

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1874

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0007

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0025

LOG Titel: Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. (Avec deux planches lithographiées)

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre*).

Par H. G. ZEUTHEN à Copenhague.

(Avec deux planches lithographiées.)

I. Définitions, propriétés connues ou évidentes.

1. Nous appelons *branche complète* la partie d'une courbe plane qui peut être parcourue d'une manière continue par un point qui, après en avoir passé une fois tout point fixe, revient au point de départ. En ne nous occupant ici que de propriétés projectives, nous ne regardons pas comme interruption de la continuité le passage par l'infini, si seulement le point mobile a la même direction limite en s'éloignant à l'infini et en en retournant.

Il y a**) deux espèces de branches complètes: les branches d'ordre pair, que toute droite rencontre en un nombre pair de points, et les branches d'ordre impair, que toute droite rencontre en un nombre impair de points. — Une branche d'ordre pair rencontre tante autre branche complète en un nombre pair de points, mais deux branches d'ordre impair se rencontrent en un nombre impair de points. — Une branche d'ordre pair sans points multiples, divise le plan en deux parties, dont l'une qui renferme des branches d'ordre impair s'appelle *l'externe*, l'autre qui n'en renferme aucune s'appelle *l'interne*.

Note. Il n'est pas nécessaire de sortir du plan pour prouver ces propriétés connues des branches complètes. Désignons par a une branche complète, par A et M un point fixe et un point mobile de cette branche. Si l'on prend le point A pour point de départ du mouvement de M , un des deux segments déterminés sur la droite infinie AM par les deux points A et M , commencera par être nul, pendant que l'autre est la droite entière. La même chose aura lieu au retour

*) Une *partie* des résultats de cette recherche ont été publiés dans les *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences* 28 juillet 1873, et dans un mémoire inséré au *Tidsskrift for Mathematik* 1873.

**) Voir v. Staudt: *Geometrie der Lage*.

de M à A . Il se présente ici deux cas différents: 1° celui où le segment qui commence par être nul finit par être nul, et 2° celui où ce segment finit par être la droite entière.

Désignons par b une autre branche complète dans le même plan. Toutes les fois que le point mobile M passe un point d'intersection avec la branche b , un des points d'intersection de la droite AM et de la branche b , passe de l'un des segments de AM à l'autre. Comme le segment AM qui commence par être nul commence par n'avoir aucun point d'intersection avec la branche b , on voit que le nombre des points d'intersection de a et b est pair au impair suivant que ce segment AM finit par rencontrer b en un nombre pair ou impair de points. S'il finit par être nul il finira, comme il commençait, par n'avoir aucun point d'intersection avec b : alors la branche a rencontre toute autre branche (y compris les droites) en un nombre pair de points. S'il finit par être la droite entière AM , la branche a rencontre, premièrement, toute droite en un nombre impair de points, et ensuite on voit qu'elle rencontre aussi toute autre branche douée de cette même propriété, qui caractérise les branches d'ordre impair, en un nombre impair de points.

Si la branche a , que nous supposons dénuée de points multiples, est d'ordre pair, si A est un point fixe placé au dehors de la branche, et M un point qui se meut sans la passer jamais, les nombres de points d'intersection avec a qui se trouvent sur les deux segments de AM restent, pendant tout le mouvement de M , pairs ou impairs. Dans le dernier cas on ne peut parvenir de M à A sans passer la branche. On voit ainsi qu'elle divise le plan en deux parties. Comme deux branches d'ordre impair se rencontrent toujours, il est impossible qu'il peut y en avoir dans toutes les deux parties séparées par une branche d'ordre pair. Mais on peut prouver qu'il y en a dans l'une. En effet, on peut construire une série de branches complètes (c), voisines à la branche donnée a et à une droite (branche d'ordre impair) b , qui ne rencontrent pas a et qui aient le même nombre d'intersections avec une autre droite que celle-ci a avec a et b . Ce nombre étant impair, il faut qu'une des branches (c) soit d'ordre impair.

2. Une courbe algébrique sans points multiples, ne peut avoir plus d'une branche d'ordre impair. Si la courbe est d'ordre pair toutes ses branches complètes sont d'ordre pair, si elle est d'ordre impair l'une de ses branches est d'ordre impair, les autres d'ordre pair.

Une courbe du quatrième ordre (*quartique*) a, au plus, quatre branches externes l'une à l'autre, ou deux branches dont l'une se trouve dans la partie du plan interne à l'autre, et, dans ce dernier cas, la branche interne ne peut avoir des tangentes doubles ou d'inflexion.

Car, s'il en était autrement on pourrait construire des coniques rencontrant la courbe en plus de 8 points, ou des droites la rencontrant en plus de 4 points.

3. Une tangente double *réelle* d'une *quartique* peut être 1° une tangente double d'une seule branche, 2° une droite tangente à la courbe en deux points imaginaires, et 3° une tangente commune à deux branches différentes. Dans le premier cas les *points de contact ne peuvent être séparés par les points d'intersection avec deux autres tangentes doubles*; car l'une ou l'autre de celles-ci rencontrerait alors la courbe en un point différent de ses points de contact. La même chose a lieu, évidemment, si les points de contact sont imaginaires. Dans ces deux cas nous appelons les tangentes doubles *tangentes doubles de la première espèce*, respectivement à *contacts réels* et à *contacts imaginaires*. Les tangentes communes à des branches différentes s'appellent *tangentes doubles de la seconde espèce*.

4. Une tangente double de la première espèce à contacts réels, se trouve en entier dans la partie du plan externe à la branche qu'elle touche; car, s'il en était autrement elle rencontrerait la quartique en deux points différents des points de contact. La branche a entre les points de contact un arc rentrant, dont une partie, limitée par deux points d'inflexion, tourne sa convexité vers la partie interne du plan. Réciproquement, tout arc tournant sa convexité vers la partie interne du plan, occasionne une tangente double de la première espèce à contacts réels. On voit ainsi que *le nombre d'inflexions réelles d'une quartique, est égal au double du nombre de ses tangentes doubles de la première espèce à contacts réels*.

II. Nombre de tangentes doubles de la première espèce.

5. *Le nombre de tangentes doubles de la première espèce d'une quartique quelconque sans points multiples, est égal à quatre.*

Nous commencerons par prouver que *deux quartiques quelconques sans points multiples ont le même nombre de tangentes doubles de la première espèce*. Placées dans un même plan, les deux courbes déterminent un faisceau, où elles séparent deux séries de quartiques réelles*): les déformations infiniment petites que subissent successivement la courbe variable du faisceau dans l'une ou l'autre de ces séries, constituent une déformation finie, qui conduit de l'une des courbes données à l'autre. Il suffit donc de démontrer qu'aucune de ces déformations infiniment petites n'altère le nombre de tangentes doubles de la première espèce.

*) Nous appelons ici réelle toute courbe dont l'équation ne contient que des coefficients réels.

On peut s'imaginer deux manières dont ce nombre pourrait être altéré: 1° si deux tangentes doubles de la première espèce coïncident pour devenir ensuite imaginaires, ou réciproquement, ou 2° si des tangentes doubles de première espèce se transforment en tangentes doubles de seconde espèce, où réciproquement. La seule manière dont deux tangentes doubles d'une quartique peuvent coïncider, c'est si elle a un point double; car une quartique ne peut avoir, ni des tangentes triples, ni des tangentes doubles dont un des contacts soit du second ordre. Si une tangente double de première espèce à contacts réels se transforme en une tangente double de seconde espèce il faut que la branche tangente à la tangente double se divise en deux. Au moment de transition la courbe a un point double à branches réelles. Il n'existe aucune transition immédiate*) de tangentes doubles réelles à contacts imaginaires, à des tangentes doubles de seconde espèce.

Nous n'aurons donc à nous occuper que des transitions de la courbe variable du faisceau par les *courbes réelles données d'un point double*, et il sera permis de négliger les cas où d'autres singularités s'ajoutent au point double (tels que celui où la courbe a deux points doubles, ou un point d'inflexion coïncide avec le point double etc.). En effet, on peut éviter ces cas, qui ne se présentent que dans les faisceaux dont les constantes satisfont à des équations particulières, en disposant des positions des deux courbes données, ou en faisant subir à celles-ci des déformations assez légères pour n'affecter pas le nombre dont il s'agit — ce qui est possible, parceque les courbes données n'ont pas elles-mêmes des points doubles.

Un point double peut être réel ou imaginaire, et, dans le premier cas, avoir des branches réelles ou imaginaires. Notre faisceau ne contient aucune courbe réelle douée d'un *point double imaginaire*; car alors elle en aurait deux. Les deux tangentes doubles qui se confondent en une tangente menée d'un *point isolé*, sont de la seconde espèce; car un point isolé résulte du resserrement d'une branche qui va s'évanouir, ou il est le commencement d'une branche qui va naître. Dans le cas enfin d'un *point double à branches réelles**)*, les tangentes doubles de première espèce qui vont être imaginaires ou tangentes doubles de seconde espèce ont des contacts réels, et il n'y en a pas dont les contacts aillent être en même temps imaginaires, ou réciproquement. On doit donc prouver que le nombre de tangentes doubles de première

*) En des cas particuliers les deux transitions suivantes peuvent avoir lieu à la fois: 1° celle de tangente double à contacts imaginaires à tangente double d'une seule branche, et 2° celle à tangente double de seconde espèce. La dernière transition demande un point double.

**) On trouvera dans les n° 17. et suiv. une discussion de ce cas plus détaillée que nécessaire pour la démonstration actuelle.

espèce à contacts réels, reste inaltéré dans cette transition. Ce nombre est (n° 4.) la moitié de celui des inflexions réelles. Or, chacune des deux tangentes au point double est la position limite de trois tangentes d'inflexion, dont une seule est réelle soit avant soit après la transition par la courbe à point double*), et cette courbe singulière n'a pas d'autres tangentes d'inflexion coïncidentes. Donc, le nombre d'inflexions réelles ne subit aucune altération, et, par conséquent, le nombre dont il s'agit ni non plus.

Le nombre des tangentes doubles de première espèce d'une quartique sans points singuliers, a donc une valeur constante. Pour savoir quelle est cette valeur il suffit de connaître les tangentes doubles d'une seule courbe. Or la courbe qui a servi à Plücker d'exemple d'une quartique présentant 28 tangentes doubles réelles en a quatre qui sont de la première espèce. Donc etc.

Nous ajouterons à la démonstration dont nous nous sommes servis la remarque suivante. Un faisceau de quartiques ne contient pas en général d'autres courbes singulières**) — c'est à dire des courbes qui ont d'autres points ou tangentes singuliers qu'une courbe quelconque du faisceau — que celles qui ont un point double, et celles dont deux tangentes d'inflexion, coïncidant avec une tangente double, forment une tangente à contact du troisième ordre. Par ces tangentes doubles singulières se fait la transition de tangentes doubles de première espèce à contacts réels, à des tangentes doubles à contacts imaginaires. C'est donc seulement le nombre total des tangentes doubles de première espèce qui reste constant, et non pas ceux des deux classes de ces tangentes doubles.

6. Deux branches d'une quartique externes l'une à l'autre ont quatre tangentes communes, placées comme celles de deux coniques externes l'une à l'autre. Une cinquième, s'il y en avait, rencontrerait nécessairement la courbe en des points différents des points de contact, ce qui est impossible. Comme une quartique a 4, 3, 2, 1, 0 branches externes l'une à l'autre, elle aura 24, 12, 4, 0 tangentes doubles de seconde espèce. Le nombre total des tangentes doubles réelles sera donc 28, 16, 8, 4.

*) On le voit en faisant une figure; mais j'en ai aussi montré la raison algébrique dans les n°s 10—11 d'un Mémoire intitulé: *Almindelige Egenskaber . . . Recherche des propriétés générales des Systèmes de Courbes Planes*, suivie d'une application à la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires du 4^{me} ordre (imprimé avec un Résumé en français dans les Mémoires de l'Académie danoise des Sciences, Ser. V, Vol. 10).

**) La première et la troisième partie du Mémoire que je viens de citer contiennent des recherches sur les courbes singulières d'un système.

Plücker avait présumé*), et plus tard d'autres savants ont-ils prouvé (voir dans ce qui suit le n° 18.), que le nombre de tangentes doubles réelles ne peut avoir d'autres valeurs que 28, 16, 8, 4, 0; nous voyons ici qu'il faut aussi exclure le cas dernier.

Le nombre total des tangentes doubles de la première espèce d'une quartique étant égal à quatre, celui des tangentes doubles de la première espèce à contacts réels est au plus quatre. On voit donc qu'une quartique ne peut avoir plus de 8 inflexions réelles.

III. Propriétés des tangentes doubles de première espèce.

7. La propriété principale des tangentes doubles de première espèce est celle que nous avons déjà mentionnée (n° 3.), que tous les points d'intersection d'une de ces tangentes doubles avec les autres tangentes doubles de la quartique, se trouvent sur un seul des deux segments limités par les points de contact. En ayant égard à cette propriété on peut déduire les autres des propriétés générales des tangentes doubles.

On sait, par exemple, que toute tangente double d'une quartique est rencontrée par 27 des 63 systèmes de coniques ayant quatre contacts avec la quartique en des séries de couples en involution, et qu'à chacune de ces séries appartiennent le couple formé des points de contact, et cinq couples formés des points d'intersection avec dix autres tangentes doubles. Si la tangente double dont il s'agit est de la première espèce, on voit que toutes ces 27 involutions ont des points doubles réels. Mais nous n'insisterons pas à d'autres propriétés des tangentes doubles de la première espèce, que celles dont nous aurons à faire usage dans la classification des formes différentes des quartiques. C'est de ces propriétés que nous allons nous occuper.

8. Si les côtés d'un triangle ABC sont des tangentes doubles d'une quartique, $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$ étant les points de contact, on sait, suivant le théorème de Carnot, que

$$\frac{BD_1 \cdot BD_2}{CD_1 \cdot CD_2} \cdot \frac{CE_1 \cdot CE_2}{AE_1 \cdot AE_2} \cdot \frac{AF_1 \cdot AF_2}{BF_1 \cdot BF_2} = \pm 1.$$

Aux cas où l'on sait seulement que le premier membre de cette équation est positif, on voit qu'il a la valeur de $+1$, et que, par conséquent, les six points de contact se trouvent sur une même conique.

Or $\frac{BD_1 \cdot BD_2}{CD_1 \cdot CD_2} \leq 0$, suivant que B et C séparent D_1 et D_2 ou non. Par conséquent, si, dans le triangle formé de trois tangentes doubles d'une quartique, aucun des couples de points de contact n'est séparé

*) Theorie der algebraischen Curven p. 253.

par les sommets du triangle, ou si deux couples sont séparés, les six points de contact se trouvent sur une même conique.

On trouve en particulier que *les points de contact de trois tangentes doubles de première espèce se trouvent sur une même conique*, et que *du même les points de contact d'une tangente double de seconde espèce, et ceux de deux tangentes doubles de première espèce qui ne séparent pas les points de contact de la tangente double de seconde espèce, se trouvent sur une conique*.

9. Si, de quatre couples de points, toutes les combinaisons à trois se trouvent sur des coniques, les quatre coniques ainsi déterminées coïncident. En effet, si l'on désigne par $\varphi = 0$ une de ces quatre coniques, et par $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ les droites dont les points d'intersection avec φ font trois des quatre couples, les autres coniques seront représentées par des équations des formes suivantes :

$$yz + a\varphi = 0,$$

$$zx + b\varphi = 0,$$

$$xy + c\varphi = 0,$$

où a , b et c sont des constantes. Toutes ces coniques doivent passer par les points du quatrième couple. Ces deux points doivent, par conséquent, satisfaire aux équations

$$ax \cdot \varphi = by \cdot \varphi = cz \cdot \varphi,$$

ce qui est impossible à moins que φ passe par un de ces points. Mais alors φ coïncide avec les trois autres coniques $C \cdot F \cdot D$.

En appliquant ce lemme aux tangentes doubles de première espèce, on voit que *tous les points de contact des tangentes doubles de la première espèce d'une quartique se trouvent sur une conique*. Ce théorème montre de nouveau que le nombre des tangents doubles de première espèce est au plus quatre (mais non pas qu'il a toujours cette valeur).

10. Le lemme du n° 9. nous fournit encore le théorème suivant:

Aucun des triangles formés de trois tangentes doubles) de première espèce ne peut renfermer deux branches externes l'une à l'autre.*

En effet, s'il y en avait deux dans un seul triangle les points de contact des quatre tangentes communes aux deux branches se trouveraient (selon les n° 8 et 9.) sur la conique passant par les points de contact des tangentes doubles de première espèce. Cette conique rencontrerait ainsi la quartique en plus de 8 points, ce qui est impossible.

*) Trois droites forment, dans la géométrie projective, quatre triangles. Quatre droites forment trois quadrilatères et quatre triangles. Chaque segment, fait sur une des droites par les autres, est à la fois côté d'un quadrilatère et d'un triangle. Deux quelconques des droites contiennent des côtés consécutifs de deux quadrilatères, et des côtés opposés du troisième.

On conclut du théorème prouvé que toutes les branches de la courbe doivent se trouver, soit dans les trois quadrilatères, soit dans les quatre triangles, formés des quatre tangentes doubles de première espèce, et qu'aucune de ces sept parties du plan ne contient deux branches externes l'une à l'autre. Car un quadrilatère quelconque ajouté à un triangle quelconque, fait un triangle limité par trois tangentes doubles de première espèce.

IV. Énumération des formes des quartiques sans points multiples.

11. Quant à sa forme une quartique appartient toujours (selon les nos 2. et 10.) à une des trois classes suivantes :

Quartiques composées de deux branches dont l'une se trouve dans la partie du plan interne à l'autre. Nous appelons ces courbes, qui sont toujours renfermées dans un seul quadrilatère ou triangle*), *quartiques annulaires*.

Quartiques composées de trois branches, au plus, distribuées dans les trois quadrilatères. Nous appelons ces courbes *quartiques quadrilatérales*.

Quartiques composées de quatre branches, au plus, distribuées dans les quatre triangles. Nous appelons ces courbes *quartiques triangulaires*.

On aura des divisions ultérieures des quartiques en ayant égard, 1° au nombre des tangentes doubles de première espèce à contacts réels, et à la distribution de ces tangentes doubles aux différentes branches, ou 2° au nombre des branches réelles. Nous ne ferons usage que de la première de ces deux bases de division. Toutefois il sera clair qu'au moins les branches ayant des tangentes doubles de première espèce sont réelles.

12. Il s'agit notamment de se rendre compte des différentes positions que peut prendre la conique φ qui passe par les 8 points de contact des tangentes doubles de la première espèce. Comme tous ses deux points d'intersection avec une des droites, si elle en a de réels, se trouvent sur un seul des trois segments de la droite, elle pénètre, au plus, dans $r + 1$ de sept parties du plan si elle a des intersections réelles avec r des quatre droites. Cette considération nous montrera l'impossibilité de quelques cas qui se présentent (voir III., IV. et VII. dans l'énumération suivante).

*) Nous désignons ici et dans ce qui suit, par les seuls mots de „quadrilatères“ et „triangles“ les trois quadrilatères et les quatre triangles que forment les tangentes doubles de première espèce. Nous y appliquerons aussi le nom commun de „parties du plan“.

I. *La conique φ rencontre tous les côtés d'un quadrilatère.* Elle pénètre alors dans ce quadrilatère et dans les quatre triangles.

II. *La conique φ rencontre trois côtés d'un quadrilatère et un côté d'un autre.* Elle pénètre alors dans ce quadrilatère et dans trois des triangles; elle rencontre deux côtés de l'un de ceux-ci.

III. *La conique φ rencontre deux côtés de deux quadrilatères.* On ne peut avoir des côtés opposés de tous les deux quadrilatères (voir la note du n° 10.), ni non plus des côtés consécutifs de tous les deux quadrilatères. En effet, dans ce dernier cas la conique pénétrerait dans six parties du plan (les deux quadrilatères et tous les quatre triangles, ce qu'on voit sans difficulté au moyen d'une figure). Il ne reste donc que le cas où les côtés de l'un des quadrilatères sont opposés, eux de l'autre consécutifs. Alors la conique pénètre seulement dans quatre parties du plan: les deux quadrilatères et deux triangles; elle rencontre aussi deux côtés de chacun de ceux-ci.

IV. *La conique φ rencontre deux côtés d'un quadrilatère, et un côté de chacun des deux autres.* On apercevra sans difficulté que les deux côtés du premier quadrilatère sont opposés, que la conique pénètre dans les trois quadrilatères et dans deux triangles, et qu'elle rencontre tous les trois côtés de l'un de ceux-ci.

V. *La conique φ rencontre trois côtés d'un quadrilatère.* Elle pénètre alors dans ce quadrilatère et dans trois triangles.

VI. *La conique φ rencontre deux côtés opposés d'un quadrilatère et un côté d'un autre.* Elle pénètre alors dans les deux quadrilatères et dans deux triangles, et elle rencontre deux côtés de l'un de ceux-ci.

VII. *La conique φ rencontre deux côtés consécutifs d'un quadrilatère, et un côté du quadrilatère où les côtés, segments des mêmes tangentes doubles que les deux côtés du premier quadrilatère, sont opposés.* Elle pénètre alors dans les deux quadrilatères et dans deux triangles, et elle rencontre deux côtés de l'un de ceux-ci.

VIII. *La conique rencontre les trois côtés d'un triangle (un côté de chacun des quadrilatères).* Elle pénètre dans le triangle et dans les trois quadrilatères.

IX et X. *La conique φ rencontre deux côtés, soit opposés, soit consécutifs, d'un quadrilatère.* Elle pénètre dans le quadrilatère et dans deux triangles.

XI. *La conique φ rencontre deux côtés d'un triangle.* Elle pénètre dans le triangle et dans deux quadrilatères.

XII. *La conique φ rencontre un côté d'un quadrilatère (triangle).* Elle pénètre dans le quadrilatère et dans le triangle.

XIII. *La conique φ ne rencontre aucune des quatre droites.*

On voit sans difficulté que toutes les positions de φ , énumérées ici, sont possibles.

13. En indiquant les quartiques annulaires, quadrilatérales et trilatérales qui correspondent aux positions de la conique φ définies dans le n° précédent, nous aurons une énumération des différentes formes des quartiques qui sera, du moins, *complète*. Nous montrerons qu'elle n'est pas *trop étendue*, en donnant des exemples de toutes les formes énumérées.

Nous appellerons, dans notre énumération, *r-folium* une branche d'ordre pair, douée de r tangentes doubles de première espèce. Une branche d'ordre pair, sans aucune tangente double de première espèce ($r = 0$), s'appelle un ovale (quand même elle rencontre la droite à l'infini). Les nombres indiqués pour des ovales ne sont que des *maxima*; seulement une quartique annulaire deviendrait quadrilatérale ou trilatérale, si son ovale interne cessait d'être réel. Les nombres I., II. etc. indiquent, suivant le n° précédent, les positions des points de contact des tangentes doubles de première espèce. L'indication de ces positions fait une partie essentielle de la définition de chaque forme.

I.

1) Quartique annulaire, composée d'1 *quadrifolium* et d'1 ovale interne. (Fig. 1.)

2) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *quadrifolium* et de 2 ovales. (Courbe 1 de la fig. 2.)

3) Quartique trilatérale, composée de 4 *unifolia*. (Courbe 2 de la fig. 2.)

II.

4) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *trifolium*, d'1 *unifolium* et d'1 ovale. (Courbe 1 de la fig. 3.)

5) Quartique trilatérale, composée d'1 *bifolium*, de 2 *unifolia* et d'1 ovale. (Courbe 2 de la fig. 3.)

III.

6) Quartique quadrilatérale, composée de 2 *bifolia* et d'1 ovale. (Courbe 1 de la fig. 4.)

7) Quartique trilatérale, composée de 2 *bifolia* et de 2 ovales. (Courbe 2 de la fig. 4.)

IV.

8) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *bifolium* et de 2 *unifolia*. (Courbe 1 de la fig. 5.)

9) Quartique trilatérale, composée d'1 *trifolium*, d'1 *unifolium* et de 2 ovales. (Courbe 2 de la fig. 5.)

V.

10) Quartique annulaire, composée d'1 *trifolium* et d'1 ovale interne.

11) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *trifolium* et de 2 ovales.

12) Quartique trilatérale, composée de 3 *unifolia* et d'1 ovale.

VI. et VII.

13) et 15) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *bifolium*, d'1 *unifolium* et d'1 ovale.

14) et 16) Quartique trilatérale, composée d'1 *bifolium*, d'1 *unifolium* et de 2 ovales.

VIII.

17) Quartique annulaire, composée d'1 *trifolium* et d'un ovale interne.

18) Quartique quadrilatérale, composée de 3 *unifolia*.

19) Quartique trilatérale, composée d'1 *trifolium* et de 3 ovales.

IX. et X.

20) et 23) Quartique annulaire, composée d'1 *bifolium* et d'1 ovale interne.

21) et 24) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *bifolium* et de 2 ovales.

22) et 25) Quartique trilatérale, composée de 2 *unifolia* et de 2 ovales.

XI.

26) Quartique annulaire, composée d'1 *bifolium* et d'1 ovale interne.

27) Quartique quadrilatérale, composée de 2 *unifolia* et d'1 ovale.

28) Quartique trilatérale, composée d'1 *bifolium* et de 3 ovales.

XII.

29) et 30) Quartique annulaire, composée d'1 *unifolium*, placé, soit dans un quadrilatère, soit dans un triangle, et d'1 ovale interne.

31) Quartique quadrilatérale, composée d'1 *unifolium* et de 2 ovales.

32) Quartique trilatérale, composée d'1 *unifolium* et de 3 ovales.

XIII.

33) et 34) Quartique annulaire, composée d'un ovale, placé, soit dans un quadrilatère, soit dans un triangle, et un ovale interne.

35) Quartique quadrilatérale, composée de 3 ovales.

36) Quartique trilatérale, composée de 4 ovales.

Les 9 premières de ces différentes formes suffiront à donner une idée assez claire de la variété des formes des quartiques; car les autres n'en sont que les simplifications qu'on trouve si les contacts d'une ou plusieurs tangentes doubles deviennent imaginaires. Plusieurs de ces

dernières formes ne diffèrent entre elles que par la position, peu essentielle, de tangentes doubles à contacts imaginaires.

V. Démonstration de l'existence de toutes les formes énumérées.

14. On sait qu'une quartique quelconque peut être représentée par une équation de la forme

$$(1) \quad xyz u + k \varphi^2 = 0,$$

où $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$ sont quatre tangentes doubles dont les points de contact se trouvent sur une même conique $\varphi = 0$. Comme $xyz u$ change son signe toutes les fois que le point représenté franchit une des quatre tangentes doubles, cette quantité a un signe différent, suivant que le point se trouve dans un des quadrilatères ou dans un des triangles que forment ces quatre droites. Supposons, pour fixer les idées, que $xyz u < 0$ si le point se trouve dans un des quadrilatères, et que $xyz u > 0$ s'il se trouve dans un des triangles. Alors tous les points de la quartique représentée par l'équation (1) se trouveront dans un des quadrilatères si $k > 0$, dans un des triangles, si $k < 0$. Nous voyons ainsi que l'une des deux propriétés des quatre tangentes doubles de première espèce dont nous avons parlé à la fin du n° 10., est une propriété générale de quatre tangentes doubles dont les points de contact sont placés sur une conique.

Si les tangentes doubles sont de la première espèce il faut que la conique φ ait une des 13 positions énumérées dans le n° 12.; mais cette condition ne suffit pas. Cependant, on peut prouver que, pour ces positions de φ , si k diffère peu de zéro, la courbe est une quartique quadrilatérale ou trilatérale ayant x , y , z , u pour tangentes doubles de première espèce.

En effet, si $k = 0$ l'équation (1) représentera une courbe composée des quatre tangentes doubles. On voit ainsi que, si k diffère très peu de zéro, la courbe doit être composée, soit d'une seule branche dans chaque quadrilatère si $k > 0$, soit d'une seule branche dans chaque triangle si $k < 0$. Alors, suivant notre supposition sur la position de φ , aucune des quatre tangentes doubles ne peut être tangente à deux branches différentes. Elles sont donc de la première espèce, et la courbe est une quartique quadrilatérale ou trilatérale suivant que $k \gtrless 0$.

Comme toutes les 13 positions de la conique φ sont possibles, nous voyons, non seulement que toutes les différentes quartiques quadrilatérales et trilatérales que nous avons énumérées existent, mais aussi que leurs nombres d'ovales peuvent atteindre aux maxima que nous avons indiqués.

15. Aussi pour démontrer l'existence des quartiques annulaires nous ferons usage de l'équation (1). Commençons par supposer que

la conique φ soit tangente aux quatre droites x, y, z, u . Alors la conique φ se trouve nécessairement dans un des quadrilatères, formés par ces droites. Pour $k > 0$ le même quadrilatère contiendra une branche de la quartique, qui, aux points de contact de φ , a des contacts du 3^{me} ordre avec les droites x, y, z, u , et qui reste par conséquent, au voisinage de ces points de contact, dans la partie du plan externe à la conique. Comme ces points sont les seuls où elle rencontre φ , elle entoure cette conique. Or on peut déterminer k ainsi que la quartique (1) passe par un point quelconque interne à la conique φ . Ce point appartient nécessairement à une branche de la courbe déterminée interne à celle dont nous venons de parler. La courbe est donc une quartique annulaire.

En faisant subir à une des quartiques annulaires qu'on trouve ainsi (où l'ovale interne ne se réduit pas à un point isolé) des altérations assez petites, pour que l'ovale interne ne s'évanouisse, ni ne se confonde avec la branche externe, on peut obtenir des exemples de toutes les quartiques annulaires, renfermées dans un quadrilatère, dont nous avons parlé. Il suffit de remplacer les tangentes x, y, z, u de la conique φ , par d'autres droites très voisines qui n'y sont plus tangentes.

Quant aux quartiques annulaires renfermées dans un triangle, on procède de la même manière, en commençant seulement du cas où φ est renfermée dans un des triangles formés par x, y, z, u , et tangente à ses côtés.

16. L'existence des 36 formes énumérées est donc démontrée; mais nous croyons bon de regarder encore, dans un certain cas, les variations d'une courbe du faisceau que représente l'équation (1)

$$xyz u + k\varphi^2 = 0,$$

si k est un paramètre variable. Le cas auquel nous nous bornons est celui où φ rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère, formé par x, y, z, u , en des points placés ainsi que le faisceau contienne des quartiques annulaires. Nous supposons que la valeur de k croisse de 0 par ∞ à 0.

Pour $k = 0$, la courbe est composée de quatre droites; elle a donc six points doubles à branches réelles.

Pour de petites valeurs positives de k , la courbe est une quartique quadrilatérale (forme 2) douée de deux ovales réels. Pour des valeurs croissantes de k , ces ovales doivent disparaître, avant que la courbe devienne une quartique annulaire. Au moment de la disposition ils se réduisent à des points isolés. Il y a donc, dans cette série de quartiques quadrilatérales, faisant partie du faisceau, deux courbes douées

d'un point isolé (ou, en particulier, une courbe douée de deux points isolés).

La transition aux quartiques annulaires (forme 1) se fait par une courbe composée d'un *quadrifolium* et d'un point isolé interne. Ce point est le commencement d'un ovale interne, qui croît, jusqu'à ce qu'il se confond avec le quadrifolium, qui l'entoure, et qui s'est retréci jusqu'à présent. La courbe de transition est douée d'un point double à branches réelles.

Après cette transition, on rencontre une nouvelle série de quartiques quadrilatérales consistant en un seul *quadrifolium*, qui se retrécit de plus en plus, jusqu'à ce qu'il se divise en deux branches, puis en trois et enfin en quatre branches. Chacune de ces trois divisions se fait par une courbe présentant un point double à branches réelles. Les courbes à deux branches ont seulement deux des droites x, y, z, u pour tangentes doubles de première espèce, les courbes à trois branches, une, et, pour les courbes à quatre branches, toutes ces quatre tangentes doubles sont de la seconde espèce. Ces trois séries de courbes du faisceau peuvent présenter de différentes formes; on peut, *par exemple*, en rencontrer la suite suivante: quartiques trilatérales composées de deux *bifolia* (forme 7 sans ovales), puis quartiques quadrilatérales composées d'un *bifolium* et de deux *unifolia* (forme 8), et enfin quartiques trilatérales composées de quatre *unifolia* (forme 3). Quelque que soit du reste cette suite, qui peut consister en plus de trois formes différentes, on finira toujours, pour des valeurs de k croissant à l'infini, par trouver les courbes composées de quatre *unifolia* dont nous venons de parler; car, pour $k = \infty$, la courbe du faisceau se réduit à la conique double φ^2 ayant pour sommets*) les huit points d'intersection avec les droites x, y, z, u , et, par conséquent, pour de très grandes valeurs positives de k , elle doit être composée de quatre branches, qui tendent à couvrir deux fois les quatre arcs de la conique φ qui se trouvent dans le *quadrilatère*.

Dès que le paramètre k , après avoir été infini, prend des valeurs négatives, la courbe du faisceau, venant de couvrir deux fois les quatre arcs de φ qui se trouvent dans les *triangles*, devient de nouveau une quartique trilatérale composée de quatre *unifolia*; mais à présent les droites x, y, z, u en sont les tangentes doubles de la première espèce. Elle garde cette forme, jusqu'à ce qu'elle coïncide, pour $k = 0$, avec les quatre droites fixes.

Nous avons vu que la courbe du faisceau qui correspond à $k = 0$ a 6 points doubles. Elle compte donc pour 6 courbes du faisceau

*) On appelle *sommet* un point d'une courbe singulière d'un système qui a la propriété que toute droite passant par lui est tangente à la courbe.

douées de points doubles. Nous avons encore rencontré, dans le faisceau, 7 courbes réelles douées de points doubles; trois de ces points sont isolés, quatre ont des branches réelles. Il y a enfin dans le faisceau une conique double. Or on peut prouver*) qu'il y a, en général, dans un faisceau de quartiques 27 courbes douées de points doubles, mais qu'une conique double en absorbe 14. Nous voyons donc qu'il n'y a pas, dans le faisceau actuel, à côté des courbes réelles que nous avons nommées, des courbes imaginaires douées de points doubles.

VI. Quartiques douées de points doubles.

17. Les résultats que nous avons trouvés en étudiant les formes des quartiques générales, sont aussi applicables aux cas limites où les courbes présentent des points singuliers.

Seulement, on doit se rendre compte du nombre des tangentes doubles de la première espèce qui prennent alors des positions particulières. Si nous nous bornons aux courbes douées de points doubles, nous aurons à nous occuper séparément des espèces suivantes de points doubles: 1^o *points isolés*, 2^o *points de connexion de deux branches dont l'une est interne à l'autre*, 3^o *points de connexion de deux branches, externes l'une à l'autre*, 4^o *points d'intersection des deux parties d'une branche qui se divise en deux branches d'ordre impair*, 5^o *points doubles imaginaires*.

18. Un point isolé n'est qu'un ovale infiniment petit, et les tangentes qu'on peut en mener aux autres branches de la courbe sont, nous l'avons dit dans le n^o 5., des positions limites de tangentes doubles de la seconde espèce.

Une courbe présentant des points isolés est toujours une forme limite de courbes présentant (au moins) le même nombre d'ovales**); mais nous étant bornés, quant à la réalité des ovales des différentes formes, à en indiquer le nombre *maximum*, nous ne discuterons, ni non plus, combien de ces ovales peuvent se réduire, à la fois, à des points isolés.

19. Par un point de connexion de deux branches dont l'une est interne à l'autre ne passe aucune droite réelle qui est tangente à la courbe en un autre point. Une courbe présentant de ces points doubles, comme une courbe présentant des points isolés, garde donc toutes ses quatre tangentes doubles de première espèce. Les différentes formes de ces courbes sont des limites de quartiques annulaires; elles n'ont donc

*) Voir mon Mémoire déjà cité sur les *Systèmes de Courbes* p. 83.

**) Nous ne parlons pas ici de points isolés formés par la coïncidence de plusieurs points doubles en cuspidaux.

pas d'autres branches que celles que joignent ces points singuliers. Il n'est pas difficile de prouver que, réciproquement, toute forme de quartiques annulaires, présentant r tangentes doubles à contacts réels, conduit à des courbes douées de $1, 2 \dots r$ des points doubles dont nous nous occupons. S'il y a plus d'un de ces points on peut aussi les regarder comme des points de connexion de branches externes l'une à l'autre et jointes d'une manière cyclique (voir le n° suivant). Il n'existe pas des quartiques qui aient à la fois des points de connexion de deux branches dont l'une est interne à l'autre, et d'autres points doubles.

20. Un point de connexion de deux branches externes l'une à l'autre, a la propriété, qui le distingue des points dont nous venons de parler, d'être centre d'un faisceau qui contient, soit des droites qui rencontrent encore en deux points la branche unique composée des deux branches qui forment le point double, soit des droites qui ne la rencontrent qu'en ce point. Les premières de ces droites sont séparées des dernières par deux droites tangentes à la branche dont il s'agit en des points différents du point double. Si l'on regarde la courbe comme limite de courbes où les deux branches sont séparées, chacune de ces deux tangentes est à la fois la position limite d'une tangente double de première espèce, et d'une tangente commune aux deux branches. Les tangentes menées du point double aux autres branches de la courbe sont des positions limites de tangentes doubles de seconde espèce. On voit donc que les tangentes menées du point double absorbent deux tangentes doubles de première espèce. La courbe en a donc encore deux.

On aurait aussi pu considérer la courbe comme limite de courbes dont une seule branche tend à se diviser en deux. Alors toutes les tangentes menées du point double sont des limites de tangentes doubles imaginaires, pendant que les deux tangentes communes aux deux branches sont des limites de tangentes doubles de première espèce.

Si une quartique a plusieurs points de connexion de branches externes l'une à l'autre, et qu'on la regarde comme limite de courbes où ces branches sont séparées, on voit — de la même manière, à peu près, que dans les cas où il n'y avait qu'un seul de ces points — que chacun de ces points doubles est position limite de points de contact de deux tangentes doubles de première espèce. Il s'ensuit que, pour déduire les formes de quartiques douées de ces points des formes de quartiques générales, énumérées dans le n° 13., il faut seulement faire passer la conique φ par des points d'intersection des tangentes doubles de première espèce, ou faire coïncider deux de ces tangentes doubles (à contacts réels). Dans ce dernier cas la courbe est composée de deux branches liées par deux points doubles d'une manière cyclique, c'est à dire ainsi qu'elles divisent la partie du plan externe à elles en

deux parties. Alors on peut aussi regarder la courbe comme composée de deux branches d'ordre pair qui se rencontrent en deux points. — Deux branches peuvent aussi avoir deux points de connexion sans être liées d'une manière cyclique. Cela arrivera si la conique ϕ passe par deux sommets opposés d'un quadrilatère: alors deux branches des quartiques quadrilatérales, limites des formes 2, 4 et 6 de l'énumération au n° 13., forment une seule branche complète d'ordre pair, qui passe deux fois par chacun des sommets du quadrilatère, et qui rencontre toute droite en deux ou quatre points. — Si deux tangentes doubles de première espèce à contacts réels coïncident, en même temps que la conique ϕ passe par le point d'intersection des deux autres, on obtient une courbe dont les deux branches, liées d'une manière cyclique, ont encore un troisième point de connexion: Ces deux branches forment une seule branche complète d'ordre pair à trois points doubles, qui rencontre toute droite en deux ou quatre points. — Trois branches peuvent être liées, *soit* les deux à la troisième par deux points de connexion, *soit* les deux entre elles (d'une manière non cyclique) par deux points de connexion, et la troisième à une d'elles par un troisième point de connexion, *soit* d'une manière cyclique par trois points de connexion. Dans tous ces trois cas les trois branches en forment une seule. — Quatre branches peuvent être liées, *soit* d'une manière successive par trois points de connexion, *soit* les trois à la quatrième par trois points de connexion. Les quatre branches en forment une seule. — Pour compléter ces considérations on pourrait regarder aussi des quartiques composées de deux coniques.

Une courbe ayant des points de connexion de branches externes l'une à l'autre peut avoir, en même temps, des points isolés.

21. *Deux branches d'ordre impair dont se compose une branche d'ordre pair* d'une quartique ont la propriété de rencontrer toute droite en un ou en trois points. Comme, de plus, le nombre total des intersections d'une droite avec les deux branches est au plus quatre, ces deux branches ne se rencontrent qu'en un seul point, qui est un *point double* de la quartique, et le faisceau de droites par ce point double se divise en quatre parties, dont les deux contiennent des droites rencontrant encore en deux points l'une ou l'autre des deux branches, les deux autres, qui séparent les deux premières, des droites qui ne rencontrent des deux branches qu'au point double. Les limites de ces quatre parties du faisceau sont quatre droites tangentes aux deux branches en des points différents du point double. Deux de ces tangentes se trouvent dans l'une, et deux, dans l'autre des deux parties du plan séparées par les deux branches. Si la branche composée est la limite d'une série de branches d'ordre pair ordinaires, l'une des deux parties du plan devient externe, l'autre interne. Les deux tangentes

qui se trouvent dans la partie externe sont les positions limites des quatre tangentes doubles de première espèce, les deux tangentes dans la partie interne sont les limites de quatre tangentes imaginaires, qui vont être tangentes doubles de la première espèce, si, par la courbe singulière, il se fait une transition à des courbes où les parties externe et interne du plan sont changées entre elles.

On voit ainsi qu'une branche d'ordre pair qui tend à se diviser en deux branches d'ordre impair a quatre tangentes doubles de première espèce à contacts réels, et, par conséquent, 8 inflexions. Chacune des deux branches d'ordre impair a donc 3 inflexions réelles, ce qui est aussi, comme pour la branche d'ordre impair d'une cubique, une conséquence de la circonstance qu'elles rencontrent toute droite en un ou trois points.

Une quartique douée d'une des branches composées qui nous occupent peut avoir encore une seule branche, qui est nécessairement un ovale. Celui-ci peut être joint à un des branches d'ordre impair par un point double, ou se réduire à un point isolé. On peut obtenir toutes ces formes en assujétissant des quartiques composées d'une cubique et d'une droite qui n'en rencontre que la branche d'ordre impair en un seul point à des petites altérations. Pour les déduire des formes générales du n° 13., il faut faire coïncider les tangentes doubles de première espèce deux à deux, et faire passer la conique φ par leur point d'intersection.

22. Si une quartique réelle est douée de *deux points doubles imaginaires* quatre tangentes doubles coïncident avec la droite réelle qui joint ces deux points singuliers. On peut donc regarder la quartique comme courbe de transition de courbes où deux de ces tangentes doubles sont réelles à des courbes où elles sont imaginaires: alors les deux autres passeront en même temps de l'imaginaire au réel. En effet, comme le nombre de tangentes doubles de première espèce doit rester constant, il faut que la courbe variable en reprenne autant qu'elle perd. Or les tangentes doubles qui coïncident, au moment de transition, avec la droite joignant les deux points doubles sont de la première espèce tant qu'elles sont réelles, leurs points de contact étant imaginaires. Par conséquent, comme deux d'entre elles sont réelles avant, et imaginaires après la transition, il faut que les deux autres se comportent de la manière inverse. On voit ainsi que *la droite joignant les deux points doubles imaginaires absorbe deux tangentes doubles de la première espèce*. La courbe singulière en a donc encore deux.

On peut déduire les différentes formes de quartiques douées de deux points doubles imaginaires des formes 23—36 de quartiques gé-

nérales énumérées dans le n° 13., en faisant coïncider deux tangentes doubles de première espèce à contacts imaginaires. Comme, dans ce cas, la différence des triangles et des quadrilatères cesse, on obtient ainsi chaque forme deux fois. On voit que la courbe est renfermée dans deux triangles qui ont pour base commune un segment de la droite joignant les deux points doubles, pendant que leurs deux autres côtés sont des segments différents des deux tangentes doubles de première espèce, et qu'aucun de ces deux triangles ne contient des branches externes l'une à l'autre. La quartique peut avoir un point isolé ou un point de connexion de deux branches, mais aucun des points doubles dont nous avons parlé au n° 21.

VII. Applications à l'étude des surfaces du troisième ordre.

23. M. Geiser, dans son intéressant mémoire sur les tangentes doubles d'une quartique*), a montré qu'il est possible d'inscrire à un cône quelconque du quatrième ordre des surfaces du troisième ordre qui passent par le sommet du cône. On prend pour plan tangent z de la surface cubique en ce point un des 28 plans tangents doubles du cône. Si $\varphi_2 = 0$ est l'équation d'un cône du second ordre passant par les génératrices de contact de ce plan, l'équation du cône quartique est de la forme

$$z\varphi_3 - \varphi_2^2 = 0.$$

On voit donc que l'équation

$$\varphi_3 + 2\varphi_2u + u^2z = 0,$$

où $u = 0$ est un plan qui ne passe pas par le sommet, représente une surface cubique inscrite au cône.

Si le cône quartique donné et son plan tangent double z sont réels, il suffit, pour trouver une surface cubique réelle, de prendre pour φ_2 et u un cône et un plan réels. Or, nous avons prouvé que toute quartique plane a au moins quatre tangentes doubles réelles; un cône quartique a donc au moins quatre plans tangents doubles réels. On voit ainsi qu'il est toujours possible d'inscrire à un cône quartique réel des surfaces cubiques réelles. Par conséquent, on peut appliquer à toute quartique plane des résultats déduits de propositions sur les surfaces cubiques, lors même que, dans ces propositions, on a égard à la réalité.

24. Nous pouvons, en nous servant d'un procédé réciproque à celui dont nous venons de parler, appliquer quelques-uns des résultats relatifs aux quartiques planes que nous avons trouvés, à l'étude des surfaces cubiques.

*) Mathematische Annalen I.

Nous avons vu (n° 6.) que le nombre total des tangentes doubles d'une quartique a toujours une des valeurs suivantes 28, 16, 8, 4. Or, les plans tangents doubles des cônes circonscrits à une surface cubique, et ayant pour sommets des points de la surface, sont 1° le plan tangent de la surface au sommet, et 2° les plans qui joignent le sommet aux droites de la surface. On voit ainsi qu'une surface cubique contient 27, 15, 7, 3 droites réelles, résultat trouvé par M. Schläfli*).

Nous avons vu, de plus, que le nombre des tangentes doubles de première espèce d'une courbe quartique est toujours égal à quatre. Si on prend pour sommets de cônes circonscrits à une même surface cubique différents points de cette surface, tous ces cônes auront les mêmes nombres totaux de plans tangents doubles. Ils auront, par conséquent, aussi les mêmes nombres de plans tangents doubles de seconde espèce, c'est à dire de plans tangents communs à deux nappes complètes. [Nous appelons nappe complète d'un cône la partie du cône qui projette une branche complète d'une courbe plane.] *Le cône circonscrit à une surface cubique douée de 27, 15 ou 7 droites réelles (1^{re}, 2^{me}, 3^{me} species de M. Schläfli), et ayant un point de la surface pour sommet, sera donc composée de 4, 3, 2 nappes complètes externes l'une à l'autre.*

Le cône circonscrit à une cubique douée de 3 droites réelles ne consistera qu'en 1 ou 0 nappes ou en 2 dont l'une est interne à l'autre. Dans ce cas la surface peut être composée d'une nappe d'ordre pair et d'une nappe d'ordre impair (4^{me} species), ou seulement d'une nappe d'ordre impair (5^{me} species**). Une droite menée d'une nappe d'ordre pair d'une surface cubique ne peut être tangente à la nappe d'ordre impair; mais d'un point d'une nappe d'ordre impair on peut toujours mener des tangentes, soit à cette même nappe, soit à la nappe d'ordre pair s'il y en a, et ces tangentes doivent appartenir à de différentes nappes du cône. On voit ainsi qu'un cône quartique circonscrit à une surface cubique de la 4^{me} species, n'a aucune nappe réelle si le sommet se trouve sur la nappe d'ordre pair de la surface, mais une nappe interne à une autre si le sommet se trouve sur la nappe d'ordre impair de la surface.

Un cône quartique circonscrit à une surface cubique de la 5^{me} species consiste en une seule nappe. En effet, suivant une remarque que

*) Quart. Math. Journal vol. II, et Philosophical Transactions vol. 153, 1863.

**) C'est M. Klein qui a montré que la surface est, dans ces deux cas, respectivement de la 4^{me} et de la 5^{me} species (Phys. med. Societät zu Erlangen 5 mai 1873). Nous le montrerons d'une autre manière dans le n° 26.

nous venons de faire, il a au moins une nappe. S'il avait encore une nappe interne, la surface cubique devrait se trouver soit entre les deux cônes, soit dans les parties de l'espace interne au cône interne et externe au cône externe. Dans le premier cas le sommet du cône serait un point singulier de la surface, et dans le second cas la surface aurait une nappe d'ordre pair, et serait, par conséquent, de la 4^{me} *species*.

25. Si le sommet du cône quartique est placé sur une droite réelle de la surface, cette droite devient une génératrice double du cône. Les plans tangents au cône le long de la droite sont les plans tangents de la surface aux points doubles de l'involution, formée par les couples de points de contact de la surface avec les plans passant par la droite. Cas deux plans tangents peuvent être réels ou imaginaires; dans le dernier cas la droite est génératrice isolée du cône. Par la droite passent encore les plans tangents au cône qui sont: 1^o le plan tangent à la surface au sommet du cône, et 2^o les cinq plans qui contiennent les couples de droites de la surface qui rencontrent la droite donnée. Le premier plan est réel, les autres sont réels ou imaginaires.

Comme le nombre de nappes du cône quartique circonscrit est indépendant de la position du sommet sur la surface, les cônes à génératrice double ne sont pas des formes de transition à des cônes ayant une autre connexion des nappes, mais seulement des formes limites: les mêmes nappes et les mêmes plans tangents doubles sont réels avant et après le passage du sommet de l'un côté d'une droite de la surface à l'autre*). Aux plans tangents doubles, réels avant et après le passage, appartiennent toujours le plan tangent de la surface au sommet du cône, et le plan, qui tend à coïncider avec celui-ci, passant par la droite de la surface dont il s'agit, et, par conséquent, au moins deux autres plans tangents doubles qui tendent à coïncider. On voit donc que la génératrice double ne peut être une génératrice de connexion d'une nappe avec une nappe interne, ni non plus une génératrice de connexion de deux nappes qui sont réunies avant et après le passage du sommet au delà de la droite. Mais elle peut être une génératrice isolée, ou une génératrice de connexion de deux nappes, externes l'une à l'autre, qui sont séparées avant et après le

*) Dans le système de courbes d'intersections d'un plan avec les cônes circonscrits dont les sommets se trouvent sur une courbe *C* de la surface, la courbe d'intersection avec le cône ayant pour sommet un point d'intersection de la courbe *C* avec une droite de la surface, compte pour un nombre *pair* (6) de courbes à point double.

passage, ou une génératrice d'intersection de deux nappes d'ordre impair résultant de la division d'une nappe d'ordre pair. (Voir les nos 17.—21.) Dans le dernier cas, deux (ou quatre s'il y a une nappe interne) des plans tangents réels au cône singulier qui passent par sa génératrice double sont des positions limites de plans tangents doubles imaginaires. Chacun de ces plans réels renferme donc deux droites imaginaires de la surface.

26. Ces considérations fournissent une nouvelle démonstration des théorèmes de M. Schläfli*) sur la réalité des plans des triangles formés par trois droites de la surface.

1^{re} et 2^{me} species. Aucune des 4 ou 3 nappes ne peut se diviser en deux nappes d'ordre impair (n° 21.). Un cône circonscrit dont le sommet est placé sur une des 27 ou 15 droites a donc cette droite pour génératrice isolée, ou pour génératrice de connexion de deux nappes. On voit donc que par chacune des droites réelles de la surface passent 5 (*1^{re} species*) ou 3 (*2^{me} species*) plans de triangle, et que toutes les droites de ces plans sont réelles. On trouve ainsi 45 ou 15 plans réels.

3^{me} species. Si la génératrice double d'un cône circonscrit dont le sommet est placé sur une des 7 droites de la surface, est une génératrice isolée ou génératrice de connexion de 2 nappes du cône, un seul plan de triangle passe par elle. Si, au contraire, la génératrice est droite d'intersection de deux nappes d'ordre impair, tous les 5 plans de triangle qui passent par elle sont réels, et dans 3 de ces plans toutes les droites sont réelles (voir 21.). La droite rencontre dans le premier cas seulement 2 autres droites de la surface, dans le dernier, toutes les six autres droites. Le plan d'un triangle formé par trois droites réelles, est donc rencontré par toutes les autres 4 droites en des points d'une seule de ces trois droites. On voit ainsi que *tous les plans de triangle passent par une seule droite, et qu'il y en a 5*, dont les deux contiennent des couples de droites imaginaires.

4^{me} species. Comme les cônes quartiques circonscrits n'ont plus des nappes externes l'une à l'autre, on ne trouve pas ici des cônes ayant une génératrice de connexion, ni non plus des cônes ayant une génératrice isolée; car par celle-ci, s'il y en avait, on ne pourrait mener des plans tangents réels. Les seuls cônes à génératrice double qu'on trouve ici ont une nappe composée de deux nappes d'ordre impair. Une autre nappe se trouve du côté qui devient l'interne si le sommet s'éloigne de la droite. *Par chacune des 3 droites réelles de la surface passent donc 5 plans de triangles*, dont les quatre contiennent

des couples de droites imaginaires. Il y a, en tout, 13 plans de triangle réels.

5^{me} species. Ce cas est analogue au précédent. Comme le cône n'a plus aucune nappe interne, seulement *3 plans de triangle passent par chacune des 3 droites réelles de la surface*: deux de ces 3 plans contiennent des couples de droites imaginaires. Le nombre total des plans de triangle réels est 7.

15 octobre 1873.