SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1874
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0007
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0023
LOG Titel: Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.

Von R. Beez zu Plauen im Voigtlande.

Im Folgenden wird diejenige n-fache Mannigfaltigkeit betrachtet werden, welche vermöge einer gegebenen Gleichung

$$F(x_0, x_1, \cdots x_n) = 0 \tag{1}$$

ausgesondert ist aus der $(n+1)$-fachen Mannigfaltigkeit $(x_0, x_1, \cdots x_n)$. Letztere mag als eine *absolut* gegebene oder (nach Riemann) als eine *ebene* Mannigfaltigkeit angesehen werden.

Auf $F = 0$ seien gegeben die unendlich nahen Punkte A und $A^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$, mit den Coordinaten $x_0, x_1, \cdots x_n$ und $x_0 + d_i x_0$, $x_1 + d_i x_1, \cdots x_n + d_i x_n$; so dass also die Formeln stattfinden:

$$F_0 d_i x_0 + F_1 d_i x_1 + \cdots + F_n d_i x_n = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots n), \tag{2}$$

wo unter $F_0, F_1, \cdots F_n$ die Ableitungen von F zu verstehen sind. Ferner sei B ein *ausserhalb* $F = 0$ beliebig gegebener Punkt mit den Coordinaten $y_0, y_1, \cdots y_n$; dann ist das Volumen des durch die Punkte A, $A^{(i)}$ und B bestimmten Parallelepipedums dargestellt durch die Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} y_0 - x_0 & d_1 x_0 & d_2 x_0 & \cdots & d_n x_0 \\ y_1 - x_1 & d_1 x_1 & d_2 x_1 & \cdots & d_n x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n - x_n & d_1 x_n & d_2 x_n & \cdots & d_n x_n \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Ferner seien $dw_0, dw_1, \cdots dw_n$ die Partialdeterminanten von R, genommen nach den Gliedern der ersten Vertikale; und endlich sei dw definirt durch:

$$(dw)^2 = (dw_0)^2 + (dw_1)^2 + \cdots (dw_n)^2. \tag{4}$$

Zufolge der soeben für $dw_0, dw_1, \cdots dw_n$ gegebenen Definition finden die identischen Gleichungen statt:

$$dw_0 \cdot d_i x_0 + dw_1 \cdot d_i x_1 + \cdots + dw_n \cdot d_i x_n = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots n);$$

hieraus ergeben sich mit Rücksicht auf (2) die Proportionen

$$dw_0 : dw_1 : \cdots : dw_n = F_0 : F_1 : \cdots : F_n \,;$$

aus diesen aber folgt mit Rücksicht auf (4):

$$\text{(5)} \qquad \frac{dw_k}{dw} = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2}}\,, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n)\,.$$

Die Formeln (5) lassen erkennen, dass die Quotienten $\frac{dw_k}{dw}$ angesehen werden können als die Richtungscosinus der im Punkte A (oder $x_0, x_1, \ldots x_n$) auf der Mannigfaltigkeit $F = 0$ errichteten *Normale.*

Die Grössen $dw_0, dw_1, \ldots dw_n$ sind definirt als gewisse Partialdeterminanten von R; und es findet daher die identische Gleichung statt:

$$R = dw_0\,(y_0 - x_0) + dw_1\,(y_1 - x_1) + \cdots + dw_n\,(y_n - x_n)\,,$$

eine Gleichung, welche auch so dargestellt werden kann:

$$\frac{R}{(AB)\cdot dw} = \frac{dw_0}{dw}\,\frac{y_0 - x_0}{(AB)} + \frac{dw_1}{dw}\,\frac{y_1 - x_1}{(AB)} + \cdots + \frac{dw_n}{dw}\,\frac{y_n - x_n}{(AB)}\,,$$

wo (AB) die gegenseitige Entfernung der Punkte A und B bezeichnen soll. Die rechte Seite der letzten Formel repräsentirt, weil die $\frac{dw_k}{dw}$ die Richtungscosinus der Normale vorstellen, den Cosinus desjenigen Winkels φ, unter welchem diese Normale gegen die Linie (AB) geneigt ist, so dass man also erhält:

$$\frac{R}{(AB)\,dw} = \cos\varphi\,,$$

oder was dasselbe ist*):

$$\text{(6)} \qquad dw = \frac{R}{(AB)\cos\varphi}\,.$$

---

*) Diese Formel (6) scheint mir wenig im Einklang zu stehen mit einer gewissen Bemerkung, welche Kronecker in seiner ausgezeichneten Abhandlung: „*Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variablen*" (Ber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1869, S. 170) gemacht hat. Denn, übertragen in die von mir angewandte Bezeichnungsweise, würde jene Bemerkung etwa so auszusprechen sein:

Wenn man für die $(n+1)$ der Mannigfaltigkeit $F = 0$ angehörigen Punkte A, A_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ und für irgend einen $(n+2)^{\text{ten}}$ *ausserhalb* dieser Mannigfaltigkeit liegenden Punkt B die Inhaltsdeterminante R bildet, und dieselbe durch die Entfernung

$$AB = \sqrt{(y_0 - x_0)^2 + (y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

dividirt, so nähert sich dieser Quotient dem Werthe des Elementes dw, sobald man den Punkt B ins Unendliche rückt.

Dass der in Rede stehende Mangel an Einklang in einem geringfügigen Versehen (respective Druckfehler) seinen Grund hat, dürfte wohl keinem Zweifel unterliegen.

Offenbar repräsentirt $(AB) \cos \varphi$ die *Höhe* des mit R bezeichneten Parallelepipedums. Dividirt man aber das Volumen R des Parallelepipedums durch seine *Höhe*, so erhält man seine *Basis*. Die Formel (6) lässt also erkennen, dass diese *Basis* gleich dw ist; *und es kann daher dw aufgefasst werden als ein unendlich kleines Element der gegebenen Mannigfaltigkeit $F = 0$.*

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir über zur Darstellung des *Krümmungsmaasses* der gegebenen Mannigfaltigkeit $F = 0$. Je zwei Punkte der Mannigfaltigkeit $F = 0$ und der (kugelförmigen) Mannigfaltigkeit

$$(7) \qquad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$$

mögen *correspondirende* genannt werden, sobald zwischen ihren Coordinaten $x_0, x_1, \ldots x_n$ und $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ die Relationen stattfinden:

$$(8) \qquad \xi_k = \frac{F_k}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Sind nun insbesondere $\mathsf{A}\,(\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n)$ und $\mathsf{A}^{(i)}\,(\xi_0 + d_i\xi_0, \xi_1 + d_i\xi_1, \ldots \xi_n + d_i\xi_n)$ die den Punkten A und $A^{(i)}$ correspondirenden, und setzt man [analog mit (3), (4)]:

$$(9) \qquad \mathsf{P} = \begin{vmatrix} \eta_0 - \xi_0 & d_1\xi_0 & d_2\xi_0 & \ldots & d_n\xi_0 \\ \eta_1 - \xi_1 & d_1\xi_1 & d_2\xi_1 & \ldots & d_n\xi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n - \xi_n & d_1\xi_n & d_2\xi_n & \ldots & d_n\xi_n \end{vmatrix},$$

und

$$(10) \qquad (d\omega)^2 = (d\omega_0)^2 + (d\omega_1)^2 + \cdots + (d\omega_n)^2,$$

wo $d\omega_0, d\omega_1, \ldots d\omega_n$ die Partialdeterminanten von P nach den Gliedern der ersten Vertikale vorstellen sollen, so wird [analog mit (5)]:

$$(11) \qquad \frac{d\omega_k}{d\omega} = \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}} = \frac{\xi_k}{1}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Aus (5) und (11) ergiebt sich mit Rücksicht auf (8) sofort:

$$(12) \qquad \frac{d\omega_k}{d\omega} = \frac{dw_k}{dw}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Das *von Gauss eingeführte Krümmungsmaass* $K = \frac{d\omega}{dw}$ kann daher, wie aus (12) folgt, dargestellt werden durch:

$$(13) \qquad K = \frac{d\omega}{dw} = \frac{d\omega_0}{dw_0} = \frac{d\omega_1}{dw_1} = \cdots = \frac{d\omega_n}{dw_n}.$$

Bei der weiteren Entwickelung des Ausdruckes von K mögen nun der Reihe nach drei Fälle unterschieden werden.

Erster Fall.

Die Gleichung (1) der betrachteten Mannigfaltigkeit sei aufgelöst nach x_0, also gegeben in der Form:

$$x_0 - f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0. \tag{14}$$

Alsdann besitzen die Relationen (8) die Gestalt:

$$\xi_0 = \frac{1}{s}, \quad \xi_j = -\frac{f_j}{s}, \quad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{15^a}$$

wo $f_1, f_2, \ldots f_n$ die partiellen Ableitungen von f vorstellen, während s definirt ist durch:

$$s^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2. \tag{15^b}$$

Die Coordinaten $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sind in diesem Falle nur abhängig von den n Argumenten $x_1, x_2, \ldots x_n$ (nicht von x_0); so dass man Formeln von folgender Gestalt erhält:

$$d_i\xi_k = \xi_{k1}d_ix_1 + \xi_{k2}d_ix_2 + \cdots + \xi_{kn}d_ix_n. \tag{16}$$

Beachtet man also, dass die Partialdeterminanten w_0 und ω_0 definirt worden sind durch:

$$w_0 = \begin{vmatrix} d_1x_1 & d_2x_1 & \ldots & d_nx_1 \\ d_1x_2 & d_2x_2 & \ldots & d_nx_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1x_n & d_2x_n & \ldots & d_nx_n \end{vmatrix}, \qquad \omega_0 = \begin{vmatrix} d_1\xi_1 & d_2\xi_1 & \ldots & d_n\xi_1 \\ d_1\xi_2 & d_2\xi_2 & \ldots & d_n\xi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1\xi_n & d_2\xi_n & \ldots & d_n\xi_n \end{vmatrix},$$

so erhält man auf Grund der Formel (13) und unter Anwendung des Multiplicationstheorems der Determinanten sofort:

$$K = \frac{d\omega}{dw} = \frac{d\omega_0}{dw_0} = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Durch Differentiation von (15ᵃ) findet man:

$$\xi_{jp} = \frac{\partial\xi_j}{\partial x_p} = \frac{1}{s^3}\left(f_j \cdot \sum_{k=1}^{k=n} f_k f_{kp} - s^2 f_{jp}\right), \tag{18}$$

wo die f_{kp}, f_{jp} die zweiten Ableitungen von f bezeichnen. Substituirt man diese Werthe (18) in (17), so folgt:

$$K = \frac{1}{s^{3n}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & \ldots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \ldots & f_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^2 - s^2 & f_2f_1 & \ldots & f_nf_1 \\ f_1f_2 & f_2^2 - s^2 & \ldots & f_nf_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1f_n & f_2f_n & \ldots & f_n^2 - s^2 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Die zweite Determinante, welche für den Augenblick mit $\varphi(s^2)$ bezeichnet werden mag, reducirt sich auf den Werth $(-1)^n \cdot s^{2n-2}$. Denn ihre Entwickelung nach Potenzen von s^2 giebt:

$$\varphi(s^2) = \Delta_n - s^2 \Sigma\Delta_{n-1} + s^4 \Sigma\Delta_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s^{2n-2} \Sigma\Delta_1 + (-1)^n s^{2n},$$

worin $\Sigma\Delta_m$ die Summe aller Partialdeterminanten m^{ten} Grades von $\Delta_n = \varphi(0)$ bedeutet; diese Summen aber sind identisch Null mit alleiniger Ausnahme der letzten $\Sigma\Delta_1$; so dass man erhält:

$$\begin{aligned}\varphi(s^2) &= (-1)^{n-1} s^{2n-2} \Sigma\Delta_1 + (-1)^n s^{2n}, \\ &= (-1)^n \left[s^{2n} - s^{2n-2}(f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2)\right], \\ &= (-1)^n s^{2n-2}, \quad [\text{vgl. } (15^b)].\end{aligned}$$

Man erhält also schliesslich:

$$(20) \qquad K = \frac{(-1)^n}{s^{n+2}} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

Zweiter Fall.

Die betrachtete n-fache Mannigfaltigkeit sei, wie in (1), gegeben durch die Gleichung:

$$(21) \qquad F(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.$$

Um diesen Fall auf den früheren zurückzuführen, sei zuvörderst auf die Proportionen aufmerksam gemacht:

$$(22^a) \qquad 1 : (-f_1) : (-f_2) : \cdots : (-f_n) = F_0 : F_1 : F_2 : \cdots : F_n,$$

sowie auf die hieraus entspringenden Formeln:

$$(22^b) \qquad f_k = -\frac{F_k}{F_0},$$

$$(22^c) \qquad \frac{1}{s} = +\frac{F_0}{S}, \quad \frac{f_k}{s} = -\frac{F_k}{S}, \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

wo s und S zur Abkürzung stehen für die Wurzelgrössen:

$$(22^d) \qquad \begin{aligned} s &= \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2}, \\ S &= \sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2}. \end{aligned}$$

Aus (22^b) folgt sofort:

$$\begin{aligned} df_k &= \frac{F_k dF_0 - F_0 dF_k}{F_0^2}, \\ &= \frac{(F_k F_{00} - F_0 F_{k0}) dx_0 + (F_k F_{01} - F_0 F_{k1}) dx_1 + \cdots + (F_k F_{0n} - F_0 F_{kn}) dx_n}{F_0^2}; \end{aligned}$$

nun ist aber

$$dx_0 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n = (-1)\frac{F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_n dx_n}{F_0};$$

substituirt man diesen Werth für dx_0 in die letzte Formel, so erhält man das Differential df_k ausgedrückt durch die n Differentiale dx_1, $dx_2, \ldots dx_n$ (exclusive dx_0); und hieraus folgt alsdann sofort:

$$f_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{U_{ki}}{F_0^3}, \tag{23}$$

wo unter U_{ki} die Determinante zu verstehen ist:

$$U_{ki} = \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_k \\ F_0 & F_{00} & F_{k0} \\ F_i & F_{i0} & F_{ki} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Substituirt man die Werthe (23) in (20), und bezeichnet man dabei die aus den n^2 Grössen U_{ki} zusammengesetzte Determinante kurzweg mit U, so erhält man:

$$K = \frac{(-1)^n U}{s^{n+2} F_0^{3n}}. \tag{25}$$

Nun ist aber nach (22 a, b, c, d): $s = \frac{S}{F_0}$. Somit folgt:

$$K = \frac{(-1)^n U}{S^{n+2} F_0^{2n-2}}. \tag{26}$$

Diese Formel ist, wie sogleich näher dargelegt werden soll, identisch mit der von Kronecker*) gegebenen Formel:

$$K = -\frac{1}{S^{n+2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \ldots & F_n \\ F_0 & F_{00} & F_{10} & \ldots & F_{n0} \\ F_1 & F_{01} & F_{11} & \ldots & F_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{0n} & F_{1n} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix} = -\frac{R}{S^{n+2}}. \tag{27}$$

Multiplicirt man nämlich in dieser Kronecker'schen Determinante — sie mag R genannt werden — sämmtliche Vertikalreihen von der dritten an mit F_0, und zieht die respective mit $F_1, F_2, \ldots F_n$ multiplicirte zweite Vertikalreihe von denselben ab, so erhält man jene Determinante in folgender Gestalt:

---

*) Dieser Ausdruck (27) des Krümmungsmaasses K ist von Kronecker auf anderem Wege gefunden, nämlich aus dem Satze abgeleitet worden, dass die Krümmung der n-fachen Mannigfaltigkeit dargestellt wird durch den reciproken Werth des Productes der n Hauptkrümmungshalbmesser. (Vgl. d. Ber. der Berliner Ak. der Wiss. 1869, S 695.)

$$R = \frac{1}{F_0^n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_0 & 0 & \cdots & 0 \\ F_0 & F_{00} & F_0 F_{10} - F_1 F_{00} & \cdots & F_0 F_{n0} - F_n F_{00} \\ F_1 & F_{01} & F_0 F_{11} - F_1 F_{01} & \cdots & F_0 F_{n1} - F_n F_{01} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_n & F_{0n} & F_0 F_{1n} - F_1 F_{0n} & \cdots & F_0 F_{nn} - F_n F_{0n} \end{vmatrix},$$

wofür offenbar einfacher geschrieben werden kann:

$$R = -\frac{1}{F_0^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} F_0 & F_0 F_{10} - F_1 F_{00} & \cdots & F_0 F_{n0} - F_n F_{00} \\ F_1 & F_0 F_{11} - F_1 F_{01} & \cdots & F_0 F_{n1} - F_n F_{01} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_n & F_0 F_{1n} - F_1 F_{0n} & \cdots & F_0 F_{nn} - F_n F_{0n} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun in dieser letzten Determinante jede Horizontalreihe von der zweiten an mit F_0, und subtrahirt die respective mit $F_1, F_2, \cdots F_n$ multiplicirte erste Horizontalreihe, so verschwinden sämmtliche Glieder der ersten Vertikalreihe bis auf F_0 und man erhält:

$$R = \frac{(-1)^{n+1}\, U}{F_0^{2n-2}},$$

wo U die schon früher genannte Bedeutung hat. Substituirt man aber diesen Werth der Determinante R in die Kronecker'sche Formel (27), so folgt:

$$K = \frac{(-1)^n\, U}{S^{n+2}\, F_0^{2n-2}},$$

und dieser Ausdruck ist in der That identisch mit dem in (26) gefundenen.

Dritter Fall.

Die betrachtete n-fache Mannigfaltigkeit sei gegeben durch die $(n+1)$ simultanen Gleichungen:

$$(28) \qquad x_k = f_k(p_1, p_2, \cdots p_n), \quad (k = 0, 1, 2, \cdots n).$$

Unter A und A mögen folgende Determinanten verstanden werden:

$$(29) \qquad A = \begin{vmatrix} y_0 - x_0 & \frac{\partial x_0}{\partial p_1} & \frac{\partial x_0}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial x_0}{\partial p_n} \\ y_1 - x_1 & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial x_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n - x_n & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{vmatrix} \eta_0 - \xi_0 & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial \xi_0}{\partial p_n} \\ \eta_1 - \xi_1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial \xi_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n - \xi_n & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial \xi_n}{\partial p_n} \end{vmatrix};$$

ferner seien $A_0, A_1, \cdots A_n$ und $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \cdots \mathsf{A}_n$ die Partialdeterminanten von A und A, genommen nach den Gliedern der ersten Vertikalen; ausserdem sei H definirt durch:

$$(30) \qquad H^2 = A_0^2 + A_1^2 + \cdots + A_n^2.$$

Alsdann finden, falls man die früher mit $d_1, d_2, \cdots d_n$ bezeichneten Verschiebungen den Parametern $p_1, p_2, \cdots p_n$ entsprechen lässt, zwischen den Determinanten dw_k, $d\omega_k$ und A_k, A_k die einfachen Beziehungen statt:

$$(31)\quad dw_k = A_k\, dp_1\, dp_2 \cdots dp_n\,, \quad d\omega_k = \mathsf{A}_k\, dp_1\, dp_2 \cdots dp_n\,.$$

Nun ist nach (11) und (12):

$$(32)\qquad \xi_k = \frac{dw_k}{dw} = \frac{dw_k}{\sqrt{(dw_0)^2 + (dw_1)^2 + \cdots + (dw_n)^2}}\,,$$

oder weil nach (31) die dw_k mit den A_k proportional sind, und mit Rücksicht auf (30):

$$(33)\qquad \xi_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2 + \cdots + A_n^2}} = \frac{A_k}{H}\,;$$

hieraus folgt sofort:

$$(34)\qquad \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} = \frac{1}{H^2}\left(H\frac{\partial A_k}{\partial p_i} - A_k \frac{\partial H}{\partial p_i}\right).$$

Um im gegenwärtigen Falle einen geeigneten Ausdruck für das Krümmungsmaass K zu finden, gehen wir aus von der Formel (13), welche mit Rücksicht auf (31) so dargestellt werden kann:

$$(35)\qquad K = \frac{d\omega}{dw} = \frac{d\omega_0}{dw_0} = \frac{\mathsf{A}_0}{A_0}\,.$$

Substituirt man hier für A_0 seine eigentliche Bedeutung [vgl. (29)], indem man dabei für die $\dfrac{\partial \xi_k}{\partial p_i}$ die Werthe (34) einsetzt, so folgt nach einer leichten Umformung:

$$(36)\qquad K = \frac{1}{A_0\, H^{n+2}} \begin{vmatrix} HH & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ H\dfrac{\partial H}{\partial p_1} & \dfrac{\partial A_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial A_2}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial A_n}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H\dfrac{\partial H}{\partial p_n} & \dfrac{\partial A_1}{\partial p_n} & \dfrac{\partial A_2}{\partial p_n} & \cdots & \dfrac{\partial A_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}.$$

Substituirt man in diese Determinante die Werthe der HH und $H\dfrac{\partial H}{\partial p_k}$ (30), und subtrahirt von der ersten Vertikalreihe die Summe der respective mit $A_1, A_2, \cdots A_n$ multiplicirten übrigen Vertikalreihen, so folgt sofort:

$$(37)\qquad K = \frac{1}{H^{n+2}} \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \dfrac{\partial A_0}{\partial p_1} & \dfrac{\partial A_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial A_n}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial A_0}{\partial p_n} & \dfrac{\partial A_1}{\partial p_n} & \cdots & \dfrac{\partial A_n}{\partial p_n} \end{vmatrix};$$

und hiermit ist also das Krümmungsmaass K in sehr einfacher Weise ausgedrückt durch die mit $A_0, A_1, \cdots A_n$ bezeichneten Partialdeterminanten [vgl. (29)] *und durch die Grösse H* (30).

Es mag schliesslich der erhaltene Ausdruck (37) noch einer gewissen Transformation unterworfen werden, durch welche er in Analogie tritt zu dem von Gauss gegebenen Ausdruck. Zu diesem Zwecke sei zunächst bemerkt, dass zufolge der für $A_0, A_1, \cdots A_n$ gegebenen Definition die identischen Gleichungen stattfinden:

$$(38^a)\qquad 1 = \frac{1}{H^2}\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_0}{\partial p_n} & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} \end{vmatrix},$$

$$(38^b)\qquad 0 = A_0 \frac{\partial x_0}{\partial p_k} + A_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_k} + \cdots + A_n \frac{\partial x_n}{\partial p_k};$$

ausserdem werde die Abkürzung eingeführt:

$$(39)\qquad D_{ik} = \frac{\partial A_0}{\partial p_i}\frac{\partial x_0}{\partial p_k} + \frac{\partial A_1}{\partial p_i}\frac{\partial x_1}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial p_i}\frac{\partial x_n}{\partial p_k},$$

$$= -\left(A_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial p_i \partial p_k} + A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial p_i \partial p_k} + \cdots + A_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial p_i \partial p_k}\right).$$

Durch Multiplication von (37) mit (38^a) ergiebt sich alsdann sofort:

$$(40)\qquad K = \frac{1}{H^{n+2}}\begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{vmatrix}.$$

Hiermit ist unser Ziel erreicht. Denn die vorstehende Formel (40) *verwandelt sich in der That für $n = 2$ in die bekannte Gauss'sche Formel:*

$$K = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2},$$

(Gauss' Werke, Bd. IV, S. 234). Kaum bedarf es der Bemerkung, dass bei Gauss $A_0 = A$, $A_1 = B$, $A_2 = C$, ferner $p_1 = p$, $p_2 = q$, endlich $D_{11} = D$, $D_{12} = D_{21} = D'$, $D_{22} = D''$ gesetzt ist.

Plauen im Voigtlande. April, 1873.