Ueber die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Kugeln.

Von D. Bobylew in St. Petersburg.

In den Lehrbüchern der Elektrostatik wird, bei Betrachtung der gegenseitigen ponderomotorischen Einwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Kugeln *gleicher* Grösse, auf Fälle aufmerksam gemacht*), in denen jene Einwirkung Null ist. Doch existiren solche Fälle auch dann, wenn die Kugeln von *ungleicher* Grösse sind. In der That kann man — und dies zu zeigen ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes — die in Rede stehende Einwirkung zwischen zwei (einander nicht berührenden) Kugeln jedesmal zum Verschwinden bringen, sobald man nur dem Verhältniss der auf den beiden Kugeln angehäuften Elektricitätsmengen einen geeigneten Werth zuertheilt; und zwar existiren für *jede gegebene Entfernung g* der beiden Kugelmittelpunkte *zwei* solche Werthe, welche sich darstellen als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten bestimmte Functionen von g sind; diese Wurzeln sind stets reell.

§ 1.

Allgemeine Betrachtungen **).

Ein System elektrischer Conductoren A', A'', $\cdots$, deren jeder isolirt ist, sei geladen respective mit den Elektricitätsmengen E', E'', $\cdots$. Ferner sei *das Potential des Systems auf sich selber* bezeichnet mit

$$W = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\,\frac{eDs\cdot e_1Ds_1}{r}; \tag{1}$$

*) Beer. Einleitung in die Elektrostatik. Braunschweig, 1865. S. 93. — Köttertzsch. Lehrbuch der Elektrostatik. (Leipzig, 1872.) S. 314.

**) Diese allgemeinen Betrachtungen, obwohl schon von Thomson angestellt und benutzt [vgl. Philosophical Magazine, Ser. 4, Vol. V, p. 292, Formel (f), und p. 294, Formel (18)], scheinen dennoch im Ganzen wenig bekannt zu sein. Die Redaction der Annalen hat sich daher der Mühe unterzogen, diese Betrachtungen, welche für das Verständniss des Bobylew'schen Aufsatzes unentbehrlich sind, im vorliegenden § in Kürze zu reproduciren.

hier bedeuten e, e_1 die in irgend zwei Oberflächenelementen Ds, Ds_1 vorhandenen elektrischen Dichtigkeiten, und r die Entfernung der beiden Elemente von einander; sowohl die Summation nach Ds, als auch diejenige nach Ds_1 ist ausgedehnt über *sämmtliche* Oberflächenelemente des ganzen Systemes. Die Formel (1) kann auch so geschrieben werden:

$$(2) \qquad W = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\left(e\,Ds\,\Sigma\frac{e_1 Ds_1}{r}\right) = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(V e\,Ds)\,,$$

wo alsdann V *das Potential des Systems auf einen Punkt* repräsentirt. Die Summe $\Sigma(V e Ds)$ kann, entsprechend den einzelnen Conductoren A', A'', ..., in ebenso viele einzelne Summen zerlegt werden; so dass man erhält:

$$(3) \qquad W = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(V' e' Ds') + \tfrac{1}{2}\,\Sigma(V'' e'' Ds'') + \cdots$$

Befindet sich nun die elektrische Materie bei der gegebenen räumlichen Lage des Systemes A', A'', $\cdots$ in ihrem Gleichgewichtszustande, so wird das Potential V auf jedem Conductor von *constantem* Werthe sein. Bezeichnet man diese den einzelnen Conductoren entsprechenden constanten Werthe mit C', C'', $\cdots$ so folgt aus (3):

$$(4) \qquad W = \tfrac{1}{2}\,C'\,\Sigma(e' Ds') + \tfrac{1}{2}\,C''\,\Sigma(e'' Ds'') + \cdots,$$

oder was dasselbe ist:

$$(5) \qquad W = \tfrac{1}{2}\,C' E' + \tfrac{1}{2}\,C'' E'' + \cdots,$$

wo E', E'', $\cdots$ die schon genannten Bedeutungen besitzen, nämlich die elektrischen Ladungen der einzelnen Conductoren repräsentiren.

Lassen wir das System A', A'', $\cdots$ aus seiner ursprünglichen räumlichen Lage in eine benachbarte Lage übergehen, so wird, nach Eintritt des entsprechenden elektrischen Gleichgewichtszustandes, die elektrische Vertheilung auf jedem einzelnen Conductor eine etwas andere sein als früher. Bezeichnen wir für diese neue räumliche Lage und den neuen elektrischen Gleichgewichtszustand das Potential des Systemes auf sich selber mit $W + dW$, so wird der Zuwachs dW zerlegbar sein in zwei partielle Zuwüchse δW und ΔW, von denen der erstere herrührt von den Aenderungen der *räumlichen Lage*, während letzterer den Aenderungen der *elektrischen Dichtigkeiten* entspricht. Wir erhalten also mit Rücksicht auf (1) folgende Formeln:

$$(6) \qquad dW = \delta W + \Delta W,$$

$$(7) \qquad \delta W = -\tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\left(\frac{e\,Ds \cdot e_1 Ds_1}{r^2}\,dr\right),$$

$$(8) \qquad \Delta W = +\tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\,\frac{de\,Ds \cdot e_1 Ds_1 + e\,Ds \cdot de_1 Ds_1}{r}\,,$$

wo die Aenderungen der r mit dr, und diejenigen der e, e_1 mit de, de_1 bezeichnet sind.

Die Formel (8) kann, wie leicht zu übersehen ist, einfacher dargestellt werden, nämlich so:

$$\Delta W = \Sigma\Sigma \frac{de Ds \cdot e_1 Ds_1}{r} = \Sigma\left(de Ds \cdot \Sigma \frac{e_1 Ds_1}{r}\right),$$

oder, wenn man V in genau derselben Bedeutung wie früher (2) braucht:

$$\Delta W = \Sigma(V de Ds).$$

Hieraus aber folgt, wenn man die Summe, entsprechend den einzelnen Conductoren A', A'', $\cdots$, in ebenso viele einzelne Summen zerlegt:

$$\Delta W = \Sigma(V' de' Ds') + \Sigma(V'' de'' Ds'') + \cdots.$$

Diese Formel endlich kann, weil $V' = C'$, $V'' = C''$, $\cdots$ ist, auch so geschrieben werden:

$$\Delta W = C' \cdot \Sigma(de' Ds') + C'' \cdot \Sigma(de'' Ds'') + \cdots,$$

oder auch so:

$$\Delta W = C' \cdot dE' + C'' \cdot dE'' + \cdots,$$

oder schliesslich, weil die zuertheilten Ladungen E', E'', $\cdots$ unveränderlich sind, auch so:

$$\Delta W = 0. \tag{9}$$

Aus (6) und (9) ergiebt sich:

$$dW = \delta W. \tag{10}$$

Die von den elektrischen Kräften in dem gegebenen System während der betrachteten Lagenveränderung verrichtete ponderomotorische Arbeit drückt sich bekanntlich*) aus durch $-\delta W$, und kann daher, zufolge (10), auch dargestellt werden durch $-dW$. Somit ergiebt sich folgender Satz.

(11) *Befindet sich ein aus lauter isolirten und mit Elektricität geladenen Conductoren bestehendes System in beliebig gegebener Lage, und die in ihm enthaltene elektrische Materie in dem entsprechenden Gleichgewichtszustande, so wird die von den elektrostatischen Kräften beim Uebergange des Systems in irgend eine benachbarte Lage verrichtete ponderomotorische Arbeit darstellbar sein durch* $-dW$, *wo* W *und* $W + dW$ *diejenigen Werthe bezeichnen, welche das elektrostatische Potential des Systemes auf sich selber bei der ursprünglichen und bei der neuen Lage, jedes mal nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes, annimmt.*

Hieraus ergiebt sich durch Anwendung auf ein System von zwei Kugeln ein specieller Satz, welcher, wenn man den Centralabstand der beiden Kugeln mit g bezeichnet, folgendermassen auszusprechen ist:

---

*) Vgl. Neumann: Die elektrischen Kräfte. (Leipzig, 1873.) S. 24 bis 33.

(12) *Befinden sich zwei isolirte und elektrisch geladene Kugeln in einer beliebig gegebenen Lage* (g), *und befindet sich die in ihnen vorhandene elektrische Materie in dem entsprechenden Gleichgewichtszustande, so wird zwischen den beiden Kugeln eine ponderomotorische Kraft vorhanden sein, welche, repulsiv gerechnet, gleich* $-\frac{dW}{dg}$ *ist. Hier bedeuten* W *und* $W + dW$ *diejenigen Werthe, welche das elektrostatische Potential des Systemes auf sich selber bei den Lagen* (g) *und* ($g + dg$), *jedesmal nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes, annimmt.*

Ferner ergiebt sich aus (11), wie beiläufig bemerkt sein mag, auch noch folgender Satz:

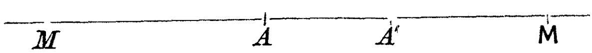
(13) *Ist von den beiden isolirten und elektrisch geladenen Kugeln die eine fest aufgestellt, die andere aber drehbar um einen gegebenen Durchmesser, und denkt man sich die in ihnen enthaltene elektrische Materie wiederum im Gleichgewichtszustande, so wird das von der ersten Kugel auf die zweite ausgeübte ponderomotorische Drehungsmoment gleich Null sein.*

§ 2.

Die ponderomotorische Kraft F, mit welcher zwei elektrisch geladene Kugeln auf einander einwirken.

Wir betrachten zwei isolirte, mit irgend welchen Elektricitätsmengen E und H geladene Kugeln, in beliebig gegebener Lage und im Zustande des elektrischen Gleichgewichts; und stellen uns die Aufgabe, die ponderomotorische Kraft F, mit welcher die beiden Kugeln auf einander einwirken, unter Anwendung des Satzes (12) näher zu berechnen.

Es seien M und M die Mittelpunkte der beiden Kugeln. Auf der Verbindungslinie $M\mathsf{M}$ construiren wir diejenigen beiden Punkte A und A', in denen sie geschnitten wird von einer auxiliären Kugelfläche, die orthogonal ist zu jeder der beiden gegebenen Kugelflächen. Diese Punkte A und A benutzen wir als die



Pole eines dipolaren Coordinatensystemes. Ist also Q ein beliebiger Punkt des Raumes, und sind QA und QA' die von ihm nach jenen Polen hinlaufenden Linien, so werden die *dipolaren Coordinaten* ϑ, ω des Punktes Q definirt zu denken sein durch die Formeln:

(14ᵃ) $$\begin{cases} \vartheta = \log \dfrac{QA'}{QA}, \\ \omega = \sphericalangle AQA'. \end{cases}$$

Ferner seien T und Θ die ϑ-Coordinaten der beiden Mittelpunkte M und M, und $\Theta - T = \Delta$; so dass also

(14^b) $$T = \text{pos.}, \quad \Theta = \text{neg.}, \quad \Delta = \text{neg.}$$

Gleichzeitig werde gesetzt:

(14^c) $$e^{-\frac{1}{2}T} = p, \quad e^{+\frac{1}{2}\Theta} = \varpi, \quad e^{\frac{1}{2}\Delta} = e^{\frac{1}{2}(\Theta - T)} = q; \text{ (wo } e = 2{,}718\cdots);$$

so dass also die Relation stattfindet

(14^d) $$p\varpi = q\,.$$

Endlich mögen die Radien der beiden Kugeln mit r und ϱ, und die Entfernungen $M\mathsf{M}$ und AA' respective mit g und $2a$ bezeichnet sein. Die Grössen r, ϱ sind alsdann unveränderlich gegeben; während hingegen T, Θ, Δ, p, ϖ, q, a abhängig von der augenblicklichen Entfernung der beiden Kugeln, also Functionen von g sind. Besonders hervorzuheben ist,

(15) dass die Grössen p, ϖ, q (falls die beiden Kugeln endlich sind und einander nicht berühren) *positive ächte Brüche* sind, zwischen denen, je nachdem $r > \varrho$ oder $r = \varrho$ ist, die Relationen stattfinden:

$$p > \varpi > q \quad \text{für} \quad r > \varrho\,,$$
$$p = \varpi > q \quad \text{für} \quad r = \varrho\,.$$

Denken wir uns die beiden Kugeln in der Centraldistanz g, und die auf ihnen vorhandene elektrische Materie im entsprechenden Gleichgewichtszustande, so wird *das elektrische Potential V der beiden Kugeln auf irgend einen Punkt* (ϑ, ω), *der ausserhalb* der Kugeln liegt, ausgedrückt sein durch*):

(16) $$V = \sqrt{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} - 2\cos\omega} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \begin{array}{l} C\,\dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\vartheta - T)} - e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\Delta - \vartheta)}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}} \\ + \Gamma\,\dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\Theta - \vartheta)} - e^{\frac{1}{2}(2n+1)(\Delta + \vartheta)}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Delta}} \end{array} \right\} P^{(n)}(\cos\omega),$$

wo unter C und Γ diejenigen constanten Werthe zu verstehen sind, welche das Potential V *innerhalb* der Kugeln, sowie auch *an ihren Oberflächen* besitzt; dabei repräsentirt $P^{(n)}$ die bekannte Laplace'sche Function.

Mit Hülfe der Formel (16) gelangt man in bekannter Weise**) zu gewissen Ausdrücken für die elektrischen Dichtigkeiten und Ladungen. Setzt man zur Abkürzung:

---

*) C. Neumann. Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird. (Halle, 1862.) S. 55.

**) Neumann l. c. p. XII (der Einleitung).

$$(17)\quad \begin{cases} L = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(2n+1)T}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\varDelta}} = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{p^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}}, \\ H = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)\varDelta}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\varDelta}} = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}}, \\ J = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}(2n+1)\Theta}}{1 - e^{\frac{1}{2}(2n+1)\varDelta}} = 2a \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{\varpi^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}}, \end{cases}$$

so sind die für die elektrischen Ladungen E und H der beiden Kugeln resultirenden Ausdrücke folgende:

$$(18)\qquad \begin{cases} E = + CL - \Gamma H \\ \mathrm{H} = - CH + \Gamma J. \end{cases}$$

Bezeichnet endlich W *das Potential des Systemes der beiden Kugeln auf sich selbst*, so ist nach (5):

$$(19)\qquad W = \tfrac{1}{2} CE + \tfrac{1}{2} \Gamma \mathrm{H}.$$

Analoge Formeln werden sich nun offenbar ergeben, wenn man (ohne sonst irgend welche Aenderungen vorzunehmen) an Stelle der bisher gegebenen Centraldistanz $M\mathrm{M} = g$ eine etwas andere Centraldistanz $g + dg$ der Betrachtung zu Grunde legt. Bezeichnet man die Werthe, welche C, Γ, L, H, J, W alsdann annehmen, mit $C + dC$, $\Gamma + d\Gamma$, $L + dL$, $H + dH$, $J + dJ$, $W + dW$, und beachtet man, dass die elektrischen Ladungen E, H *dieselben* sein sollen, wie früher, so ergeben sich aus (18) und (19) folgende Relationen:

$$(20)\qquad \begin{cases} 0 = + L dC - H d\Gamma + C dL - \Gamma dH, \\ 0 = - H dC + J d\Gamma - C dH + \Gamma dJ, \end{cases}$$

$$(21)\qquad dW = \tfrac{1}{2}(E dC + \mathrm{H} d\Gamma).$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen (20) respective mit C und Γ, und addirt, so folgt mit Rücksicht auf (18):

$$(22)\qquad 0 = (E dC + \mathrm{H} d\Gamma) + (C^2 dL - 2 C\Gamma dH + \Gamma^2 dJ);$$

endlich folgt aus (21) und (22):

$$(23)\qquad dW = -\tfrac{1}{2}(C^2 dL - 2 C\Gamma dH + \Gamma^2 dJ).$$

Nach dem Satze (12) ist nun aber die ponderomotorische Kraft F, mit welcher die beiden Kugeln bei der Centraldistanz g repulsiv auf einander wirken, gleich $-\dfrac{dW}{dg}$. Somit folgt aus (23):

$$(24)\qquad F = \tfrac{1}{2}\left(C^2 \frac{dL}{dg} - 2 C\Gamma \frac{dH}{dg} + \Gamma^2 \frac{dJ}{dg}\right).$$

Bei einer *gegebenen* Centraldistanz g wird daher die Kraft F verschwinden, sobald man den Quotienten

(25) $$x = \frac{C}{\Gamma}$$

der Art einrichtet, dass der quadratischen Gleichung

(26) $$x^2 \frac{dL}{dg} - 2x\frac{dH}{dg} + \frac{dJ}{dg} = 0$$

Genüge geschieht. Jener Quotient $x = \frac{C}{\Gamma}$ hängt aber, wie aus (18) folgt, mit den Quotienten $\frac{E}{\mathsf{H}}$ durch die Relation zusammen:

(27) $$\frac{\mathsf{E}}{\mathsf{H}} = \frac{xL - H}{J - xH}.$$

Somit ergiebt sich folgendes Resultat:

(28) *Bezeichnet man für eine beliebig gegebene Centraldistanz g die Wurzeln der quadratischen Gleichung* (26) *mit x' und x'', so wird, um die Kraft F bei dieser Centraldistanz zum Verschwinden zu bringen, nur erforderlich sein, dass man dem Quotienten $\frac{E}{\mathsf{H}}$ einen der beiden Werthe*

$$\frac{x'L - H}{J - x'H}, \qquad \frac{x''L - H}{J - x''H}$$

zuertheilt.

In den nachfolgeneden Expositionen soll gezeigt werden, dass die in Rede stehenden beiden Wurzeln x', x'' stets *reell* sind.

§ 3.

Nähere Untersuchung derjenigen quadratischen Gleichung, von welcher das Verschwinden der Kraft F abhängig ist.

Beachtet man die relative Lage der vier Punkte M, M, A, A':

$$M \qquad\qquad\qquad\qquad A \qquad\qquad A' \qquad\qquad\qquad \mathsf{M}$$

so ergeben sich mit Rücksicht auf ($14^{a, b, c, d}$) die Relationen:

(29^a) $$MA' + A'\mathsf{M} = MA + A\mathsf{M} = M\mathsf{M} = g,$$

(29^b) $$MA' - MA = \mathsf{M}A - \mathsf{M}A' = AA' = 2a.$$

Ferner ergiebt sich aus ($14^{a, b, c, d}$):

(30) $$p^{-2} = e^T = \frac{MA'}{MA}, \quad \varpi^2 = e^\Theta = \frac{\mathsf{M}A'}{\mathsf{M}A},$$

oder was dasselbe ist:

$$p^{-2} = \frac{(MA')^2}{MA \cdot MA'}, \qquad \varpi^2 = \frac{(\mathsf{M}A')^2}{\mathsf{M}A \cdot \mathsf{M}A'}.$$

Hiefür aber kann, weil $MA \cdot MA' = r^2$ und $\mathsf{M}A \cdot \mathsf{M}A' = \varrho^2$ ist*), auch geschrieben werden:

$$(31) \qquad p^{-2} = \frac{(MA')^2}{r^2}\,, \qquad \varpi^2 = \frac{(\mathsf{M}A')^2}{\varrho^2}\,.$$

Endlich folgt aus (30) und (31)

$$(32) \qquad \begin{cases} MA' = rp^{-1}\,, & \mathsf{M}A' = \varrho\varpi\,, \\ MA \;= rp\,, & \mathsf{M}A \;= \varrho\varpi^{-1}\,; \end{cases}$$

und hierdurch erlangen die Relationen ($29^{a,b}$) folgende Gestalt:

$$(33^a) \qquad rp^{-1} + \varrho\varpi = rp + \varrho\varpi^{-1} = g\,,$$

$$(33^b) \qquad r(p^{-1} - p) = \varrho(\varpi^{-1} - \varpi) = 2a\,.$$

Wir haben nun r, ϱ als gegebene *Constanten*, hingegen g als eine *Variable* anzusehen; von g abhängig sind die Grössen T, Θ, Δ, p, ϖ, q, a ($14^{a,b,c,d}$), somit auch die Grössen L, H, J (17). *Es handelt sich nun um die Bildung der Differentialquotienten* $\frac{dL}{dg}$, $\frac{dH}{dg}$, $\frac{dJ}{dg}$, *d. i. um die Bildung der Coefficienten der quadratischen Gleichung* (26).

Durch Differentiation der Gleichungen (33^a) nach g erhält man:

$$(34^a) \qquad r\frac{dp}{dg} = -\frac{1+\varpi^2}{1-q^2}\,p^2, \qquad \varrho\frac{d\varpi}{dg} = -\frac{1+p^2}{1-q^2}\,\varpi^2;$$

und in analoger Weise findet man aus (33^b):

$$(34^b) \qquad 2\frac{da}{dg} = -\frac{1+p^2}{p^2}\,r\frac{dp}{dg} = -\frac{1+\varpi^2}{\varpi^2}\,\varrho\frac{d\varpi}{dg}\,.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (34^a) respective mit den aus (33^b) entspringenden Relationen:

$$\frac{2a}{r} = \frac{1-p^2}{p}\,, \qquad \frac{2a}{\varrho} = \frac{1-\varpi^2}{\varpi}\,,$$

so ergiebt sich:

$$(35^a) \quad 2a\frac{dp}{dg} = -\frac{(1+\varpi^2)(1-p^2)p}{1-q^2}\,, \qquad 2a\frac{d\varpi}{dg} = -\frac{(1+p^2)(1-\varpi^2)\varpi}{1-q^2}\,.$$

Ferner folgt aus (34^b) mit Rücksicht auf (34^a):

$$(35^b) \qquad 2\frac{da}{dg} = +\frac{(1+p^2)(1+\varpi^2)}{1-q^2}\,.$$

Endlich ist nach (14^d): $q = p\varpi$; so dass also der Differentialquotient $\frac{dq}{dg}$ ausdrückbar ist durch $\frac{dp}{dg}$ und $\frac{d\varpi}{dg}$. Somit erhält man unter Benutzung der Formeln (35^a):

*) Neumann l. c. p. 29.

$$(35^c) \qquad 2a\frac{dq}{dg} = -2q\,.$$

Wir gehen nunmehr über zu den Grössen L, H, J. Der Ausdruck L (17) kann folgendermassen umgestaltet werden:

$$L = 2a\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{p^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} = 2a\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(p^{2n+1}\,q^{(2n+1)i}\right),$$

$$= 2a\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(q^i p\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(q^{2ni}p^{2n}\right)\right),$$

$$= 2a\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{q^i p}{1-q^{2i}p^2}\,.$$

In solcher Weise erhält man aus (17) im Ganzen folgende Formeln:

$$(36)\qquad \begin{cases} L = 2a\cdot\sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\dfrac{q^i p}{1-q^{2i}p^2}, \qquad J = 2a\cdot\sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\dfrac{q^i\varpi}{1-q^{2i}\varpi^2}\,. \\ H = 2a\cdot\sum\limits_{i=0}^{i=\infty}\dfrac{q^{i+1}}{1-q^{2i+2}} = 2a\cdot\sum\limits_{j=1}^{j=\infty}\dfrac{q^j}{1-q^{2j}}\,. \end{cases}$$

Differenzirt man nun den ersten dieser Ausdrücke, nämlich L nach der Entfernung g, so findet man mit Rücksicht auf ($35^{a,\,b,\,c}$) und nach einigen Reductionen:

$$(\alpha)\qquad \frac{dL}{dg} = -2\cdot\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(\frac{q^i p}{(1-q^{2i}p^2)^2}f_i\right);$$

hier hat f_i die Bedeutung:

$$(\beta)\qquad f_i = \left(i - p^2\,\frac{1-q^{2i}}{1-q^2}\right) + \left(i\,q^{2i}p^2 - q^2\,\frac{1-q^{2i}}{1-q^2}\right),$$

und kann daher auch so dargestellt werden:

$$(\gamma)\qquad f_i = \sum_{k=1}^{k=i}\left(1-p^2\,q^{2(i-k)}\right) + \sum_{k=1}^{k=i}\left(q^{2i}p^2 - q^{2k}\right),$$

oder auch so:

$$(\delta)\qquad f_i = \sum_{k=1}^{k=i}\left(1-q^{2k}\right)\left(1-p^2\,q^{2(i-k)}\right).$$

Substituirt man diesen Werth für f_i in die Formel (α), und beachtet man, dass dieses f_i, wie aus (β) folgt, *für* $i=0$ *verschwindet*, so ergiebt sich:

$$(37)\qquad \frac{dL}{dg} = -2\cdot\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{q^i p}{(1-q^{2i}p^2)^2}\sum_{k=1}^{k=i}\left(1-q^{2k}\right)\left(1-p^2q^{2i-2k}\right)\right);$$

denn in Folge des eben genannten Verschwindens kann als untere

Grenze der Summe $i = 1$ (statt des früheren $i = 0$) genommen werden.

Offenbar ergiebt sich für den Ausdruck J (36) ein analoges Resultat; nämlich:

$$(38)\quad \frac{dJ}{dg} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i \varpi}{(1 - q^{2i}\varpi^2)^2} \sum_{k=1}^{k=i} (1 - q^{2k})(1 - \varpi^2 q^{2i-2k}) \right).$$

Endlich erhält man aus (36) für den Differentialquotienten von H nach g den Werth:

$$\frac{dH}{dg} = - \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \left(2i(1+q^{2i}) - (1+p^2)(1+\varpi^2) \frac{1-q^{2i}}{1-q^2} \right);$$

und hieraus folgt nach einigen Umformungen:

$$(39)\quad \frac{dH}{dg} = - \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \cdot \sum_{k=1}^{k=i} (1 - p^2 q^{2i-2k})(1 - \varpi^2 q^{2k-2}) \right)$$
$$- \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \cdot \sum_{k=1}^{k=i} (1 - q^{2i-2k})(1 - q^{2k}) \right).$$

Die Formeln (37), (38), (39) lassen, wenn man Rücksicht nimmt auf die Bemerkungen (15), sofort erkennen,

(40) dass die Differentialquotienten $\frac{dL}{dg}$, $\frac{dJ}{dg}$, $\frac{dH}{dg}$ stets *negativ* sind.

Durch eine weitere Transformation lassen sich die Differentialquotienten (17); (18), (19) in eine für unsere Zwecke bequemere Gestalt versetzen. Um diese Transformationen darlegen zu können, betrachten wir zuvörderst die beiden Ausdrücke:

$$(a)\quad \Phi = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i \xi}{(1-q^{2i}\xi^2)^2} \sum_{k=1}^{k=i} (1 - q^{2k})(1 - \xi^2 q^{2i-2k}) \right),$$

$$(b)\quad \Psi = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{q^i}{(1-q^{2i})^2} \sum_{k=1}^{k=i} (1 - p^2 q^{2i-2k})(1 - \varpi^2 q^{2k-2}) \right),$$

wo in dem erstern ξ einen beliebigen ächten Bruch vorstellen soll. Vertauscht man in Φ und Ψ die Reihenfolge der Summationen, so wird:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left((1 - q^{2k})\, \xi \cdot \sum_{i=k}^{i=\infty} \frac{q^i (1 - \xi^2 q^{2i-2k})}{(1 - \xi^2 q^{2i})^2} \right),$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left((1 - \varpi^2 q^{2k-2}) \cdot \sum_{i=k}^{i=\infty} \frac{q^i (1 - p^2 q^{2i-2k})}{(1 - q^{2i})^2} \right).$$

Entwickelt man jetzt die Ausdrücke $\frac{1}{(1-\xi^2 q^{2i})^2}$ und $\frac{1}{(1-q^{2i})^2}$ mit Hülfe der bekannten Formel $\frac{1}{(1-\alpha)^3} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1)\alpha^s$, vertauscht man sodann die Summationen nach i und s, und bringt man endlich die Summation nach i zur wirklichen Ausführung, so erhält man:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{k=\infty}\left((1-q^{2k})\,\xi\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\,\xi^{2s}\left[\frac{q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\xi^2 q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+3}}\right]\right),$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^{k=\infty}\left((1-\varpi^2 q^{2k-2})\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\left[\frac{q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+1}} - \frac{p^2 q^{(2s+1)k}}{1-q^{2s+3}}\right]\right).$$

Wird nunmehr Vertauschung vorgenommen zwischen den Summationen nach k und s, und die Summation nach k zur Ausführung gebracht, so ergiebt sich:

$$(\mathrm{a}')\quad \Phi = \sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\left[\frac{\xi^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\xi^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\right]\left[\frac{q^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{q^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\right],$$

$$(\mathrm{b}')\quad \Psi = \sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\left[\frac{p^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{p^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\right]\left[\frac{\varpi^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \frac{\varpi^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\right].$$

Substituirt man in Φ, (a), (a′) für ξ die Grössen p und ϖ, so erhält man die Ausdrücke für $\frac{dL}{dg}$ (37) und $\frac{dJ}{dg}$ (38). Substituirt man ferner daselbst $\xi = 1$, so erhält man die *zweite* Zeile des Ausdrucks für $\frac{dH}{dg}$ (39); während die *erste* Zeile desselben durch Ψ, (b), (b′) dargestellt ist. Somit ergiebt sich:

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dg} = -2\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\,Y_s Z_s\,, \\[2ex] \dfrac{dJ}{dg} = -2\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\,\mathrm{H}_s Z_s\,, \\[2ex] \dfrac{dH}{dg} = -1\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(s+1)\,(\mathrm{H}_s Y_s + Z_s^2)\,, \end{cases}$$

wo Y_s, H_s, Z_s die Bedeutungen haben:

$$(42)\qquad \begin{cases} Y_s = \dfrac{p^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \dfrac{p^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\,, \\[2ex] \mathrm{H}_s = \dfrac{\varpi^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \dfrac{\varpi^{2s+3}}{1-q^{2s+3}}\,, \\[2ex] Z_s = \dfrac{q^{2s+1}}{1-q^{2s+1}} - \dfrac{q^{2s+3}}{1-q^{2s+3}} = \dfrac{1}{1-q^{2s+1}} - \dfrac{1}{1-q^{2s+3}}\,. \end{cases}$$

§ 4.

Fortsetzung. Untersuchung der Wurzeln der quadratischen Gleichung.

Wie bereits bemerkt (15), sind p, ϖ, q positive ächte Brüche. Mit Rücksicht hierauf folgt aus (42) sofort,

(43) dass die Grössen Y_s, H_s, Z_s sämmtlich *positiv* sind; auch lässt sich nachweisen, dass zwischen diesen Grössen, je nachdem $r > \varrho$ oder $r = \varrho$ ist, folgende Relationen stattfinden:

$$Y_s > \mathsf{H}_s > Z_s \text{ für } r > \varrho\,,$$
$$Y_s = \mathsf{H}_s > Z_s \text{ für } r = \varrho\,.$$

Um diesen Nachweis zu führen, sind die Differenzen $Y_s - \mathsf{H}_s$ und $\mathsf{H}_s - Z_s$ einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen.

Setzt man zur Abkürzung $2s + 1 = n$, so folgt aus (42):

$$Y_s - \mathsf{H}_s = \frac{p^n - \varpi^n}{1 - q^n} - \frac{p^{n+2} - \varpi^{n+2}}{1 - q^{n+2}},$$

oder was dasselbe ist:

$$Y_s - \mathsf{H}_s = \frac{(1-p^2)(1-\varpi^2)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\left(\frac{p^n(1-\varpi^{2n+2})}{1-\varpi^2} - \frac{\varpi^n(1-p^{2n+2})}{1-p^2}\right);$$

und hieraus folgt:

$$Y_s - \mathsf{H}_s = \frac{(1-p^2)(1-\varpi^2)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\sum_{k=0}^{k=n} F,$$

wo F die Bedeutung hat:

$$\begin{aligned} F &= p^n\varpi^{2k} - \varpi^n p^{2k}\,,\\ &= (p\varpi)^{2k}(p^{n-2k} - \varpi^{n-2k})\,,\\ &= (p\varpi)^n(\varpi^{2k-n} - p^{2k-n})\,. \end{aligned}$$

Nun ist offenbar:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} F + \sum_{k=s+1}^{k=n} F,$$

oder, wenn man für F seinen Werth (bald in dieser, bald in jener Gestalt) substituirt:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s}(p\varpi)^{2k}(p^{n-2k} - \varpi^{n-2k}) + \sum_{k=s+1}^{k=n}(p\varpi)^n(\varpi^{2k-n} - p^{2k-n})\,.$$

Beachtet man, dass $p\varpi = q$ ist, und substituirt man in der zweiten Summe rechter Hand an Stelle von k einen anderen Index k', mit k verbunden durch die Relation $k + k' = 2s + 1 = n$, so erhält man:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} q^{2k}(p^{n-2k} - \varpi^{n-2k}) + \sum_{k'=0}^{k'=s} q^n(\varpi^{n-2k'} - p^{n-2k'})\,.$$

Schreibt man endlich k für k', so folgt durch Zusammenziehung der beiden Summen:

$$\sum_{k=0}^{k=n} F = \sum_{k=0}^{k=s} q^{2k}(1-q^{n-2k})(p^{n-2k}-\varpi^{n-2k}).$$

Wir erhalten daher schliesslich:

$$(44)\quad Y_s - \mathrm{H}_s = \frac{(1-p^2)(1-\varpi^2)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\cdot\sum_{k=0}^{k=s} q^{2k}(1-q^{n-2k})(p^{n-2k}-\varpi^{n-2k}),$$

wo n zur Abkürzung steht für $2s+1$. — Aus dieser Formel (44) folgt mit Rücksicht auf (15) sofort, dass die Differenz $Y_s - \mathrm{H}_s$ stets positiv ist, oder (genauer ausgedrückt), dass sie positiv oder null sein wird, je nachdem p grösser oder gleich ϖ ist. Mit andern Worten: wir erkennen,

dass $Y_s > \mathrm{H}_s$ ist für $r > \varrho$,
und dass $Y_s = \mathrm{H}_s$ ist für $r = \varrho$.

Somit ist die Behauptung (43) *erwiesen, insoweit dieselbe auf Y_s und H_s Bezug hat.*

Setzt man wiederum $2s+1=n$, so folgt aus (42):

$$\mathrm{H}_s - Z_s = \frac{\varpi^n - q^n}{1-q^n} - \frac{\varpi^{n+2}-q^{n+2}}{1-q^{n+2}},$$

oder was dasselbe ist:

$$\mathrm{H}_s - Z_s = \frac{(1-q)(1-\varpi)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\left(\varpi^n(1+\varpi)\frac{1-q^n}{1-q} - q^n(1+q)\frac{1-\varpi^n}{1-\varpi}\right);$$

und hieraus folgt:

$$\mathrm{H}_s - Z_s = \frac{(1-q)(1-\varpi)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\cdot\sum_{k=0}^{k=n-1} F,$$

wo F einen Ausdruck repräsentirt, der (mit Rücksicht auf die Relation $p\varpi = q$) in folgenden verschiedenen Gestalten dargestellt werden kann

$$\begin{aligned} F &= \varpi^n(1+\varpi)q^k - q^n(1+q)\varpi^k, \\ &= \varpi^n q^k\left[(1+\varpi)-(1+q)\left(\frac{q}{\varpi}\right)^n\left(\frac{\varpi}{q}\right)^k\right], \\ &= \varpi^n q^k[(1+\varpi)-(1+q)p^{n-k}]. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher schliesslich:

$$(45)\quad \mathrm{H}_s - Z_s = \frac{(1-q)(1-\varpi)}{(1-q^n)(1-q^{n+2})}\cdot\sum_{k=0}^{k=n-1}\varpi^n q^k[(1+\varpi)-(1+q)p^{n-k}],$$

wo n zur Abkürzung steht für $2s+1$. — Aus dieser Formel folgt mit Rücksicht auf (15) sofort, dass die Differenz $\mathrm{H}_s - Z_s$ jederzeit positiv und von Null verschieden sein wird, einerlei ob $p > \varpi$ oder $p = \varpi$ ist. Es ergiebt sich also die Relation:

$$\mathsf{H}_s > Z_s \text{ als gültig für } r > \varrho\,, \quad \text{und auch für } r = \varrho\,,$$

Somit ist die Behauptung (43) *erwiesen, insofern dieselbe auf* H_s *und* Z_s *Bezug hat.*

Aus den Formeln (41) folgt augenblicklich:

$$2\,\frac{dH}{dg} - \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right) = -\,2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1)(Y_s - Z_s)(\mathsf{H}_s - Z_s)\,;$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf die Relationen (43):

$$(46) \qquad 2\,\frac{dH}{dg} - \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right) < 0\,.$$

Andererseits folgt aus der Bemerkung (40):

$$(47) \qquad 2\,\frac{dH}{dg} + \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right) < 0\,.$$

Aus diesen beiden Formeln (46) und (47) erkennt man, dass die Grösse $2\,\frac{dH}{dg}$ ihrem *absoluten Betrage* nach höher steht als die Grösse $\left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right)$; so dass man also schreiben kann:

$$(48) \qquad 4\left(\frac{dH}{dg}\right)^2 > \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right)^2.$$

Nun ist aber bekanntlich für zwei beliebig gegebene reelle Grössen α und β jederzeit $(\alpha + \beta)^2 \geqq 4\,\alpha\,\beta$; folglich wird:

$$(49) \qquad \left(\frac{dL}{dg} + \frac{dJ}{dg}\right)^2 \geqq 4\,\frac{dL}{dg}\,\frac{dJ}{dg}\,.$$

Aus (48) und (49) resultirt endlich:

$$(50) \qquad \left(\frac{dH}{dg}\right)^2 > \frac{dL}{dg}\,\frac{dJ}{dg}\,;$$

und hieraus endlich folgt, dass die beiden Wurzeln x', x'' *der zu untersuchenden quadratischen Gleichung* (26) *in der That stets reell sind; w. z. z. w.*

Petersburg, Juni 1873.