Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben.

Von W. Göring in Rudolstadt.

Nachstehende Untersuchungen über die Jacobi'sche Thetafunction sind hervorgegangen durch die Anregung, welche ich aus den Arbeiten im mathematischen Seminar zu Breslau unter Leitung des Herrn Prof. Dr. Schröter geschöpft habe. Diese ganze Untersuchung hat ein ein doppeltes Ziel im Auge.

In seinem handschriftlichen Nachlasse hat Gauss gewisse unendliche Reihen und Producte untersucht, mit Hülfe deren er zu einer Reihe sehr eleganter und eigenthümlicher Beziehungen zwischen Grössen gelangt, die er die neuen Transcendenten nannte (vgl. Gauss' Werke, herausgegeben von der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen Bd. III, S. 436—479).

Es stellt sich nun heraus, dass diese Grössen nichts anderes sind als die Jacobi'schen Functionen $\vartheta_3(0, q)$, $\vartheta(0, q)$ und $\vartheta_2(0, q)$, resp. diese Functionen in der Weise verändert, dass man statt q q^3 resp. q^5 setzt. Dabei ist nicht möglich, dass Gauss diese Jacobi'schen Functionen schon gekannt hat, denn seine Abhandlungen tragen die Zeitangaben 1827 August 6 und August 29, während die Fund. nov. bekanntlich 1829 erschienen sind. Es lassen sich jedoch diese Formeln, welche Gauss meist zusammenhanglos und ohne Beweis angegeben hat, aus der Theorie der Thetafunction ableiten. Durch die gütige Erlaubniss des Herrn Prof. Dr. Schröter ist es mir vergönnt, eine einheitliche und an manchen Stellen erweiterte Darstellung dieser Beziehungen, welche den Hauptgegenstand der Arbeiten des mathematischen Seminars ausmachten, zugleich mit meinen eigenen Resultaten, die in dieser Richtung eine Erweiterung der Gauss'schen Formeln für die Sieben anstreben, zu veröffentlichen.

In diese ganze Entwicklung gehen aber fortwährend die Theilwerthe der ϑ-Functionen ein, und diese bilden den anderen Theil der Untersuchungen. Es haben bekanntlich die Jacobi'schen Functionen eine reelle Periode (π) und eine imaginäre ($i \log q$), wenn man bei letzterer von dem dabei auftretenden Exponentialfactor absieht. Dann treten für die reelle Periode die Grössen $\vartheta_3\left(\frac{\mu\pi}{\alpha}, q\right)$, für die imaginäre Periode die Grössen $\vartheta_3\left(\frac{\mu\varpi}{\alpha}, q\right)$ oder $\vartheta_3(\mu\varpi, q^\alpha)$ als Theilwerthe auf, wenn $\varpi = i \log q$ und man für μ die Reihe der ganzen Zahlen $1, 2 \cdots \frac{\alpha-1}{2}$ setzt, wobei α eine ungerade Zahl sein soll. Alle übrigen Theilwerthe $\vartheta_3(\varrho \cdot \frac{\mu\pi}{\alpha}, q)$ und $\vartheta_3(\varrho \frac{\mu\varpi}{\alpha}, q)$ lassen sich mit Hülfe der bekannten Periodenformeln auf diese $\frac{\alpha-1}{2}$ Grundwerthe reduciren. Die Untersuchung geht nun dahin, den Zusammenhang dieser Grössen mit jenen Gauss'schen Fundamentalwerthen $\vartheta(0, q^\alpha)$, $\vartheta_2(0, q^\alpha)$, $\vartheta_3(0, q^\alpha)$, $\vartheta(0, q)$, $\vartheta_2(0, q)$, $\vartheta_3(0, q)$ aufzudecken, wo bei Gauss einmal $\alpha = 3$, sodann $\alpha = 5$ ist. Nachdem ich auch von diesen Grössen die Beziehungen bei der Siebentheilung (also für $\alpha = 7$) aufgesucht und die vollkommene Analogie mit den Resultaten der Drei- und Fünf-Theilung entdeckt hatte, liess sich wohl ein allgemeines, dem zu Grunde liegendes Gesetz vermuthen. In der That werden wir dann durch eine für alle ungeraden Zahlen gültige Untersuchung finden, dass sich die Producte aus allen Theilwerthen immer auf eine elegante und einfache Weise durch die Gauss'schen Fundamentalwerthe darstellen lassen.

In Bezug auf alle diese Beziehungen werden wir hier vor uns ein Gebiet eröffnet finden, das in der höheren Analysis ein ebenso abgeschlossenes Ganze ausmacht, wie in den Elementen der Mathematik die Trigonometrie. Ebenso wie in dieser für die sin- und cos-Reihen etc. werden wir hier für die Jacobi'schen Transcendenten gewisse charakteristische Abhängigkeiten bestehend finden, nur dass von beiden Gebieten das unsere eine viel grössere Reichhaltigkeit besitzt, da wir es hier mit Functionen von doppelter Periode zu thun haben.

§ 1.

Zusammenstellung des gesammten zu Grunde liegenden Materials.

Es sind von Jacobi folgende 4 Functionen eingeführt worden:

$$
\begin{aligned}
\vartheta(x, q) &= 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x \mp \cdots \\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} (-1)^h q^{hh} \cos 2hx \\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} (-1)^h q^{hh} e^{2hix} \\
&= \prod_{h=1}^{h=\infty} (1 - q^{2h})(1 - 2q^{2h-1} \cos 2x + q^{4h-2})
\end{aligned}
$$

$$(1)\left\{\begin{aligned}
\vartheta_1(x,q) &= 2q^{\frac{1}{4}}\sin x - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x - 2q^{\frac{49}{4}}\sin 7x \pm \cdots \\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2}\sin(2h+1)x \\
&= \frac{1}{i}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2} e^{(2h+1)ix} \\
&= 2q^{\frac{1}{4}}\sin x \prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1-2q^{2h}\cos 2x + q^{4h}) \\
\vartheta_2(x,q) &= 2q^{\frac{1}{4}}\cos x + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x + 2q^{\frac{49}{4}}\cos 7x + \cdots \\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2}\cos(2h+1)x \\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2} e^{(2h+1)ix} \\
&= 2q^{\frac{1}{4}}\cos x \prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1+2q^{2h}\cos 2x + q^{4h}) \\
\vartheta_3(x,q) &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x + \cdots \\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{hh}\cos 2hx \\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{hh} e^{2hix} \\
&= \prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1+2q^{2h-1}\cos 2x + q^{4h-2})
\end{aligned}\right.$$

Es bedeutet hierin $i = \sqrt{-1}$ und $\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} f(h)$, dass in $f(h)$ für h die Werthe aller ganzen positiven und negativen Zahlen zu setzen und die so erhaltenen Glieder sämmtlich zu addiren sind.

Es ergeben sich hieraus die Specialformeln:

$$\left\{\begin{aligned}
\vartheta(0,q) = \sqrt{\frac{2K\varkappa_1}{\pi}} &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} \mp \cdots \\
&= \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}(-1)^h q^{hh} \\
&= \prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1-q^{2h-1})^2 \\
&= \prod_{h=1}^{h=\infty}\frac{1-q^h}{1+q^h}
\end{aligned}\right.$$

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
&\vartheta_1(0,q)=0\\
&\vartheta_2(0,q)=\sqrt{\frac{2K\varkappa}{\pi}}=2q^{\frac14}+2q^{\frac94}+2q^{\frac{25}{4}}+2q^{\frac{49}{4}}+\cdots\\
&\qquad=\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{\frac14(2h+1)^2}\\
&\qquad=2q^{\frac14}\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1+q^{2h})^2\\
&\qquad=2q^{\frac14}\prod_{h=1}^{h=\infty}\frac{1-q^{4h}}{1-q^{4h-2}}\\
&\vartheta_3(0,q)=\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots\\
&\qquad=\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} q^{hh}\\
&\qquad=\prod_{h=1}^{h=\infty}(1-q^{2h})(1+q^{2h})^2\\
&\qquad=\prod_{h=1}^{h=\infty}\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}\cdot\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}\\
&\vartheta_1'(0,q)=\left[\frac{d\,\vartheta_1(x,q)}{dx}\right]_{x=0}=\vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,.
\end{aligned}\right.
$$

Die Reihen in (1), in denen $q=e^{-\frac{\pi K_1}{K}}$, haben bekanntlich eine doppelte Periode, nämlich π und $i\log q$. Setzen wir der Kürze wegen $i\log=\varpi$, so haben wir die bekannten Beziehungen, in denen m eine beliebige ganze Zahl ist:

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
\vartheta\,(x+m\pi,q)&=\vartheta\,(x,q)\\
\vartheta_1(x+m\pi,q)&=(-1)^m\vartheta_1(x,q)\\
\vartheta_2(x+m\pi,q)&=(-1)^m\vartheta_2(x,q)\\
\vartheta_3(x+m\pi,q)&=\vartheta_3(x,q)\\
q^{mm}e^{2mix}\vartheta\,(x-m\varpi,q)&=(-1)^m\vartheta\,(x,q)\\
q^{mm}e^{2mix}\vartheta_1(x-m\varpi,q)&=(-1)^m\vartheta_1(x,q)\\
q^{mm}e^{2mix}\vartheta_2(x-m\varpi,q)&=\vartheta_2(x,q)\\
q^{mm}e^{2mix}\vartheta_3(x-m\varpi,q)&=\vartheta_3(x,q)\,.
\end{aligned}\right.
$$

Ferner ist bekannt, dass diese 4 Functionen sämmtlich in einander übergehen, wenn man ihre Argumente um die Vielfachen der halben Periode vermehrt oder vermindert; denn es ist:

$$
(4)\left\{\begin{aligned}
&\vartheta\left(x+\tfrac{2m+1}{2}\pi,q\right) &&= &&\vartheta_3(x,q)\\
&\vartheta_1\left(x+\tfrac{2m+1}{2}\pi,q\right) &&=(-1)^m &&\vartheta_2(x,q)\\
&\vartheta_2\left(x+\tfrac{2m+1}{2}\pi,q\right) &&=(-1)^{m+1} &&\vartheta_1(x,q)\\
&\vartheta_3\left(x+\tfrac{2m+1}{2}\pi,q\right) &&= &&\vartheta(x,q)\\
&q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\,\vartheta\left(x-\tfrac{2m+1}{2}\varpi,q\right) &&=i(-1)^m &&\vartheta_1(x,q)\\
&q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_1\left(x-\tfrac{2m+1}{2}\varpi,q\right) &&=i(-1)^m &&\vartheta(x,q)\\
&q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_2\left(x-\tfrac{2m+1}{2}\varpi,q\right) &&= &&\vartheta_3(x,q)\\
&q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_3\left(x-\tfrac{2m+1}{2}\varpi,q\right) &&= &&\vartheta_2(x,q)\\
&q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\,\vartheta\left(x+\tfrac{2m+1}{2}\pi-\tfrac{2n+1}{2}\varpi,q\right) &&= &&\vartheta_2(x,q)\\
&q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_1\left(x+\tfrac{2m+1}{2}\pi-\tfrac{2n+1}{2}\varpi,q\right) &&=(-1)^m &&\vartheta_3(x,q)\\
&q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_2\left(x+\tfrac{2m+1}{2}\pi-\tfrac{2n+1}{2}\varpi,q\right) &&=i(-1)^{m+n+1} &&\vartheta(x,q)\\
&q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)ix}\,\vartheta_3\left(x+\tfrac{2m+1}{2}\pi-\tfrac{2n+1}{2}\varpi,q\right) &&=i(-1)^n &&\vartheta_1(x,q).
\end{aligned}\right.
$$

Diese Formeln zeigen auch, wie schliesslich alle 4 Functionen sich auf eine einzige, z. B. $\vartheta_3(x,q)$, welche die einfachste ist, zurückführen lassen.

Ferner ist zu beachten, dass:

$$
(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\vartheta(-x,q) &= \vartheta(x,q)\\
\vartheta_1(-x,q) &= -\vartheta_1(x,q)\\
\vartheta_2(-x,q) &= \vartheta_2(x,q)\\
\vartheta_3(-x,q) &= \vartheta_3(x,q).
\end{aligned}\right.
$$

Aus den Reihen (1) ergeben sich ferner folgende bekannte, später sehr häufig angewendete Beziehungen:

$$
(6)\quad\left\{\begin{aligned}
2\,\vartheta_3(2x,q^4) &= \vartheta_3(x,q)+\vartheta(x,q)\\
2\,\vartheta_2(2x,q^4) &= \vartheta_3(x,q)-\vartheta(x,q).
\end{aligned}\right.
$$

Wir legen nun ferner folgende wichtige Formel zu Grunde:

$$\vartheta_3(tx+sry,q^r)\,\vartheta_3(sx-tpy,q^p)$$

$$(7)\quad =\sum_{\mu=0}^{\mu=rs^2+pt^2-1} q^{r\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sry)}\,\vartheta_3\left\{(rs^2+pt^2)x-rpt\mu\varpi, q^{rp(rs^2+pt^2)}\right\} \cdot\vartheta_3\left\{(rs^2+pt^2)y-rs\mu\varpi, q^{rs^2+pt^2}\right\}$$

(vgl. Schröter, Ueber die Entwicklung der Potenzen der elliptischen Transcendenten ϑ und die Theilung dieser Functionen; Breslau 1855, S. 6).

Bedingung ist hierin, dass r, s, t, p keinen gemeinsamen Factor haben, sonst können sie beliebige ganze Zahlen sein.

Als specielle Fälle fliessen aus dieser Formel:

$$(8)\quad \vartheta_3(x,q^\alpha,\vartheta_3(y,q^\beta)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha+\beta-1} q^{\alpha\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\alpha\mu\varpi, q^{\alpha+\beta}) \cdot\vartheta_3\left\{\beta x-\alpha y-\alpha\beta\mu\varpi, q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)}\right\}$$

und aus dieser, wenn λ eine ungerade Zahl bedeutet:

$$(9)\quad \begin{cases}\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1}) \cdot\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)})\\ \vartheta(x,q)\;\vartheta(y,q^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1}) \cdot\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)})\\ \vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1}) \cdot\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)})\\ \vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi,q^{\lambda+1}) \cdot\vartheta_3(\lambda x-y-\mu\lambda\varpi,q^{\lambda(\lambda+1)}).\end{cases}$$

ferner:

$$\vartheta_3(tx+sy,q)\,\vartheta_3(sx-ty,q)$$

$$(10)\quad =\sum_{\mu=0}^{\mu=s^2+t^2-1} q^{\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_3\left\{(s^2+t^2)x-t\mu\varpi, q^{s^2+t^2}\right\} \cdot\vartheta_3\left\{(s^2+t^2)y-s\mu\varpi, q^{s^2+t^2}\right\},$$

endlich noch die beiden Formeln:

$$(11)\quad \begin{cases}\vartheta_3(x,q^p)=\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\lambda\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(px-p\mu\lambda\varpi, q^{\lambda pp})\\ \vartheta_3(x,q)=\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(px-p\mu\varpi, q^{pp}),\end{cases}$$

worin p und λ ganz beliebige ganze Zahlen sind (vgl. die schon angeführte Schrift S. 4 und 6, sowie: Schröter, de aequationibus modularibus, Königsberg 1854, S. 6—8).

Es fliessen aus diesen Formeln eine Menge bekannter Beziehungen für den speciellen Fall, dass $\alpha = 1$, $\beta = 1$, die, da sie im Folgenden fortwährend benutzt werden, hier zusammengestellt sind.

Von diesen Formeln sind einige schon von Jacobi angegeben worden (Crelle Bd. 3, S. 305, Bd. 26, S. 103), die übrigen finden sich in der zuletzt citirten Abhandlung (de aequ. mod. S. 9—11), oder sind doch unmittelbare Folgerungen daraus. Zunächst folgt aus (9) für $\lambda = 1$ das bekannte System von 24 Formeln für die Producte je zweier ϑ-Functionen, von denen wir folgende acht als die einfachsten und wichtigsten anführen:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) &= \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2)+\vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2)\\
\vartheta\,(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q) &= \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2)-\vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2)\\
\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(x-y,q) &= \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2)+\vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2)\\
\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(x-y,q) &= \vartheta_3(2x,q^2)\,\vartheta_2(2y,q^2)-\vartheta_2(2x,q^2)\,\vartheta_3(2y,q^2)\\
\vartheta\,(x+y,q)\,\vartheta_3(x-y,q) &= \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2)+\vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2)\\
\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta(x-y,q) &= \vartheta(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2)-\vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2)\\
\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_2(x-y,q) &= \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^2)+\vartheta(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2)\\
\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_1(x-y,q) &= \vartheta_1(2x,q^2)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta(2x,q^2)\,\vartheta_1(2y,q^2).
\end{aligned}\right.$$

Hieraus gehen folgende wichtige specielle Formeln hervor:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta\,(x,q)\;\vartheta_3(x,q) &= \vartheta\,(0,q^2)\;\vartheta\,(2x,q^2)\\
\vartheta_1(x,q)\;\vartheta_2(x,q) &= \vartheta\,(0,q^2)\;\vartheta_1(2x,q^2)\\
2\,\vartheta_3(x,q^2)\;\vartheta_2(x,q^2) &= \vartheta_2(0,q)\;\vartheta_2(x,q)\\
2\,\vartheta\,(x,q^2)\;\vartheta_1(x,q^2) &= \vartheta_2(0,q)\;\vartheta_1(x,q)\,,
\end{aligned}\right.$$

ferner für $x = y = 0$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
2\,\vartheta_3^2(0,q^2) &= \vartheta_3^2(0,q)+\vartheta^2(0,q)\\
2\,\vartheta_2^2(0,q^2) &= \vartheta_3^2(0,q)-\vartheta^2(0,q)\\
\vartheta^2(0,q^2) &= \vartheta(0,q)\cdot\vartheta_3(0,q)\\
\vartheta_3^2(0,q^{\frac12}) &= \vartheta_3^2(0,q)+\vartheta_2^2(0,q)\\
\vartheta^2(0,q^{\frac12}) &= \vartheta_3^2(0,q)-\vartheta_2^2(0,q)\\
\vartheta_2^2(0,q^{\frac12}) &= 2\,\vartheta_2(0,q)\cdot\vartheta_3(0,q)\,,
\end{aligned}\right.$$

ferner:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta_1^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) &= \vartheta_2^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^2)\\
\vartheta^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) &= \vartheta_3^2\left(\frac{\pi}{4},q\right) = \vartheta(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^2)\\
2\,q^{\frac18}\,\vartheta^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) &= 2\,q^{\frac18}\,\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = \vartheta_2(0,q^{\frac12})\;\vartheta(0,q^{\frac12})\\
2\,q^{\frac18}\,\vartheta_3^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) &= 2\,q^{\frac18}\,\vartheta_2^2\left(\frac{\varpi}{4},q\right) = \vartheta_2(0,q^{\frac12})\,\vartheta_3(0,q^{\frac12})\,.
\end{aligned}\right.$$

Die in (15) untersuchten Reihen sind folgende:

$$(16)\quad\begin{cases}\vartheta_2\left(\frac{\varpi}{4},q\right)=\vartheta_3\left(\frac{\varpi}{4},q\right)=1+q^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{6}{2}}+q^{\frac{10}{2}}+q^{\frac{15}{2}}+q^{\frac{21}{2}}+\cdots\\ i\,\vartheta_1\left(\frac{\varpi}{4},q\right)=\vartheta\left(\frac{\varpi}{4},q\right)=1-q^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{6}{2}}+q^{\frac{10}{2}}-q^{\frac{15}{2}}-q^{\frac{21}{2}}+\cdots\\ \vartheta\left(\frac{\pi}{4},q\right)=\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4},q\right)=1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+2q^{64}\mp\cdots\\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{4},q\right)=\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4},q\right)=\sqrt{2}\,(q^{\frac{1}{4}}-q^{\frac{9}{4}}-q^{\frac{25}{4}}+q^{\frac{49}{4}}+q^{\frac{81}{4}}-\cdots).\end{cases}$$

Bemerkenswerth ist in den ersten beiden Reihen das Fortschreiten der Exponenten nach den Triangularzahlen. Auch setzen wir die Producte von 4 ϑ-Functionen voraus, welche resultiren, wenn man in (12) je 2 Gleichungen multiplicirt und dann umformt. Ist:

$$\begin{aligned}2x'&=x+y+z+\omega\\ 2y'&=x-y+z-\omega\\ 2z'&=x+y-z-\omega\\ 2\omega'&=x-y-z+\omega\end{aligned}$$

und bezeichnen wir zur Abkürzung das Product

$$\vartheta_3(x,q)\ \vartheta_3(y,q)\ \vartheta_3(z,q)\ \vartheta_3(\omega,q)$$

mit

$$\vartheta_3(x,y,z,w)\,,$$

so ist:

$$(17)\quad\begin{cases}\vartheta_3(x,y,z,\omega)+\vartheta(x,y,z,\omega)=\vartheta_3(x',y',z',\omega')+\vartheta(x',y',z',\omega')\\ \vartheta_3(x,y,z,\omega)-\vartheta(x,y,z,\omega)=\vartheta_1(x',y',z',\omega')+\vartheta_2(x',y',z',\omega')\\ \vartheta_1(x,y,z,\omega)+\vartheta_2(x,y,z,\omega)=\vartheta_3(x',y',z',\omega')-\vartheta(x',y',z',\omega')\\ \vartheta_1(x,y,z,\omega)-\vartheta_2(x,y,z,\omega)=\vartheta_1(x',y',z',\omega')-\vartheta_2(x',y',z',\omega').\end{cases}$$

Vermehrt man in diesen Formeln je 2 Argumente um $\frac{\pi}{2}$, oder um $\frac{\varpi}{2}$, oder auch um $\frac{\pi}{2}+\frac{\varpi}{2}$, so ergeben sich eine grosse Menge von Beziehungen, unter denen folgende 3 bemerkenswerth sind:

$$(18)\quad\begin{cases}\vartheta(x,z)\,\vartheta_3(y,\omega)-\vartheta_3(x,z)\,\vartheta(y,\omega)=\vartheta_2(x',y')\,\vartheta_1(z',\omega')+\vartheta_1(x',y')\,\vartheta_2(z',\omega')\\ \vartheta_3(x,z)\,\vartheta_2(y,\omega)-\vartheta_2(x,z)\,\vartheta_3(y,\omega)=\vartheta_1(x',y')\,\vartheta(z',\omega')+\vartheta(x',y')\,\vartheta_1(z',\omega')\\ \vartheta(x,z)\,\vartheta_2(y,\omega)-\vartheta_2(x,z)\,\vartheta(y,\omega)=\vartheta_1(x',y')\,\vartheta_3(z',\omega')+\vartheta_3(x',y')\,\vartheta_1(z',\omega')\end{cases}$$

Von besonderer Wichtigkeit und Einfachheit ist jedoch eine Formel, die man erhält, wenn man in (17) setzt statt x, y, z, ω resp. $x+\frac{\pi}{2}$, $x+\frac{\pi}{2}+\frac{\varpi}{2}$, $x+\frac{\varpi}{2}$, x. Dann ist:

$$(19)\quad 2\,\vartheta(x,q)\,\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_3(x,q)=\vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_1(2x,q).$$

Da wir sie später brauchen werden, so führen wir noch folgende Formeln an, die aus (17) und (18) durch Gleichsetzung zweier Argumente hervorgehen, und die in gewisser Weise den Beziehungen in (12) entsprechen:

$$(20)\begin{cases} \vartheta^2(0,q)\vartheta(x+y,q)\vartheta(x-y,q) = \vartheta_3^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q) - \vartheta_2^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q) \\ \qquad = \vartheta^2(x,q)\vartheta^2(y,q) - \vartheta_1^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_2^2(0,q)\vartheta_2(x+y,q)\vartheta_2(x-y,q) = \vartheta_3^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q) - \vartheta^2(x,q)\vartheta^2(y,q) \\ \qquad = \vartheta_2^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q) - \vartheta_1^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_3^2(0,q)\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_3(x-y,q) = \vartheta_3^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q) + \vartheta_1^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \qquad = \vartheta_2^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q) + \vartheta^2(x,q)\vartheta^2(y,q), \end{cases}$$

ferner:

$$(21)\begin{cases} \vartheta^2(0,q)\vartheta_1(x+y,q)\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta_3^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q) - \vartheta_2^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q) \\ \qquad = \vartheta_1^2(x,q)\vartheta^2(y,q) - \vartheta^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_2^2(0,q)\vartheta_1(x+y,q)\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q) - \vartheta_3^2(x,q)\vartheta^2(y,q) \\ \qquad = \vartheta_1^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q) - \vartheta_2^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_3^2(0,q)\vartheta_1(x+y,q)\vartheta_1(x-y,q) = \vartheta^2(x,q)\vartheta_2^2(y,q) - \vartheta_2^2(x,q)\vartheta^2(y,q) \\ \qquad = \vartheta_1^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q) - \vartheta_3^2(x,q)\vartheta_1^2(y,q) \\ \vartheta_3^2(0,q)\vartheta(x+y,q)\vartheta(x-y,q) + \vartheta^2(0,q)\vartheta_3(x+y,q)\vartheta_3(x-y,q) \\ \qquad = \vartheta^2(x,q)\vartheta_3^2(y,q) + \vartheta_3^2(x,q)\vartheta^2(y,q), \end{cases}$$

endlich:

$$(22)\begin{cases} 2\,\vartheta(x,q)\vartheta(y,q)\vartheta_3(x,q)\vartheta_3(y,q) \\ \qquad = \vartheta(0,q)\vartheta_3(0,q)\left\{\vartheta(x+y,q)\vartheta_3(x-y,q) + \vartheta_3(x+y,q)\vartheta(x-y,q)\right\} \\ 2\vartheta_2(x,q)\vartheta_2(y,q)\vartheta_3(x,q)\vartheta_3(y,q) \\ \qquad = \vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q\left\{\vartheta_2(x+y,q)\vartheta_3(x-y,q) + \vartheta_3(x+y,q)\vartheta_2(x-y,q)\right\} \\ 2\,\vartheta(x,q)\vartheta(y,q)\vartheta_2(x,q)\vartheta_2(y,q) \\ \qquad = \vartheta(0,q)\vartheta_2(0,q)\left\{\vartheta_2(x+y,q)\vartheta(x-y,q) + \vartheta(x+y,q)\vartheta_2(x-y,q)\right\}. \end{cases}$$

Aus allen diesen Formeln leuchtet noch ein, dass:

$$(23) \qquad \vartheta^4(0,q) + \vartheta_2^4(0,q) = \vartheta_3^4(0,q),$$

welche Gleichung auch schon aus (2) sich bietet, da sie nichts anderes aussagt, als dass $k^2 + k_1^2 = 1$, was a priori klar ist.

Ausser den aufgestellten Beziehungen sind noch von Wichtigkeit die Jacobi'schen Uebergangsformeln zwischen der reellen und imaginären Periode. Ist $p = \log q$, also da

$$q = e^{-\frac{\pi K_1}{K}}, \quad p = -\frac{\pi K_1}{K},$$

so ist:

$$
(24)\qquad
\begin{cases}
\vartheta\,(x, e^p) = \sqrt{\dfrac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\ \vartheta_2\!\left(\dfrac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\[2ex]
\vartheta_1\,(x, e^p) = i\sqrt{\dfrac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\ \vartheta_1\!\left(\dfrac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\[2ex]
\vartheta_2\,(x, e^p) = \sqrt{\dfrac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\ \vartheta\!\left(\dfrac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\[2ex]
\vartheta_2\,(x, e^p) = \sqrt{\dfrac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\ \vartheta_3\!\left(\dfrac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right),
\end{cases}
$$

Dieses ist das gesammte den nachfolgenden Untersuchungen zu Grunde gelegte Material.

Gauss hat nun die Reihen, von denen er ausgeht und die sich bei der Vergleichung als identisch mit den Reihen in (2) erweisen, mit P, Q, R, p, q, r bezeichnet, dergestalt dass:

$$
(25)\qquad
\begin{cases}
\vartheta_3\,(0, q^\alpha) = P\,, & \vartheta\,(0, q^\alpha) = Q\,, \quad \vartheta_2\,(0, q^\alpha) = R \\
\vartheta_3\,(0, q) = p\,, & \vartheta\,(0, q) = q\,, \quad \vartheta_2\,(0, q) = r\,,
\end{cases}
$$

wo bei Gauss das eine Mal $\alpha = 3$, das andere Mal $\alpha = 5$ ist. Wir werden diese Bezeichnung in der ganzen Untersuchung beibehalten, da sie in der That eine sehr anschauliche Darstellung der Beziehungen ermöglicht. Eine Verwechslung der Function $q = \vartheta\,(0, q)$ und des Moduls q der Reihen ist dabei nicht gut möglich.

§ 2.

Die Dreitheilung.

Gemäss § 1. (25) ist in dieser Untersuchung bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_3\,(0, q^3) &= P\,, \quad \vartheta\,(0, q^3) = Q\,, \quad \vartheta_2\,(0, q^3) = R \\
\vartheta\,(0, q) &= p\,, \quad \vartheta\,(0, q) = q\,, \quad \vartheta_2\,(0, q) = r\,.
\end{aligned}
$$

Die hier zu untersuchenden Reihen, wie sie aus § 1. (1) und (2) hervorgehen, sind dann folgende:

$$
(1)\qquad
\begin{cases}
p = \vartheta_3\,(0, q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots \\
q = \vartheta\,(0, q) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} \mp \cdots \\
r = \vartheta_2\,(0, q) = \phantom{1 +{}} 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + 2q^{\frac{49}{4}} + \cdots \\
P = \vartheta_3\,(0, q^3) = 1 + 2q^3 + 2q^{12} + 2q^{27} + 2q^{48} + \cdots \\
Q = \vartheta\,(0, q^3) = 1 - 2q^3 + 2q^{12} - 2q^{27} + 2q^{48} \mp \cdots \\
R = \vartheta_2\,(0, q^3) = \phantom{1 +{}} 2q^{\frac{3}{4}} + 2q^{\frac{27}{4}} + 2q^{\frac{75}{4}} + 2q^{\frac{147}{4}} + \cdots
\end{cases}
$$

$$
(2)\left\{\begin{aligned}
q^{\frac{1}{3}}\vartheta_3(\varpi, q^3) &= \phantom{1+{}} q^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{4}{3}} + q^{\frac{16}{3}} + q^{\frac{25}{3}} + q^{\frac{49}{3}} + q^{\frac{64}{3}} + q^{\frac{100}{3}} + \cdots \\
q^{\frac{1}{3}}\vartheta\ (\varpi, q^3) &= \phantom{1+{}} q^{\frac{1}{3}} - q^{\frac{4}{3}} - q^{\frac{16}{3}} + q^{\frac{25}{3}} + q^{\frac{49}{3}} - q^{\frac{64}{3}} - q^{\frac{100}{3}} \pm \cdots \\
q^{\frac{1}{3}}\vartheta_2(\varpi, q^3) &= \phantom{1+{}} q^{\frac{1}{12}} + q^{\frac{25}{12}} + q^{\frac{49}{12}} + q^{\frac{121}{12}} + q^{\frac{169}{12}} + q^{\frac{289}{12}} + \cdots \\
i\,q^{\frac{1}{3}}\vartheta_1(\varpi, q^3) &= \phantom{1+{}} q^{\frac{1}{12}} - q^{\frac{25}{12}} - q^{\frac{49}{12}} + q^{\frac{121}{12}} + q^{\frac{169}{12}} - q^{\frac{289}{12}} \mp \cdots \\
\vartheta_3\left(\frac{\pi}{3}, q\right) &= 1 - q - q^4 + 2q^9 - q^{16} - q^{25} + 2q^{36} - q^{49} \mp \cdots \\
\vartheta\ \left(\frac{\pi}{3}, q\right) &= 1 + q - q^4 - 2q^9 - q^{16} + q^{25} + 2q^{36} + q^{49} \mp \cdots \\
\vartheta_2\left(\frac{\pi}{3}, q\right) &= \phantom{1+{}} q^{\frac{1}{4}} - 2q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} - 2q^{\frac{81}{4}} + q^{\frac{121}{4}} \pm \cdots \\
\vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q\right) &= \sqrt{3}\left\{q^{\frac{1}{4}} - q^{\frac{25}{4}} - q^{\frac{49}{4}} + q^{\frac{121}{4}} + q^{\frac{169}{4}} - \cdots\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Es soll also nun nachgewiesen werden, dass sich die eigenthümlichen Reihen (2) durch die Reihen (1) darstellen lassen, und es sollen ferner die Beziehungen untersucht werden, die zwischen den Reihen (1) selbst bestehen. Diese letzteren Beziehungen sind es, die von Gauss ohne Beweis angegeben worden sind.

Es lassen sich 2 wichtige Systeme von Formeln aufstellen. Setzen wir nämlich in § 1. (9) $\lambda = 2$, so ist:

$$
(3)\left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^2) = {} & \phantom{+q^4e^{4ix}}\vartheta_3(x+y,q^3)\,\vartheta_3(2x-y,q^6) \\
& + q\,e^{2ix}\,\vartheta_3(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta_3(2x-y-2\varpi,y^6) \\
& + q^4e^{4ix}\,\vartheta_3(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta_3(2x-y-4\varpi,q^6) \\
\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^2) = {} & \phantom{+q^4e^{4ix}}\vartheta_2(x+y,q^3)\,\vartheta_3(2x-y,q^6) \\
& + q\,e^{2ix}\,\vartheta_2(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta_3(2x-y-2\varpi,q^6) \\
& + q^4e^{4ix}\,\vartheta_2(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta_3(2x-y-4\varpi,q^6) \\
\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^2) = {} & -\vartheta_2(x+y,q^3)\,\vartheta\,(2x-y,q^6) \\
& + q\,e^{2ix}\,\vartheta_2(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta\,(2x-y-2\varpi,q^6) \\
& - q^4e^{4ix}\,\vartheta_2(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta\,(2x-y-4\varpi,q^6) \\
\vartheta\,(x,q)\,\vartheta\,(y,q^2) = {} & \phantom{+q^4e^{4ix}}\vartheta_3(x+y,q^3)\,\vartheta\,(2x-y,q^6) \\
& - q\,e^{2ix}\,\vartheta_3(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta\,(2x-y-2\varpi,q^6) \\
& + q^4e^{4ix}\,\vartheta_3(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta\,(2x-y-4\varpi,q^6).
\end{aligned}\right.
$$

Ein weit eleganteres System von Beziehungen ergiebt sich aber, wenn in § 1. (9) $\lambda = 3$ gesetzt wird, und je 2 der dortigen Gleichungen addirt, resp. subtrahirt werden. Rechts erhält man scheinbar die Moduln q^4 und q^{12}, allein diese gehen mit Hülfe der Formeln § 1. (6) in die Moduln q und q^3 über. Wir erhalten dann:

$$
(4)\quad\begin{cases}
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)+\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad+\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)=\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)+\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)+\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^3)-\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad-\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)+\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad+\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)-\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad-\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)+\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad+\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^3)-\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad-\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)+\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta_2(x+y,q)\,\vartheta_2(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad+\vartheta_3(x+y,q)\,\vartheta_3(3x-y,q^3)\\
\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^3)-\vartheta_3(2x,y)\,\vartheta_3(2y,q^3)=\vartheta_1(x+y,q)\,\vartheta_1(3x-y,q^3)\\
\qquad\qquad-\vartheta(x+y,q)\,\vartheta(3x-y,q^3)
\end{cases}
$$

(vgl. Schröter, de aequ. mod. S. 13 und 14).

Aus (4) resultiren zunächst für $x=0$ und $y=\varpi$, ferner für $x=\frac{\pi}{3}$ und $y=0$ nach Anwendung der Formeln § 1. (3) und für $x=0$ und $y=0$ folgende 3 Beziehungen:

$$
(5)\quad\begin{cases}
q\vartheta(\varpi,q^3)-r\vartheta_2(\varpi,q^3)+p\vartheta_3(\varpi,q^3)=0\\
Q\vartheta\left(\frac{\pi}{3},q\right)-R\vartheta_2\left(\frac{\pi}{3},q\right)-P\vartheta_3\left(\frac{\pi}{3},q\right)=0\\
qQ+rR-pP=0\,.
\end{cases}
$$

Die letzte Gleichung involvirt bekanntlich die schon von Legendre angegebene Modulargleichung für die Tranformation dritter Ordnung, nämlich:

$$\sqrt{\varkappa\lambda}+\sqrt{\varkappa_1\lambda_1}=1$$

(vgl. Schröter a. a. O. S. 14).

Wir gehen nun aus von der zweiten Formel in (3) und setzen hierein für y: $y+\frac{\pi}{2}-\frac{\varpi}{2}$, so ist mit Hülfe von § 1. (3) und (4):

$$\begin{aligned}-i\,e^{-iy}q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(x,q)\,\vartheta(y,q^2) = &-\vartheta_1(x+y-\varpi,q^3)\,\vartheta(2x-y+\varpi,q^6)\\ &-q\,e^{2ix}\,\vartheta_1(x+y-2\varpi,q^3)\,\vartheta(2x-y-\varpi,q^6)\\ &-q^4e^{4ix}\,\vartheta_1(x+y-3\varpi,q^3)\,\vartheta(2x-y-3\varpi,q^6).\end{aligned}$$

Hierein setzen wir $x=\varpi$, $y=0$, dann ist nach § 1. (4):

$$\vartheta(\varpi,q^6)=iq^{\frac{1}{2}}\,\vartheta_1(2\varpi,q^6),$$

also:

$$(6^a)\qquad \vartheta_2(0,q)\,\vartheta(0,q^2)=-2q\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\varpi,q^6),$$

also mit Hülfe von § 1. (13):

$$(6^b)\qquad \vartheta_2(0,q)\,\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^6)=-2q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^3)\,\vartheta_2(\varpi,q^3).$$

Setzt man in (6^a) statt q $q^{\frac{1}{2}}$ und wendet § 1. (4) und (13) an, so folgt:

$$(6^c)\qquad \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,q^{\frac{3}{2}})\,\vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}})=-2q\,\vartheta_1^2(\varpi,q^3)\,\vartheta(\varpi,q^3),$$

Multipliciren wir (6^b) mit $\vartheta_2(0,q)$, (6^c) mit $\vartheta(0,q)$, subtrahiren und beachten (5), so ist:

$$\begin{aligned}(6^d)\quad &-2q\,\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_1^2(\varpi,q^3)\,\vartheta_3(\varpi,q^3)\\ &=\vartheta_2^2(0,q)\,\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^6)-\tfrac{1}{2}\vartheta^2(0,q)\,\vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_2(0,q^{\frac{3}{2}})=A.\end{aligned}$$

Es lässt sich nun A auf doppelte Art darstellen. Setzt man einmal direct die Werthe aus § 1. (14) für $\vartheta(0,q^2)$ etc. ein, so ist:

$$A=r^2\sqrt{pqPQ}-q^2\sqrt{rpRP}.$$

Andrerseits aber ist:

$$\begin{aligned}\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^6)&=\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^6)-\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^6)\quad\text{aus (5)}\\ &=\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}})+\vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0,q^{\frac{3}{2}})\right\}\quad\text{nach § 1. (6)}\end{aligned}$$

und

$$\vartheta_2(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_2(0,q^{\frac{3}{2}})=\vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}})-\vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0,q^{\frac{3}{2}})\quad\text{aus (5).}$$

Setzt man dieses in A ein, so wie die Werthe für $\vartheta_2^2(0,q)$ und $\vartheta^2(0,q)$ aus § 1. (14), so ist:

$$A=\tfrac{1}{4}\left\{\vartheta_3^2(0,q^{\frac{1}{2}})+\vartheta^2(0,q^{\frac{1}{2}})\right\}\left\{\vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0,q^{\frac{3}{2}})-\vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}})\right\}.$$

Da nun aus § 1. (14):

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_3(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(0,q^{\frac{3}{2}})-\vartheta(0,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(0,q^{\frac{3}{2}})\right\}\\ &=\tfrac{1}{2}\sqrt{2(p^2P^2-r^2R^2-q^2Q^2)}=\sqrt{rqRQ},\end{aligned}$$

da nach (5):

$$p^2 P^2 = q^2 Q^2 + r^2 R^2 + 2\, r q Q R\,,$$

so folgt schliesslich:

$$A = p^2 \sqrt{r q R Q}\,.$$

Also haben wir jetzt aus (6^d) die Identität

(7) $$r^2 \sqrt{p q P Q} - q^2 \sqrt{r p R P} = p^2 \sqrt{r q R Q}\,,$$

so wie aus (6^b), (6^c) und (6^d) die 3 Beziehungen:

(8) $$\begin{cases} -2\, q\, \vartheta_1^2(\varpi, q^3)\; \vartheta_3(\varpi, q^3) = p \sqrt{r q R Q} \\ -2\, q\, \vartheta_1^2(\varpi, q^3)\; \vartheta_2(\varpi, q^3) = r \sqrt{p q P Q} \\ -2\, q\, \vartheta_1^2(\varpi, q^3)\; \vartheta\; (\varpi, q^3) = q \sqrt{r p R P}\,. \end{cases}$$

3 ähnliche Formeln bestehen auch für die reelle Periode, denn nach § 1. (11) ist:

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_{0}^{p-1}{}_{\mu}\, q^{\mu\mu}\, e^{2\mu i x}\, \vartheta_3(p x - p \mu \varpi, q^{pp})\,.$$

Setzt man hierein statt x $x + \frac{\pi}{2} - \frac{\varpi}{2}$, so ist:

$$\vartheta_1(x, q) = i q^{\frac{1}{4}} e^{ix} \sum_{0}^{p-1}{}_{\mu} (-1)^{\mu+1} q^{\mu\mu+\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_3\Big(p\big(x + \tfrac{\pi}{2}\big) - \big(\mu + \tfrac{1}{2}\big) p\, \omega, q^{pp}\Big).$$

Wird hierin statt q $q^{\frac{1}{3}}$ und $p = 3$, $x = \frac{\pi}{3}$ gesetzt, so folgt:

(9) $$\vartheta_1\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big) = i \sqrt{3}\, q^{\frac{1}{3}}\, \vartheta_1(\varpi, q^3)\,.$$

Dann folgt aus (6^a) mit Anwendung von § 1. (13):

$$3\, \vartheta(0, q^{\frac{2}{3}})\; \vartheta_2(0, q)\; \vartheta(0, q^2) = 2\, \vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)\, \vartheta_2\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)\,,$$

ferner aus (6^a):

$$\tfrac{3}{2}\, \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{6}})\; \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})\; \vartheta(0, q) = 2\, \vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)\, \vartheta\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)$$

und durch eine ähnliche Betrachtung, wie für die imaginäre Periode:

$$3\, \vartheta_3(0, q) \sqrt{\vartheta_2(0, q)\; \vartheta(0, q)\; \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{3}})\; \vartheta(o, q^{\frac{1}{3}})} = 2\, \vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big)\, \vartheta_3\Big(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\Big),$$

so dass, wenn wir schliesslich für q q^3 setzen und die linken Seiten gemäss § 1. (14) reduciren, sich ergiebt:

(10) $$\begin{cases} 2\, \vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big)\; \vartheta_3\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big) = 3\, P \sqrt{r q R Q} \\ 2\, \vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big)\; \vartheta_2\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big) = 3\, R \sqrt{p q P Q} \\ 2\, \vartheta_1^2\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big)\; \vartheta\;\Big(\frac{\pi}{3}, q\Big) = 3\, Q \sqrt{p r P R}\,. \end{cases}$$

Multipliciren wir nun sämmtliche 3 Gleichungen in (8) und wenden die Formel § 1. (19) an, so ergiebt sich:

$$\vartheta_2^2(0,q)\ \vartheta^2(0,q)\ \vartheta_3^2(0,q) = -4\,q^2\,\vartheta_1^6(\varpi, q^3).$$

Damit ist $\vartheta_1(\varpi, q^3)$ berechnet. Trägt man seinen Werth dann in (8) ein, so sind auch $\vartheta_3(\varpi, q^3)$ etc. dargestellt. Ebenso verfährt man mit den Gleichungen (10) und erhält nun folgende Darstellung der Fundamentalwerthe der Dreitheilung, nämlich der oben in (2) angegebenen Reihen durch die in (1) aufgestellten:

$$(11)\quad \begin{cases} i\,q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_1(\varpi, q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta\ (\varpi, q^3) = \sqrt{\frac{RP}{rp}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_2(\varpi, q^3) = \sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_3(\varpi, q^3) = \sqrt{\frac{RQ}{rq}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q\right) = \sqrt{3}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \vartheta\ \left(\frac{\pi}{3}, q\right) = \sqrt{\frac{rp}{RP}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \vartheta_2\left(\frac{\pi}{3}, q\right) = \sqrt{\frac{pq}{PQ}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \vartheta_3\left(\frac{\pi}{3}, q\right) = \sqrt{\frac{rq}{RQ}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Der Grundgedanke zur Herleitung dieser Resultate ist von Herrn Prof. Dr. Schröter angegeben worden.

§ 3.

Die Gauss'schen Formeln.

Wir gehen nun zum 2. Theile, nämlich zur Herleitung der Gauss'schen Beziehungen, oder solcher, die ihnen analog sind (vgl. Gauss' Werke Bd. III, S. 470, 471, 476 und 479).

Wir hatten schon in § 2. (7) eine solche Beziehung zwischen p, q, r und P, Q, R allein gefunden. Dieselbe Beziehung, so wie noch eine zweite ähnliche ergiebt sich auch, wenn man die Werthe aus § 2. (11) in § 2. (5) substituirt. Beide Beziehungen lassen sich auf eine etwas andere Form bringen und lauten:

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{p^3}{P}} + \sqrt{\frac{q^3}{Q}} - \sqrt{\frac{r^3}{R}} = 0 \\ \sqrt{\frac{P^3}{p}} - \sqrt{\frac{Q^3}{q}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}} = 0. \end{cases}$$

Aus den 3 Formeln § 1. (18) folgt nun, wenn man $x = z = \varpi$, $y = \omega = 0$ setzt, also $x' = y' = \varpi$, $z' = \omega' = 0$ ist:

$$\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_3^2(0, q^3) = \vartheta^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_2^2(0, q^3) - \vartheta_2^2(\varpi, q^3)\, \vartheta^2(0, q^3)$$
$$\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\, \vartheta^2(0, q^3) = \vartheta_3^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_2^2(0, q^3) - \vartheta_2^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_3^2(0, q^3)$$
$$\vartheta_1^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_2^2(0, q^3) = \vartheta^2(\varpi, q^3)\, \vartheta_3^2(0, q^3) - \vartheta_3^2(\varpi, q^3)\, \vartheta^2(0, q^3).$$

Trägt man in diese Formeln die Werthe aus § 2. (11) ein, so resultirt:

$$(2) \qquad \begin{cases} Pp = \dfrac{Q^3}{q} - \dfrac{R^3}{r} \\[2mm] Q\,q = \dfrac{P^3}{p} - \dfrac{R^3}{r} \\[2mm] R\,r = \dfrac{Q^3}{q} - \dfrac{P^3}{p}. \end{cases}$$

Wenn man dieselben Gleichungen § 1. (18) nimmt, jetzt aber $x = z = \frac{\pi}{3}$ setzt, so resultiren nach den Eintragungen aus § 2. (11):

$$(3) \qquad \begin{cases} 3\,Pp = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{q^3}{Q} \\[2mm] 3\,Q\,q = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{p^3}{P} \\[2mm] 3\,R\,r = \dfrac{p^3}{P} - \dfrac{q^3}{Q}, \end{cases}$$

also durch die Combination von (2) und (3)

$$(4) \qquad \begin{cases} 3\,p\,P = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{q^3}{Q} = \dfrac{3\,Q^3}{q} - \dfrac{3\,R^3}{r} \\[2mm] 3\,q\,Q = \dfrac{r^3}{R} - \dfrac{p^3}{P} = \dfrac{3\,P^3}{p} - \dfrac{3\,R^3}{r} \\[2mm] 3\,r\,R = \dfrac{p^3}{P} - \dfrac{q^3}{Q} = \dfrac{3\,Q^3}{q} - \dfrac{3\,P^3}{p} \end{cases}$$

(vergl. Gauss, a. a. O. S. 471).

Wir könnten nun durch Eintragen in die 4fachen Produkte ebenso leicht alle übrigen Beziehungen ableiten, ziehen es aber vor, der Abwechslung wegen einen andern Weg einzuschlagen.

Vorher aber will ich noch eine Bemerkung machen, welche zeigt, in wie naher Beziehung diese Gauss'schen Formeln zu der Modulargleichung in § 2. (5) stehen, ja wie die Produkte derselben merkwürdiger Weise einzig und allein aus dieser abgeleitet werden können.

In § 2. (5) war:

$$p\,P = p\,Q + r\,R.$$

Hieraus folgt:

$$p^2P^2 = pqPQ + prPR$$
$$q^2Q^2 = pqPQ - qrQR$$
$$r^2R^2 = prPR - qrQR$$

und hieraus:

$$(p^2P^2 + q^2Q^2 + r^2R^2)^2 = 2(p^4P^4 + q^4Q^4 + r^4R^4)$$
$$2(p^4P^4 - r^4R^4 + q^4Q^4) = (p^2P^2 + q^2Q^2 + 3R^2r^2)(p^2P^2 + q^2Q^2 - r^2R^2)$$
$$2(p^4P^4 - q^4Q^4 + r^4R^4) = (p^2P^2 + 3q^2Q^2 + R^2r^2)(p^2P^2 - q^2Q^2 + r^2R^2)$$
$$2(q^4Q^4 - p^4P^4 + r^4R^4) = (3p^2P^2 + q^2Q^2 + r^2R^2)(q^2Q^2 - p^2P^2 + r^2R^2).$$

Nun folgt aber aus § 1. (23):

$$(p^4 - q^4)(P^4 - Q^4) = r^4R^4$$
$$p^4Q^4 + q^4P^4 = p^4P^4 - r^4R^4 + q^4Q^4$$
$$r^4Q^4 + q^4R^4 = p^4P^4 - r^4R^4 - q^4Q^4$$
$$q^4R^4 + r^4Q^4 = p^4P^4 - q^4Q^4 + r^4R^4,$$

ferner aus

$$pP = qQ + rR$$
$$2pqPQ = p^2P^2 - r^2R^2 + q^2Q^2$$
$$2qrQR = p^2P^2 - r^2R^2 - q^2Q^2$$
$$2prPR = p^2P^2 + r^2R^2 - q^2Q^2.$$

Trägt man dieses auf beiden Seiten ein, so sieht man, dass sich ergiebt:

$$\frac{p^3}{P} \cdot \frac{Q^3}{q} + \frac{q^3}{Q}\frac{P^3}{p} - p^2P^2 - q^2Q^2 = 3r^2R^2$$

und ebenso in den übrigen Fällen, also:

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(\frac{Q^3}{q} - \frac{P^3}{p}\right)\left(\frac{q^3}{Q} - \frac{p^3}{P}\right) = 3r^2R^2 \\ \left(\frac{P^3}{p} - \frac{R^3}{r}\right)\left(\frac{r^3}{R} - \frac{p^3}{P}\right) = 3q^2Q^2 \\ \left(\frac{Q^3}{q} - \frac{R^3}{r}\right)\left(\frac{r^3}{R} - \frac{q^3}{Q}\right) = 3p^2P^2\,. \end{cases}$$

Wir hätten schliesslich dieses selbe Resultat noch auf eine dritte Weise aus § 2. (4) herleiten können, übergehen es aber der Kürze halber.

Zerlegt man nun die Formeln (2) und (3) in der Weise, dass z. B.

$$\left(\sqrt{\frac{P^3}{p}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}}\right)\left(\sqrt{\frac{P^3}{p}} - \sqrt{\frac{R^3}{r}}\right) = Qq$$

und beachtet die Beziehungen (1), so ergeben sich folgende neue irrationale Abhängigkeiten*):

---

*) Vergl. Schering: Mittheilungen über den III. Bd. von Gauss' Werken. Math. Ann. Bd. I. S. 139.

$$(6)\quad\begin{cases}\sqrt{\frac{P^3}{p}}-\sqrt{\frac{R^3}{r}}-\sqrt{\frac{q^3}{Q}}=0\\ \sqrt{\frac{P^3}{p}}+\sqrt{\frac{Q^3}{q}}-\sqrt{\frac{r^3}{R}}=0\\ \sqrt{\frac{Q^3}{q}}+\sqrt{\frac{R^3}{r}}-\sqrt{\frac{p^3}{P}}=0\\ 3\sqrt{\frac{P^3}{p}}-\sqrt{\frac{q^3}{Q}}-\sqrt{\frac{r^3}{R}}=0\\ 3\sqrt{\frac{Q^3}{q}}-\sqrt{\frac{r^3}{R}}-\sqrt{\frac{p^3}{P}}=0\\ 3\sqrt{\frac{R^3}{r}}+\sqrt{\frac{q^3}{Q}}-\sqrt{\frac{p^3}{P}}=0\,.\end{cases}$$

Es lassen sich nun die Resultate (1) und (6) immer zu je zweien combiniren und es ergeben sich daraus 3 rationale Beziehungen zwischen je vier dieser Grössen. So ist z. B.

$$\frac{Q^2}{\sqrt{Qq}}+\frac{P^2}{\sqrt{Pp}}=\frac{3P^2}{\sqrt{Pp}}-\frac{q^2}{\sqrt{qQ}}=\frac{3Q^2}{\sqrt{Qq}}-\frac{p^2}{\sqrt{Pp}}\,.$$

Hieraus aber folgt:

$$\sqrt{\frac{pP}{qQ}}=\frac{2P^2}{Q^2+q^2}=\frac{p^2+P^2}{2Q^2}$$

und ähnlich noch 2 andere Beziehungen. Wie man sieht, folgt aus diesen:

$$(7)\quad\begin{cases}qqPP+ppQQ+ppqq-3PPQQ=0\\ ppRR+rrPP-rrpp+3RRPP=0\\ qqRR-rrQQ+rrqq+3RRQQ=0\end{cases}$$

(vergl. Gauss, a. a. O. S. 471).

Andrerseits folgt ebenso aus (6) und (1):

$$\sqrt{\frac{Qq}{Pp}}=\frac{2Q^2}{P^2+p^2},\quad\sqrt{\frac{Pp}{Qq}}=\frac{3P^2-p^2}{2q^2},$$

also:

$$\frac{3P^2-p^2}{2q^2}=\frac{2Q^2}{P^2+p^2}\,\frac{pP}{qQ}$$

$$(p^2-3P^2)(p^2+P^2)=-4pqPQ$$

nebst den beiden entsprechenden Formeln; so dass wir hieraus erhalten:

$$(8)\quad\begin{cases}p^4-3P^4=2pP(Rr-Qq)\\ 3Q^4-q^4=2qQ(Pp+Rr)\\ r^4-3R^4=2Rr(Pp+Qq)\,.\end{cases}$$

Noch eine Gauss'sche Beziehung ergiebt sich aus der Combination der Formeln in (6) und (1) unter einander. Es ist:

$$\sqrt{\frac{Qq}{Pp}}=\frac{Q^2+q^2}{2P^2}=\frac{3Q^2+q^2}{3P^2+p^2},$$

also:

$$\frac{Qq}{Pp} = \frac{3Q^4 + q^4 + 4Q^2q^2}{2(3P^4 + p^2P^2)},$$

also:

(a) $$\frac{6P^4}{pP} + 2pP = \frac{3Q^4 + q^4}{Qq} + 4Qq,$$

ferner:

$$\sqrt{\frac{Qq}{Pp}} = \frac{q^2 - Q^2}{P^2 - p^2} = \frac{3Q^2 - q^2}{2p^2},$$

also:

$$\frac{Qq}{Pp} = \frac{3Q^4 + q^4 - 4Q^2q^2}{2p^4 - 2p^2P^2},$$

also:

(b) $$\frac{2p^4}{pP} - 2pP = \frac{3Q^4 + q^4}{Qq} - 4Qq,$$

also durch Addition der Gleichungen (a) und (b)

$$\frac{3P^4 + p^4}{Pp} = \frac{3Q^4 + q^4}{Qq}.$$

Auf gleiche Weise stellt man die Identität her:

$$\frac{3P^4 + p^4}{Pp} = \frac{3R^4 + r^4}{Rr},$$

so dass schliesslich:

(9) $$\frac{r^4 + 3R^4}{rR} = \frac{q^4 + 3Q^4}{qQ} = \frac{p^4 + 3P^4}{pP}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 471).

Setzt man ferner in § 1. (20) $x = y = \frac{\pi}{3}$ und trägt die betreffenden Werthe aus § 2. (11) ein, so ergeben sich nachstehende 3 Formeln:

(10) $$\begin{cases} \dfrac{ppQQ - qqPP}{pP - qQ} = 2\sqrt{pqPQ} \\ \dfrac{rrPP - ppRR}{pP - rR} = 2\sqrt{rpRP} \\ \dfrac{rrQQ + qqRR}{rR + qQ} = 2\sqrt{rqRQ} \end{cases}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 479).

Aus der Formel § 1. (17)

$$\vartheta_1^4(x, q) + \vartheta_3^4(x, q) - \vartheta^4(x, q) - \vartheta_2^4(x, q) = 0$$

resultiren für $x = \frac{\varpi}{3}$ und $x = \frac{\pi}{3}$ noch folgende 2 Beziehungen:

(11) $$\begin{cases} \dfrac{R^2P}{r^2p^2} + \dfrac{Q^2P^2}{q^2p^2} - \dfrac{R^2Q^2}{r^2q^2} = 1 \\ \dfrac{r^2p^2}{R^2P^2} + \dfrac{q^2p^2}{Q^2P^2} - \dfrac{r^2q^2}{R^2Q^2} = 9. \end{cases}$$

Gauss hat diese beiden Beziehungen für die Dreitheilung nicht angegeben. Doch finden sich die analogen Formeln bei der Fünftheilung (vgl. § 4. (21), so wie wir auch schon in (12) 2 Abhängigkeiten ganz gleicher Natur antreffen werden.

Wohl aber hat Gauss noch 2 eigenthümliche Formeln ohne Beweis angegeben, indem er die Grössen:

$$P_0 = \vartheta_3(0, q^{\frac{1}{3}}), \quad Q_0 = \vartheta(0, q^{\frac{1}{3}}), \quad R_0 = \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{3}})$$

einführt, welche den Grössen P, Q, R coordinirt sind. Diese Formeln finden sich Band III, S. 476 und sind:

$$\left\{\frac{3PP - P_0P_0}{2}\right\}^2 = p^4 - 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\left\{\frac{3QQ - Q_0Q_0}{2}\right\}^2 = q^4 + 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Indem ich mich bemühte, auch diese Formeln, die etwas tiefer liegen, aus der Theorie der ϑ-Functionen abzuleiten, bin ich auf eine Menge eigenthümlicher Beziehungen gestossen, die Gauss nicht angegeben hat, aus denen dann aber schliesslich nicht nur die beiden obigen Gauss'schen Beziehungen, sondern noch 4 andere ebensolche sich ergeben. Es sind diese Formeln bemerkenswerth, da links z. B. nichts weiter als P_0 und P, resp. Q und Q_0 etc., rechts aber allein die überhaupt für die ganze Theorie der elliptischen Transcendenten fundamentalen Grössen p, q und r stehen.

Setzt man in die Formeln § 2. (4) einmal $x = \frac{\varpi}{3}$, $y = 0$, sodann aber $x = 0$, $y = \frac{\pi}{3}$ und im zweiten Fall für q $q^{\frac{1}{3}}$, so ergeben sich nach den nöthigen Vereinfachungen folgende Beziehungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{RP}{R_0P_0}} + \sqrt{\dfrac{PQ}{P_0Q_0}} - \sqrt{\dfrac{RQ}{R_0Q_0}} = 1 \\ \sqrt{\dfrac{R_0P_0}{RP}} + \sqrt{\dfrac{P_0Q_0}{PQ}} - \sqrt{\dfrac{R_0Q_0}{RQ}} = 3 \end{cases}$$

vgl. hiermit (11), sowie § 4. (21); ferner:

$$(13) \quad \begin{cases} P\sqrt{rq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{RQ} + \sqrt{R_0Q_0}\} \\ P_0\sqrt{rq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{3\sqrt{RQ} + \sqrt{R_0Q_0}\} \\ Q\sqrt{pr} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{R_0P_0} - \sqrt{RP}\} \\ Q_0\sqrt{pr} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{R_0P_0} - 3\sqrt{RP}\} \\ R\sqrt{pq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{PQ} - \sqrt{P_0Q_0}\} \\ R_0\sqrt{pq} = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{3\sqrt{PQ} - \sqrt{P_0Q_0}\}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt nun einerseits:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{3PP-P_0P_0}{2} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{R_0Q_0-3RQ}{rq} \\ \dfrac{3QQ-Q\,Q_0}{2} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{R_0P_0-3RP}{pr} \\ \dfrac{3RR-R_0R_0}{2} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{P_0Q_0-3PQ}{pq} \end{cases}$$

als auch andrerseits:

$$(15)\quad \begin{cases} 3P-P_0 = 2\sqrt{\dfrac{R_0Q_0}{rq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ 3Q-Q_0 = 2\sqrt{\dfrac{R_0P_0}{rp}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -(3R-R_0) = 2\sqrt{\dfrac{P_0Q_0}{pq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\ (P-P_0) = 2\sqrt{\dfrac{RQ}{rq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ Q-Q_0 = 2\sqrt{\dfrac{PR}{pr}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\ (R-R_0) = 2\sqrt{\dfrac{PQ}{pq}}\left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

und hieraus:

$$(16)\quad \begin{cases} (3P-P_0)(3Q-Q_0)(3R-R_0) = -4P_0Q_0R_0 \\ (P-P_0)\quad(Q-Q_0)\quad(R-R_0) = \quad 4PQR. \end{cases}$$

Andrerseits aber folgen aus (13) mit Hülfe von (12), da:

$$\sqrt{P}\{\sqrt{R_0Q}+\sqrt{Q_0R}\} = \sqrt{P_0}\{\sqrt{R_0Q_0}+\sqrt{RQ}\}:$$

die 3 Beziehungen:

$$(17)\quad \begin{cases} \sqrt{PP_0}\sqrt{rq} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{QR_0}+\sqrt{RQ_0}\} \\ \sqrt{QQ_0}\sqrt{pr} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{PR_0}-\sqrt{RP_0}\} \\ \sqrt{RR_0}\sqrt{pq} = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{QP_0}-\sqrt{PQ_0}\}. \end{cases}$$

Combiniren wir diese Resultate mit (13), so haben wir folgende Beziehungen:

$$\begin{cases} \sqrt{Prq}(\sqrt{P}+\sqrt{P_0}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{Q}+\sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{R}+\sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{Prq}(\sqrt{P}-\sqrt{P_0}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{R}-\sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{P_0rq}(\sqrt{P_0}+\sqrt{3P}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{3Q}+\sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{3R}+\sqrt{R_0}\} \\ \sqrt{P_0rq}(\sqrt{P_0}-\sqrt{3P}) = \left(\dfrac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{3Q}-\sqrt{Q_0}\}\{\sqrt{3R}-\sqrt{R_0}\} \end{cases}$$

$$
(18)\quad\begin{cases}
\sqrt{Qpr}\,(\sqrt{Q}+\sqrt{Q_0})=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{P}+\sqrt{P_0}\}\,\{\sqrt{R_0}-\sqrt{R}\}\\
\sqrt{Qpr}\,(\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0})=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{P_0}-\sqrt{P}\}\,\{\sqrt{R}+\sqrt{R_0}\}\\
\sqrt{Q_0pr}\,(\sqrt{Q_0}+\sqrt{3Q})=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{3P}+\sqrt{P_0}\}\,\{\sqrt{R_0}-\sqrt{3R}\}\\
\sqrt{Q_0pr}\,(\sqrt{Q_0}-\sqrt{3Q})=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{P_0}-\sqrt{3P}\}\,\{\sqrt{R_0}+\sqrt{3R}\}\\[2ex]
\sqrt{Rpq}\,(\sqrt{R}+\sqrt{R_0})=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{P}+\sqrt{P_0}\}\,\{\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0}\}\\
\sqrt{Rpq}\,(\sqrt{R}-\sqrt{R_0})=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{P_0}-\sqrt{P}\}\,\{\sqrt{R}+\sqrt{R_0}\}\\
\sqrt{R_0pq}\,(\sqrt{R_0}+\sqrt{3R})=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{3P}+\sqrt{P_0}\}\,\{\sqrt{3Q}-\sqrt{Q_0}\}\\
\sqrt{R_0pq}\,(\sqrt{R_0}-\sqrt{3R})=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\{\sqrt{3P}-\sqrt{P_0}\}\,\{\sqrt{3Q}+\sqrt{Q_0}\}
\end{cases}
$$

und hieraus:

$$
(19)\quad\begin{cases}
-2\sqrt{PQR}=(\sqrt{P}+\sqrt{P_0})(\sqrt{Q}-\sqrt{Q_0})(\sqrt{R}-\sqrt{R_0})\\
-2\sqrt{PQR}=(\sqrt{P}-\sqrt{P_0})(\sqrt{Q}+\sqrt{Q_0})(\sqrt{R}+\sqrt{R_0})\\
2\sqrt{P_0Q_0R_0}=(\sqrt{3P}+\sqrt{P_0})(\sqrt{3Q}-\sqrt{Q_0})(\sqrt{R_0}-\sqrt{3R})\\
2\sqrt{P_0Q_0R_0}=(\sqrt{3P}-\sqrt{P_0})(\sqrt{3Q}+\sqrt{Q_0})(\sqrt{3R}+\sqrt{R_0})
\end{cases}
$$

(vgl. hiermit die Resultate der Fünftheilung § 4. (17) und § 5. (3) und (5)).

Setzen wir nun in die Formeln § 1. (17)

$$x=\frac{4\pi}{3},\quad z=\frac{2\pi}{3},\quad y=w=\frac{\varpi}{3},$$

also:

$$x'=\pi+\frac{\varpi}{3},\quad y'=\pi-\frac{\varpi}{3},\quad z'=w'=\frac{\pi}{3}$$

Dann ist:

$$
\vartheta_3^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)
=-\vartheta_1^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right)+\vartheta_2^2\left(\frac{\pi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\frac{\varpi}{3},q\right),
$$

so dass nach § 2. (11):

$$(20)\qquad r^2q^2PP_0-r^2p^2QQ_0-p^2q^2RR_0=3PQRP_0Q_0R_0$$

und hieraus:

$$(21)\quad \begin{cases} \frac{p^2}{PP_0}(r^2QQ_0+q^2RR_0) = -3RQR_0Q_0+r^2q^2 \\ \frac{q^2}{QQ_0}(r^2PP_0-p^2RR_0) = \quad 3PRP_0R_0+r^2p^2 \\ \frac{r^2}{RR_0}(q^2PP_0-p^2QQ_0) = \quad 3PQP_0Q_0+p^2q^2. \end{cases}$$

Ferner folgen aus § 1. (18) die Formeln:

$$\vartheta_2^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)=\vartheta_1^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-\vartheta_3^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)$$

$$\vartheta_2^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta_3^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)=\vartheta_1^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-\vartheta^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)$$

$$\vartheta^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta_3^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)-\vartheta_3^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)\vartheta^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)=\vartheta_2^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_1^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)-\vartheta_1^2\left(\tfrac{\varpi}{3},q\right)\vartheta_2^2\left(\tfrac{\pi}{3},q\right)$$

und hieraus mit Hülfe von § 2. (11)

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{p^2}{PP_0}(QR_0-RQ_0)=3QR+R_0Q_0 \\ \frac{q^2}{QQ_0}(PR_0-RP_0)=3RP+R_0P_0 \\ \frac{r^2}{RR_0}(QP_0-PQ_0)=3PQ+P_0Q_0. \end{cases}$$

Bildet man nun aber aus den Formeln (13) den Complex

$$r^2(q^2PP_0-p^2QQ_0),$$

indem man die zugehörigen Formeln multiplicirt, sowie denselben Ausdruck aus (17), indem man quadrirt, und zieht von dem doppelten letzteren den ersten ab, so folgt nach Beachtung der Beziehung § 2. (5)

$$q^2PP_0-p^2PP_0=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(3R^2+R_0^2-4RR_0).$$

Wendet man für $3R^2+R_0^2-4RR_0$ die Beziehungen (15) an, und combinirt zugleich damit (21), so folgt:

$$(23)\quad \begin{cases} q^2PP_0-p^2QQ_0=4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{PQP_0Q_0}}{pq}=\frac{RR_0}{r^2}\{3PQP_0Q_0+p^2q^2\} \\ r^2PP_0-p^2RR_0=4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RPR_0P_0}}{rp}=\frac{QQ_0}{q^2}\{3PRP_0R_0+r^2p^2\} \\ r^2QQ_0+q^2RR_0=4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RQR_0Q_0}}{rq}=\frac{PP_0}{p^2}\{r^2q^2-3RQR_0Q_0\}. \end{cases}$$

Erhebt man nun die 1. Formel in (22) ins Quadrat, so ist:

$$qR^2Q^2+R_0^2Q_0^2+6RQR_0Q_0=\frac{p^4}{P^2P_0^2}\{RQ_0-QR_0\}^2,$$

also, wenn man hierzu aus (23) addirt:

$$-12\,RQR_0Q_0+4\,r^2q^2=16\,p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RQR_0Q_0}}{PP_0rq},$$

so folgt:

$$\begin{aligned}(3\,RQ-R_0Q_0)^2&+4\,r^2q^2\\ &=\frac{p^4}{P^2P_0^2}(RQ_0-QR_0)^2+16p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RQR_0Q_0}}{PP_0rq}\\ &=\frac{p^4}{P^2P_0^2}(RQ_0+QR_0)^2-\frac{4\,p^4}{P^2P_0^2}RQR_0Q_0+16p^2(pqr)^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{RQR_0Q_0}}{PP_0rq}.\end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass nach (17):

$$RQ_0+QR_0=rqPP_0\left(\frac{2}{pqr}\right)^{\frac{2}{3}}-2\sqrt{RQR_0Q_0},$$

und entwickelt hiervon das Quadrat, so fällt in der Gleichung das letzte Glied gegen das doppelte Product, das vorletzte Glied gegen das letzte Glied des Quadrates fort, und wir haben:

$$(3\,RQ-R_0Q_0)^2+4\,r^2q^2=p^4r^2q^2\left(\frac{2}{pqr}\right)^{\frac{4}{3}}=4\,p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Hieraus folgt jetzt:

$$\left\{\frac{3\,RQ-R_0Q_0}{2}\right\}^2=-\,r^2q^2+p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

und hieraus in Folge der Formeln (14)

$$\left\{\frac{3\,PP-P_0P_0}{2}\right\}^2=p^4-4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Ebenso behandelt man nun die beiden anderen Gleichungen in (22) und (23) und man erhält aus jeder wieder 2 Formeln, so dass wir nun im Ganzen folgende sechs Formeln haben, von denen die ersten beiden von Gauss (vgl. Bd. III, S. 476) angegeben sind:

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}\left\{\frac{3\,PP-P_0P_0}{2}\right\}^2&=\quad p^4-4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\\ \left\{\frac{3\,QQ-Q_0Q_0}{2}\right\}^2&=\quad q^4+4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\\ \left\{\frac{3\,RR-R_0R_0}{2}\right\}^2&=\quad r^4+4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\\ \left\{\frac{3\,RQ-R_0Q_0}{2}\right\}^2&=-r^2q^2+p^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\\ \left\{\frac{3\,PR-P_0R_0}{2}\right\}^2&=\quad r^2p^2+q^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\\ \left\{\frac{3\,PQ-P_0Q_0}{2}\right\}^2&=\quad p^2q^2+r^2\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}\right.$$

§ 4.

Die Fünftheilung.

Gemäss § 1. (25) ist hier bezeichnet

$$P = \vartheta_3(o, q^5), \quad Q = \vartheta(o, q^5), \quad R = \vartheta_2(o, q^5),$$

Die Reihen, mit denen wir es dann zu thun haben, sind folgende:

$$(1)\left\{\begin{array}{rl}
P=\vartheta_3(o, q^5) & = 1+2q^5+2q^{20}+2q^{45}+2q^{80}+2q^{125}+\cdots \\
Q=\vartheta\,(o, q^5) & = 1-2q^5+2q^{20}-2q^{45}+2q^{80}-2q^{125}\pm\cdots \\
R=\vartheta_2(o, q^5) & = \quad 2q^{\frac{5}{4}}+2q^{\frac{45}{4}}+2q^{\frac{125}{4}}+2q^{\frac{245}{4}}+\cdots \\
q^{\frac{1}{5}}\,\vartheta_3(\varpi, q^5) & = \quad q^{\frac{1}{5}}+q^{\frac{16}{5}}+q^{\frac{36}{5}}+q^{\frac{81}{5}}+q^{\frac{121}{5}}+q^{\frac{196}{5}}+q^{\frac{256}{5}}+\cdots \\
q^{\frac{4}{5}}\,\vartheta_3(2\varpi, q^5) & = \quad q^{\frac{4}{5}}+q^{\frac{9}{5}}+q^{\frac{49}{5}}+q^{\frac{64}{5}}+q^{\frac{144}{5}}+q^{\frac{169}{5}}+q^{\frac{289}{5}}+\cdots \\
q^{\frac{1}{5}}\,\vartheta\,(\varpi, q^5) & = \quad q^{\frac{1}{5}}-q^{\frac{16}{5}}-q^{\frac{36}{5}}+q^{\frac{81}{5}}+q^{\frac{121}{5}}-q^{\frac{196}{5}}-q^{\frac{256}{5}}\pm\cdots \\
q^{\frac{4}{5}}\,\vartheta\,(2\varpi, q^5) & = \quad q^{\frac{4}{5}}-q^{\frac{9}{5}}-q^{\frac{49}{5}}+q^{\frac{64}{5}}+q^{\frac{144}{5}}-q^{\frac{169}{5}}-q^{\frac{289}{5}}\pm\cdots \\
q^{\frac{1}{5}}\,\vartheta_2(\varpi, q^5) & = \quad q^{\frac{9}{20}}+q^{\frac{49}{20}}+q^{\frac{169}{20}}+q^{\frac{289}{20}}+q^{\frac{529}{20}}+\cdots \\
q^{\frac{1}{5}}\,\vartheta_2(2\varpi, q^5) & = \quad q^{\frac{1}{20}}+q^{\frac{81}{20}}+q^{\frac{121}{20}}+q^{\frac{361}{20}}+\cdots \\
i\,q^{\frac{1}{5}}\,\vartheta_1(\varpi, q^5) & = \quad q^{\frac{9}{20}}-q^{\frac{49}{20}}-q^{\frac{169}{20}}+q^{\frac{289}{20}}+q^{\frac{529}{20}}+\cdots \\
i\,q^{\frac{4}{5}}\,\vartheta_1(2\varpi, q^5) & = \quad q^{\frac{1}{20}}-q^{\frac{81}{20}}-q^{\frac{121}{20}}+q^{\frac{361}{20}}+\cdots
\end{array}\right.$$

Beachten wir den eigenthümlichen Bau dieser Reihen. In $\vartheta_3(\varpi, q^5)$, $\vartheta(\varpi, q^5)$, $\vartheta_2(\varpi, q^5)$ und $\vartheta_1(\varpi, q^5)$ stehen die Quadrate sämmtlicher Zahlen (resp. sämmtlicher ungerader Zahlen in den letzten beiden Reihen), die über oder unter einem Vielfachen von 5 liegen. In den 4 andern Reihen aber stehen die Quadrate der übrigen Zahlen. Die Reihen für die reelle Periode haben folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned}
\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) &= 1+2q^{25}+2q^{100}+\cdots+2\cos\frac{2\pi}{5}\,\{q+q^{16}+q^{36}+\cdot\cdot\} \\
&\qquad -2\cos\frac{\pi}{5}\,(q^4+q^9+q^{49}+\cdot\cdot) \\
\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) &= 1+2q^{25}+2q^{100}+\cdots+2\cos\frac{2\pi}{5}\,\{q^4+q^9+q^{49}+\cdot\cdot\} \\
&\qquad -2\cos\frac{\pi}{5}\,(q+q^{16}+q^{36}+\cdot\cdot)\,.
\end{aligned}$$

Die übrigen, welche analog gebildet sind, übergehen wir der Kürze halber.

Nun setzen wir in die Grundformel § 1. (10) $t=1$, $s=2$, so folgen durch passende Veränderung der Argumente um die halben Perioden folgende 6 Beziehungen:

$$(2)\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3(x+2y, q)\ \vartheta_3(2x-y, q) = \\
&\qquad = \sum_0^4 q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta_3(5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_3(5y-2\mu\varpi, q^5) \\
&\vartheta\ (x+2y, q)\ \vartheta\ (2x-y, q) \\
&\qquad = \sum_0^4 (-1)^{\mu} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta\ (5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta\ (5y-2\mu\varpi, q^5) \\
&\vartheta_2(x+2y, q)\ \vartheta_2(2x-y, q) \\
&\qquad = \sum_0^4 q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta_2(5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_2(5y-2\mu\varpi, q^5) \\
&\vartheta\ (x+2y, q)\ \vartheta_3(2x-y, q) \\
&\qquad = \sum_0^4 (-1)^{\mu} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta\ (5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_3(5y-2\mu\varpi, q^5) \\
&\vartheta_2(x+2y, q)\ \vartheta_3(2x-y, q) \\
&\qquad = \sum_0^4 q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta_2(5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_3(5y-2\mu\varpi, q^5) \\
&\vartheta\ (x+2y, q)\ \vartheta_2(2x-y, q) \\
&\qquad = \sum_0^4 (-1)^{\mu+1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(x+2y)}\ \vartheta\ (5x-\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_2(5y-2\mu\varpi, q^5).
\end{aligned}\right.$$

Setzt man hierein $x = y = 0$, so folgt nach einigen Umformungen:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
4q\ \vartheta_3(\varpi, q^5)\ \vartheta_3(2\varpi, q^5) &= pp - PP \\
4q\ \vartheta\ (\varpi, q^5)\ \vartheta\ (2\varpi, q^5) &= QQ - qq \\
4q\ \vartheta_2(\varpi, q^5)\ \vartheta_2(2\varpi, q^5) &= rr - RR;
\end{aligned}\right.$$

ferner:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
2q\left\{\vartheta_3(\varpi, q^5)\ \vartheta\ (2\varpi, q^5) - \vartheta\ (\varpi, q^5)\ \vartheta_3(2\varpi, q^5)\right\} &= pq - PQ \\
2q\left\{\vartheta\ (\varpi, q^5)\ \vartheta_2(2\varpi, q^5) - \vartheta_2(\varpi, q^5)\ \vartheta\ (2\varpi, q^5)\right\} &= rq + RQ \\
2q\left\{\vartheta_2(\varpi, q^5)\ \vartheta_3(2\varpi, q^5) + \vartheta_3(\varpi, q^5)\ \vartheta_2(2\varpi, q^5)\right\} &= pr - PR.
\end{aligned}\right.$$

Es braucht wohl nicht noch besonders darauf aufmerksam gemacht zu werden, dass q auf der linken Seite der Modul ist, während q auf der rechten Seite das Gauss'sche Zeichen für $\vartheta(0, q)$ bedeutet. Aehnliche Formeln wie in (3) ergeben sich aber auch sehr leicht für die reelle Periode. Setzt man in (2) $x = \frac{\pi}{5}$, $y = 0$, so ist:

$$(5^a)\begin{cases} \vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = P^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=4} q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}} \vartheta_3(\mu\varpi, q^5)\, \vartheta_3(2\mu\varpi, q^5) \\ \vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = Q^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=4} q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}} \vartheta(\mu\varpi, q^5)\, \vartheta(2\mu\varpi, q^5) \\ -\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = R^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=4} q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}} \vartheta_2(\mu\varpi, q^5)\, \vartheta_2(2\mu\varpi, q^5)\,. \end{cases}$$

$\vartheta_3(\mu\varpi, q^5) \cdot \vartheta_3(2\mu\varpi, q^5)$ lässt sich aber in allen Gliedern auf $q\vartheta_3(\varpi, q^5)\ \vartheta_3(2\varpi, q^5)$ zurückführen, und dieser Ausdruck ist dann in unserem Falle behaftet mit dem Factor:

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} \text{ d. i. mit } \frac{e^{\frac{8i\pi}{5}}\, e^{\frac{2i\pi}{5}} - e^{\frac{2i\pi}{5}}}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1} = -1, \text{ da } e^{2i\pi} = 1\,.$$

Dann ist offenbar:

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = P^2 - q\,\vartheta_3(\varpi, q^5)\ \vartheta_3(2\varpi, q^5)$$

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\ \vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = Q^2 + q\,\vartheta(\varpi, q^5)\ \vartheta(2\varpi, q^5)$$

$$-\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = R^2 - q\,\vartheta_2(\varpi, q^5)\ \vartheta_2(2\varpi, q^5)\,.$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung von (3):

$$(5^b)\begin{cases} 4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\ \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,PP - pp \\ 4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\ \vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,QQ - qq \\ 4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\ \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = rr - 5\,RR\,. \end{cases}$$

Wenn wir aber in die 3. Formel von (2) statt x und y $x + \frac{\pi}{2}$ und $y + \frac{\pi}{2}$ setzen und dann $x = \frac{\pi}{5}$ $y = 0$ nehmen, so folgt, da nach § 1. (5)

$$\vartheta_1(\pi - \mu\varpi, q^5) = \vartheta_1(\mu\varpi, q^5)$$

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\ \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=4} (-1)^\mu q^{\mu\mu} e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\ \vartheta_1(\mu\varpi, q^5)\ \vartheta_1(2\mu\varpi, q^5)\,.$$

Vermöge § 1. (3) lassen sich nun die vier Glieder rechter Hand alle auf $q\vartheta_1(\varpi, q^5)\ \vartheta_1(2\varpi, q^5)$ reduciren. Davon ist aber das 1. und 4. Glied negativ, das 2. und 3. positiv, also haben wir:

$$-e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{\frac{6i\pi}{5}}-e^{\frac{8i\pi}{5}}=-\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{-2i\pi}{5}}\right)-\left(e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{\frac{-i\pi}{5}}\right)$$
$$=-2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}\right)=-2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)=-\sqrt{5}\,.$$

Es ist also:

$$(6)\qquad -\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=q\sqrt{5}\,\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)\,.$$

Es ist also jetzt nur noch übrig $\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)$ herzuleiten. Setzen wir in § 1. (20) $x=2\varpi$ $y=\varpi$ und für q q^5 und multipliciren mit $16\,q^2$, so ergeben sich mit Hülfe von (3), sowie für $x=\frac{2\pi}{5}$, $y=\frac{\pi}{5}$ mit Hülfe von (5) folgende Beziehungen:

$$(7)\qquad \begin{cases}(p^2-P^2)^2-(q^2-Q^2)^2=4R^2(r^2-R^2)\\ (p^2-P^2)^2-(r^2-R^2)^2=4Q^2(q^2-Q^2)\\ (r^2-R^2)^2+(q^2-Q^2)^2=4P^2(p^2-P^2)\\ (5P^2-p^2)^2-(5Q^2-q^2)^2=4r^2(5R^2-r^2)\\ (5P^2-p^2)^2-(5R^2-r^2)^2=4q^2(5Q^2-q^2)\\ (5R^2-r^2)^2+(5Q^2-q^2)^2=4p^2(5P^2-p^2)\,;\end{cases}$$

ferner:

$$(8)\qquad \begin{cases}16\,q^2\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi,q^5)\,\vartheta_1^{\,2}(2\varpi,q^5)=-\frac{16}{5}\,\vartheta_1^{\,2}\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_1^{\,2}\left(\frac{2\pi}{5},q\right)\\ \qquad=(r^2-R^2)(r^2-5R^2)\\ \qquad=(q^2-Q^2)(q^2-5Q^2)\\ \qquad=-(p^2-P^2)(p^2-5P^2)\,.\end{cases}$$

Ferner aber folgt aus (7)

$$p^4-2p^2P^2+P^4-r^4+2r^2R^2-R^4=4Q^2q^2-4Q^4\,,$$

also nach § 1. (23):

$$(9)\qquad \begin{cases}(q^2-Q^2)(q^2-5Q^2)\\ \qquad=2(PPpp-QQqq-RRrr)=16q^2\,\vartheta_1^{\,2}(\varpi,q^5)\,\vartheta_1^{\,2}(2\varpi,q^5)\,.\end{cases}$$

Wenden wir hierauf die 3 letzten Formeln aus § 1. (14) an, so ist:

$$(q^2-Q^2)(q^2-5Q^2)=4\left\{\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{10})-\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{10})\right\}$$

also:

$$(10)\quad 2q\,\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)=\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{10})-\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{10})=V.$$

Jetzt werde in die Hauptformel § 1. (8) $\alpha=1$, $\beta=5$ gesetzt, so ist dann:

$$\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^5)=\sum_{\mu=0}^{\mu=5}q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^6)\,\vartheta_3(5x-y-5\mu\varpi,q^{30})\,.$$

Setzt man hierein statt q q^2 und $x = \frac{\varpi}{2}$, $y = 0$ und reducirt auf gehörige Weise vermöge der Formeln § 1. (3), so ist:

$$q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(0, q^2)\,\vartheta_3(0, q^{10}) = 2\,\vartheta_3(\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(5\varpi, q^{60}) + 2q^4\vartheta_3(3\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(15\varpi, q^{60}) + 2q^{12}\,\vartheta_3(5\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(25\varpi, q^{60})\,.$$

Setzt man aber $x = 0$, $y = \frac{5\varpi}{2}$, so folgt:

$$q^{-\frac{1}{2}}\vartheta_3(0, q^2)\,\vartheta_2(0, q^{10}) = 2q^2\,\vartheta_3(5\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(5\varpi, q^{60}) + 2q^4\vartheta_3(3\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(15\varpi, q^{60}) + 2q^{10}\,\vartheta_3(\varpi, q^{12})\,\vartheta_3(25\varpi, q^{60}).$$

Subtrahirt man beide Formeln, so ist:

$$q^{\frac{1}{2}}\,V = 2\,\{\vartheta_3(5\varpi, q^{60}) - \vartheta_2(5\varpi, q^{60}\}\,\{\vartheta_3(\omega, q^{12}) - \vartheta_2(\varpi, q^{12})\}\,.$$

Mit Hülfe von § 1. (6) folgt schliesslich:

$$\vartheta_3(0, q^2)\,\vartheta_3(0, q^{10}) - \vartheta_2(0, q^2)\,\vartheta_3(0, q^{10}) = 2\,q^2\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,\vartheta_1(5\varpi, q^{15})\,,$$

also nach dem Vergleiche mit (10)

$$q\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,\vartheta_1(5\varpi, q^{15}) = \vartheta_1(\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5)\,. \tag{11}$$

Diese elegante Formel ist für die ganze nachfolgende Entwicklung wichtig; der Grundgedanke für ihre Herleitung rührt von Herrn Prof. Schröter her. Es findet sich diese Beziehung auch schon bei Jacobi, der auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Productbeziehungen zu ihr gelangt ist. (Vgl. J. Jacobi: Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten 2 quadratische Formen haben: Crelle's Journal, Bd. 37, S. 92, Formel 21.) Ich werde später in einer allgemeinen Untersuchung zeigen, dass sich eine allgemeine Formel für alle ungraden Zahlen angeben lässt, von der (11) nur ein specieller Fall ist (vgl. § 9. (12) und (13)).

Da nun nach § 2. (11)

$$i q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_1(\varpi, q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

so ist:

$$q\,\vartheta_1(\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5) = -\left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{12}$$

Dann ergiebt sich also aus (12) und (8)

$$\begin{cases} \quad (rr - RR)\,(rr - 5RR) \\ = \quad (qq - QQ)\,(qq - 5QQ) \\ = -(pp - PP)\,(pp - 5PP) = (16pqr\,PQR)^{\frac{2}{3}} \end{cases} \tag{13}$$

und aus (12) und (9):

$$2ppPP - 2qqQQ - 2rrRR = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}} \tag{14}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475. Zugleich ist zu bemerken, dass sich an der betreffenden Stelle ein Zeichenfehler findet).

Diese letztere Beziehung:

$$2ppPP - 2qqQQ - 2rrRR = (16pqrPQR)^{\frac{2}{3}}$$

ist sehr interessant, denn sie giebt Gelegenheit, die Modulargleichung für die Transformation fünfter Ordnung in einer neuen Gestalt darzustellen. Setzt man die Werthe aus § 1. (2) ein, also z. B. $q = \sqrt{\frac{2K\varkappa_1}{\pi}}$, $Q = \sqrt{\frac{2\Lambda\lambda_1}{\pi}}$ etc., so ist:

$$\varkappa\lambda + \varkappa_1\lambda_1 + 2\sqrt[3]{4\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1} = 1\,,$$

so dass also diese Modulargleichung sich in 4facher Gestalt darbietet, denn es bestehen noch die 3 Formen:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{\varkappa\lambda}\,(\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda}) &= \sqrt[4]{\varkappa_1\lambda_1}\,(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\varkappa_1})\\
\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda} &= \sqrt[3]{4\varkappa_1\lambda_1}\,\sqrt[12]{\varkappa\lambda}\\
\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\varkappa_1} &= \sqrt[3]{4\varkappa\lambda}\,\sqrt[12]{\varkappa_1\lambda_1}
\end{aligned}$$

(vgl. Schröter: Ueber die Modulargleichungen Crelle Bd. 57, S. 378 so wie de aequ. mod. S. 16; sowie auch Fund. nov. S. 69).

Aus den Formeln (4) lassen sich mit Hülfe der Formeln § 1. (21) nun ähnliche Beziehungen angeben, wie in § 3. (7) für die Dreitheilung. Quadrirt man nämlich die 3 Formeln in (4) und setzt z. B. für

$$\vartheta_3^2(\varpi, q^5)\,\vartheta^2(2\varpi, q^5) + \vartheta^2(\varpi, q^5)\,\vartheta_3^2(2\varpi, q^5)$$

seinen Werth aus § 1. (21), nämlich:

$$-P^2\,\vartheta(2\varpi, q^5)\,\vartheta(\varpi, q^5) + Q^2\,\vartheta_3(2\varpi, q^5)\,\vartheta_3(\varpi, q^5)$$

so ergiebt sich:

$$(15)\quad \begin{cases} PPqq + QQpp + 4pqPQ - ppqq - 5PPQQ = 0\\ PPrr + RRpp + 4prPR - pprr - 5RRPP = 0\\ QQrr + RRqq + 4qrQR - qqrr - 5QQRR = 0\,. \end{cases}$$

Es folgt ferner aus § 1. (19)

$$\begin{aligned}
2\vartheta(\varpi, q^5)\;\vartheta_1(\varpi, q^5)\;\vartheta_2(\varpi, q^5)\;\vartheta_3(\varpi, q^5) &= PQR\,\vartheta_1(2\varpi, q^5)\\
2\vartheta(2\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5)\,\vartheta_2(2\varpi, q^5)\,\vartheta_3(2\varpi, q^5) &= q^{-3}PQR\,\vartheta_1(\varpi, q^5)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
2\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) &= pqr\,\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)\\
2\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) &= pqr\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, q\right)
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die ersten beiden Gleichungen mit einander, so wie die letzten beiden, so ergiebt sich nach Anwendung von (3) und (5)

$$(16)\quad \begin{cases}(pp-PP)\ \ (QQ-qq)\ \ (rr-RR)\ \ =16P^2Q^2R^2\\ (pp-5PP)\,(qq-5QQ)\,(rr-5RR)=16p^2q^2r^2\,.\end{cases}$$

Es wird sich dann später zeigen (vgl. § 5. (4) und (6)), dass sich diese beiden Gleichungen noch weiter zerlegen lassen, indem nämlich wird:

$$(17)\quad \begin{cases}(p-P)\,(q+Q)\,(r+R)=4\,PQR\\ (p+P)\,(Q-q)\,(r-R)=4\,PQR\\ (\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\,(\sqrt{5}\,R+r)=4\,pqr\\ (\sqrt{5}\,P+p)\,(\sqrt{5}\,Q-q)\,(r-\sqrt{5}\,R)=4\,pqr\,.\end{cases}$$

Wir gelangen nun zur Darstellung derjenigen Beziehungen, welche bei Gauss das Hauptinteresse in Anspruch nehmen Aus § 1. (13) folgt nämlich:

$$\sqrt{PQ}\,\vartheta_1(2\varpi,\,q^{10})=\vartheta_1(\varpi,\,q^5)\quad\vartheta_2(\varpi,\,q^5)$$
$$\sqrt{PQ}\,\vartheta_1(4\varpi,\,q^{10})=\vartheta_1(2\varpi,\,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,\,q^5),$$

also durch Multiplication und Benutzung von (3) und (12):

$$PQ\,\{\tfrac{1}{4}\,\vartheta(0,\,q^2)\,\vartheta_2(0,\,q^2)\,\vartheta_3(0,\,q^2)\,\vartheta(0,\,q^{10})\,\vartheta_2(0,\,q^{10})\,\vartheta_3(0,\,q^{10})\}^{\frac{1}{3}}$$
$$=(\tfrac{1}{4}pqr\,PQR)^{\frac{1}{3}}\,(r^2-R^2)\,.$$

Reduciren wir $\vartheta(0,\,q^2)$ etc. nach den Formeln § 1. (14), so folgt schliesslich:

$$rr-RR=\sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4\,PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}}\,.$$

Durch die anderen Beziehungen in § 1. (13) kann man auf dieselbe Weise die Differenzen $QQ-qq$ und $pp-PP$ als Product darstellen. Beachtet man (13), so folgt auch für $rr-5RR$ etc. ein Product, da dort

$$(rr-RR)\,(rr-5RR)=(16pqr\,PQR)^{\frac{2}{3}}.$$

Setzen wir

$$\frac{(4\,PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}}=A,\qquad \frac{(4\,pqr)^{\frac{5}{6}}}{(4\,PQR)^{\frac{1}{6}}}=B,$$

so dass also:

$$AB=(16\,pqr\,PQR)^{\frac{2}{3}},\qquad \frac{A}{B}=\frac{PQR}{pqr}\,.$$

Dann folgt:

$$(18)\quad \begin{cases}4\,q\,\vartheta_3(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,\,q^5)=pp-PP=A\sqrt{\frac{p}{P}}\\ 4\,q\,\vartheta\,(\varpi,\,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,\,q^5)=\,QQ-qq\,=A\sqrt{\frac{q}{Q}}\\ 4\,q\,\vartheta_2(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,\,q^5)=rr-RR=A\sqrt{\frac{r}{R}}\end{cases}$$

$$(19)\quad\begin{cases} 4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,PP - pp = B\sqrt{\frac{P}{p}} \\ 4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = 5\,QQ - qq = B\sqrt{\frac{Q}{q}} \\ 4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = rr - 5\,RR = B\sqrt{\frac{R}{r}} \end{cases}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475).

Addirt oder subtrahirt man immer 2 entsprechende Formeln in (18) und (19), so entstehen sechs sehr symmetrische irrationale Beziehungen, die denen in § 3. (6) in gewisser Weise analog sind:

$$(20)\quad\begin{cases} \sqrt[6]{\frac{(QR)^5}{qr}} + \sqrt[6]{\frac{(qr)^5}{QR}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,PP)^5}{2\,pp}} = 0 \\ 5\sqrt[6]{\frac{(QR)^5}{qr}} + \sqrt[6]{\frac{(qr)^5}{QR}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,pp)^5}{2\,PP}} = 0 \\ -\sqrt[6]{\frac{(PR)^5}{pr}} + \sqrt[6]{\frac{(pr)^5}{PR}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,QQ)^5}{2\,qq}} = 0 \\ -5\sqrt[6]{\frac{(PR)^5}{pr}} + \sqrt[6]{\frac{(pr)^5}{PR}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,qq)^5}{2\,QQ}} = 0 \\ \sqrt[6]{\frac{(PQ)^5}{pq}} - \sqrt[6]{\frac{(pq)^5}{PQ}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,RR)^5}{2\,rr}} = 0 \\ 5\sqrt[6]{\frac{(PQ)^5}{pq}} - \sqrt[6]{\frac{(pq)^5}{PQ}} - \sqrt[6]{\frac{(2\,rr)^5}{2\,RR}} = 0 \end{cases}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475).

Wenn man aus § 1. (17) die Formel nimmt:

$$\vartheta_3^2(x, q)\,\vartheta_3^2(2x, q) + \vartheta_1^2(x, q)\,\vartheta_1^2(2x, q) - \vartheta^2(x, q)\,\vartheta^2(2x, q) - \vartheta_2^2(x, q)\,\vartheta_2^2(2x, q) = 0$$

und setzt hierein einmal $x = \omega$ und q^5, das andere Mal $x = \frac{\pi}{5}$ und benutzen die Beziehungen (18) und (19), so ergeben sich noch 2 elegante rationale Beziehungen, nämlich:

$$(21)\quad\begin{cases} \frac{q}{Q} + \frac{r}{R} - \frac{p}{P} = \frac{pqr}{PQR} \\ \frac{Q}{q} + \frac{R}{r} - \frac{P}{p} = 5\frac{PQR}{pqr} \quad \text{oder:} \\ \frac{PQ}{pq} + \frac{PR}{pr} - \frac{RQ}{rq} = 1 \\ \frac{pq}{PQ} + \frac{pr}{PR} - \frac{qr}{QR} = 5 \end{cases}$$

(vgl. Gauss, a. a. O. S. 475 und 477; sowie auch § 3. (11) und (12)).

Wenn das System (18) zuerst mit PP, QQ, RR, sodann zweitens mit pp, qq, rr multiplicirt wird und man die Gleichungen in geeigneter Weise subtrahirt oder addirt, so dass die Beziehung (14) und § 1. (23) anwendbar wird, und ebenso mit (19) verfährt, so erhält man schliesslich noch folgende 4 Beziehungen:

$$(22)\quad \begin{cases} \sqrt{pP^3}+\sqrt{qQ^3}-\sqrt{rR^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(4pqr)^{\frac{5}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \\ \sqrt{\frac{r^5}{R}}-\sqrt{\frac{q^5}{Q}}-\sqrt{\frac{r^5}{R}}=\frac{1}{2}\frac{(4pqr)^{\frac{5}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}} \\ \text{und} \\ \sqrt{Pp^3}-\sqrt{Qq^3}+\sqrt{Rr^3}=\frac{1}{2}\frac{(4PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}} \\ \sqrt{\frac{Q^5}{q}}-\sqrt{\frac{P^5}{p}}-\sqrt{\frac{R^5}{r}}=\frac{1}{2}\frac{(4PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}. \end{cases}$$

Wir sind damit am Abschluss der grösstentheils (mit Ausnahme etwa von § 3. (10 — 24)) durch die Anleitung im mathematischen Seminar erreichten Resultate. Ich habe hierbei lediglich nur das redactionelle Verdienst einer einheitlichen und möglichst präcisen Darstellung, und spreche daher Herrn Prof. Schröter an dieser Stelle nochmals meinen Dank dafür aus, diese schönen und eleganten Resultate hiermit veröffentlichen zu dürfen. Die nachstehende Untersuchung in § 5. über die Darstellung der Theilwerthe der Fünf einzeln, deren Product wir bis jetzt erst in (18) und (19) kennen, ist zwar auch noch von diesen Uebungen aus angeregt, jedoch von mir ganz selbständig durchgeführt worden.

§ 5.

Die einzelnen Theilwerthe.

Wir haben vorher noch einige Hülfsformeln abzuleiten. Aus § 1. (22) ergiebt sich:

$$PQ\left\{\vartheta(x,q^5)\,\vartheta_3(y,q^5)+\vartheta_3(x,q^5)\,\vartheta(y,q^5)\right\}$$
$$=2\,\vartheta\left(\frac{x+y}{2},q^5\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2},q^5\right)\vartheta_3\left(\frac{x+y}{2},q^5\right)\vartheta_3\left(\frac{x-y}{2},q^5\right).$$

Setzt man hierin $x=2\varpi$, $y=\varpi$ und reducirt die rechte Seite nach § 1. (4), so ist:

$$2q\left\{\vartheta(2\varpi,q^5)\,\vartheta_3(\varpi,q^5)+\vartheta_3(2\varpi,q^5)\,\vartheta(\varpi,q^5)\right\}$$
$$=-\frac{1}{PQ}4q^2\,\vartheta_1(\varpi,q^5)\,\vartheta_1(2\varpi,q^5)\,\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi\,q^5)$$
$$=rR\left(\frac{16\,pqPQ}{rrRR}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Nun folgt aber aus § 4. (20) und (21)

$$rR\left(\frac{16pqPQ}{rrRR}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{r}{R}\,(PQ - pq) = Qp - Pq)\,.$$

Da dieses ebenso bei den beiden analogen Formeln statt hat, so haben wir:

$$(1)\quad \begin{cases} 2q\left\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,q^5)+\vartheta\,(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\right\}=\frac{(p-P)(q+Q)-(q-Q)(p+P)}{2} \\ 2q\left\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5)-\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\right\}=\frac{(r-R)(p+P)-(p-P)(r+R)}{2} \\ 2q\left\{\vartheta\,(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5)+\vartheta\,(2\varpi,q^5)\,\vartheta_2(\varpi,q^5)\right\}=\frac{(r+R)(q+Q)-(r-R)(q-Q)}{2}\,. \end{cases}$$

Aus § 4. (4) aber folgt

$$(2)\quad \begin{cases} 2q\left\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,q^5)-\vartheta\,(\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\right\}=\frac{(p-P)(q+Q)+(q-Q)(p+P)}{2} \\ 2q\left\{\vartheta_3(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5)+\vartheta_2(\varpi,q^6)\,\vartheta_3(2\varpi,q^5)\right\}=\frac{(r-R)(p+P)+(p-P)(r+R)}{2} \\ 2q\left\{\vartheta\,(\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,q^5)-\vartheta_2(\varpi,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,q^5)\right\}=\frac{(r+R)(q+Q)+(r-R)(q-Q)}{2}\,. \end{cases}$$

Durch die Addition und Subtraction der entsprechenden Gleichungen in (1) und (2) folgt:

$$(3)\quad \begin{cases} 4\,q\,\vartheta_3(\varpi,\,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,\,q^5)=(p-P)\,(q+Q) \\ 4\,q\,\vartheta\,(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,\,q^5)=(p+P)\,(Q-q) \\ 4\,q\,\vartheta_3(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,\,q^5)=(p+P)\,(r-R) \\ 4\,q\,\vartheta_2(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_3(2\varpi,\,q^5)=(p-P)\,(r+R) \\ 4\,q\,\vartheta\,(\varpi,\,q^5)\,\vartheta_2(2\varpi,\,q^5)=(r+R)\,(q+Q) \\ 4\,q\,\vartheta_2(\varpi,\,q^5)\,\vartheta\,(2\varpi,\,q^5)=(r-R)\,(Q-q)\,. \end{cases}$$

Multiplicirt man hierin die 1. und 4. Gleichung und beachtet § 4. (3), so ist:

$$(p^2-P^2)\,(r-R)\,(Q-q)=(p-P)^2\,(q+Q)\,(r+R)\,,$$

also in Folge von § 4. (16):

$$(4)\quad \begin{cases} (p+P)\,(r-R)\,(Q-q)= \\ (p-P)\,(q+Q)\,(r+R)=4\,PQR \end{cases}$$

eine Formel, die wir schon in § 4. (17) angeführt haben.

Ganz ähnliche Formeln, wie die in (3) und (4) bestehen aber auch für die reelle Periode. Setzt man nämlich in die 3 letzten Formeln § 4. (2) einmal $x=\frac{\pi}{5}$, $y=0$ und dann $y=\frac{\pi}{5}$, $x=0$, so resultiren folgende sechs Formeln:

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=PQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{\frac{4\mu i\pi}{5}}\vartheta(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=PQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\vartheta(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=RP+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}q^{\mu\mu}e^{\frac{4\mu i\pi}{5}}\vartheta_2(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$-\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=RP+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}q^{\mu\mu}e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\vartheta_2(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_3(2\mu\varpi,q^5)$$

$$-\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=RQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{\frac{2\mu i\pi}{5}}\vartheta(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\mu\varpi,q^5)$$

$$\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)=RQ+\sum_{\mu=1}^{\mu=4}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{\frac{4\mu i\pi}{5}}\vartheta(\mu\varpi,q^5)\,\vartheta_2(2\mu\varpi,q^5)\,.$$

Führt man diese Summen aus, so treten als Factoren $\cos\frac{\pi}{5}$ und $\cos\frac{2\pi}{5}$ an die Glieder. Führt man schliesslich die Werthe dieser ein, nämlich $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, so wie die Werthe aus den Systemen (1) und (2), so folgt:

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)&=(\sqrt{5}\,P+p)\,(\sqrt{5}\,Q-q)\\
4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)&=(\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\\
4\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)&=(\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,R+r)\\
4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5},q\right)&=(\sqrt{5}\,P+p)\,(r-\sqrt{5}\,R)\\
4\,\vartheta\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5},q\right)&=(\sqrt{5}\,Q-q)\,(r-\sqrt{5}\,R)\\
4\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{5},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5},q\right)&=(\sqrt{5}\,R+r)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\,.
\end{aligned}\right.$$

Multiplicirt man hier wieder die erste mit der vierten Formel und beachtet § 4. (5) so ist:

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
&(\sqrt{5}\,P-p)\,(\sqrt{5}\,R+r)\,(\sqrt{5}\,Q+q)\\
&=(\sqrt{5}\,P+p)\,(\sqrt{5}\,R-r)\,(q-\sqrt{5}\,Q)=4\,pqr
\end{aligned}\right.$$

eine ebenfalls schon § 4. (17) angegebene Beziehung. Es würde sich nun eine Darstellung für $\vartheta_3(\varpi,q^5)$ etc. ergeben, wenn man die Formeln § 1. (17) benutzt. Es wäre dann nämlich:

$$\vartheta_3{}^4(\varpi,q^5)-\vartheta_2{}^4(\varpi,q^5)=Q^3\,\vartheta(2\varpi,q^5)\,.$$

Multiplicirt man dieses mit $4^4 q^4 \vartheta^4(2\varpi, q^5)$, trägt links die Werthe aus (3) ein und reducirt durch die Beziehung (4), so ergiebt sich:

$$(7)\quad \begin{cases} 4^4 q^4\, \vartheta^5(2\varpi, q^5) = Q P^4 R^4 \left\{\left(\frac{1}{r+R}\right)^4 - \left(\frac{1}{p+P}\right)^4\right\} \\ 4^4 q\ \ \vartheta^5(\varpi, q^5) \quad = Q P^4 R^4 \left\{\left(\frac{1}{p-P}\right)^4 - \left(\frac{1}{r-R}\right)^4\right\}. \end{cases}$$

Ebenso würden die übrigen Formeln für $\vartheta_3(\varpi, q)$ etc. sich ergeben. Da diese Beziehungen aber wegen der Differenz von vierten Potenzen ziemlich unbequem und auch mit den früheren Beziehungen schwierig in Einklang zu setzen sind, so übergehen wir die weitere Darstellung in dieser Form.

Setzen wir nun aber in die Formeln § 1. (22) einmal $x = y = \varpi$, und dann $x = y = 2\varpi$, so erhalten wir folgende Beziehungen:

$$(8)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta^2(\varpi, q^5)\ \vartheta_3^2(\varpi, q^5) = P^2 Q\,\vartheta(2\varpi, q^5) + Q^2 P\,\vartheta_3(2\varpi, q^5) \\ 2q^5\,\vartheta^2(2\varpi, q^5)\,\vartheta_3^2(2\varpi, q^5) = Q^2 P\,\vartheta_3(\varpi, q^5) - P^2 Q\,\vartheta(\varpi, q^5) \\ 2\,\vartheta_3^2(\varpi, q^5)\ \vartheta_2^2(\varpi, q^5) = P^2 R\,\vartheta_2(2\varpi, q^5) + R^2 P\,\vartheta_3(2\varpi, q^5) \\ 2q^3\,\vartheta_3^2(2\varpi, q^5)\,\vartheta_2^2(2\varpi, q^5) = P^2 R\,\vartheta_2(\varpi, q^5) + R^2 P\,\vartheta_3(\varpi, q^5) \\ 2\,\vartheta^2(\varpi, q^5)\ \vartheta_2^2(\varpi, q^5) = R Q^2\,\vartheta_2(2\varpi, q^5) + R^2 Q\,\vartheta(2\varpi, q^5) \\ 2q^3\,\vartheta^2(2\varpi, q^5)\,\vartheta_2^2(2\varpi, q^5) = Q^2 R\,\vartheta_2(\varpi, q^5) - R^2 Q\,\vartheta(\varpi, q^5). \end{cases}$$

Setzen wir nun zur augenblicklichen Abkürzung:

$$\begin{array}{lll} \vartheta(\varpi, q^5) = x, & \vartheta_3(\varpi, q^5) = x_1 & \\ \vartheta(2\varpi, q^5) = y, & \vartheta_3(2\varpi, q^5) = y_1 & \\ p^2 - P^2 = B_1 & (Q-q)(P+p) = A & P^2 Q = \alpha \\ Q^2 - q^2 = A_1 & (p-P)(q+Q) = B & Q^2 P = \beta \end{array}$$

und combiniren die 1. Gleichung in (8) mit (3) und mit § 4. (3), so haben wir:

$$\begin{aligned} 2x^2 x_1^2 &= \alpha y + \beta y_1 \\ 4q\,x_1\,y_1 &= B_1 \\ 4q\,x\,y &= A_1 \\ 4q\,x\,y_1 &= A; \end{aligned}$$

also hieraus:

$$2x^2 x_1^2 = \alpha y + \frac{\beta}{4qx} \cdot A$$

$$8qx^3 x_1^3 = 4q\alpha x y + \beta A = \alpha A_1 + \beta A = M.$$

Nun ist:

$$\frac{x_1}{x} = \frac{B_1}{A} = L,$$

also:

$$8qx^5 = \frac{M}{L^2}, \quad 8qx_1^5 = ML^3.$$

Trägt man alles ein, so folgt hieraus:

$$8q\vartheta^5(\varpi, q^5) = \frac{PQ(Q-q)^3}{(p-P)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}$$
$$8q\vartheta_3^5(\varpi, q^5) = \frac{PQ(p-P)^3}{(Q-q)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}.$$

Aus den obigen 4 Gleichungen ergiebt sich auch $\vartheta(2\varpi, q^5)$ und $\vartheta_3(2\varpi, q^5)$ jedoch in anderer Form wie $\vartheta(\varpi, q^5)$; wir werden später davon Gebrauch machen In derselben Form aber liefert diese Grössen ein zweites System, nämlich:

$$\begin{aligned} 2q^3y^2y_1^2 &= \beta x_1 - \alpha x \\ 4q\,x_1y_1 &= B_1 \\ 4q\,x\,y &= A_1 \\ 4q\,x_1y &= B. \end{aligned}$$

Verfährt man nun mit den andern beiden Gleichungen in (8) ebenso und combinirt sie immer mit (3) und § 4. (3), so ergiebt sich schliesslich für jeden Theilwerth eine doppelte Darstellung in der Form:

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
8q\,\vartheta_3^5(\varpi, q^5) &= \frac{PQ(p-P)^3}{(Q-q)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}\\
&= \frac{PR(p+P)^3}{(r+R)^2}\{R(p-P)+P(r-R)\}\\
8q^4\vartheta_3^5(2\varpi, q^5) &= \frac{PQ(p+P)^3}{(Q+q)^2}\{Q(p-P)-P(Q-q)\}\\
&= \frac{PR(p-P)^3}{(r-R)^2}\{R(p+P)+P(r+R)\}\\
8q\,\vartheta^5(\varpi, q^5) &= \frac{PQ(Q-q)^3}{(p-P)^2}\{P(q+Q)+Q(p+P)\}\\
&= \frac{RQ(q+Q)^3}{(r-R)^2}\{R(Q-q)+Q(r+R)\}\\
8q^4\vartheta^5(2\varpi, q^5) &= \frac{PQ(q+Q)^3}{(p+P)^2}\{Q(p-P)-P(Q-q)\}\\
&= \frac{RQ(Q-q)^3}{(r+R)^2}\{Q(r-R)-R(q+Q)\}\\
8q\,\vartheta_2^5(\varpi, q^5) &= \frac{PR(r+R)^3}{(p+P)^2}\{R(p-P)+P(r-R)\}\\
&= \frac{QR(r-R)^3}{(q+Q)^2}\{R(Q-q)+Q(r+R)\}\\
8q^4\vartheta_2^5(\varpi, q^5) &= \frac{PR(r-R)^3}{(p-P)^2}\{R(p+P)+P(r+R)\}\\
&= \frac{QR(r+R)^3}{(Q-q)^2}\{Q(r-R)-R(Q+q)\}.
\end{aligned}\right.$$

Beachten wir nun, dass jedes der Systeme von je 4 Gleichungen immer noch 2 Wurzeln liefert, so ergiebt sich eine weitere Art der Darstellung:

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
4^4 q^4 \vartheta_3^5(2\varpi, q^5) &= \frac{2(Q-q)^2}{PQ(p-P)^3} \cdot \frac{(p^2-P^2)^5}{P(q+Q)+Q(p+P)} \\
&= \frac{2(r+R)}{PR(p+P)^3} \cdot \frac{(p^2-P^2)^5}{R(p-P)+P(r-R)} \\
4^4 q^4 \vartheta_3^5(\varpi, q^5) &= \frac{2(Q+q)^2}{PQ(p+P)^3} \cdot \frac{(p^2-P^2)^5}{Q(p-P)-P(Q-q)} \\
&= \frac{2(r-R)^2}{PR(p-P)^3} \cdot \frac{(p^2-P^2)^5}{R(p+P)+P(r+R)} \\
4^4 q^4 \vartheta^5(2\varpi, q^5) &= \frac{2(p-P)^2}{PQ(Q-q)^3} \cdot \frac{(Q^2-q^2)^5}{P(q+Q)+Q(p+P)} \\
&= \frac{2(r-R)^2}{RQ(q+Q)^3} \cdot \frac{(Q^2-q^2)^5}{R(Q-q)+Q(r+R)} \\
4^4 q\, \vartheta^5(\varpi, q^5) &= \frac{2(p+P)^2}{PQ(q+Q)^3} \cdot \frac{(Q^2-q^2)^5}{Q(p-P)-P(Q-q)} \\
&= \frac{2(r+R)^2}{PQ(Q-q)^3} \cdot \frac{(Q^2-q^2)^5}{Q(r-R)-R(q+Q)} \\
4^4 q^4 \vartheta_2^5(2\varpi, q^5) &= \frac{2(p-P)^2}{PR(r-R)^3} \cdot \frac{(r^2-R^2)^5}{R(p+P)+P(r+R)} \\
&= \frac{2(Q-q)^2}{RQ(r+R)^3} \cdot \frac{(r^2-R^2)^5}{Q(r-R)-R(q+Q)} \\
4^4 q^4 \vartheta_2^5(\varpi, q^5) &= \frac{2(p+P)^2}{PR(r+R)^3} \cdot \frac{(r^2-R^2)^5}{R(p-P)+P(r-R)} \\
&= \frac{2(Q+q)^2}{RQ(r-R)^3} \cdot \frac{(r^2-R^2)^5}{R(Q-q)+Q(r+R)} .
\end{aligned}
\right.
$$

Nimmt man also noch (7) hinzu, so haben wir 5 verschiedene Darstellungen für unsere Grössen. Aus diesen Formeln lassen sich die früher erhaltenen rectificiren und sie enthalten eine Fülle der eigenthümlichsten Beziehungen, wenn man erwägt, dass ja p, P etc. sämmtlich unendliche Producte und Summen vorstellen.

Auch die noch fehlenden beiden Werthe für $\vartheta_1(\varpi, q^5)$ und $\vartheta_1(2\varpi, q^5)$ ergeben sich jetzt. Aus § 1. (19) folgt:

$$2^5\, \vartheta^5(\varpi, q^5)\, \vartheta_2^5(\varpi, q^5)\, \vartheta_3^5(\varpi, q^5) = P^5 Q^5 R^5 \frac{\vartheta_1^5(2\varpi, q^5)}{\vartheta_1^5(\varpi, q^5)} .$$

Setzt man hierein die passenden Werthe aus (9), bezeichnen den Factor:

$$\{P(q+Q)+Q(p+P\}\, \{R(Q-q)+Q(r+R)\}\, \{R(p-P)+P(r-R)\} = F$$

und beachten, dass nach (4):

$$(p-P)(q+Q)(r+R) = (p+P)(Q-q)(r-R) = 4PQR,$$

so ist:

$$4q^3\, \vartheta_1^5(2\varpi, q^5) \cdot P^2 Q^2 R^2 = F\, \vartheta_1^5(\varpi, q^5)$$

also, da nach § 4. (12):

$$q^5 \vartheta_1^{\,5}(\varpi, q^5)\, \vartheta_1^{\,5}(2\varpi, q^5) = -\left(\frac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{5}{3}},$$

so folgt:

$$(11)\quad \begin{cases} q\, \vartheta_1^{\,5}(\varpi, q^5) = i\,\dfrac{2PQR}{\sqrt{F}} \cdot \left\{\dfrac{pqr\; PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}} \\ q^4 \vartheta_1^{\,5}(2\varpi, q^5) = i\,\dfrac{\sqrt{F}}{2PQR} \cdot \left\{\dfrac{pqr\; PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}}. \end{cases}$$

Es bleiben nur noch dieselben Beziehungen für die reelle Periode zu untersuchen, und zwar mit Hülfe von (5). Auch hier konnte wiederum ein mit (7) analoges System aufgestellt werden. Dieses übergehen wir. Analog dem System (8) ergiebt sich nun gleichfalls aus § 1. (22), wenn einmal $x = y = \frac{\pi}{5}$, das andere Mal $x = y = \frac{2\pi}{5}$:

$$(12)\quad \begin{cases} 2\,\vartheta^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \vartheta_3^{\,2}\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = q^2 p\, \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) + p^2 q\, \vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \vartheta_3^{\,2}\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = q^2 p\, \vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) + p^2 q\, \vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta_2^{\,2}\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \vartheta_3^{\,2}\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = r^2 p\, \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) + p^2 r\, \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta_2^{\,2}\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \vartheta_3^{\,2}\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = r^2 p\, \vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) - p^2 r\, \vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta^2\left(\frac{\pi}{5}, q\right) \vartheta_2^{\,2}\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = r^2 q\, \vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) + q^2 r\, \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \\ 2\,\vartheta^2\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) \vartheta_2^{\,2}\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = r^2 q\, \vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right) - q^2 r\, \vartheta_2\left(\frac{\pi}{5}, q\right). \end{cases}$$

Setzen wir wieder für den Augenblick:

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = x, \quad \vartheta_3\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = x_1, \quad \vartheta\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = y, \quad \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = y_1,$$

$$5QQ - qq = A_1, \quad 5PP - pp = B_1, \quad (\sqrt{5}P - p)(\sqrt{5}Q + q) = B,$$

so haben wir:

$$\begin{aligned} 2\,x^2 x_1^{\,2} &= \alpha y + \beta y_1 \\ 4\,xy &= A_1 \\ 4\,x_1 y &= B_1 \\ 4\,x y_1 &= B \end{aligned}$$

und hieraus wieder:

$$8\,x^3 x_1^{\,3} = \alpha A_1 + \beta B = M, \quad \frac{x_1}{x} = \frac{B_1}{B} = L,$$

$$8\,x^5 = \frac{M}{L^2}, \quad 8\,x_1^{\,5} = ML^3.$$

Setzt man nun wieder hierein die Werthe, so erhält man analoge Formeln wie in (9). Da dasselbe Raisonnement für die übrigen Formeln in (12) gilt, so können wir sofort das resultirende System hinschreiben:

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
8\,\vartheta_3^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) &= \frac{pq\,(\sqrt{5}\,P+p)^3}{(\sqrt{5}\,Q+q)^2}\left\{p\,(\sqrt{5}\,Q-q)+q\,(\sqrt{5}\,P-p)\right\}\\
&= \frac{pr\,(\sqrt{5}\,P-p)^3}{(r-\sqrt{5}\,R)^2}\left\{r\,(\sqrt{5}\,P+p)+p\,(\sqrt{5}\,R+r)\right\}\\
8\,\vartheta_3^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) &= \frac{pq\,(\sqrt{5}\,P-p)^3}{(\sqrt{5}\,Q-q)^2}\left\{q\,(\sqrt{5}\,P+p)+p\,(\sqrt{5}\,Q+q)\right\}\\
&= \frac{pr\,(\sqrt{5}\,P+p)^3}{(\sqrt{5}\,R+r)^2}\left\{r\,(\sqrt{5}\,P-p)-p\,(r-\sqrt{5}\,R)\right\}\\
8\,\vartheta^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) &= \frac{pq\,(\sqrt{5}\,Q+q)^3}{(\sqrt{5}\,P+p)^2}\left\{p\,(\sqrt{5}\,Q-q)+q\,(\sqrt{5}\,P-p)\right\}\\
&= \frac{qr\,(\sqrt{5}\,Q-q)^3}{(\sqrt{5}\,R+r)^2}\left\{r\,(\sqrt{5}\,Q+q)+q\,(r-\sqrt{5}\,R)\right\}\\
8\,\vartheta^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) &= \frac{qr\,(\sqrt{5}\,Q-q)^3}{(\sqrt{5}\,P-p)^2}\left\{q\,(\sqrt{5}\,P+p)+p\,(\sqrt{5}\,Q+q)\right\}\\
&= \frac{qr\,(\sqrt{5}\,Q+q)^3}{(r-\sqrt{5}\,R)^2}\left\{-q\,(\sqrt{5}\,R+r)+r\,(\sqrt{5}\,Q-q)\right\}\\
8\,\vartheta_2^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) &= \frac{pr\,(r-\sqrt{5}\,R)^3}{(\sqrt{5}\,P-p)^2}\left\{r\,(\sqrt{5}\,P+p)+p\,(\sqrt{5}\,R+r)\right\}\\
&= \frac{qr\,(\sqrt{5}\,R+r)^3}{(\sqrt{5}\,Q-q)^2}\left\{r\,(\sqrt{5}\,Q+q)+q\,(r-\sqrt{5}\,R)\right\}\\
8\,\vartheta_2^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) &= \frac{pr\,(\sqrt{5}\,R+r)^3}{(\sqrt{5}\,P+p)^2}\left\{r\,(\sqrt{5}\,P-p)-p\,(r-\sqrt{5}\,R)\right\}\\
&= \frac{qr\,(r-\sqrt{5}\,R)^3}{(\sqrt{5}\,Q+q)^2}\left\{r\,(\sqrt{5}\,Q-q)-q\,(\sqrt{5}\,R+r)\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Die den Formeln (10) analoge Darstellung übergehen wir der Kürze halber; sie ist aus (13) leicht herstellbar.

Schliesslich folgt noch aus § 1. (19):

$$
2^{9}\,\vartheta^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_2^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_3^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) = 16\,p^5 q^5 r^5\,\frac{\vartheta_1^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, q\right)}.
$$

Trägt man nun passende Werthe aus (13) ein, dergestalt, dass sich nach (6) gewisse Factoren fortheben und setzen:

$$
\begin{aligned}
\left\{p\,(\sqrt{5}\,Q-q)+q\,(\sqrt{5}\,P-p)\right\}\left\{r\,(\sqrt{5}\,Q+q)+q\,(r-\sqrt{5}\,R)\right\}&\\
\cdot\left\{r\,(\sqrt{5}\,P+p)+p\sqrt{5}\,R+r\right\}&=G,
\end{aligned}
$$

so ist:

$$
4\,\vartheta_1^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right)\cdot p^2 q^2\cdot r^2 = G\,\vartheta_1^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right).
$$

Nun folgt aber aus § 4. (6) und (12):

$$\vartheta_1{}^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\,\vartheta_1{}^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = +\,25\sqrt{5}\left(\frac{pqr\,PQR}{4}\right)^{\frac{5}{3}},$$

also ist:

$$(14)\qquad \left|\begin{aligned} \vartheta_1{}^5\left(\frac{\pi}{5}, q\right) &= \frac{10\,pqr}{\sqrt{G}}\sqrt[4]{5}\left\{\frac{pqr\,PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}} \\ \vartheta_1{}^5\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) &= \frac{5\sqrt{G}}{2\,pqr}\sqrt[4]{5}\left\{\frac{pqr\,PQR}{4}\right\}^{\frac{5}{6}}. \end{aligned}\right.$$

§ 6.

Die Siebentheilung.

Gauss hat für die Sieben keine den im § 3. und § 4. dargestellten analoge Beziehungen angegeben. Wir werden zunächst versuchen, solche Relationen, die jenen früheren ähnlich sind, auch hier abzuleiten. Gemäss § 1. (25) bedeutet dann hier:

$$P = \vartheta_3(0, q^7), \qquad Q = \vartheta(0, q^7), \qquad R = \vartheta_2(0, q^7).$$

Wenn wir in § 1. (9) $\lambda = 7$ setzen: so resultirt:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^7) \\ &\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi, q^8)\,\vartheta_3(7x-y-7\mu\varpi, q^{56}) \\ &\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^7) \\ &\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^{\mu} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi, q^8)\,\vartheta_3(7x-y-7\mu\varpi, q^{56}) \\ &\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^7) \\ &\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi, q^8)\,\vartheta_3(7x-y-7\mu\varpi, q^{56}) \\ &\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^7) \\ &\qquad = \sum_{\mu=0}^{\mu=7} (-1)^{\mu+1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\,\vartheta_2(x+y-\mu\varpi, q^8)\,\vartheta_3(7x-y-7\mu\varpi, q^{56}). \end{aligned}\right.$$

Durch Addition und Subtraction der beiden ersten Formeln ergiebt sich:

$$\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^7)+\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^7)$$
$$=2\sum_{\mu=0}^{\mu=3} q^{4\mu\mu}e^{4\mu i x}\,\vartheta_3(x+y-2\mu\varpi,q^8)\,\vartheta_3(7x-y-14\mu\varpi,q^{56})$$
$$\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^7)-\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^7)$$
$$=2\sum_{\mu=0}^{\mu=3} q^{(2\mu+1)^2}e^{2(2\mu+1)ix}\,\vartheta_3(x+y-(2\mu+1)\varpi,q^8)\cdot\vartheta_3(7x-y-7(2\mu+1)\mu\varpi,q^{56})\,.$$

Wenn man nun rechts die Summen ausführt und die Moduln q^{56} und q^8 mit Hülfe der bekannten Formeln:

$$2\,\vartheta_3\,(2\,x,\,q^4)=\vartheta_3\,(x,\,q)+\vartheta\,(x,\,q)$$
$$2\,\vartheta_2\,(2\,x,\,q^4)=\vartheta_3\,(x,\,q)-\vartheta\,(x,\,q)\ \text{in § 1. (6)}$$

auf die Moduln q^{14} resp. q^2 reducirt, so erhält man nach Anwendung der Periodenformeln in § 1. (3) und (4):

$$\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7)+\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7)$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_3(7x+y,q^{14})+\vartheta(7x+y,q^{14})\right\}\left\{\vartheta_3(x-y,q^2)+\vartheta(x-y,q^2)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_2(7x+y,q^{14})+i\vartheta_1(7x+y,q^{14})\right\}\left\{\vartheta_3(x-y,q^2)+i\,\vartheta(x-y,q^2)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_3(7x+y,q^{14})-\vartheta(7x+y,q^{14})\right\}\left\{\vartheta_3(x-y,q^2)-\vartheta(x-y,q^2)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{\vartheta_2(7x+y,q^{14})-i\vartheta_1(7x+y,q^{14})\right\}\left\{\vartheta_3(x-y,q^2)-i\vartheta(x-y,q^2)\right\}$$
$$\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7)-\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7)$$
$$=\tfrac{1}{2}\,qe^{4ix}\left\{\vartheta_3\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)+\vartheta\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\right\}\cdot\left\{\vartheta_3\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)+\vartheta\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,qe^{4ix}\left\{\vartheta_2\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)+i\,\vartheta_1\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\right\}\cdot\left\{\vartheta_2\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)+i\,\vartheta_1\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,qe^{4ix}\left\{\vartheta_3\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)-\vartheta\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\right\}\cdot\left\{\vartheta_3\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)-\vartheta\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,qe^{4ix}\left\{\vartheta_2\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)-i\,\vartheta_1\left(x-y-\frac{\varpi}{2},q^2\right)\right\}\cdot\left\{\vartheta_2\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)-i\,\vartheta_1\left(7x+y-\frac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}.$$

Hieraus folgt:

$$\left|\begin{array}{l}\vartheta_3\,(2\,x,q)\,\vartheta_3\,(2\,y,q^7)+\vartheta\,(2\,x,q)\,\vartheta\,(2\,y,q^7)\\ \quad=\vartheta_3\,(x-y,\,q^2)\,\vartheta_3\,(7\,x+y,\,q^{14})+\vartheta\,(x-y,\,q^2)\,\vartheta\,(7\,x+y,\,q^{14})\\ \quad+\vartheta_2\,(x-y,\,q^2)\,\vartheta_2\,(7\,x+y,\,q^{14})-\vartheta_1\,(x-y,\,q^2)\,\vartheta_1\,(7\,x+y,\,q^{14})\end{array}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(2x,q)\,\vartheta_3(2y,q^7)-\vartheta(2x,q)\,\vartheta(2y,q^7)\\&\quad=q\,e^{4ix}\Big\{\vartheta_3\left(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_3\left(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\\&\qquad\qquad+\vartheta\left(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta\left(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\\&\qquad+\vartheta_2\left(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_2\left(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\\&\qquad\qquad-\vartheta_1\left(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_1\left(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Verfährt man mit den letzten beiden Formeln in (1) ebenso, oder auch, setzt man in die eben erhaltenen beiden Resultate für y $y+\frac{\varpi}{2}$ ein und berücksichtigt die Beziehungen § 1. (4), so ergiebt sich:

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^7)+\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^7)\\&\quad=\vartheta_3(x-y,q^2)\,\vartheta_3(7x+y,q^{14})-\vartheta(x-y,q^2)\,\vartheta(7x+y,q^{14})\\&\quad+\vartheta_2(x-y,q^2)\,\vartheta_2(7x+y,q^{14})+\vartheta_1(x-y,q^2)\,\vartheta_1(7x+y,q^{14})\\&\vartheta_2(2x,q)\,\vartheta_2(2y,q^7)-\vartheta_1(2x,q)\,\vartheta_1(2y,q^7)\\&\quad=q\,e^{4ix}\Big\{\vartheta_3\left(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_3\left(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\\&\qquad\qquad-\vartheta\left(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta\left(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\\&\qquad+\vartheta_2\left(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_2\left(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\\&\qquad\qquad+\vartheta_1\left(x-y-\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_1\left(7x+y-\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right).\end{aligned}\right.$$

Dass in den Formeln für die Differenzen in (2) und (3) rechts die Argumente noch mit $\frac{\varpi}{2}$ resp. $\frac{7\varpi}{2}$ behaftet sind, rührt daher, dass in den ausgeführten Summen rechts ungerade Vielfache der Periode ϖ vorkommen.

Aus diesen Beziehungen (2) und (3) erhalten wir für $x=y=0$:

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^7)+\vartheta(0,q)\,\vartheta(0,q^7)\\&\quad=\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14})+\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14})+\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14})\\&\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(0,q^7)\\&\quad=\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14})-\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14})+\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}),\end{aligned}\right.$$

ferner aus (3):

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(0,q^7)-\vartheta(0,q)\,\vartheta(0,q^7)\\&\quad=2q\left\{\vartheta_3\left(\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_3\left(\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)+\vartheta\left(\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta\left(\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\}\\&\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_2(0,q^7)\\&\quad=2q\left\{\vartheta_3\left(\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta_3\left(\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)-\vartheta\left(\tfrac{\varpi}{2},q^2\right)\vartheta\left(\tfrac{7\varpi}{2},q^{14}\right)\right\},\end{aligned}\right.$$

endlich für $x = y = \frac{\pi}{8}$ aus den ersten Formeln in (2) und (3):

$$(6)\ \begin{cases} 2\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q^7\right) \\ \qquad = \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14}) + \vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}) - \vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}) \\ 2\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q^7\right) \\ \qquad = \vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14}) - \vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}) - \vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^{14}). \end{cases}$$

Setzt man in die Formeln (4) und (6) statt q $q^{\frac{1}{2}}$ und führt die Werthe aus § 1. (14) für $\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})$, so wie aus § 1. (15) für $\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q\right)$ etc. ein, so ergeben sich sofort folgende 3 Beziehungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} pP - qQ + rR = 2\sqrt{rpRP} \\ pP + qQ - rR = 2\sqrt{pqPQ} \\ pP - qQ - rR = 2\sqrt{rqRQ}, \end{cases}$$

also hieraus:

$$(8)\qquad (pP + qQ - rR)\,(pP - qQ + rR)\,(pP - qQ - rR) \\ = 8\,pqrPQR,$$

also auch:

$$(9)\qquad \begin{cases} pP = \sqrt{rpRP} + \sqrt{pqPQ} \\ qQ = \sqrt{pqPQ} - \sqrt{rqRQ} \\ rR = \sqrt{prPR} - \sqrt{rqRQ}. \end{cases}$$

Aus allen 3 letzten Formeln ergiebt sich folgende Grundbeziehung:

$$(10)\qquad \sqrt{pP} = \sqrt{qQ} + \sqrt{rR}.$$

Diese Formel enthält bekanntlich die Modulargleichung für die Sieben. Setzt man nämlich die Werthe $P = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}$, $p = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\pi}}$ etc., so ist:

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa_1\lambda_1} = 1$$

(vgl. Schröter, de aequationibus modularibus S. 18).

Es ist interessant, diese Formel (10) mit der in § 2. (5) für die Drei erhaltenen zu vergleichen, denn dort war bekanntlich:

$$pP = qQ + rR.$$

Ziehen wir nun die Formeln (6) von einander ab, so folgt nach Benutzung von § 1. (15):

$$\sqrt{\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14})}\,\left\{\sqrt{\vartheta_3(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^{14})} - \sqrt{\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_2(,0q^{14})}\right\} \\ = 2\,\vartheta(0,q^2)\,\vartheta(0,q^{14}).$$

Also mit Benutzung von § 1. (14):

$$\sqrt[4]{pqPQ}\left\{\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2+q^2)(P^2+Q^2)}-\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2-q^2)(P^2-Q^2)}\right\}=2\sqrt{pqPQ}.$$

Die 1. Formel in (5) aber liefert nach dem Eintragen aus § 1. (15):

$$\sqrt{(p^2+r^2)(P^2+R^2)}-\sqrt{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}$$
$$=2\sqrt[4]{\frac{rpRP}{4}}\left\{\sqrt[4]{(r^2+p^2)(R^2+P^2)}+\sqrt[4]{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}\right\}.$$

Nach einer kleinen Umformung in den letzten beiden Formeln erhalten wir dann:

$$(11)\begin{cases}\sqrt[4]{(pp+rr)(PP+RR)}-\sqrt[4]{(pp-rr)(PP-RR)}=\sqrt[4]{4rpRP}\\ \sqrt[4]{(pp+qq)(PP+QQ)}-\sqrt[4]{(pp-qq)(PP-QQ)}=\sqrt[4]{4pqPQ}.\end{cases}$$

Quadrirt man beide Formeln und benutzt (7), so ergeben sich Beziehungen, deren eine man auch aus (4) erhält, wenn man statt q $q^{\frac{1}{2}}$ schreibt. Es ist nämlich:

$$(12)\begin{cases}pP+qQ+rR=\sqrt{(pp+rr)(PP+RR)}+\sqrt{(pp-rr)(PP-RR)}\\ \qquad\qquad=\sqrt{(pp+qq)(PP+QQ)}+\sqrt{(pp-qq)(PP-QQ)}.\end{cases}$$

Quadrirt man noch einmal und beachtet § 1. (23), so ergiebt sich folgende eigenthümliche Beziehung:

$$(13)\qquad (pP+qQ+rR)^2=2ppPP+2rrRR+2qqQQ.$$

Es sind damit 3 Functionen gefunden, die der Functionalgleichung genügen:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2.$$

Setzen wir nun in (2) und (3):

$$x=\frac{\varpi}{8},\quad y=\frac{-7\varpi}{8},\ \text{oder auch}\ y=\frac{\pi}{4},$$

so ergiebt sich:

$$(14)\begin{cases}q^{\frac{1}{2}}\left\{\vartheta_3\left(\frac{\varpi}{4},q\right)\vartheta_3\left(\frac{7\varpi}{4},q\right)+\vartheta\left(\frac{\varpi}{4},q\right)\vartheta\left(\frac{7\varpi}{4},q^7\right)\right\}\\ \qquad\qquad=\vartheta_3(0,q^{14})\,\vartheta_2(0,q^2)+\vartheta_2(0,q^{14})\,\vartheta_3(0,q^2)\\ 2\left\{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4},q^2\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4},q^{14}\right)+\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4},q^2\right)\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4},q^{14}\right)\right\}\\ \qquad\qquad=\vartheta_3(0,q)\,\vartheta(0,q^7)+\vartheta(0,q)\,\vartheta_3(0,q^7).\end{cases}$$

Aus der ersten Formel in (14) folgt:

$$\sqrt[4]{4rpRP}\left\{\sqrt[4]{(p^2+r^2)(P^2+R^2)}+\sqrt[4]{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}\right\}$$
$$=\sqrt{(p^2-q^2)(P^2+Q^2)}+\sqrt{(p^2+q^2)(P^2-Q^2)},$$

also hieraus:

$$\sqrt{prPR}\,\{\sqrt{(p^2+r^2)(P^2+R^2)}+\sqrt{(p^2-r^2)(P^2-R^2)}+2qQ\} \\ =(p^2P^2+r^2R^2-q^2Q^2)\,,$$

oder mit Hülfe von (12):

$$(pP+3\,qQ+rR)\sqrt{prPR}=p^2P^2+r^2R^2-q^2Q^2\,.$$

Eine analoge Formel ergiebt sich aus der zweiten Gleichung in (14). Wenn man statt q $q^{\frac{1}{2}}$ setzt, so ist:

$$\sqrt{(p^2+r^2)(P^2-R^2)}+\sqrt{(p^2-r^2)(P^2+R^2)} \\ =2\sqrt[4]{pqPQ}\,\{\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2+q^2)(P^2+Q^2)}+\sqrt[4]{\tfrac{1}{4}(p^2-q^2)(P^2-Q^2)}\}\,.$$

Erhebt man dieses wiederum ins Quadrat und berücksichtigt (12), so folgt:

$$p^2P^2-r^2R^2+q^2Q^2=\sqrt{pqPQ}\,\{pP+3\,rR+qQ\}\,.$$

Zu diesen beiden Formeln bietet sich aus (13) noch eine dritte analoge dar, und wir haben dann:

$$(15)\quad \begin{cases} ppPP-rrRR+qqQQ=\sqrt{pqPQ}\,\{pP+3rR+qQ\} \\ ppPP+rrRR-qqQQ=\sqrt{prPR}\,\{pP+rR+3qQ\} \\ ppPP-rrRR-qqQQ=\sqrt{rqRQ}\,\{3pP+rR+qQ\}\,, \end{cases}$$

oder aber mit Hülfe von (7):

$$(16\quad \begin{cases} ppPP-rrRR+qqQQ=(pP-rR+qQ)(pP+3rR+qQ) \\ ppPP+rrRR-qqQQ=(pP+rR-qQ)(pP+rR-3qQ) \\ ppPP-rrRR-qqQQ=(pP-rR-qQ)(3pP+rR+qQ). \end{cases}$$

§ 7.

Die Theilwerthe.

Wir gehen nun aus von der allgemeinsten Formel, nämlich der in § 1. (7). Setzen wir dort $r=1$, $s=2$, $p=3$, $t=1$, so ist die Bedingung erfüllt, dass r, s, p, t keinen gemeinsamen Factor haben sollen. Dann resultirt:

$$(1)\quad \vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q^3) \\ =\sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu}\,e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_3(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\,.$$

Wenn wir in dieser Formel das eine resp. beide Argumente um die halbe Periode verändern und gemäss den Grundformeln § 1. (4) reduciren, so folgt:

$$
(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\vartheta(x,q)\,\vartheta(y,q^3)\\
&\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_3(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q^3)\\
&\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}(q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_2(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3)\\
&\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_1(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&\vartheta(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3)\\
&\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}(-1)^\mu q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&\vartheta_2(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3)\\
&\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_2(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\\
&-\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_1(y,q^3)\\
&\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6}q^{\mu\mu}e^{2\mu ix}\,\vartheta_3(3x+2y-3\mu\varpi,q^{21})\,\vartheta_1(2x-y-2\mu\varpi,q^7)\,.
\end{aligned}\right.
$$

Wir könnten die Anzahl dieser Formeln noch erheblich vermehren, begnügen uns aber der Kürze halber mit diesen, die wir im Folgenden brauchen werden.

Wenn man nun in den letzten 3 Formeln in (2) setzt $x=\varpi$, $y=2\varpi$, so wird man bemerken, dass nach gehöriger Vereinfachung mit Hülfe von § 1. (3) rechts die Grössen $\vartheta_1(\varpi,q^7)$, $\vartheta_1(2\varpi,q^7)$, $\vartheta_1(3\varpi,q^7)$ auftreten, und zwar multiplicirt mit der Summe zweier anderer ϑ-Functionen, deren Modul q^{21} ist.

Es ergiebt sich:

$$
(3)\quad\left\{\begin{aligned}
-\vartheta(o,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)&=\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\{\vartheta(2\varpi,q^{21})+q\,\vartheta(5\varpi,q^{21})\}\\
&+\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\{q\vartheta(4\varpi,q^{21})-q^5\vartheta(10\varpi,q^{21})\}\\
&-\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\{q\vartheta(\varpi,q^{21})+q^4\vartheta(8\varpi,q^{21})\}\\
-\vartheta_2(o,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3&=\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\{\vartheta_2(2\varpi,q^{21})-q\,\vartheta_2(5\varpi,q^{21})\}\\
&+\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\{q\vartheta_2(4\varpi,q^{21})-q^5\vartheta_2(10\varpi,q^{21})\}\\
&+\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\{q\vartheta_2(\varpi,q^{21})-q^4\vartheta_2(8\varpi,q^{21})\}\\
\vartheta_3(o,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)&=\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\{\vartheta_3(2\varpi,q^{21})-q\,\vartheta_3(5\varpi,q^{21})\}\\
&+\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\{q\vartheta_3(4\varpi,q^{21})-q^5\vartheta_3(10\varpi,q^{21})\}\\
&+\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\{q\vartheta_3(\varpi,q^{21})-q^4\vartheta_3(8\varpi,q^{21})\}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Es ergeben sich aber dieselben Formeln in der Klammer merkwürdiger Weise aus der Dreitheilung.

Aus den Formeln § 2. (3) ergeben sich nach Veränderung der Argumente um die halben Perioden und Reduction nach den Formeln § 1. (4) folgende Beziehungen, wenn man in § 2. (3) für q q^7 schreibt:

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
iq^{-\frac{7}{2}}e^{-iy}\vartheta_2(x,q^7)\vartheta(y,q^{14}) = {}& \vartheta_1(x+y-7\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42})\\
&+q^7\,e^{2ix}\vartheta_1(x+y-14\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42})\\
&+q^{28}e^{4ix}\vartheta_1(x+y-21\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42})\\
iq^{-\frac{7}{2}}e^{-iy}\vartheta_3(x,q^7)\vartheta_1(y,q^{14}) = {}& \vartheta\,(x+y-7\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42})\\
&+q^7\,e^{2ix}\vartheta\,(x+y-14\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42})\\
&+q^{28}e^{4ix}\vartheta\,(x+y-21\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42})\\
iq^{-\frac{7}{2}}e^{-iy}\vartheta\,(x,q^7)\vartheta_1(y,q^{14}) = {}& \vartheta_3(x+y-7\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42})\\
&-q^7\,e^{2ix}\vartheta_3(x+y-14\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42})\\
&+q^{28}e^{4ix}\vartheta_3(x+y-21\varpi,q^{21})\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42})\\
-iq^{-\frac{7}{2}}e^{-iy}\vartheta_1(x,q^7)\vartheta_1(y,q^{14}) = {}& \vartheta_2(x+y-7\varpi,q^{14})\vartheta(2x-y+7\varpi,q^{42})\\
&-q^7\,e^{2ix}\vartheta_2(x+y-14\varpi,q^{14})\vartheta(2x-y-7\varpi,q^{42})\\
&+q^{28}e^{4ix}\vartheta_2(x+y-21\varpi,q^{14})\vartheta(2x-y-21\varpi,q^{42})
\end{aligned}\right.$$

Man setze nun in jede dieser Formeln:

1) $x=\varpi,\ y=2\varpi$; 2) $x=2\varpi,\ y=4\varpi$; 3) $x=3\varpi,\ y=6\varpi$,

so fällt vermöge des Baues dieser Formeln rechts immer das dritte Glied fort, wenn man beachtet, dass nach § 1. (4):

$$\vartheta\,(21\,\varpi,\,q^{42})=0.$$

Da nun aber ebenfalls aus § 1. (4) folgt, dass

$$\vartheta\,(7\,\varpi,\,q^{42})=iq^{\frac{7}{2}}\,\vartheta_1\,(14\,\varpi,\,q^{42}),$$

so wird sich z. B. aus der ersten Formel ergeben:

$$-\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^{14})=q^5\left\{\vartheta_1(4\varpi,q^{21})+q^4\vartheta_1(10\varpi,q^{21})\right\}\vartheta_1(14\varpi,q^{42}).$$

Es wird in allen Formeln auf der rechten Seite der Factor $\vartheta_1\,(14\varpi,q^{42})$ auftreten, während links entweder $\vartheta\,(2\varpi,q^{14})$, $\vartheta\,(4\varpi,q^{14})$, $\vartheta\,(6\varpi,q^{14})$, oder $\vartheta_1\,(2\,\varpi,\,q^{14})$, $\vartheta_1\,(4\,\varpi,\,q^{14})$, $\vartheta_1\,(6\,\varpi,\,q^{14})$ steht.

Nun ist aber nach § 1. (13):

$$\begin{aligned}
\vartheta\,(0,\,q^{42})\,\vartheta_1\,(14\varpi,\,q^{42}) &= \vartheta_1\,(7\,\varpi,\,q^{21})\ (\vartheta_2\,(7\,\varpi,\,q^{21})\\
\vartheta\,(0,\,q^{14})\ \ \vartheta\,(2\,\varpi,\,q^{14}) &= \vartheta\,(\varpi,\,q^7)\ \vartheta\,(2\,\varpi,\,q^7)\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Somit tritt in allen 12 Formeln auf der rechten Seite der Factor:

$$\vartheta_1\,(7\,\varpi,\,q^{21})\ \vartheta_2\,(7\,\varpi,\,q^{21})\,\frac{\vartheta\,(0,\,q^{14})}{\vartheta\,(0,\,q^{42})}$$

auf. Nennen wir seinen reciproken Werth A und beachten, dass nach § 1. (14):

$$\vartheta\,(0, q^{14}) = \sqrt{PQ}$$
$$\vartheta\,(0, q^{12}) = \sqrt{\vartheta\,(0, q^{21})\ \vartheta_3\,(0, q^{21})}\,,$$

nach § 2. (11):

$$i q^{\frac{7}{3}}\, \vartheta_1\,(7\,\varpi, q^{21}) = \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$q^{\frac{7}{3}}\, \vartheta_2\,(7\,\varpi, q^{21}) = \sqrt{\frac{\vartheta\,(0, q^{21})\ \vartheta_3\,(0, q^{21})}{PQ}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

so wird:

$$A = i q^{\frac{14}{3}} \left(\frac{2}{PQR}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Wir sehen also, dass sich die für die Transformation des 7. Grades unbrauchbaren Grössen $\vartheta\,(0, q^{21})$ und $\vartheta_3\,(0, q^{21})$ herausheben, und hierauf musste eben das ganze Streben gerichtet sein, aus (4) und damit aus (3) diese Grössen herauszuschaffen.

Wir erhalten dann aus (4):

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
q\ \left\{\vartheta_1(2\varpi, q^{21}) - q\ \vartheta_1(5\varpi, q^{21})\right\} &= A\vartheta_2(3\varpi, q^7)\,\vartheta\,(3\varpi, q^7)\,\vartheta_3(3\varpi, q^7)\\
q^3\left\{\vartheta_1(\varpi, q^{21}) + q^3\vartheta_1(8\varpi, q^{21})\right\} &= -A\vartheta_2(2\varpi, q^7)\,\vartheta\,(2\varpi, q^7)\,\vartheta_3(2\varpi, q^7)\\
q^5\left\{\vartheta_1(4\varpi, q^{21}) + q^4\vartheta_1(10\varpi, q^{21})\right\} &= -A\vartheta_2(\varpi, q^7)\,\vartheta\,(\varpi, q^7)\,\vartheta_3(\varpi, q^7)\\
q\ \left\{\vartheta\,(2\varpi, q^{21}) + q\ \vartheta\,(5\varpi, q^{21})\right\} &= A\vartheta_1(3\varpi, q^7)\,\vartheta_2(3\varpi, q^7)\,\vartheta_3(3\varpi, q^7)\\
q^3\left\{\vartheta\,(\varpi, q^{21}) + q^3\vartheta\,(8\varpi, q^{21})\right\} &= A\vartheta_1(2\varpi, q^7)\,\vartheta_2(2\varpi, q^7)\,\vartheta_3(2\varpi, q^7)\\
q^5\left\{\vartheta\,(4\varpi, q^{21}) - q^4\vartheta\,(10\varpi, q^{21})\right\} &= A\vartheta_1(\varpi, q^7)\,\vartheta_2(\varpi, q^7)\,\vartheta_3(\varpi, q^7)\\
q\ \left\{\vartheta_3(2\varpi, q^{21}) - q\ \vartheta_3(5\varpi, q^{21})\right\} &= A\vartheta\,(3\varpi, q^7)\,\vartheta_1(3\varpi, q^7)\,\vartheta_2(3\varpi, q^7)\\
q^3\left\{\vartheta_3(\varpi, q^{21}) - q^3\vartheta_3(8\varpi, q^{21})\right\} &= A\vartheta\,(2\varpi, q^7)\,\vartheta_1(2\varpi, q^7)\,\vartheta_2(2\varpi, q^7)\\
q^5\left\{\vartheta_3(4\varpi, q^{21}) - q^4\vartheta_3(10\varpi, q^{21})\right\} &= A\vartheta\,(\varpi, q^7)\,\vartheta_1(\varpi, q^7)\,\vartheta_2(\varpi, q^7)\\
q\ \left\{\vartheta_2(2\varpi, q^{21}) - q\ \vartheta_2(5\varpi, q^{21})\right\} &= -A\vartheta\,(3\varpi, q^7)\,\vartheta_1(3\varpi, q^7)\,\vartheta_3(3\varpi, q^7)\\
q^3\left\{\vartheta_2(\varpi, q^{21}) - q^3\vartheta_2(8\varpi, q^{21})\right\} &= -A\vartheta\,(2\varpi, q^7)\,\vartheta_1(2\varpi, q^7)\,\vartheta_3(2\varpi, q^7)\\
q^5\left\{\vartheta_2(4\varpi, q^{21}) - q^4\vartheta_2(10\varpi, q^{21})\right\} &= -B\vartheta\,(\varpi, q^7)\,\vartheta_1(\varpi, q^8)\,\vartheta_3(\varpi, q^7).
\end{aligned}\right.$$

Diese Formeln zeigen uns, dass sich dadurch die Klammergrössen in den Formeln (3) eliminiren lassen. Tragen wir alle Werthe aus (5) in (3) ein, sowie A und den Werth $\vartheta_1\,(\varpi, q^3)$ aus § 2. (11), der in (3) links steht, so ergeben sich folgende 3 Beziehungen:

$$\left|\begin{aligned}
q\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = q\ &\vartheta_1(2\varpi, q^8)\,\vartheta_1(\varpi, q^7)\,\vartheta_2(\varpi, q^7)\,\vartheta_3(\varpi, q^7)\\
-q^3&\vartheta_1(3\varpi, q^7)\,\vartheta_1(2\varpi, q^7)\,\vartheta_2(2\varpi\, q^7)\,\vartheta_3(2\varpi, q^7)\\
+q^4&\vartheta_1(\varpi, q^7)\,\vartheta_1(3\varpi, q^7)\,\vartheta_2(3\varpi, q^8)\,\vartheta_3(3\varpi, q^7)
\end{aligned}\right.$$

$$(6)\left\{\begin{aligned}-r\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} &= q\ \vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\\ &+q^3\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\ &+q^4\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\ -p\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} &= q\ \vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\\ &+q^3\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\ &+q^4\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7):\end{aligned}\right.$$

Es ist selbstverständlich, dass links q immer das Gauss'sche Zeichen für $\vartheta(0,q)$, rechts aber der Modul q ist, der ja überhaupt immer nur in Verbindung mit $\vartheta(\varpi, q^3)$ etc. auftreten kann.

Nun folgt aus § 1. (19):

$$\begin{aligned}2\ \vartheta_1(\varpi,q^7)\ \vartheta_2(\varpi,q^7)\ \vartheta_3(\varpi,q^7)\ \vartheta(\varpi,q^7) &= PQR\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\\ 2q\ \vartheta_1(2\varpi,q^7)\ \vartheta_2(2\varpi,q^7)\ \vartheta_3(2\varpi,q^7)\ \vartheta(2\varpi,q^7) &= PQR\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)\\ 2q^5\vartheta_1(3\varpi,q^7)\ \vartheta_2(3\varpi,q^7)\ \vartheta_3(3\varpi,q^7)\ \vartheta(3\varpi,q^7) &= PQR\,\vartheta_1(\varpi,q^7)\,.\end{aligned}$$

Dann sind die Beziehungen (6) anders zu schreiben, was sich sogleich als wichtig erweisen wird.

Es ist dann:

$$(7)\left\{\begin{aligned}&q\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{q^2\,\vartheta(\varpi,q^3)\ \vartheta(2\varpi,q^7)\ \vartheta(3\varpi,q^7)\right\}\\ &\qquad= q\ \vartheta_1{}^2(\varpi,q^7)\ \vartheta(\varpi,q^7)\ \vartheta(2\varpi,q^7)\\ &\qquad+ q^3\vartheta_1{}^2(2\varpi,q^7)\ \vartheta(2\varpi,q^7)\ \vartheta(3\varpi,q^7)\\ &\qquad- q^4\vartheta_1{}^2(3\varpi,q^7)\ \vartheta(\varpi,q^7)\ \vartheta(3\varpi,q^7)\\ &-r\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{q^2\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\right\}\\ &\qquad= q\ \vartheta_1{}^2(\varpi,q^7)\ \vartheta_2(\varpi,q^7)\ \vartheta_2(2\varpi,q^7)\\ &\qquad+ q^3\vartheta_1{}^2(2\varpi,q^7)\ \vartheta_2(2\varpi,q^7)\ \vartheta_2(3\varpi,q^7)\\ &\qquad+ q^4\vartheta_1{}^2(3\varpi,q^7)\ \vartheta_2(\varpi,q^7)\ \vartheta_2(3\varpi,q^7)\\ &-p\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{q^2\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)\right\}\\ &\qquad= q\ \vartheta_1{}^2(\varpi,q^7)\ \vartheta_3(\varpi,q^7)\ \vartheta_3(2\varpi,q^7)\\ &\qquad+ q^3\vartheta_1{}^2(2\varpi,q^7)\ \vartheta_3(2\varpi,q^7)\ \vartheta_3(3\varpi,q^7)\\ &\qquad+ q^4\vartheta_1{}^2(3\varpi,q^7)\ \vartheta_3(\varpi,q^7)\ \vartheta_3(3\varpi,q^7)\,.\end{aligned}\right.$$

Wir setzen nun in § 1. (8) $\alpha = 1$, $\beta = 6$. Dann folgt:

$$\left|\begin{aligned}&\vartheta_3(x,q)\ \vartheta_3(y,q^6)\\ &\qquad=\sum_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu}e^{2\mu i x}\,\vartheta_3(x+y-\mu\varpi,q^7)\ \vartheta_3(6x-y-6\mu\varpi,q^{42})\end{aligned}\right.$$

und hieraus:

$$(8)\begin{cases} \vartheta_2(x,q)\ \vartheta_2(y,q^6) \\ \qquad = \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_2(x+y-\mu\varpi, q^7)\ \vartheta_3(6x-y-6\mu\varpi, q^{42}) \\ \vartheta_2(x,q)\ \vartheta_1(y,q^6) \\ \qquad = \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=6} q^{\mu\mu} e^{2\mu i x}\, \vartheta_1(x+y-\mu\varpi, q^7)\ \vartheta(6x-y-6\mu\varpi, q^{42}), \end{cases}$$

für $x = 3\varpi$, $y = 2\varpi$ ergiebt sich hieraus:

$$\begin{aligned}(9)\quad \vartheta_2(o,q)\ \vartheta_1(2\varpi, q^6) = {} & \vartheta_1(\varpi, q^7)\left\{q\,\vartheta(8\varpi, q^{42}) - q^9\,\vartheta(20\varpi, q^{42})\right\} \\ & + \vartheta_1(2\varpi, q^7)\left\{\vartheta(2\varpi, q^{42}) + q^6\,\vartheta(16\varpi, q^{42})\right\} \\ & + \vartheta_1(3\varpi, q^7)\left\{q\,\vartheta(4\varpi, q^{42}) + q^3\,\vartheta(10\varpi, q^{42})\right\}.\end{aligned}$$

Diese Formel hat mit denen in (3) eine gewisse Analogie, und es existiren auch zu (9) noch 2 ähnliche Formeln für $\vartheta_3(0,q)\ \vartheta_1(2\varpi, q^6)$ und $\vartheta(0,q)\ \vartheta_1(2\varpi, q^6)$. Dieselben sind jedoch zur weiteren Untersuchung nicht geeignet, da rechts die Function ϑ_1 nicht erscheint.

Nun folgt aber analog wie in (4) aus den Formeln der Dreitheilung in § 2. (3):

$$\begin{aligned}\vartheta_2(x,q^7)\ \vartheta_1(y,q^{14}) = {} & \vartheta_1(x+y, q^{21})\ \vartheta(2x-y, q^{42}) \\ & + q^7\ e^{2ix}\,\vartheta_1(x+y-7\varpi, q^{21})\ \vartheta(2x-y-14\varpi, q^{42}) \\ & + q^{28} e^{4ix}\,\vartheta_1(x+y-14\varpi, q^{21})\ \vartheta(2x-y-28\varpi, q^{42}).\end{aligned}$$

Setzen wir hierein:

$$\begin{aligned} 1)\quad & x = \varpi & y = 6\varpi \\ 2)\quad & x = 3\varpi & y = 4\varpi \\ 3)\quad & x = 5\varpi & y = 2\varpi, \end{aligned}$$

so erhält man folgende 3 Formeln:

$$(10)\begin{cases} \vartheta_2(\varpi, q^7)\,\vartheta_1(6\varpi, q^{14}) = \vartheta_1(7\varpi, q^{21})\left\{\vartheta(4\varpi, q^{42}) + q^2\,\vartheta(10\varpi, q^{42})\right\} \\ \vartheta_2(3\varpi, q^7)\,\vartheta_1(4\varpi, q^{14}) = \vartheta_1(7\varpi, q^{21})\left\{\vartheta(2\varpi, q^{42}) + q^6\,\vartheta(16\varpi, q^{42})\right\} \\ \vartheta_2(2\varpi, q^7)\,\vartheta_1(2\varpi, q^{14}) = q^3\vartheta_1(7\varpi, q^{21})\left\{\vartheta(8\varpi, q^{42}) + q^8\,\vartheta(20\varpi, q^{42})\right\}. \end{cases}$$

Setzt man diese 3 Werthe in (9) ein und erwägt, dass:

$$i q^{\frac{7}{3}}\,\vartheta_1(7\varpi, q^{21}) = \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} i q^{\frac{2}{3}}\,\vartheta_1(2\varpi, q^6) &= i q^{\frac{2}{3}}\,\vartheta^{-1}(0, q^6)\ \vartheta_2(\varpi, q^3)\ \vartheta_1(\varpi, q^3 \\ &= \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{pq}},\end{aligned}$$

so folgt schliesslich:

$$(11)\begin{cases} -r\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = q\,\vartheta_1{}^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7) \\ \qquad + q^3\vartheta_1{}^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7) \\ \qquad + q^4\vartheta_1{}^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,. \end{cases}$$

Nun folgt aber aus (7):

$$\begin{aligned} -r\left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}&\{q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\} \\ &= q\,\vartheta_1{}^2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7) \\ &+ q^3\vartheta_1{}^2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7) \\ &+ q^4\vartheta_1{}^2(3\varpi,q^7)\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7). \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die beiden rechten Seiten vollkommen identisch. Daher folgt:

$$\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{pqr}{PQR}\right)^{\frac{1}{3}}\{q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)\}\,.$$

Zieht man dieses Resultat gehörig zusammen, so ergiebt sich:

$$(12)\begin{cases} q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{PQ}{pq}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{oder auch:} \\ 8q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4\,PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}}\,. \end{cases}$$

Man vgl. dieses Resultat mit § 2. (11), § 4. (18) sowie § 9. (14) und (16). Es hat sich somit bei allen bis jetzt betrachteten Theilungen eine vollkommene Analogie herausgestellt.

Nun folgt aus § 1. (13):

$$\begin{aligned} 2\,\vartheta_3(2\varpi,q^{14})\,\vartheta_2(2\varpi,q^{14}) &= \vartheta_2(0,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7) \\ 2\,\vartheta_3(4\varpi,q^{14})\,\vartheta_2(4\varpi,q^{14}) &= \vartheta_2(0,q^7)\,\vartheta_2(4\varpi,q^7) \\ 2\,\vartheta_3(6\varpi,q^{14})\,\vartheta_2(6\varpi,q^{14}) &= \vartheta_2(0,q^7)\,\vartheta_2(6\varpi,q^7)\,. \end{aligned}$$

Man multiplicire diese 3 Formeln und wende auf der rechten Seite § 1. (3) an; sodann trage man die Werthe aus (12) ein und bringe alles mit Hülfe der Formeln § 1. (14) auf den Modul q resp. q^7, so folgt:

$$(13)\qquad 8\,q^2\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7) = \sqrt{\frac{p}{P}}\,\frac{(4\,PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}}\,.$$

Endlich folgt aus § 1. (17):

$$\begin{aligned} P\,\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7) - R\,\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)& \\ = Q\,\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta\,(3\varpi,q^7)&, \end{aligned}$$

also ist mit Hülfe von (13) und (12):

$$8\,q^2\,\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)=\frac{1}{Q}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}\left\{P\sqrt{\frac{p}{P}}-R\sqrt{\frac{r}{R}}\right\},$$

also nach § 6. (10):

$$(14)\qquad 8\,q^2\vartheta(\varpi,q^7)\,\vartheta(2\varpi,q^7)\,\vartheta(3\varpi,q^7)=\sqrt{\frac{q}{Q}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}\,.$$

Wenn man nun erwägt, dass zu jeder Function $\vartheta_1(h\varpi,q^a)$ ein Factor $iq^{\frac{hh}{a}}$ hinzutritt, so muss den Formeln (12), (13) und (14) vermöge der Beziehungen § 1. (13) folgende Formel zu Grunde liegen:

$$(15)\left\{\begin{aligned}-\,iq^2\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\varpi,q^3)\,\vartheta_1(3\varpi,q^3)&=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\\ \vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\varpi,q^3)\,\vartheta_1(3\varpi,q^3)&=q^3\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1{}^2(7\varpi,q^{21}).\end{aligned}\right.$$

Auch diese Formel wird später aus der allgemeinen Untersuchung als specieller Fall hervorgehen.

Fassen wir diese Resultate noch einmal zusammen, so haben wir:

$$(16)\left\{\begin{aligned}-iq^2\vartheta_1(\varpi,q^7)\,\vartheta_1(2\varpi,q^7)\,\vartheta_1(3\varpi,q^7)&=\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=A\\ 8\,q^2\vartheta\,(\varpi,q^7)\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\,\vartheta\,(3\varpi,q^7)&=\sqrt{\frac{q}{Q}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}=8\sqrt{\frac{RP}{rp}}\cdot A\\ 8\,q^2\vartheta_2(\varpi,q^7)\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\,\vartheta_2(3\varpi,q^7)&=\sqrt{\frac{r}{R}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}=8\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\cdot A\\ 8\,q^2\vartheta_3(\varpi,q^7)\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\,\vartheta_3(3\varpi,q^7)&=\sqrt{\frac{p}{P}}\,\frac{(4PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}=8\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\cdot A\,.\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich mit Hülfe der Jacobi'schen Transformationsformeln in § 1. (24) die folgenden vier Formeln für die reelle Periode. Die Ausführung unterlassen wir an dieser Stelle, da sie in § 9. für den allgemeinen Fall jeder ungeraden Zahl dargelegt ist:

$$(17)\left\{\begin{aligned}\vartheta_1\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{7},q\right)&=\sqrt{7}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt{7}\cdot B\\ 8\,\vartheta\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\frac{3\pi}{7},q\right)&=\sqrt{\frac{Q}{q}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{7}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}}=8\sqrt{\frac{rp}{RP}}\cdot B\\ 8\,\vartheta_2\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\frac{3\pi}{7},q\right)&=\sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{7}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}}=8\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot B\\ 8\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\frac{3\pi}{7},q\right)&=\sqrt{\frac{P}{p}}\,\frac{(4pqr)^{\frac{7}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}}=8\sqrt{\frac{rq}{RQ}}\cdot B.\end{aligned}\right.$$

Wir wollen schliesslich noch aufmerksam machen auf die einfachen Beziehungssysteme, die nun in Folge von (16) und (17) und der Combination mit den Formeln § 1. (17) hervorgehen. Es ist:

$$
(18)\left\{\begin{aligned}
&p\vartheta_3(\varpi,q^7)+r\vartheta_2(\varpi,q^7)+q\vartheta\,(\varpi,q^7)\\
&\qquad\qquad=2\sqrt{\frac{rp}{RP}}\cdot q\,\vartheta_2(2\varpi,q^7)\;\vartheta_3(2\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(\varpi,q^7)-r\vartheta_2(\varpi,q^7)-q\vartheta(\varpi,q^7)\\
&\qquad\qquad=2\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot q\,\vartheta_3(2\varpi,q^7)\;\vartheta\,(2\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(\varpi,q^7)-r\vartheta_2(\varpi,q^7)+q\vartheta(\varpi,q^7)\\
&\qquad\qquad=2\sqrt{\frac{rq}{RQ}}\cdot q\,\vartheta\,(2\varpi,q^7)\;\vartheta_2(2\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(2\varpi,q^7)+r\vartheta_2(2\varpi,q^7)-q\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad\qquad=2\sqrt{\frac{pr}{PR}}\cdot q^2\vartheta_3(3\varpi,q^7)\;\vartheta_2(3\varpi q^7)\\
-&p\vartheta_3(2\varpi,q^7)+r\vartheta_2(2\varpi,q^7)-q\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad\qquad=2\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot q^2\vartheta_3(3\varpi,q^7)\;\vartheta\,(3\varpi,q^7)\\
-&p\vartheta_3(2\varpi,q^7)+r\vartheta_2(2\varpi,q^7)+q\vartheta(2\varpi,q^7)\\
&\qquad\qquad=2\sqrt{\frac{rq}{RQ}}\cdot q^2\vartheta_2(3\varpi,q^7)\;\vartheta\,(3\varpi,q^7)\\
&p\vartheta_3(3\varpi,q^7)+q\vartheta(3\varpi,q^7)+r\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad\qquad=2\sqrt{\frac{pr}{PR}}\cdot q^{-1}\vartheta_2(\varpi,q^7)\;\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
-&p\vartheta_3(3\varpi,q^7)+q\vartheta(3\varpi,q^7)+r\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad\qquad=2\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\cdot q^{-1}\vartheta\,(\varpi,q^7)\;\vartheta_3(\varpi,q^7)\\
-&p\vartheta_3(3\varpi,q_7)-q\vartheta(3\varpi,q^7)+r\vartheta_2(3\varpi,q^7)\\
&\qquad\qquad=2\sqrt{\frac{qr}{QR}}\cdot q^{-1}\vartheta\,(\varpi,q^7)\;\vartheta_2(\varpi,q^7)\,,
\end{aligned}\right.
$$

für die reelle Periode aber:

$$
(19)\left\{\begin{aligned}
&P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\,\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\\
&P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)-Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\,\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\\
&P\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)-Q\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RP}{rp}}\,\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)\\
&P\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{PQ}{pq}}\,\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\\
-&P\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RQ}{rq}}\,\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\\
-&P\vartheta_3\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{2\pi}{7},q\right)=2\sqrt{\frac{RP}{rp}}\,\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)
\end{aligned}\right.
$$

$$\left|\begin{aligned}
P\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)&=2\sqrt{\tfrac{PQ}{pq}}\,\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\\
-P\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+R\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)&=2\sqrt{\tfrac{RP}{rp}}\,\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\vartheta_3\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\\
-P\vartheta_3\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)+Q\vartheta\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)-R\vartheta_2\left(\tfrac{3\pi}{7},q\right)&=2\sqrt{\tfrac{RQ}{rq}}\,\vartheta_2\left(\tfrac{\pi}{7},q\right)\vartheta\left(\tfrac{\pi}{7},q\right).
\end{aligned}\right.$$

§ 8.

Allgemeines Theorem für die Primzahlen von der Form $6p+1$.

Die nachstehende Untersuchung soll zeigen, wie die vorhergehenden Resultate verallgemeinert werden können. Wir werden finden, dass ein analoges Resultat wie in § 7. (6) für sämmtliche Primzahlen von der Form $12m+7$ gilt, sowie für das Dreifache sämmtlicher Primzahlen von der Form $12m+1$. Das Eigenthümliche ist, dass auch hierbei die Transformation dritten Grades in die Untersuchung eingeht.

Es lässt sich nämlich jede Primzahl von der Form $6p+1$ zerlegen in A^2+3B^2, und es ist in dieser Form entweder A gerade und B ungerade oder umgekehrt. Es zeigt sich nun, dass für die Zahlen $12m+7$ A gerade ist, B ungerade, desgleichen für das Dreifache der Primzahlen von der Form $12m+1$ (vgl. den Anhang in § 10.). Diese Voraussetzung brauchen wir grade, um eine Anwendung der allgemeinen Formel § 1. (7) auf diese Fälle zu haben.

Setzen wir dort hinein $r=1$, $p=3$, so ist:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3(tx+sy,q)\ \vartheta_3(sx-3ty,q^3)\\
&=\sum_{\mu=0}^{\mu=s^2+3t^2-1} q^{\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_3\left\{(s^2+3t^2)y-s\mu\varpi,q^{s^2+3t^2}\right\}\\
&\qquad\cdot\vartheta_3\left\{(s^2+3t^2)x-3t\mu\varpi,q^{3(s^2+3t^2)}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Et ist nun $s^2+3t^2=p$, wo p eine Primzahl von der Form $12m+7$ oder das Dreifache einer Primzahl von der Form $12m+1$ ist, d. h. entweder

$$p=12m+7$$

oder

$$p=3(12m+1),$$

dann ist s eine gerade, t aber eine ungerade Zahl. Wir haben also dann:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta_3(tx+sy,q)\ \vartheta_3(sx-3ty,q^3)\\
&=\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu}e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_3(py-s\mu\varpi,q^p)\ \vartheta_3(px-3t\mu\varpi,q^{3p}).
\end{aligned}\right.$$

Setzen wir nun hierein für y und x $y - \frac{\varpi}{2}$ und $x - \frac{3\varpi}{3}$ und beachten, dass nach § 1. (3):

$$q^{\frac{1}{4}(s+3t)^2}\,\vartheta_3\left(tx + sy - \frac{s+3t}{2}\varpi, q\right) = e^{-i(tx+sy)(s+3t)}\,\vartheta_2(tx+sy, q)$$

$$q^{\frac{3}{4}(s-t)^2}\,\vartheta_3\left(sx - 3ty - \frac{s-t}{2}3\varpi, q^3\right) = e^{-i(sx-3ty)(s-t)}\,\vartheta_2(sx-3ty, q^3)\,.$$

ferner dass:

$$q^{\frac{p}{4}}\,\vartheta_3\left(py - \frac{p\varpi}{2} - s\mu\varpi, q^p\right) = e^{-i(py-s\mu\varpi)}\,\vartheta_2(py - s\mu\varpi, q^p)$$

$$q^{\frac{3p}{4}}\,\vartheta_3\left(px - \frac{3p\varpi}{2} - 3t\mu\varpi, q^p\right) = e^{-i(px-3t\mu\varpi)}\,\vartheta_2(px - 3t\mu\varpi, q^p)\,,$$

so folgt, wenn man dieses in (2) einsetzt:

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta_2(tx + sy, q)\,\vartheta_2(sx - 3ty, q^3) \\ = \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_2(py - s\mu\varpi, q^p)\,\vartheta_2(px - 3t\mu\varpi, q^{3p})\,. \end{cases}$$

Setzt man hierein für y $y + \frac{\pi}{2}$ und bedenkt, dass t eine ungegerade, s aber eine gerade Zahl ist, so folgt nach § 1. (3) und (4):

$$\vartheta_2\left(tx + sy + \frac{s\pi}{2}, q\right) = (-1)^{\frac{s}{2}}\,\vartheta_2(tx + sy, q)$$

$$\vartheta_2\left(tx - 3ty - \frac{3t\pi}{2}, q^3\right) = (-1)^{\frac{3t-1}{2}}\,\vartheta_1(sx - 3ty, q^2)$$

$$\vartheta_2\left(py + \frac{p\pi}{2} - s\mu\varpi, q^p\right) = (-1)^{\frac{p+1}{2}}\,\vartheta_1(py - s\mu\varpi, q^p)\,.$$

Setzen wir dies in (3) ein, so folgt:

$$(4)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s+3t-p}{2}}\,\vartheta_2(tx+sy, q)\,\vartheta_1(sx-3ty, q^3) \\ = \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu} e^{2\mu i(tx+sy)}\,\vartheta_2(px - 3t\mu\varpi, q^{3p})\,\vartheta_1(py - s\mu\varpi, q^p)\,. \end{cases}$$

Hierein werde gesetzt:

$$tx + sy = t\varpi\,, \qquad sx - 3ty = s\varpi\,,$$

also

$$px = (3t^2 + s^2)\,\varpi = p\varpi\,, \qquad py = 0\,.$$

Man beachte dann, dass:

$$\vartheta_2(t\varpi, q) = q^{-tt}\,\vartheta_2(0, q)\,,$$

ferner, dass:

$$\vartheta_1(s\varpi, q^3) = (-1)^s\, q^{\frac{-s+1}{3}(s-1)}\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,,$$

da s immer eine gerade Zahl ist; dass ferner:

$$q^{tt+\frac{s+1}{3}(s-1)} = q^{\frac{p-1}{3}}$$

und

$$(-1)^{\frac{s+3t-p}{2}} = (-1)^{\frac{st+2t^2-p}{2}} = (-1)^{\frac{s(t-s)}{2}} = (-1)^{\frac{s}{2}}.$$

Es ergiebt sich dann aus (4):

$$(5)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}}\, \vartheta_2(0,q)\, \vartheta_1(\varpi, q^3) \\ = q^{\frac{p-1}{3}} \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=p-1} q^{\mu\mu-2\mu t}\, \vartheta_2(p\varpi - 3t\mu\varpi, q^{3p})\, \vartheta_1(s\mu\varpi, q^p)\,. \end{cases}$$

Da s gerade ist, so beachte man, dass nach § 1. (3):

$$\vartheta_1\{(p-1)s\varpi, q^p\} = -q^{(2-p)s^2}\, \vartheta_1(s\varpi, q^p) \text{ etc.}$$

und ferner im letzten Gliede:

$$_2\vartheta\{p\varpi - 3t(p-1)\varpi, q^{3p}\} = q^{1-2t}\, q^{p-2t}\, \vartheta_2(2p\varpi - 3t\varpi, q^{3p})$$

und dass sich die Hälfte aller Glieder ebenso transformiren lassen. Dann folgt schliesslich:

$$(6)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}}\, \vartheta_2(0,q)\, \vartheta_1(\varpi, q^3) \\ = q^{\frac{p-1}{3}} \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu-2\mu t}\, \vartheta_1(s\mu\varpi, q^p)\, \{\vartheta_2(p\varpi - 3t\mu\varpi, q^{3p}) - q^{p-2\mu t}\, \vartheta_2(2p\varpi - 3t\mu\varpi, q^{3p})\} \\ = q^{1-2t}\, \vartheta_1(s\varpi, q^p)\, \{\vartheta_2(p\varpi - 3t\varpi, q^{3p}) - q^{p-2t}\, \vartheta_2(2p\varpi - 3t\varpi, q^{3p})\} \\ + q^{4-4t}\, \vartheta_1(2s\varpi, q^p)\, \{\vartheta_2(p\varpi - 6t\varpi, q^{3p}) - q^{p-4t}\, \vartheta_2(2p\varpi - 6t\varpi, q^{3p})\} \\ + q^{9-6t}\, \vartheta_1(3s\varpi, q^p)\, \{\vartheta_2(p\varpi - 9t\varpi, q^{3p}) - q^{p-6t}\, \vartheta_2(2p\varpi - 9t\varpi, q^{3p})\} \\ + \cdots\cdots \end{cases}$$

Genau dieselben Combinationen wie in den Klammergrössen treten aber wieder in Folge der Formeln § 2. (3) der Dreitheilung auf. Aus den dortigen Beziehungen folgt:

$$(7)\quad \begin{cases} -iq^{\frac{-p}{2}}\, \vartheta_1(x, q^p)\, \vartheta(y, q^{2p}) = \vartheta_2(x+y-p\varpi, q^{3p})\, \vartheta(2x-y+p\varpi, q^{6p}) \\ \qquad - q^p e^{2ix}\, \vartheta_2(x+y-2p\varpi, q^{3p})\, \vartheta(2x-y-p\varpi, q^{6p}) \\ \qquad + q^{4p} e^{4ix}\, \vartheta_2(x+y-3p\varpi, q^{3p})\, \vartheta(2x-y-3p\varpi, q^{6p}) \end{cases}$$

Aus dieser Formel ergiebt sich ohne Schwierigkeit allgemein:

$$(8)\quad \begin{cases} -\vartheta_1(\mu t\varpi, q^p)\, \vartheta(2\mu t\varpi, q^{2p}) \\ = q^{p-2\mu t}\, \vartheta_1(2p\varpi, q^{6p})\, \{\vartheta_2(p\varpi - 3t\mu\varpi, q^{3p}) - q^{p-2\mu t\varpi}\, \vartheta_2(2p\varpi - 3\mu t\varpi, q^{3p})\} \end{cases}$$

wo für μ nach und nach alle ganzen Zahlen $1, 2, 3 \ldots \frac{p-1}{2}$ zu setzen sind. Es ist charakteristisch, dass auch hier wie bei der Sieben die Grössen in (6), welche den Modul q^{3p} enthalten, mit Hülfe von (8) eliminirt werden.

Es ist dann:

$$(9)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}+1}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2p\varpi,q^{6p}) \\ = q^{\frac{p-1}{3}} \sum\limits_0^{\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu-p}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(\mu t\varpi,q^p)\,\vartheta(2\mu t\varpi,q^{2p})\,. \end{cases}$$

Nun folgt aus § 1. (13):

$$\vartheta(0,q^{2p})\,\vartheta(2\mu t\varpi,q^{2p}) = \vartheta(\mu t\varpi,q^p)\,\vartheta_3(\mu t\varpi,q^p)$$

und aus § 2. (11):

$$(10)\quad \begin{cases} q^{\frac{2p+1}{3}}\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_1(\varpi,q^3)\,\vartheta_1(2\mu\varpi,q^{6p})\,\vartheta(0,q^{2p}) \\ \qquad\qquad = -r\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \end{cases}$$

worin also nach § 1. (25) $P = \vartheta_3(0,q^p)$ etc. Demgemäss folgt:

$$(11)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}}\,r\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ = \sum\limits_1^{\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_3(t\mu\varpi,q^p) \end{cases}$$

und auf gleiche Weise leitet man ohne Schwierigkeit die beiden analogen Formeln her:

$$\begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}}\,p\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ = \sum\limits_1^{\frac{p-1}{2}} q^{\mu\mu}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_2(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta(t\mu\varpi,q^p) \\ (-1)^{\frac{s}{2}}\,q\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ = \sum\limits_1^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\mu}\,q^{\mu\mu}\,\vartheta_1(s\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_1(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_2(t\mu\varpi,q^p)\,\vartheta_3(t\mu\varpi,q^p) \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgen die in § 7. (6) für die Siebentheilung hergeleiteten als specielle Fälle, wenn man $p = 7 = 2^2 + 3\cdot 1^2$, also $s = 2$, $t = 1$ setzt.

§ 9.

Allgemeine Untersuchungen für alle ungeraden Zahlen.

Bei der Dreitheilung § 2. (11) hatten wir gefunden:

$$2\, q^{\frac{1}{3}}\, \vartheta_2(\varpi, q^3) = \sqrt{\frac{r}{R}}\, \frac{(4\, PQR)^{\frac{3}{6}}}{(4\, pqr)^{\frac{1}{6}}},$$

für die Fünftheilung hatte sich ergeben:

$$4\, q\, \vartheta_2(\varpi, q^5)\, \vartheta_2(2\,\varpi, q^5) = \sqrt{\frac{r}{R}}\, \frac{(4\, PQR)^{\frac{5}{6}}}{(4\, pqr)^{\frac{1}{6}}}$$

und ich hatte bei meiner eignen Untersuchung für die Sieben gefunden § 7. (12):

$$8\, q^2\, \vartheta_2(\varpi, q^7)\, \vartheta_2(2\,\varpi, q^7)\, \vartheta_2(3\,\varpi, q^7) = \sqrt{\frac{r}{R}}\, \frac{(4\, PQR)^{\frac{7}{6}}}{(4\, pqr)^{\frac{1}{6}}}\,.$$

Diese vollkommene Uebereinstimmung liess vermuthen, dass hier wohl ein allgemeines Gesetz zu Grunde liegen möge. Die nachfolgenden Theoreme, welche für alle ungeraden Zahlen gültig sind, enthalten in der That jene Beziehungen, sowie die mit ihnen zugleich auftretenden als specielle Fälle in sich. Wegen ihrer eigenthümlichen Analogie mit Gauss'schen Beziehungen für die trigonometrischen Functionen sin und cos sind sie als charakteristisch für die Eigenschaften der Jacobi'schen Transcendenten ϑ anzusehen.

Gauss hat in seiner grossen Abhandlung: Summatio quarundam serierum singularium (vgl. Gesammte Werke Bd. II, Göttingen 1863) einige bemerkenswerthe Beziehungen und zwar auf einem an sich eigenthümlichnn Wege abgeleitet. Eine von diesen Formeln ist die folgende: Wenn α eine Zahl von der Form $4\,\mu + 1$ oder $4\,\mu + 3$ ist, also allgemein eine ungerade Zahl von der Form $2\,n + 1$, so ist:

$$2^n \sin\frac{2\pi}{\alpha} \sin 3 \cdot \frac{2\pi}{\alpha} \sin 5 \cdot \frac{2\pi}{\alpha} \cdots \sin\,(\alpha - 2) \cdot \frac{2\pi}{\alpha} = \sqrt{\alpha}$$

(vgl. Gauss a. a. O. S. 26).

Da nun

$$\sin\,(\alpha - 2) \cdot \frac{2\pi}{\alpha} = \sin\left(2\,\pi - 2 \cdot \frac{2\pi}{\alpha}\right) = -\sin 2 \cdot \frac{2\pi}{\alpha} \text{ etc.},$$

so ist auch:

$$(-1)^\mu\, 2^n \sin\frac{2\pi}{\alpha} \cdot \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{\alpha} \cdot \sin 3 \cdot \frac{2\pi}{\alpha} \sin 4 \cdot \frac{2\pi}{\alpha} \cdots \sin n \cdot \frac{2\pi}{\alpha} = \sqrt{\alpha}\,.$$

Wir werden nun folgende Formel ableiten:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_1\left(\frac{2\,\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_1\left(\frac{3\,\pi}{\alpha}, q\right) \cdots\cdots \vartheta_1\left(\frac{n\,\pi}{\alpha}, q\right) = \sqrt{\alpha} \cdot A\,.$$

Die vollkommenste Analogie ist hierin in die Augen springend. A wird sich als ein transcendenter Factor herausstellen, der von den 6 fundamentalen Grössen p, q, r, P, Q, R abhängt, nämlich:

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \vartheta_1{}^{n-1}\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{\alpha}{3}}\right) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Wir nehmen 3 Ausgangspunkte, nämlich zuerst die Formel § 1. (9), sodann die Productbeziehungen der Grundformeln in § 1. (1) und schliesslich drittens die Jacobi'schen Transformationsformeln zwischen der reellen und imaginären Periode in § 1. (24).

1.

Die Reihen, mit denen wir es hier zu thun haben, sind der Hauptsache nach:

$$(1)\left\{\begin{aligned}
P &= \vartheta_3(0, q^\alpha) = 1 + 2q^\alpha + 2q^{4\alpha} + 2q^{9\alpha} + 2q^{16\alpha} + \cdots \\
Q &= \vartheta\ (0, q^\alpha) = 1 - 2q^\alpha + 2q^{4\alpha} - 2q^{9\alpha} + 2q^{16\alpha} \mp \cdots \\
R &= \vartheta_2(0, q^\alpha) = 2q^{\frac{\alpha}{4}} + 2q^{\frac{9\alpha}{4}} + 2q^{\frac{25\alpha}{4}} + 2q^{\frac{29\alpha}{4}} + \cdots \\
q^{\frac{hh}{\alpha}}\vartheta_3(h\varpi, q^\alpha) &= q^{\frac{hh}{\alpha}} + q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha+h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha-h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha+h)^2} + \\
q^{\frac{hh}{\alpha}}\vartheta\ (h\varpi, q^\alpha) &= q^{\frac{hh}{\alpha}} - q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-h)^2} - q^{\frac{1}{\alpha}(\alpha+h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha-h)^2} + q^{\frac{1}{\alpha}(2\alpha+h)^2} \mp \\
q^{\frac{hh}{\alpha}}\vartheta_2(h\varpi, q^\alpha) & \\
&= q^{\frac{(\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(3\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(3\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(5\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(5\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + \\
q^{\frac{hh}{\alpha}}\vartheta_1(h\varpi, q^\alpha) & \\
&= q^{\frac{(\alpha-2h)^2}{4\alpha}} - q^{\frac{(\alpha+2h)^2}{4\alpha}} - q^{\frac{(3\alpha-2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(3\alpha+2h)^2}{4\alpha}} + q^{\frac{(5\alpha-2h)^2}{4\alpha}} - q^{\frac{(5\alpha+2h)^2}{4\alpha}} \mp \cdot
\end{aligned}\right.$$

In diesen Reihen ist α irgend eine ungerade Zahl, also:

$$\alpha = 2n + 1,$$

und dann bedeutet $h\varpi$ etc., dass für h alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu setzen sind. Es resultiren dann daraus die n oder $\frac{\alpha - 1}{2}$ fundamentalen Theilwerthe $\vartheta_3(\varpi, q^\alpha)$, $\vartheta_3(2\varpi, q^\alpha) \cdots \vartheta_3(n\varpi, q^\alpha)$ und ebenso bei den übrigen 3 Functionen. Die Bezeichnung ist nach § 1. (25) die von Gauss eingeführte, allgemein:

$$\begin{aligned}
P &= \vartheta_3(0, q^\alpha), \quad & Q &= \vartheta(0, q^\alpha), \quad & R &= \vartheta_2(0, q^\alpha) \\
p &= \vartheta\ (0, q), \quad & q &= \vartheta(0, q), \quad & r &= \vartheta_2(0, q).
\end{aligned}$$

Der Kürze halber möge nun noch für das Product sämmtlicher

n Theilwerthe, dem ja hier unsere Untersuchung gilt, eine neue Bezeichnung eingeführt werden.

Es sei nämlich:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\vartheta_3(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_3(2\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_3(n\varpi, q^\alpha) = \prod\limits_{h=1}^{h=n}\vartheta_3(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta_3]\\
\vartheta_2(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(2\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_2(n\varpi, q^\alpha) = \prod\limits_{h=1}^{h=n}\vartheta_2(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta_2]\\
\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1(n\varpi. q^\alpha) = \prod\limits_{h=1}^{h=n}\vartheta_1(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta_1]\\
\vartheta\,(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta\,(2\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta\,(n\varpi, q^\alpha) = \prod\limits_{h=1}^{h=n}\vartheta\,(h\varpi, q^\alpha) = [\vartheta]\\
\text{und entsprechend für die reelle Periode:}\\
\vartheta_3\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\cdots\vartheta_3\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod\limits_{h=1}^{h=n}\vartheta_3\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta_3)\\
\vartheta_2\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\cdots\vartheta_2\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod\limits_{h=1}^{h=n}\vartheta_2\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta_2)\\
\vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\cdots\vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod\limits_{h=1}^{h=n}\vartheta_1\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta_1)\\
\vartheta\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)\cdots\vartheta\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = \prod\limits_{h=1}^{h-n}\vartheta\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (\vartheta)\,.
\end{array}\right.$$

Die Multiplication läuft also über ein halbes Restesystem, da

$$n = \frac{\alpha - 1}{2}.$$

Dann folgt aus § 1. (19):

$$\begin{array}{l}
2\vartheta(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_3(\varpi, q^\alpha) = PQR\,\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\\
2\vartheta(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_3(2\varpi, q^\alpha) = PQR\,\vartheta_1(4\varpi, q^\alpha)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2\vartheta(n\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(n, \varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(n\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_3(n\varpi, q^\alpha) = PQR\,\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).
\end{array}$$

Multipliciren wir diese n Gleichungen, so folgt:

$$(3)\quad 2^n[\vartheta]\,[\vartheta_1]\,[\vartheta_2]\,[\vartheta_3] = P^n Q^n R^n \vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_1(4\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).$$

Von den Gliedern auf der rechten Seite lassen sich eine gewisse Anzahl mit Hülfe der Beziehungen § 1. (3) reduciren. Wir unterscheiden 2 Fälle.

1. Fall: n ist eine gerade Zahl. Dann sind $\frac{n}{2}$ Glieder nach § 1. (3) zu transformiren, nämlich die Glieder:

$$\vartheta_1\left\{(n+2)\varpi, q^\alpha\right\}, \quad \vartheta_1\left\{(n+4)\varpi, q^\alpha\right\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).$$

Nun ist nach § 1. (3):

$$\vartheta_1(x-\varpi, q) = -q^{-1}e^{-2ix}\vartheta_1(x, q),$$

also

$$\vartheta_1(x-\alpha\varpi, q^\alpha) = -q^{-\alpha}e^{-2ix}\vartheta_1(x, q^\alpha)$$

und es folgt hieraus:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1\left\{(n+2)\varpi, q^\alpha\right\} &= q^{-3}\vartheta_1\left\{(n-1)\varpi, q^\alpha\right\}\\
\vartheta_1\left\{(n+4)\varpi, q^\alpha\right\} &= q^{-7}\vartheta_1\left\{(n-3)\varpi, q^\alpha\right\}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha) &= q^{-2n+1}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha),
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1\left\{(n+2)\varpi, q^\alpha\right\}\vartheta_1\left\{(n+4)\varpi, q^\alpha\right\}\cdots\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\\
&\quad = q^{-(3+7+11+\ldots 2n-1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1((n-1)\varpi, q^\alpha).
\end{aligned}$$

Nun sind in der arithmetischen Reihe $\frac{n}{2}$ Glieder vorhanden, also ist:

$$q^{-(3+7+11+\ldots 2n-1)} = q^{-\frac{n}{2}(n+1)},$$

also das Product der transformirten Glieder:

$$\begin{aligned}
(4)\quad &\vartheta_1\left\{(n+2)\varpi, q^\alpha\right\}\vartheta_1\left\{(n+4)\varpi, q^\alpha\right\}\cdots\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\\
&\quad = q^{-\frac{n}{2}(n+1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1\left\{(n-1)\varpi, q^\alpha\right\}.
\end{aligned}$$

2. Fall: n ist eine ungerade Zahl. Dann sind $\frac{n+1}{2}$ Glieder úu transformiren, nämlich:

$$\vartheta_1\left\{(n+1)\varpi, q^\alpha\right\}, \quad \vartheta_1\left\{(n+3)\varpi, q^\alpha\right\} \cdots \vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha).$$

Es folgt nun wieder aus § 1. (3):

$$\begin{aligned}
\vartheta_1((n+1)\varpi, q^\alpha) &= q^{-1}\vartheta_1(n\varpi, q^\alpha)\\
\vartheta_1((n+3)\varpi, q^\alpha) &= q^{-5}\vartheta_1((n-2)\varpi, q^\alpha)\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha) &= q^{-2n+1}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha),
\end{aligned}$$

also:

$$(5)\left\{\begin{aligned}
&\vartheta_1\left\{(n+1)\varpi, q^\alpha\right\}\vartheta_1\left\{(n+3)\varpi, q^\alpha\right\}\cdots\vartheta_1(2n\varpi, q^\alpha)\\
&\quad = q^{-(1+5+\ldots 2n-1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1(n\varpi, q^\alpha)\\
&\quad = q^{-\frac{n}{2}(n+1)}\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha)\cdots\vartheta_1(n\varpi, q^\alpha).
\end{aligned}\right.$$

In beiden Fällen, sowohl in (4) als auch in (5), liefert also das Product der zu transformirenden Glieder in (3) genau das Product der fehlenden ungeraden Theilwerthe, so dass nun rechts ebenfalls $[\vartheta_1]$ entsteht.

Darum ist also:

$$(6)\quad \begin{cases} 2^n q^{\frac{n}{2}(n+1)} [\vartheta]\,[\vartheta_2]\,[\vartheta_3] = (PQR)^n \\ \text{oder auch anders geschrieben:} \\ 2^n q^{\frac{n}{2}(n+1)} \prod\limits_{h=1}^{h=n} \vartheta(h\varpi, q^\alpha)\, \vartheta_2(h\varpi, q^\alpha)\, \vartheta_3(h\varpi, q^\alpha) = (PQR)^n. \end{cases}$$

Hieraus folgt z. B.:

$$2^2 q^3 \prod_{h=1}^{h=2} \vartheta(h\varpi, q^5)\, \vartheta_2(h\varpi, q^5)\, \vartheta_3(h\varpi, q^5) = P^2 Q^2 R^2$$

$$2^3 q^6 \prod_{h=1}^{h=3} \vartheta(h\varpi, q^7)\, \vartheta_2(h\varpi, q^7)\, \vartheta_3(h\varpi, q^7) = P^3 Q^3 R^3$$

$$2^5 q^{15} \prod_{h=1}^{h=5} \vartheta(h\varpi, q^{11})\, \vartheta_2(h\varpi, q^{11})\, \vartheta_3(h\varpi, q^{11}) = P^5 Q^5 R^5 \text{ etc.}$$

Dieselbe Untersuchung lässt sich auch für die reelle Periode führen und ist hier einfacher einzusehen. Wir haben hier die n Theilungswerthe:

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right); \quad \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \cdots \vartheta_3\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) \text{ etc.}$$

Vermöge § 1. (19) ist dann:

$$2\,\vartheta\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_2\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_3\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right)$$

$$2\,\vartheta\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_2\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_3\left(\frac{2\pi}{\alpha}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\frac{4\pi}{\alpha}, q\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\,\vartheta\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_2\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_3\left(\frac{n\pi}{\alpha}, q\right) = pqr\,\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, q\right).$$

Nun ist:

$$\vartheta_1\left(\frac{2n\pi}{\alpha}, q\right) = \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, q\right), \quad \vartheta_1\left(\frac{(2n-2)\pi}{\alpha}, q\right) = \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, q\right) \text{ etc.},$$

also:

$$(7)\quad \begin{cases} 2^n\,(\vartheta)\,(\vartheta_2)\,(\vartheta_3) = (pqr)^n \\ \text{oder:} \\ 2^n \prod\limits_{h=1}^{h=n} \vartheta\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_2\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) \vartheta_3\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right) = (pqr)^n. \end{cases}$$

Aus der Combination mit (6) folgt noch:

$$(8)\qquad q^{\frac{n}{2\alpha}(n+1)} \prod_{h=1}^{h=n} \frac{\vartheta\left(\frac{h\varpi}{\alpha}, q\right)}{\vartheta\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)} \cdot \frac{\vartheta_2\left(\frac{h\varpi}{\alpha}, q\right)}{\vartheta_2\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)} \cdot \frac{\vartheta_3\left(\frac{h\varpi}{\alpha}, q\right)}{\vartheta_3\left(\frac{h\pi}{\alpha}, q\right)} = 1\,.$$

2.

Wir werden jetzt die fundamentalen Producte $[\vartheta]$, $[\vartheta_1]$, $[\vartheta_3]$ etc. einzeln darstellen. Wir gehen aus von den Jacobi'schen Fundamentalformeln der Producte.

Es ist bekanntlich:

$$(9)\quad \begin{cases} q = \vartheta\,(0,q) = \prod\limits_{h=1}^{h=\infty} \dfrac{1-q^h}{1+q^h} = \prod\limits_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})\,(1-q^{2h-1})^2 \\ p = \vartheta_3\,(0,q) = \prod\limits_{h=1}^{h=\infty} \dfrac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}} \cdot \dfrac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}} = \prod\limits_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})(1+q^{2h-1})^2 \\ r = \vartheta_2\,(0,q) = 2\,q^{\frac{1}{4}} \prod\limits_{h=1}^{h=\infty} \dfrac{1-q^{4h}}{1-q^{4h-2}} = 2\,q^{\frac{1}{4}} \prod\limits_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})\,(1+q^{2h})^2\,. \end{cases}$$

Es folgt hieraus, dass:

$$\prod_{h=1}^{h=\infty} (1+q^h)\,(1-q^{2h-1}) = 1$$

und mit Hülfe hiervon:

$$(10)\qquad \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = q^{\frac{1}{12}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h}) = i\,q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_1\,(\varpi, q^3)\,.$$

Dass

$$q^{\frac{1}{12}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h}) = i\,q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_1\,(\varpi, q^3)\,,$$

kann man sowohl mit Hülfe von § 2. (11) erschliessen, oder abhängig hiervon leicht daraus, dass

$$\vartheta_1\,(x, q) = 2\,q^{\frac{1}{4}} \sin x \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})\,(1-2\,q^{2h}\cos 2\,x + q^{4h})\,,$$

wobei man zu beachten hat, dass:

$$\prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{6h})\,(1-q^{6h-2})\,(1-q^{6h-4}) = \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h})\,.$$

Aus dieser Formel für $\vartheta_1\,(x, q)$ ergiebt sich nun aber ganz allgemein:

$$(11^a)\; i\vartheta_1(m\varpi, q^\alpha) = q^{\frac{\alpha}{4}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha})(q^{-m}-q^{+m})(1-q^{2h\alpha-2m})(1-q^{2h\alpha+2m}).$$

Hierin möge m eine der Zahlen $1, 2 \cdots n$ bedeuten. Nun ist aber ebenfalls allgemein:

$$\prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha+2m}) = \frac{1}{1-q^{2m}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha-2(\alpha-m)}),$$

also folgt jetzt:

$$(11^b)\; i\vartheta_1(m\varpi, q^\alpha) = q^{\frac{\alpha}{4}-m} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2m})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-m)}).$$

Hieraus nun folgt:

$$i\vartheta_1(\varpi, q^\alpha) = q^{\frac{\alpha}{4}-1} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-1)})$$

$$i\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha) = q^{\frac{\alpha}{4}-2} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-4})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-2)})$$

$$i\vartheta_1(3\varpi, q^\alpha) = q^{\frac{\alpha}{4}-3} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-6})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-3)})$$

. . . .

$$i\vartheta_1(n\varpi, q^\alpha) = q^{\frac{\alpha}{4}-n} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2n})(1-q^{2h\alpha-2(\alpha-n)}).$$

Multipliciren wir alle diese Gleichungen, so schliessen sich rechts alle Factoren an einander; denn wir haben im Exponenten:

$2h\alpha-2,\; 2h\alpha-4,\; 2h\alpha-6, \cdots 2h\alpha-2n,\; 2h\alpha-2n-2, \cdots 2h\alpha-4n.$

Wir erhalten demgemäss:

$$i^n[\vartheta_1] = q^{\frac{n\alpha}{4}-\frac{n+1}{2}n} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha})^{n-1} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2}) \cdots (1-q^{2h\alpha-2(\alpha-1)}).$$

Nun folgt aber aus (10), wenn man für h nach einander setzt $\alpha h,\; \alpha h-1,\; \alpha h-2 \cdots$ bis $\alpha h-(\alpha-1)$:

$$\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = iq^{\frac{1}{3}}\vartheta_1(\varpi, q^{\frac{1}{3}}) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{h=1}^{h=\infty} (1-q^{2h\alpha})(1-q^{2h\alpha-2})(1-q^{2h\alpha-4}) \cdots (1-q^{2h\alpha-2(\alpha-1)}),$$

also ergiebt sich jetzt schliesslich:

$$(12)\qquad [\vartheta_1] = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\, \vartheta_1(\varpi, q^3)\, \vartheta_1^{\,n-1}(\alpha\varpi, q^{3\alpha}).$$

Dieses ist eine von den Fundamentalformeln, welche abzuleiten wir uns vorgesetzt hatten.

Setzen wir hierin $\alpha = 5$, so resultirt als specieller Fall die Jacobi'sche Formel für die Fünftheilung aus § 4. (11), nämlich:

$$\vartheta_1(\varpi, q^5)\,\vartheta_1(2\varpi, q^5) = q\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,\vartheta_1(5\varpi, q^{15}).$$

Ebenso folgt:

$$\vartheta_1(\varpi, q^7)\,\vartheta_1(2\varpi, q^7)\,\vartheta_1(3\varpi, q^7) = q^3\,\vartheta_1(\varpi, q^3)\,\vartheta_1^2(7\varpi, q^{21}),$$

vgl. § 7. (15).

Da nun:

$$i q^{\frac{1}{3}}\,\vartheta_1(\varpi, q^3) = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

so ist:

$$i^{n-1}\,q^{\frac{n-1}{3}}\,\vartheta_1^{\,n-1}(\alpha\varpi, q^{3\alpha}) = \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}$$

und es folgt somit aus (12):

$$i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_1] = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}. \tag{13}$$

Die übrigen analogen Beziehungen erlangen wir mit Hülfe der folgenden aus § 1. (13):

$$\vartheta_1(x, q)\,\vartheta_2(x, q) = \vartheta(0, q^2)\,\vartheta_1(2x, q^2)$$
$$2\,\vartheta(x, q^2)\,\vartheta_1(x, q^2) = \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_1(x, q)$$

und der Beziehung (6).

Es ist nämlich:

$$\vartheta_1(\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(\varpi, q^\alpha) = \vartheta(0, q^{2\alpha})\,\vartheta_1(2\varpi, q^{2\alpha})$$
$$\vartheta_1(2\varpi, q^\alpha)\,\vartheta_2(2\varpi, q^\alpha) = \vartheta(0, q^{2\alpha})\,\vartheta_1(4\varpi, q^{2\alpha}) \text{ etc.}$$

Multipliciren wir diese n Formeln, so folgt:

$$[\vartheta_2] = \vartheta^n(0, q^{2\alpha})\,[\vartheta_1]_{q=q^2}\,[\vartheta_1]^{-1}.$$

Es ist aber:

$$q^{\frac{n(n+1)}{3}}\,[\vartheta_1]_{q=q^2} = \left(\tfrac{1}{2}\vartheta(0,q^2)\,\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^2)\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{1}{2}\vartheta(0,q^{2\alpha})\,\vartheta_3(0,q^{2\alpha})\,\vartheta_2(0,q^{2\alpha})\right)^{\frac{n-1}{3}}$$
$$= \left(\frac{r^2}{4}\sqrt{pq}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{R^2}{4}\sqrt{PQ}\right)^{\frac{n-1}{3}} \text{ nach § 1. (14)}$$

und

$$\vartheta^n(0, q^{2\alpha}) = (PQ)^{\frac{n}{2}}.$$

Dann folgt:

$$2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_2] = \sqrt{\frac{r}{R}}\;\frac{(4PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4pqr)^{\frac{1}{6}}}. \tag{14}$$

Andrerseits folgt aus der zweiten Formel:

$$2^n\,[\vartheta] = \vartheta_2^{\,n}(0, q^{\frac{\alpha}{2}})\,[\vartheta_1]_{q=q^{\frac{1}{2}}}\,[\vartheta_1]^{-1}.$$

Nun folgt aus § 1. (14):

$$[\vartheta_1]_{q=q^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{q^2}{2}\sqrt{2rp}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{1}{2} Q^2 \sqrt{2\,RP}\right)^{\frac{n-1}{3}}$$

$$\vartheta_2^n (0, q^{\frac{\alpha}{2}}) = (2\,RQ)^{\frac{n}{2}},$$

also:

$$(15) \qquad 2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta] = \sqrt{\frac{q}{Q}}\, \frac{(4\,PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}}.$$

Multipliciren wir nun (14) mit (15) und dividiren in (6), so ergiebt sich eine ebensolche Beziehung für $[\vartheta_3]$. Wenn wir mit dieser die erlangten Resultate zusammenstellen, so haben wir:

$$(16) \qquad \begin{cases} i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_1] = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \\ 2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta\,] = \sqrt{\frac{q}{Q}}\, \frac{(4\,PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}} \\ 2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_2] = \sqrt{\frac{r}{R}}\, \frac{(4\,PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}} \\ 2^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_3] = \sqrt{\frac{p}{P}}\, \frac{(4\,PQR)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4\,pqr)^{\frac{1}{6}}}, \end{cases}$$

oder die 3 letzten Beziehungen auch in dieser Form, wenn

$$\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} = A$$

$$(17) \qquad \begin{cases} q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta\,] = A \sqrt{\frac{PR}{pr}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_2] = A \sqrt{\frac{PQ}{pq}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_3] = A \sqrt{\frac{QR}{qr}}. \end{cases}$$

Diese Formeln enthalten alle früheren als specielle Fälle in sich, nämlich die Formeln in § 2. (11), in § 4. (18) und § 7. (16).

3.

Um nun auf einem möglichst eleganten Wege zu denselben Formeln für die reelle Periode zu gelangen, gehen wir von einer dritten Quelle aus, nämlich den Jacobi'schen Transformationsformeln zwischen der reellen und imaginären Periode. Mit Hülfe derselben werden wir die Formeln (12), (13), (16) einfach übertragen.

Es ist § 1. (24):

$$(18)\quad \begin{cases} \vartheta_1(x, e^p) = i\sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_1\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta\;(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_2\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_2(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta\;\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \\ \vartheta_3(x, e^p) = \sqrt{\frac{-\pi}{p}}\, e^{\frac{x^2}{p}}\, \vartheta_3\left(\frac{i\pi x}{p}, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right), \end{cases}$$

worin $p = \log q$, also $e^p = q$.

Aus diesen Formeln folgt, dass:

$$(19)\quad \begin{cases} q = \vartheta\;(0, q) = \vartheta\;(0, e^p) = i\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}) \\ r = \vartheta_2(0, q) = \vartheta_2(0, e^p) = i\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta\;(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}) \\ p = \vartheta_3(0, q) = \vartheta_3(0, e^p) = i\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}) \\ Q = \vartheta\;(0, q^\alpha) = \vartheta\;(0, e^{p\alpha}) = i\sqrt{\frac{\pi}{p\alpha}}\, \vartheta_2(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}) \\ R = \vartheta_2(0, q^\alpha) = \vartheta_2(0, e^{p\alpha}) = i\sqrt{\frac{\pi}{p\alpha}}\, \vartheta\;(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}) \\ P = \vartheta_3(0, q^\alpha) = \vartheta_3(0, e^{p\alpha}) = i\sqrt{\frac{\pi}{p\alpha}}\, \vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}). \end{cases}$$

Aus (18) folgt ferner:

$$\vartheta_1(x, e^{\alpha p}) = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{x^2}{\alpha p}}\, \vartheta_1\left(\frac{i\pi x}{\alpha p}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right).$$

Setzen wir hierein für x:

$$\varpi,\ 2\varpi,\ 3\varpi\ \cdots \text{ oder } ip,\ 2ip,\ 3ip\ \cdots$$

so folgt:

$$(20)\quad \begin{cases} \vartheta_1(\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-p}{\alpha}}\, \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \\ \vartheta_1(2\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-4p}{\alpha}}\, \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \\ \vartheta_1(3\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-9p}{\alpha}}\, \vartheta_1\left(\frac{3\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \vartheta_1(n\varpi, q^\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\, e^{\frac{-n^2 p}{\alpha}}\, \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right). \end{cases}$$

Somit ist:

$$[\vartheta_1] = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha p}}\right)^n e^{-\frac{p}{\alpha}(1+4+9+\ldots n^2)}\, \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \ldots$$
$$\ldots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right)$$

und da

$$1 + 4 + \cdots nn = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)}{6}\,\alpha$$

so ist:

$$e^{-\frac{p}{\alpha}(1+4+9+\ldots nn)} = q^{-\frac{n(n+1)}{6}}.$$

Also folgt jetzt mit Hülfe der Formeln (16) und (19):

$$(21)\begin{cases} i^n q^{\frac{n(n+1)}{6}} [\vartheta_1] = \left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} \\ = \left\{\frac{1}{2}\vartheta_3(0, e^p)\,\vartheta(0, e^p)\,\vartheta_2(0, e^p)\right\}^{\frac{1}{3}} \left\{\frac{1}{2}\vartheta_3(0, e^{\alpha p})\,\vartheta(0, e^{\alpha p})\,\vartheta_2(0, e^{\alpha p})\right\}^{\frac{n-1}{3}} \\ = i^n \left(\frac{\pi}{\alpha p}\right)^{\frac{n}{2}} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \ldots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right). \end{cases}$$

Setzen wir nun hierein statt

$$\frac{1}{p} \cdots \frac{p\alpha}{\pi^2},$$

also statt:

$$p \cdots \frac{\pi^2}{p\alpha}$$

und statt

$$\frac{\pi^2}{p\alpha} \cdots p,$$

so folgt:

$$\left\{\frac{1}{2}\vartheta_3\left(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \vartheta\left(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right) \vartheta_2\left(0, e^{\frac{\pi^2}{\alpha p}}\right)^{\frac{1}{3}}\right\} \left\{\frac{1}{2}\vartheta\left(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \vartheta_2\left(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right) \vartheta_3\left(0, e^{\frac{\pi^2}{p}}\right)\right\}$$
$$= i^n \left(\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^n \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^p\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^p\right) \cdots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^p\right).$$

Hieraus ergiebt sich durch Anwendung der Beziehungen (19):

$$\left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\alpha p}{\pi}}\right) \quad \left\{\frac{1}{2}\vartheta(0, e^{\alpha p})\,\vartheta_2(0, e^{\alpha p})\,\vartheta_3(0, e^{\alpha p})\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$\cdot \left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\right)^{n-1} \left\{\frac{1}{2}\vartheta(0, e^p)\;\; \vartheta_2(0, e^p)\;\; \vartheta_3(0, e^p)\right\}^{\frac{n-1}{3}}$$
$$= i^n \left(\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)^n \vartheta_1\left(\frac{\pi}{\alpha}, e^p\right) \vartheta_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}, e^p\right) \cdots \vartheta_1\left(\frac{n\pi}{\alpha}, e^p\right).$$

Nach der Transformation erscheint rechts i^{2n} und dies ist immer $= +1$. Führen wir also unsere alten Bezeichnungen ein, so folgt:

$$(22)\quad\begin{cases}(\vartheta_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \sqrt{\alpha}\ \vartheta_1^{n-1}\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{1}{3}}\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, q^{\frac{\alpha}{3}}\right)\\ \text{oder}\\ (\vartheta_1) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.\end{cases}$$

Als specielle Fälle fliessen hieraus:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{5}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{5}, q\right) = \sqrt{5}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

vgl. § 4. (6) und (12) combinirt.

Ferner:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{7}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{7}, q\right)\vartheta_1\left(\frac{3\pi}{7}, q\right) = \sqrt{7}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

vgl. § 7. (17).

Aehnlich wie für die imaginäre Periode ergeben sich auch für die reelle die Formeln für (ϑ), (ϑ_2) und (ϑ_3) mit Hülfe von (7) und von § 1. (13).

Mit Hülfe der beiden dortigen Formeln

$$\vartheta_1(x, q)\ \vartheta_2(x, q) = \vartheta(0, q^2)\ \vartheta_1(2x, q^2)$$

und

$$2\,\vartheta(x, q)\ \vartheta_1(x, q) = \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})\ \vartheta_1(x, q^{\frac{1}{2}})$$

folgt nämlich:

$$(\vartheta_2) = \vartheta^n(0, q^2)\ (\vartheta_1)_{q=q^2}\ (\vartheta_1)^{-1}$$

und

$$2^n(\vartheta) = \vartheta_2^n(0, q^{\frac{1}{2}})\ (\vartheta_1)_{q=q^{\frac{1}{2}}}\ (\vartheta_1)^{-1}.$$

Reducirt man dann die Grössen $(\vartheta_1)_{q=q^2}$ und $(\vartheta_1)_{q=q^{\frac{1}{2}}}$, sowie $\vartheta(0, q^2)$ und $\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{2}})$ nach den Formeln § 1. (14), so folgt:

$$(23)\quad\begin{cases}2^n(\vartheta) = \sqrt{\frac{Q}{q}}\ \frac{(4pqr)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}}\\ 2^n(\vartheta_2) = \sqrt{\frac{R}{r}}\ \frac{(4pqr)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}}\\ 2^n(\vartheta_3) = \sqrt{\frac{P}{p}}\ \frac{(4pqr)^{\frac{\alpha}{6}}}{(4PQR)^{\frac{1}{6}}}\end{cases}$$

oder wenn man

$$\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}} = B$$

setzt, während

$$\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = A,$$

in (17) also

$$AB = \left(\frac{PQRpqr}{4}\right)^{\frac{n}{3}}$$

so folgt aus (22) und (23):

$$(24)\qquad \begin{cases} (\vartheta_1) = \sqrt{\alpha}\cdot B \\ (\vartheta)\ = B\sqrt{\dfrac{pr}{PR}} \\ (\vartheta_2) = B\sqrt{\dfrac{pq}{PQ}} \\ (\vartheta_3) = B\sqrt{\dfrac{qr}{QR}}\,. \end{cases}$$

Als specielle Fälle fliessen hieraus die Formeln § 2. (11), ferner § 4. (19) und § 7. (17).

Auf die Analogie der Formel (22) mit den Gauss'schen Resultaten für die sinus-Producte haben wir schon in der Einleitung zu diesem Paragraphen hingewiesen. Durch Vergleichung von (22), (23), (24) mit (16) und (17) resultiren dann noch folgende Beziehungen zwischen der reellen und imaginären Periode:

$$(25)\qquad \begin{cases} i^n\, q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_1]\,(\vartheta_1) = \sqrt{\alpha}\,AB = \sqrt{\alpha}\left(\dfrac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta]\ \ (\vartheta)\ = \left(\dfrac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_2]\,(\vartheta_2) = \left(\dfrac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,[\vartheta_3]\,(\vartheta_3) = \left(\dfrac{pqrPQR}{4}\right)^{\frac{n}{3}}. \end{cases}$$

Also hieraus:

$$(26)\qquad \frac{i^n}{\sqrt{\alpha}}\,[\vartheta_1]\,(\vartheta_1) = [\vartheta]\,(\vartheta) = [\vartheta_2]\,(\vartheta_2) = [\vartheta_3]\,(\vartheta_3)\,,$$

Endlich noch:

$$(27)\qquad \begin{cases} i^n\, q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,\dfrac{[\vartheta_1]}{(\vartheta_1)} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\left[\dfrac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n-2}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,\dfrac{[\vartheta]}{(\vartheta)} = \dfrac{q}{Q}\cdot\left[\dfrac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n+1}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,\dfrac{[\vartheta_2]}{(\vartheta_2)} = \dfrac{r}{R}\ \left[\dfrac{PQR}{pqr}\right]^{\frac{n+1}{3}} \\ q^{\frac{n(n+1)}{6}}\,\dfrac{[\vartheta_3]}{(\vartheta_3)} = \dfrac{p}{P}\ \left[\dfrac{PPR}{pqr}\right]^{\frac{n+1}{3}}. \end{cases}$$

§ 10.

Anhang.

Es ist im § 7. behauptet worden, dass sämmtliche Primzahlen von der Form $6m+1$ sich zerlegen lassen in die Summe eines einfachen und eines dreifachen Quadrats, wenn also p eine solche Primzahl ist, so ist:

$$(1)\qquad p = A^2 + 3B^2 .$$

Die Zahlentheorie beweist diesen Satz für das 4-fache jeder solchen Primzahl, nämlich dass sich immer zerlegen lässt:

$$(2)\qquad 4p = \alpha^2 + 2\beta^2$$

(vgl. Bachmann: Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig 1872. S. 138 und 139.).

Hieraus lässt sich aber das oben angegebene Resultat auf einfache Weise herleiten und erweitern.

Es ist nämlich klar, dass in (2) sowohl α als β entweder zugleich grade oder ungrade Zahlen sein müssen. Im ersteren Falle wäre die Gleichung (1) sofort bewiesen. In der That liefert aber die Zahlentheorie den Fall, dass sowohl α als auch β ungerade sind. Z. B.

$$4 \cdot 13 = 5^2 + 3 \cdot 3^2$$
$$4 \cdot 19 = 7^2 + 3 \cdot 3^2 .$$

Wenn α und β nun 2 ungerade Zahlen sind, so ist entweder immer $\alpha - \beta$ oder $\alpha + \beta$ durch 4 theilbar, denn es ist entweder:

$$1)\quad \alpha = 4m_1 \pm 1 \qquad \beta = 4m_2 \pm 1$$

oder

$$2)\quad \alpha = 4m_1 \pm 1 \qquad \beta = 4m_2 \mp 1.$$

Im Falle 1) aber ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha - \beta) = m_1 - m_2,$$

im Falle 2) ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha + \beta) = m_1 + m_2 .$$

In dem ersten Falle ist dann aber zugleich $\alpha + 3\beta$, im zweiten Falle $\alpha - 3\beta$ durch 4 theilbar, denn im 1) Falle ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha + 3\beta) = m_1 + 3m_2 \pm 1,$$

im Falle 2)

$$\tfrac{1}{4}(\alpha - 3\beta) = m_1 - 3m_2 \pm 1 .$$

Wir sehen also, dass jedenfalls immer folgende 2 Gleichungen zusammen bestehen müssen.

$$(3)\qquad \begin{cases} \text{I.}\ \alpha - \beta \ = 4\,t_1 \\ \qquad \alpha + 3\,\beta = 4\,s_1 \\ \text{oder} \\ \text{II.}\ \alpha + \beta \ = 4\,t_2 \\ \qquad \alpha - 3\,\beta = 4\,s_2\,. \end{cases}$$

Aus I. aber folgt:

$$\alpha = s_1 + 3\,t_1\,, \qquad \beta = s_1 - t_1$$

aus II.

$$\alpha = s_2 + 3\,t_2\,, \qquad \beta = t_2 - s_2\,.$$

Es wird sich also jedenfalls immer setzen lassen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha = A + 3\,B \\ \beta = \pm\,(A - B)\,. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen müssen immer bestehen, mögen die Grössen α und β in (2) einen Werth haben, welchen sie wollen, wenn sie nur beide ungerade sind.

Setzt man die Werthe (3) in (2) ein, so folgt:

$$(5)\qquad 4\,p = (A + 3\,B)^2 + 3\,(A - B)^2\,.$$

Führt man beide Quadrate aus, so sieht man sofort, dass hieraus den beiden andern Gleichungen folgen:

$$(6)\qquad \begin{cases} 4\,p = (A - 3\,B)^2 + 3\,(A + B)^2 \\ 4\,p = (2\,A)^2 \qquad\quad + 3\,(2\,B)^2\,. \end{cases}$$

Die Gleichungen (5) und (6) bestehen also immer mit (2) zusammen, und es zeigt sich:

„Dass jedes Vierfache einer solchen Primzahl p von der Form „$6\,m + 1$ auf dreifache Weise darstellbar ist als $A^2 + 3\,B^2$, „also in der Summe eines einfachen und eines dreifachen „Quadrats.“

In der That ist:

$$4 \cdot 7 = 1^2 + 3 \cdot 3^2 = 5^2 + 3 \cdot 1^2 = 4^2 + 3 \cdot 2^2$$
$$4 \cdot 13 = 7^2 + 3 \cdot 1^2 = 5^2 + 3 \cdot 3^2 = 2^2 + 3 \cdot 4^2$$
$$4 \cdot 19 = 1^2 + 3 \cdot 5^2 = 7^2 + 3 \cdot 3^2 = 8^2 + 3 \cdot 2^2 \text{ etc.}$$

Sodann aber ergiebt sich aus der zweiten Gleichung in (6) sofort:

$$(7)\qquad p = A^2 + 3\,B^2\,,$$

also unsere Gleichung (1), d. h.:

„Jede Primzahl von der Form $6\,m + 1$ ist immer und zwar „nur auf eine Art zerlegbar in die Summe eines einfachen „und eines dreifachen Quadrates.“

Wenn aber die Gleichung (7) besteht, so ist damit auch bewiesen, dass sich das λ^2- und das $3\lambda^2$-fache dieser Primzahlen von der Form $6p+1$ auf eben dieselbe Weise darstellen lasse, wobei λ ganz beliebig ist. Denn es ist auch:

$$(8)\quad \begin{cases} \lambda^2 p = (\lambda A)^2 + 3(\lambda B)^2 \\ 3\lambda^2 p = (3\lambda B)^2 + 3(\lambda A)^2. \end{cases}$$

Es folgt aber aus (6) auch:

„Dass ein Product aus n Primzahlen von der Form $6m+1$ „sich immer auf 2 Arten in A^2+3B^2 zerlegen lasse."

Denn es sei:

$$p_1 = \alpha_1{}^2 + 3\beta_1{}^2$$
$$p_2 = \alpha_2{}^2 + 3\beta_2{}^2;$$

so folgt:

$$(9)\quad \begin{cases} p_1 p_2 = (\alpha_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2)^2 + 3(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2 \\ = (\alpha_1\alpha_2 - 3\beta_1\beta_2)^2 + 3(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)^2. \end{cases}$$

Nimmt man noch eine dritte Zahl p_3 hinzu, so ist $p_1 p_2 p_3$ offenbar auf 4 Arten zerlegbar, p_1, p_2, p_3, p_4 wäre auf 8, d. h. 2^3 Arten zerlegbar, und so schliesst man weiter, woraus offenbar obiger Lehrsatz resultirt.

Wenn man nun folgende Tabelle der bis 100 vorhandenen Zahlen p betrachtet:

$$7 = 2^2 + 3\cdot 1^2$$
$$13 = 1^2 + 3\cdot 2^2 = 3^2 + 2^2$$
$$19 = 4^2 + 3\cdot 1^2$$
$$31 = 2^2 + 3\cdot 3^2$$
$$37 = 5^2 + 3\cdot 2^2 = 6^2 + 1^2$$
$$43 = 4^2 + 3\cdot 3^2$$
$$61 = 7^2 + 3\cdot 2^2 = 5^2 + 6^2$$
$$67 = 8^2 + 3\cdot 1^2$$
$$73 = 5^2 + 3\cdot 4^2 = 8^2 + 3^2$$
$$79 = 2^2 + 3\cdot 5^2$$
$$97 = 7^2 + 3\cdot 4^2 = 9^2 + 4^2$$
$$103 = 10^2 + 3\cdot 1^2,$$

so bemerkt man sofort den Unterschied zwischen den Zahlen von der Form $12m+7$ und denen von der Form $12m+1$, welche letztere ja auch in die Summe zweier Quadrate zerlegbar sind.

Bei den letzteren nämlich ist A ungrade, B grade, während dies bei denen von der Form $12m+7$ umgekehrt ist. Jedoch ist gemäss (8) auch für $3(12m+1)$ A gerade, B ungerade.

Da unsere Untersuchung in § 7. erforderte, dass s eine gerade, t aber eine ungerade Zahl sei, so gilt sie somit für die Primzahlen von der Form $12m+7$ und für das Dreifache aller Primzahlen von der Form $12m+1$.

Dass in der Zerlegung von $12m+1$ A immer ungerade, B immer gerade sein muss, hat Dirichlet bewiesen. (Vgl. Lejeune-Dirichlet: Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré. Crelle, Bd. 3, S. 69.)

Wir wollen diesen zahlentheoretischen Ausführungen schliesslich noch eine kurze Bemerkung hinzufügen, welche darlegen soll, wie doch auch manche der vorher gefundenen analytischen Resultate geeignet sind die Fruchtbarkeit der höheren Analysis zur Herleitung zahlentheoretischer Wahrheiten zu bekunden, eine Beziehung zwischen beiden Feldern der Mathematik, welche durch die grossen Arbeiten Jacobi's und Dirichlet's zu so merkwürdigen Ergebnissen geführt hat.

Aus der Dreitheilung in § 2. (5) haben wir die Formel:

$$qQ + rR = pP.$$

Nun aber ist, wenn die folgenden Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ gerechnet werden:

$$(10)\qquad \begin{cases} p = \sum q^{hh}, & P = \sum q^{3hh} \\ q = \sum (-1)^h q^{hh}, & Q = \sum (-1)^h q^{3hh} \\ r = \sum q^{\frac{1}{4}(2h+1)^2}, & R = \sum q^{\frac{3}{4}(2h+1)^2}. \end{cases}$$

Trägt man dieses ein, so folgt:

$$(11)\qquad \sum q^{kk+3hh} - \sum (-1)^{k+h} q^{kk+3hh} = \sum q^{\frac{1}{4}(2k+1)^2+\frac{3}{4}(2h+1)^2}.$$

Links blieben alle solche Formen $kk+3hh$ stehen, in denen h und k nicht zugleich grade oder ungrade sind, und zwar kommen dann die betreffenden Glieder sämmtlich positiv vor. Die übrigen Glieder, in denen h und k zugleich grade und ungrade sind, fallen heraus.

Rechts aber stehen offenbar alle Zahlen von der Form:

$$(12)\qquad A = kk + k + 3hh + h + 1$$

worin für k und h alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu combiniren sind. Aus A können immer nur ungrade Zahlen resultiren, da $kk+k$ sowohl als $3hh+3h$ immer grade sind, wie auch k und h beschaffen sein mögen. Da nun die Ausdrücke $hh+h$ und $kk+k$ die Reihe aller dreieckigen Zahlen bilden, wenn k und h von $+\infty$ bis $-\infty$ geht, so folgt:

„Die Summe aus dem Doppelten einer dreieckigen Zahl und „dem Sechsfachen einer zweiten dreieckigen Zahl, vermehrt „um die Einheit, lässt sich immer durch $A^2 + 3B^2$ darstellen, „worin A und B nicht gleichzeitig grade oder ungrade sind.“

Setzt man rechts erst $h = 0$, sodann $k = 0$, so folgt:

„Das Doppelte jeder dreieckigen Zahl vermehrt um die Einheit, „sowie das Sechsfache jeder dreieckigen Zahl um die Einheit „vermehrt, sind immer darstellbar durch die Summe eines ein- „fachen und eines dreifachen Quadrates.“