1 , so wird er, ε und ε_1 positiv vorausgesetzt:

$$\lim \frac{\varepsilon f'(x_1 + \eta) + \varepsilon_1 f'(x_1 - \eta)}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

wo die Mittelwerthe η und η_1 den Bedingungen $0 \leq \eta \leq \varepsilon$, $0 \leq \eta_1 \leq \varepsilon_1$ genügen, oder unter Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung in Bezug auf ε und ε_1 wird er:

$$\lim_{\varepsilon + \varepsilon_1} \varepsilon f'(x_1 + 0) + \varepsilon_1 f'(x_1 - 0),$$

stellt also, wenn über das Nullwerden von ε und ε_1 gar nichts vorausgesetzt wird, jeden Werth zwischen $f'(x_1 - 0)$ und $f'(x_1 + 0)$, diese incl., vor. Daher diese Darstellung des Differentialquotienten der Vorstellung entspricht, dass die Ecke einen Uebergang der einen Tangente in die andere bei unendlich kleiner Krümmung vermittelt. Für $\varepsilon = \varepsilon_1$ geht der Differentialquotient an der Ecke in das Mittel $\frac{1}{2}(f'(x_1 + 0) + f'(x_1 - 0))$ über, indessen ist die Annahme $\varepsilon = \varepsilon_1$ eine ganz willkürliche Beschränkung.

Es mag sich z. B. um die zweiten Differentialquotienten des Potentials V einer homogenen Kugel an deren Oberfläche handeln. Man hat:

$$\text{im Innern der Kugel } \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi D x, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi D$$

$$\text{im Aeusseren } \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi D \frac{R^3 x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{4}{3}\pi D \frac{k^3(3x^2 - r^2)}{r^5}.$$

An der Oberfläche entsprechen $f'(x_1 + 0)$:

$$\frac{4}{3}\pi D \frac{3x_1^2 - R^2}{R^2}$$

und $f'(x_1 - 0)$:

$$-\frac{4}{3}\pi D$$

Der Differentialquotient $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ in seiner allgemeinsten Auffassung ist somit:

$$\frac{4}{3}\pi D \frac{\varepsilon \cdot \frac{3x_1^2 - R^2}{R^2} - \varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

Wenn $\varepsilon_1 = 0$ gesetzt wird, ist sein Werth:

$$\frac{4}{3}\pi D \frac{3x_1^2 - R^2}{R^2},$$

so dass die Summe $\Delta V = 0$ wird. Dies ist der äussere Differentialquotient. Setzt man erst $\varepsilon = 0$, so wird $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi D$ und $\Delta V = -4\pi D$. Es sind also die extremen Fälle. Durch alle übrigen Annahmen über das Nullwerden von ε und ε_1 erhält man alle Uebergänge von $\Delta V = -4\pi D$ in $\Delta V = 0$. Die Annahme $\varepsilon = \varepsilon_1$ ergibt wieder den Mittelwerth $\Delta V = \frac{1}{2}(-4\pi D + 0) = -2\pi D$, ist indessen, wie bemerkt, eine willkürliche Beschränkung. Wenn also Gauss den Mittelwerth $-2\pi D$ in der Oberfläche der Kugel offenbar mit Recht verwirft, so vermag ich doch nicht die der ersten Auffassung der vorigen Artikel ent-

sprechende unvermittelte Folge der Werthe $\Delta V = -4\pi D$ und $\Delta V = 0$ für die richtige oder doch die allein richtige Vorstellung zu halten. Sondern die unendlich rasche aber stetige Verwandlung von ΔV aus $-4\pi D$ in Null, wie sie der dritten Auffassung entspricht, erscheint gleichberechtigt und ist mir die angenehmere Vorstellung.

Ich habe nun noch zu zeigen, inwiefern diese Betrachtungen auf alle Integrale und Reihen Anwendung finden, welche willkürliche Functionen darstellen.

II. Ueber die sprungweisen Werthänderungen der willkürliche Functionen darstellenden Integrale und Reihen.

5.

Die Formel, um welche es sich handeln wird, lautet:

$$(I) \quad (G_- + G_+)f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_A^B d\beta f(\beta) \varphi(\alpha, \beta - x)^*.$$

Sie setzt voraus, dass

$$G_+ = \int_0^\infty d\alpha \int_0^b d\beta \varphi(\alpha, \beta), \quad G_- = \int_0^\infty d\alpha \int_{-a}^0 d\beta \varphi(\alpha, \beta)$$

von a und b unabhängig sind, und dass $A < x < B$. Ist x ausserhalb des Intervalls $A \dots B$ gelegen, so ist das Integral rechts in (I) Null. Man kann die Formel auch schreiben:

$$(II) \quad (G_- + G_+)f(x) = \lim \int_A^B d\beta f(\beta) \Phi(\beta - x, h)$$

wo der $\lim$ bedeutet, dass im vollzogenen Integral $h = \infty$ zu setzen ist und wo:

$$\Phi(\beta, h) = \int_0^h d\alpha \varphi(\alpha, \beta).$$

6.

An ein paar Beispielen werde ich zunächst die Beziehungen dieser Formeln zum Gegenstand dieses Aufsatzes erläutern.

Man hat:

*) Borchardt's Journal, Bd. 69, S. 65 und diese Annalen Bd. IV, S. 362.

$$\operatorname{arctg} h b = \int_0^h d\alpha \int_0^b d\beta \frac{1 - \alpha^2 \beta^2}{(1 + \alpha^2 \beta^2)^2}$$

$$\operatorname{arctg} h a = \int_0^h d\alpha \int_{-a}^0 d\beta \frac{1 - \alpha^2 \beta^2}{(1 + \alpha^2 \beta^2)^2}$$

Beide Integrale werden also $\frac{\pi}{2}$ für $h = \infty$ und von a und b unabhängig.

Nach (I) hat man mithin:

$$\pi f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_A^B d\beta f(\beta) \frac{1 - \alpha^2(\beta - x)^2}{(1 + \alpha^2(\beta - x)^2)^2}.$$

Die Unstetigkeiten des Integrals sind also nur die der Function $f(x)$, wenn man diese ausserhalb des Integrals $A \cdots B$ Null annimmt. Falls z. B. $f(x)$ im Intervall $A \cdots B$ Eins ist, hat man:

$$\begin{aligned} \int_0^h d\alpha \int_A^B d\beta \frac{1 - \alpha^2(\beta - x)^2}{(1 + \alpha^2(\beta - x)^2)^2} &= \operatorname{arctg} h(B - x) - \operatorname{arctg} h(A - x) \\ &= \operatorname{arctg} \frac{h(B - A)}{1 + h^2(B - x)(A - x)} \end{aligned}$$

woraus sofort klar ist, dass bei dieser besonderen Annahme über $f(x)$ die Sprünge von $f(x)$ für $x = A$ und $x = B$ ganz wie im Art. I. behandelt werden können.

Das zweite Beispiel sei eine jener Unstetigkeiten, die „durch Abänderung eines Functionalwerthes hebbare“ genannt worden sind.

Durch geeignete Specialisirung von Formel (II) findet man:

$$f(0) \int_0^\infty \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} d\alpha = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\alpha f(\alpha) \frac{\varphi(\alpha h)}{\alpha}.$$

Setzen wir $\varphi(\alpha) = \sin \alpha^2$ und schreiben $f(x + \alpha)$ statt $f(\alpha)$, so ergibt sich voraus:

$$\lim \int_0^\infty \frac{\sin h^2 \alpha^2}{\alpha} f(x + \alpha) d\alpha = \frac{\pi}{4} f(x + 0).$$

Ferner

$$\lim_{-\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin h^2 \alpha^2}{\alpha} f(x + \alpha) d\alpha = -\frac{\pi}{4} f(x - 0).$$

Also:

$$\lim_{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha f(x + \alpha) \frac{\sin h^2 \alpha^2}{\alpha} = \frac{\pi}{4} \{f(x + 0) - f(x - 0)\}$$

woraus:

$$\frac{\pi}{8} \{f(x+0) - f(x-0)\} = \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \alpha (\beta - x) \cos \alpha^2 (\beta - x)^2.$$

Diese Formel hat folgende eigenthümliche Beschaffenheit. Das Integral rechter Hand ist Null überall, wo $f(x)$ stetig ist, und hat einen Werth nur, wo $f(x)$ springt. Setzen wir $f(x)$ Null von $-\infty$ bis a , und gleich $\frac{8}{\pi}$ von a bis ∞ , so kann der Limes von

$$f(x, h) = \frac{8}{\pi} \int_0^h d\alpha \int_a^{\infty} d\beta \alpha (\beta - x) \cos \alpha^2 (\beta - x)^2 = \frac{2}{\pi} \int_{h^2(a-x)^2}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha,$$

wie aus der zweiten $f(x, h)$ gegebenen Form ohne Weiteres zu ersehen, auf folgende drei Weisen aufgefasst werden. Setzt man $f(a) = \lim_{x=a} \lim_{h=\infty} f(x, h)$ so ist $f(x)$ für alle Werthe von x incl. $x = a$ Null. Setzt man $f(a) = \lim_{h=\infty} \lim_{x=a} f(x, h)$ so ist $f(x)$ sonst überall Null nur für $x = a$ ist $f(x) = 1$. Setzt man endlich $f(a) = \lim_{x=a, h=\infty} f(x, h)$, so ist $f(x)$ sonst Null, nur für $x = a$ repräsentirt $f(a)$ alle Werthe von Null bis Eins.

Es sei z. B. $a = 0$, ferner sei $z = f(x^2 + y^2)$ die Gleichung einer Fläche, also:

$$z = \lim_{h^2(x^2+y^2)} \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\sin \alpha}{\alpha}}^{\infty} d\alpha,$$

so ist diese Fläche nach der ersten Auffassung des Limes die xy -Ebene, nach der zweiten die xy -Ebene mit dem Punkt $x = 0, y = 0, z = 1$, nach der dritten die xy -Ebene mit einem Loth von der Länge 1 im Punkt $x = 0, y = 0$ errichtet.

Was wir bei besondern willkürliche Functionen darstellenden Integralen und besonderen Annahmen über die willkürlichen Functionen oben gesehen, nämlich die Gültigkeit der drei Auffassungen des Art. 1. ist bei den allgemeinen Formeln (I) und (II) weiter zu verfolgen, wobei sich die Aufgabe stellt, wie folgt:

Wir schreiben statt I.:

$$(G_- + G_+) f(x, h) = \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \varphi(\alpha, \beta - x),$$

wo $\lim f(x, h) = f(x)$, und statt A und $B - \infty$ und $+\infty$ gesetzt wurde, unter der Voraussetzung, dass das Integral nach β dann vermöge der Beschaffenheit von $f(\beta)$ convergirt, was z. B. der Fall sein wird, wenn $f(\beta)$, ausser in einem im Endlichen gelegenen Intervall, Null ist. Nun sei $f(x_1 - 0)$ für einen Werth $x = x_1$ nicht gleich $f(x_1 + 0)$. Es ist der Limes von $f(x, h)$ zu finden, wenn die un-

bestimmten Grössen $x_1 - x$ und h auf irgend eine vorgeschriebene Weise die bestimmten Werthe 0 und ∞ annehmen.

7.

Wir setzen, um die Aufgabe des vorigen Artikels zu lösen:

$$\int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \varphi(\alpha, \beta - x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \Phi(\beta - x, h) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta + x) \Phi(\beta, h)$$

und schreiben $\psi(\beta)$ statt $f(\beta + x_1)$, so dass $\psi(\beta)$ für $\beta = 0$ springt. Wir haben dann den Limes des Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \psi(\beta + \varepsilon) \Phi(\beta, h)$$

zu untersuchen, wenn ε und h Null und Unendlich werden.

Es sei zunächst $\varepsilon \geq 0$, und wir untersuchen einzeln die Integrale:

$$J_1 = \int_0^{\infty} d\beta \psi(\beta + \varepsilon) \Phi(\beta, h), \quad J_2 = \int_{\infty}^0 d\beta \psi(\beta + \varepsilon) \Phi(\beta, h),$$

auf ihre Grenzwerte. Das erste lässt sich auf die Form

$$\int_0^{\infty} d\beta \psi(\beta) \Phi(\beta, h) + \int_0^{\infty} d\beta (\psi(\beta + \varepsilon) - \psi(\beta)) \Phi(\beta, h)$$

bringen, deren erster Theil für $h = \infty$

$$\psi(+0) G_+$$

wird, während der zweite für $\varepsilon = 0$, $h = \infty$, wie mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes leicht festzustellen, Null wird. So dass also:

$$\lim J_1 = \psi(+0) G_+.$$

Um nun das Integral:

$$J_2 = \int_{-\infty}^0 d\beta \psi(\beta + \varepsilon) \Phi(\beta, h)$$

an der Grenze $\varepsilon = 0$, $h = \infty$ zu bestimmen, schreiben wir es zunächst so:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 d\beta \Phi(\beta, h) \{ \psi(\beta + \varepsilon) + \varrho(\beta) (\psi(-0) - \psi(+0)) \} \\ & + (\psi(+0) - \psi(-0)) \int_{-i}^0 d\beta \Phi(\beta, h). \end{aligned}$$

Hierin stellt $\varrho(\beta)$ eine unstetige Function vor, die Null ist für

$-\infty \leq \beta < \varepsilon$ und Eins für $\varepsilon \leq \beta \leq 0$. Dann ist die Function

$$\psi(\beta + \varepsilon) + \varphi(\beta) \{ \psi(-0) - \psi(+0) \},$$

vorausgesetzt, dass $\psi(\beta)$ nur für $\beta = 0$ unstetig wird, im ganzen Intervall $-\infty$ bis 0 stetig. Denn wenn $\psi(\beta + \varepsilon)$ für $\beta = -\varepsilon$ plötzlich den Zuwachs $\psi(+0) - \psi(-0)$ erhält, so wird dieser Zuwachs durch das zweite Glied gerade aufgehoben. Der Limes von

$$\int_{-\infty}^0 d\beta \Phi(\beta, h) \{ \psi(\beta + \varepsilon) + \varphi(\beta) (\psi(-0) - \psi(+0)) \}$$

ist hiernach unabhängig von der Art des Nullwerdens von ε und $\frac{1}{h}$, wie dies bei dem Integral J_1 schon gezeigt wurde, und wird:

$$\psi(-0) G_-.$$

Es ist also

$$\lim_{-\infty} \int d\beta \psi(\beta + \varepsilon) \Phi(\beta, h) = \psi(-0) G_- + (\psi(+0) - \psi(-0)) \lim_{-\infty} \int d\beta \Phi(\beta, h).$$

Setzen wir die ursprünglichen Bezeichnungen zurück, so ergibt sich für ein positives ε :

$$\begin{aligned} & \lim \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \varphi(\alpha, \beta - x_1 - \varepsilon) \\ &= f(x_1 + 0) G_+ + f(x_1 - 0) G_- + \{f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)\} \lim \int_0^h d\alpha \int_{-\varepsilon}^0 d\beta \varphi(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Ganz ebenso würde man für ein negatives ε erhalten haben:

$$\begin{aligned} & \lim \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \varphi(\alpha, \beta - x_1 + \varepsilon) \\ &= f(x_1 + 0) G_+ + f(x_1 - 0) G_- - \{f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)\} \lim \int_0^h d\alpha \int_0^{\varepsilon} d\beta \varphi(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Beide Formeln vereinigt geben den Satz:

Wenn $f(x)$ für $x = x_1$ den Zuwachs $f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)$ erhält, und Lim einen ganz beliebigen Grenzübergang der unbestimmten Grössen $x_1 - x$, h in die Werthe 0, ∞ bezeichnet, so ist:

$$(III) \left\{ \begin{aligned} & \text{Lim} \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \varphi(\alpha, \beta - x) \\ &= f(x_1 + 0) G_+ + f(x_1 - 0) G_- - \{f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)\} \text{Lim} \int_0^h d\alpha \int_0^{x_1 - x} d\beta \varphi(\alpha, \beta) \end{aligned} \right.$$

welcher die am Schlusse des vorigen Artikels gestellte Aufgabe löst.

8.

Es ist zunächst leicht den Satz des vorigen Artikels im Falle eines successiven Grenzübergangs zu bestätigen. Setzt man erst $x = x_1$ und dann $h = \infty$, so wird das Integral rechts Null und der Werth des Integrals links ist:

$$f(x_1 + 0)G_+ + f(x_1 - 0)G_- ,$$

welcher, falls $G_+ = G_-$ ist, in das Dirichlet'sche Mittel:

$$\frac{G_+ + G_-}{2} \{f(x_1 + 0) + f(x_1 - 0)\}$$

übergeht. Ist $x < x_1$ und man setzt zuerst $h = \infty$, so wird das Integral rechts hierdurch schon von vornherein G_+ , und die rechte Seite wird:

$$(G_+ + G_-)f(x_1 - 0) ,$$

welches also der Werth des Integrals links ist, wenn x bis x_1 wächst. Für $x_1 < x$ und $h = \infty$ ist das Integral rechts $-G_-$, so dass das Integral links, wenn x bis x_1 abnimmt, gleich:

$$(G_+ + G_-)f(x_1 + 0)$$

wird, wie dies Alles mit der bisherigen Theorie übereinstimmt.

Zu den drei Auffassungen des Art. 2. verhält sich also die allgemeine Formel (III) so. Setzt man:

$$f(x, h) = \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \varphi(\alpha, \beta - x)$$

so ist

$$\lim_{x=x_1} \lim_{h=\infty} f(x, h) = \begin{cases} (G_+ + G_-)f(x_1 - 0), & x \leq x_1 \\ (G_+ + G_-)f(x_1 + 0), & x \geq x_1 \end{cases}$$

$$\lim_{h=\infty} \lim_{x=x_1} f(x, h) = G_+ f(x_1 + 0) + G_- f(x_1 - 0)$$

$\lim_{x=x_1, h=\infty} f(x, h)$ repräsentirt eine stetige Folge von Werthen, die

je nach der Beschaffenheit des Integrals $\int_0^h d\alpha \int_0^{x_1-x} d\beta \varphi(\alpha, \beta)$ die Werthe

$(G_+ + G_-)f(x_1 - 0)$, $(G_+ + G_-)f(x_1 + 0)$ entweder nur verbinden, oder noch ausserhalb des Intervalls, welche diese Werthe einschliessen, sich erstrecken können. Denn das in der Formel (III) rechts auftretende Integral:

$$\int_0^h d\alpha \int_0^\varepsilon d\beta \varphi(\alpha, \beta) ,$$

wie wir es kurz schreiben wollen, kann auf die Form

$$\lim_{x=0} \lim_{y=0} \{F(\varepsilon, h) - F(\varepsilon, y) - F(x, h) + F(x, y)\}, \text{ wo } \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

gebracht werden*). Hierin kann die Grösse $F(\varepsilon, h)$ wenn ε und $\frac{1}{h}$ gleichzeitig verschwinden, vermöge geeigneter Beschaffenheit der Function F jeden beliebigen Werth erhalten, der durchaus nicht an das Intervall

$$\int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\varepsilon} d\beta \varphi(\alpha, \beta) \cdots \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\varepsilon}^0 d\beta \varphi(\alpha, \beta)$$

gebunden ist, wie ich dies in einer Abhandlung, deren Gegenstand die *Stetigvieldeutigkeit* der Functionen ist, an mehreren Beispielen gezeigt und erklärt habe.**)

9.

Im Falle der gemeinen Fourier'schen Formel lautet die Formel (III)

$$\begin{aligned} & \text{Lim} \int_0^h d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \cos \alpha(\beta - x) \\ &= \frac{\pi}{2} \{f(x_1+0) + f(x_1-0)\} - \{f(x_1+0) - f(x_1-0)\} \text{Lim} \int_0^{\frac{(x_1-x)h}{\sin \alpha}} d\alpha \end{aligned}$$

und im Falle der Sinus-Cosinus-Reihe:

$$\begin{aligned} & \text{Lim} \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta f(\beta) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\beta - x)}{\sin \frac{\beta - x}{2}} \\ &= \pi \{f(x_1+0) + f(x_1-0)\} - \{f(x_1+0) - f(x_1-0)\} \text{Lim} \int_0^{\frac{x_1-x}{\sin \frac{(2n+1)\alpha}{2}}} d\alpha, \end{aligned}$$

wo der Lim den beliebigen Grenzübergang $x_1 - x = 0$, $n = \infty$ bedeutet. Das in dieser Formel auftretende Integral rechter Hand schreiben wir:

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\frac{1}{2}(x_1-x)} \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha} d\alpha \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}(x_1-x)} \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\alpha} d\alpha + \left(\frac{\frac{1}{2}(x_1-x)}{\sin \frac{1}{2}(x_1-x)} - 1 \right) \cdot 2 \int_{\frac{1}{2}\xi}^{\frac{1}{2}(x_1-x)} \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\alpha} d\alpha, \quad 0 < \xi < \frac{1}{2}(x_1-x), \end{aligned}$$

*) Borchardt's Journal, Bd. 69, S. 70.

**) Borchardt's Journal, Bd. 70, S. 10.

nach dem zweiten Mittelwerthsatz. Das zweite Glied wird stets Null für $x_1 - x = 0$. Also ist:

$$\lim \int_0^{x_1-x} \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha = \lim 2 \int_0^{\frac{1}{2}(2n+1)(x_1-x)} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \lim 2 \int_0^{n(x_1-x)} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Mithin findet man:

$$\begin{aligned} \lim \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) d\alpha + \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \dots \cos nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha \right\} \\ = \frac{\pi}{2} \{f(x_1+0) + f(x_1-0)\} + \{f(x_1+0) - f(x_1-0)\} \lim \int_0^{n(x-x_1)} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Diese Formel enthält das Eingangs dieses Aufsatzes angeführte Dirichlet'sche Resultat vom Mittel der an die Sprungstelle angrenzenden Werthe als speciellen Fall, und muss als die eigentliche Werthbestimmung der Fourier'schen Reihe für Sprungstellen der darzustellenden Function angesehen werden, da sie jeden Werth des Limes der Reihe liefert, wie man auch der Sprungstelle sich nähern und dazu die Gliederzahl unendlich werden lassen möge.

Die in den Formeln für Sprungstellen der Fourier'schen Darstellungen auftretenden Integrale

$$\int_0^{h(x_1-x)} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha, \quad \int_0^{n(x_1-x)} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha$$

können je nach der gegenseitigen Beziehung, gemäss welcher h und $x_1 - x$ oder n und $x_1 - x$ unendlich und Null werden, jeden Werth von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ annehmen. Also sind alle Werthe, welche die Fourier'sche Formel und die Fourier'sche Reihe an der Sprungstelle repräsentirt, eingeschlossen zwischen den Grenzen $\pi f(x_1-0)$ und $\pi f(x_1+0)$, ein Intervall, das sie continuirlich ausfüllen, und kein Werth liegt ausserhalb. Diese Eigenschaft kommt, wie im vorigen Artikel betont wurde, nicht allen darstellenden Formeln zu.

Die allgemeine Formel (III) hat eine gewisse Bedeutung in der Theorie der lineären partiellen Differentialgleichungen, die ich zum Abschluss dieser Betrachtungen im folgenden Capitel entwickeln will. Es wird mir dadurch Gelegenheit gegeben, zunächst mit einigen Worten den Zusammenhang der Lehre von den darstellenden Integralen (I) und (II) Art. 5 mit jener Theorie anzudeuten.

III. Bemerkungen über Sprünge der Randfunctionen bei partiellen Differentialgleichungen.

10.

Die Auflösungen partieller Differentialgleichungen der Form:

$$R \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2S \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + T \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + Zu = 0,$$

wo die Coefficienten u nicht enthalten, pflegen bestimmt zu sein durch willkürlich gegebene Werthe von u und $\frac{\partial u}{\partial N}$ auf einer gegebenen Curve s , deren Normale mit N bezeichnet sei. Es ist dann die Form der Lösung:

$$u = \int ds f(s) \Phi(s, x, y) + \int ds f_1(s) \Phi_1(s, x, y),$$

die Integrale längs der Curve s genommen. Durch Stetigkeitsbedingungen etc. kann eines der Integrale in Wegfall kommen. Wenn die unbestimmten Veränderlichen x, y Werthe x_1, y_1 erhalten, welche einem Punkte s_1 der Curve s entsprechen, so muss das erste Integral sich auf $f(s_1)$, das zweite auf Null reduciren, während in:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \int ds f(s) \frac{\partial \Phi}{\partial N} + \int ds f_1(s) \frac{\partial \Phi_1}{\partial N}$$

das erste Integral für $x = x_1, y = y_1$ Null wird und das zweite gleich $f_1(s)$.

Statt x, y wollen wir andere Coordinaten einführen, nämlich Curven ν , die senkrecht durch die Curve s hindurchgehen, und Curven σ , die senkrecht durch die ν gehen. Zu diesen wird s gehören und wir betrachten nur das erste Integral, welches werden möge:

$$\int ds f(s) \Psi(s, \sigma, \nu).$$

Wir wollen die ν so rechnen, dass sie in der Curve s gleich Null seien, während die Curven s von einer Curve ν an gerechnet werden.

Giebt man dem σ im vorstehenden Integral einen Werth σ_1 und macht dann $\nu = 0$, so wird, wie bemerkt:

$$(IV) \quad f(\sigma_1) = \lim_{\nu=0} \int ds f(s) \Psi(s, \sigma_1, \nu).$$

Aus der Formel (II) folgt:

$$f(x) = \lim_{h=\infty} \int d\beta f(\beta) \frac{\Phi(\beta - x, h)}{G_+ + G_-}.$$

Ein Blick auf beide Formeln zeigt, dass sie ganz dasselbe sind. Denn es entsprechen sich σ_1, ν, s und $x, \frac{1}{h}, \beta$. Wenn Ψ die Grössen s und

σ_1 in allgemeinerer Form enthält, so ist dies nur scheinbar, da Φ die Grösse x ausser in $\beta - x$ noch als Parameter enthalten darf. Es ist überdies nicht schwer nachzuweisen, dass, wenn eine Formel, wie (IV) bestehen soll, Ψ ganz denselben Bedingungen zu unterwerfen ist wie Φ . Die Unmöglichkeit, mit den bekannten Methoden Ausdrücke wie den obigen (IV) zu beherrschen, die Schwierigkeit sie nur zu verificiren (wovon neuere Abhandlungen Zeugniß ablegen), hat mich seiner Zeit bestimmt, die Analogie zwischen Formel (IV) und der Umformung der Fourier'schen Formel:

$$\pi f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta f(\beta) \frac{\sin h(\beta - x)}{\beta - x},$$

welche mich sehr überraschte, bis zu Aufstellung der Formeln (I) und (II) zu verfolgen. Diese Art der Auffassung der Fourier'schen Formel und der ihr nachgebildeten ist, beiläufig bemerkt, verschieden von den Anwendungen, die Fourier selbst gemacht, und deren Princip darin bestand, dass er seinem Doppelintegral einen Factor $\chi(\beta, x, y)$ gab:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-x}^{+\infty} d\beta f(\beta) \chi(\beta, x, y) \cos \alpha(\beta - x),$$

der an der Grenze 1 wird, so dass das Integral dort in $f(x)$ übergeht, und dass $\chi(\beta, x, y) \cos \alpha(\beta - x)$ der Differentialgleichung genügt.

11.

Um nun zum Gegenstand dieses Aufsatzes zurückzukehren, wollen wir den Fall ins Auge fassen, wo die in der Grenzkurve willkürlich gegebene Function $f(s)$ für $s = \sigma_1$ springt. Deshalb wird die Function

$$u = \int ds f(s) \Psi(s, \sigma, \nu)$$

nicht unstetig zu sein brauchen. Für die vollständige Erledigung des Problems der partiellen Differentialgleichung ist es aber nöthig festzustellen, zu welchem Werth man gelangt, wenn man auf irgend einem Wege $\lambda(\sigma, \nu) = 0$ das Integral u zum Punkte $\sigma = \sigma_1$, $\nu = 0$ der Grenzkurve führt. Diesen Werth findet man auf Grund der allgemeinen Formel (III) zu:

$$(V) \quad f(\sigma_1 + 0)G_+ + f(\sigma_1 - 0)G_- - \{f(\sigma_1 + 0) - f(\sigma_1 - 0)\} \lim \int_0^{\sigma_1} ds \Psi(s, \sigma, \nu),$$

weil:

$$\int_0^{a_1-\sigma} ds \Psi(s + \sigma, \sigma, \nu) = \int_{\sigma}^{a_1} ds \Psi(s, \sigma, \nu).$$

Es bedeutet in (V):

$$G_+ = \lim_{\gamma=0} \int_0^b ds \Psi(s + \sigma, \sigma, \nu), \quad G_- = \lim_{\gamma=0} \int_{-a}^0 ds \Psi(s + \sigma, \sigma, \nu),$$

welche Grössen von a und b abhängig sind, und ausserdem ist ja die Formel (V) so geschrieben, dass $G_+ + G_- = 1$ angenommen.

Als Beispiel wollen wir die schon öfter behandelte Lösung von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ für die Kreisfläche betrachten.

12.

Die mit den bekannten Stetigkeitsbedingungen der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügende Function u , welche in der Peripherie des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ willkürlich gegeben ist, lautet:

$$2 \pi u = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1-r^2)f(p)dp}{1-2r\cos(p-\varphi)+r^2},$$

wo $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Hierin entspricht $1-r$ der Variablen ν in (IV), $r\varphi$ der Variablen σ , p dem s .

Um den Werth dieses Integrals für $r=1$ zu finden, betrachten wir das einfachere:

$$\int_0^a \frac{dp(1-r^2)}{1-2r\cos p+r^2} = \operatorname{arctg} \frac{(1-r^2)\operatorname{tg} a}{1-\frac{2r}{\cos a}+r^2}.$$

Es ist also nur der Werth des arctg für $r=1$ festzustellen, ob er Null oder welches Vielfache von π er sei. Null ist er wahrscheinlich nicht, weil für $p=0$ das Argument des Integrals $dp \frac{1+r}{1-r}$ wird, also für $r=1$ einen unendlichen Werth annimmt*). Da ausserdem $r \leq 1$, muss der arctg positiv sein.

*) In einer Abhandlung, Borchardt's Journal Bd. 73, S. 357, stellt Herr Prym die Behauptung auf, dass das Eingangs des Artikels verzeichnete Integral „auf dem Rande (für $r=1$) versagt, indem es dort allenthalben den Werth Null liefert“. Wenn man unter jenem Integral, unter dem doch r noch

Es sind die Werthe zu untersuchen, welche das Argument des arctg:

$$F(r, a) = \frac{(1 - r^2) \operatorname{tg} a}{1 - \frac{2r}{\cos a} + r^2}$$

durchläuft, wenn a von Null bis zu einem davon verschiedenen Werthe a_1 geht und r von einem von Eins verschiedenen Werth $r_1 < 1$ bis 1

steht, sich das denkt, was das Zeichen bedeutet, nämlich das Resultat des *vollzogenen*, Integration genannten Grenzübergangs, so wird das Integral für $r = 1$ nicht versagen, sondern ist, wie im Texte gezeigt wird, gleich $2\pi f(\varphi)$. Wollte man einwenden, unter Integral auf dem Rande sei das zu verstehen, was aus dem Integral wird, wenn *vor* der Integration, also in der noch endlich zu deckenden Summe, $r = 1$ gesetzt wird, so würde jenes Integral dann doch nicht *Null*, sondern *unbestimmt*, weil der Nenner eines seiner Elemente Null ist.

Ich glaube jedoch nicht, dass es dem üblichen Sinne unserer mathematischen Bezeichnungen entspreche, wenn man sagte, das in Rede stehende Integral sei auf dem Rande unbestimmt. Genau mit demselben Rechte könnte man von dem Ausdruck:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta f(\beta) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\beta - x)}{\sin \frac{\beta - x}{2}}$$

behaupten, dass er für $n = \infty$ versage, indem er dort für jeden Werth von x einen unbestimmten Werth liefere, und dies ist auch wirklich von Hrn. Frombeck in Wien aufgestellt worden.

Wenn in dem Integral einer Function $f(x, h)$ der Parameter h einen Grenzwert, z. B. den Werth $h = \infty$ erhält, so kann man, da hier zwei Grenzübergänge vorliegen (der von der Summe zum Integral, und der Grenzübergang $h = \infty$), wie im Art. 2. dreierlei Auffassungen mit diesen beiden Grenzübergängen verbinden und unterscheiden:

1. $\lim_{\delta=0} \lim_{h=\infty} \sum_p f(p\delta, h)$, 2. $\lim_{h=\infty} \lim_{\delta=0} \sum_p f(p\delta, h)$
3. $\lim_{\delta=0, h=\infty} \sum_p f(p\delta, h)$.

Nach der ersten Auffassung wird vorstehendes Integral (h für n gesetzt) unbestimmt, nach der zweiten $\pi f(x)$, nach der dritten wird es verschiedener bestimmter und unbestimmter Werthe fähig sein.

Gebräuchlich ist wohl bis jetzt, dass ein Autor, der ohne genauere Angaben das Zeichen $\int$ vor einen Ausdruck setzt, dem Leser damit anzeigen will, er denke sich den Grenzübergang, der Integration genannt wird, bereits vollzogen. Das Resultat dieses Grenzübergangs für ein unbestimmtes r im Integral des Textes, oder für ein solches n im Integral dieser Anmerkung, erhält aber keinen unbestimmten Werth, wenn man $r = 1$, $n = \infty$ setzt.

Will man jedoch mit dem $\lim \int f(x, h) dx$ einen von dem gebräuchlichen (dem zweiten) abweichenden jener drei Begriffe verbinden, so ist dagegen nichts einzuwenden, und rein analytisch gedacht, würde ich der dritten Auffassung consequenter Weise den Vorzug geben. Nur muss man dann sich und dem Leser zum Bewusstsein bringen, dass dem alten Zeichen eine neue Bedeutung beigelegt wird.

geht. Diese Werthefolge muss mit $a = 0$, $r = r_1$ anfangen, weil man das Integral bildet, bevor $r = 1$ gesetzt wird.

Die Werthefolge von $F(r, a)$ beginnt also und endet mit Null. Statt sie von $\lim_{a=0} F(r_1, a)$ bis $\lim_{r=0} F(r, a_1)$ gehen zu lassen, können wir sie nur von

$$\lim_{r=0} (\lim_{a=0} F(r, a)) \text{ bis } \lim_{a=0} (\lim_{r=1} F(r, a))$$

gehen lassen, weil durch diese neue Begrenzung nur Nullwerthe ausgeschlossen sind. Um die zwischenliegenden Werthe zu finden, habe ich in der Art. 8. citirten Abhandlung über Stetigvieldeutigkeit Methoden angegeben, welche hier vollständig genügen. Für ihre Anwendung ist es bequemer $F(r, a)$ algebraisch zu machen. Setzen wir $\cos a = 1 - y$, $\varrho = 1 - x$, so folgt:

$$F(\varrho, a) = F(x, y) = \frac{(2x - x^2) \sqrt{2y - y^2}}{-2y + 2xy + x^2 - x^2y}.$$

Um jetzt alle zwischen „erst $y = 0$ dann $x = 0$ “ und „erst $x = 0$ dann $y = 0$ “ liegenden Werthe zu finden, hat man in F nach den Vorschriften jener Abhandlung (§ 6.) für y eine Function der Form:

$$\alpha_1 x^{\mu_1} + \alpha_2 x^{\mu_2} + \dots$$

einzuführen, wo $\mu_1 < \mu_2 < \dots$, und hat alsdann alle Werthe aufzusuchen, die F annimmt für $x = 0$ und für alle möglichen Annahmen über $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots$. Man übersieht aber in allen solchen Fällen sehr schnell, welche Functionen y von x neue Werthe liefern. Hier ist es $y = \alpha x^2$, welche den ganzen Werthevorrath von $F(x, y)$ erschöpft. Man findet:

$$F(x, \alpha x^2) = \frac{(2 - x) \sqrt{2\alpha - \alpha^2 x^2}}{1 - 2\alpha + 2\alpha x - \alpha x^2}$$

und für $x = 0$, mithin $y = 0$:

$$F(x, \alpha x^2)_{x=0} = \frac{2\sqrt{2\alpha}}{1 - 2\alpha}.$$

Um die stetige Reihenfolge der Werthe $F(0, 0)$ zu erhalten, hat man α von 0 bis ∞ gehen zu lassen. Man erhält also die Werthe:

Substitution	$F(0, 0)$
1. erst $y = 0$, dann $x = 0$	0
2. $y = \alpha x^2$, dann $x = 0$ ergiebt:	
für $\alpha = 0$	0
für α von Null bis $\frac{1}{2}$	von 0 bis $+\infty$
für α von $\frac{1}{2}$ bis ∞	von $-\infty$ bis 0
3. erst $x = 0$, dann $y = 0$	0

In dem in Rede stehenden $\arctg F(r, a)$ durchläuft also von $a = 0$ bis $a = a$ für $r = 1$ $F(r, a)$ die Werthe von 0 bis $+\infty$, von $-\infty$ bis Null, mithin ist

$$\lim_{r=1} \int_0^b \frac{(1-r^2) dp}{1-2r \cos p + r^2} = \pi = G_+.$$

Ebenso findet man:

$$\lim_{r=1} \int_{-a}^0 \frac{(1-r^2) dp}{1-2r \cos p + r^2} = \pi = G_-.$$

Nach Formel (I) und (II) folgt, weil G_- und G_+ von a und b unabhängig sind:

$$2\pi f(\varphi) = \lim_{r=1} \int_A^B \frac{(1-r^2) f(p) dp}{1-2r \cos(p-\varphi) + r^2},$$

falls $A < \varphi < B$. Also ist in der That die Auflösung

$$2\pi u = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1-r^2) f(p) dp}{1-2r \cos(p-\varphi) + r^2}$$

nichts weiter als ein darstellendes Integral von der in Formel (I) Art. 5. enthaltenen Art.

Bestimmen wir noch den Grenzwert von u , falls r und φ sich einem Punkte 1, φ_1 der Grenze nähern, in dem $f(p)$ springt.

13.

Formel (V) wird in unserem Falle:

$$2\pi \text{Lim } u = \pi \{f(\varphi_1+0) + f(\varphi_1-0)\} - \{f(\varphi_1+0) - f(\varphi_1-0)\} \text{Lim} \int_0^{\varphi_1-\varphi} \frac{(1-r^2) dp}{1-2r \cos p + r^2},$$

wo der Limes sich auf die Relation $\lambda(r, \varphi) = 0$ bezieht, der gemäss $r = 1$, $\varphi = \varphi_1$ werden.

Den nämlichen Werth hat Hr. Prym in der Art. 12. citirten Abhandlung S. 351 unter einer anderen Form erhalten, die wir noch aus der obigen ableiten wollen. Wir setzen $\varphi_1 - \varphi = \Delta\varphi$, so dass das Integral rechts wird:

$$\arctg \frac{(1-r^2) \text{tg } \Delta\varphi}{1 - \frac{2r}{\cos \Delta\varphi} + r^2}.$$

Das Argument dieses $\arctg$ geht vermöge der Substitutionen:

$$r = \sqrt{1 - 2\varrho \sin \tau + \varrho^2}, \quad \text{tg } \Delta\varphi = \frac{\varrho \cos \tau}{1 - \varrho \sin \tau},$$

$$\cos \Delta\varphi = \frac{1 - \varrho \sin \tau}{\sqrt{1 - 2\varrho \sin \tau + \varrho^2}},$$

die einfache in der citirten Abhandlung des Hrn. Prym angegebene Bedeutungen haben, über in:

$$\Gamma(\varrho, \tau) = \frac{2 \sin \tau \cos \tau - \varrho \cos \tau}{2 \sin^2 \tau - 1 + \varrho \sin \tau}$$

und für $\varrho = 0$ in

$$\operatorname{tg}(-2\tau) = \operatorname{tg}(n\pi - 2\tau).$$

Der arctg muss, wie die Discussion des vorigen Artikels lehrt, als $\pi - 2\tau$ aufgefasst werden. Denn lassen wir in $\Gamma(\varrho, \tau)$, ohne $\Delta\varphi$ zu verändern, $r = 1$ werden, so ist wie oben $\lim \operatorname{arctg} \Gamma(\varrho, \tau) = \pi$. Lassen wir darauf $\varrho = 0$ werden, so wird noch $\tau = 0$, und der arctg , der schon $= \pi$ ist, bleibt bei diesem Werth. Also muss in $\operatorname{arctg} \Gamma(0, \tau) = n\pi - 2\tau$, $n = 1$ sein. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\pi \operatorname{Lim} u &= \pi \{f(\varphi_1 + 0) + f(\varphi_1 - 0)\} \\ &\quad - \{f(\varphi_1 + 0) - f(\varphi_1 - 0)\} (\pi - 2\tau) \\ &= 2\pi f(\varphi_1 - 0) + 2\tau \{f(\varphi_1 + 0) - f(\varphi_1 - 0)\}, \end{aligned}$$

welches die von Hrn. Prym gefundene Form ist.

Das in den beiden letzten Artikeln behandelte Beispiel gestattet, wie Hr. Christophel gezeigt hat*), eine allgemeinere andere Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ umfassende Behandlung, die sich auf die Eigenschaften dieser Differentialgleichung stützt. Ich habe mich indessen an ein Beispiel halten wollen, das zu einer rein analytischen, gerade von der Betrachtung der Differentialgleichung unabhängigen Durchführung geeignet ist.

Freiburg, September 1873.

*) Nachrichten der K. Gesellschaft in Göttingen, 1871, S. 438 sqq.