Ueber den grössten gemeinsamen Factor.

Von Gordan in Giessen.

Herr Brill hat (Annalen IV. Bd. S. 530) einen Determinantensatz veröffentlicht, dessen Illustration der Gegenstand dieser Untersuchung sein soll. Ich will ihn hier dazu benutzen, um einige Eigenschaften des grössten gemeinsamen Factors zweier Functionen einer Veränderlichen herzuleiten.

Der Brill'sche Satz kann folgendermassen ausgedrückt werden:

„I. Es seien:

$$rn \text{ Grössen } x_{ik} \text{ und } sn \text{ Grössen } u_{ik}$$

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rn} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{s1} & u_{s2} & \dots & u_{sn} \end{vmatrix}$$

gegeben, wo wir r und s so wählen, dass:

$$r + s = n$$

ist. Zwischen diesen n^2 Grössen mögen rs Relationen:

(1) $$u_{k1} x_{i1} + u_{k2} x_{i2} \dots\dots\dots u_{kn} x_{in} = 0$$

bestehen. Die r-reihigen Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_{1i_1} & x_{1,i_2} & \dots & x_{1,i_r} \\ x_{2,i_1} & \dots & \dots & x_{2,i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r,i_1} & \dots & \dots & x_{r,i_r} \end{vmatrix} = (i_1, i_2 \dots i_r)_x$$

des Systems der x sind alsdann den s-reihigen Determinanten

$$(k_1 k_2 \dots k_s)_u$$

des Systems der u proportional, welche ihnen der Art entsprechen, dass die Indices:

$$i_1 i_2 \dots\dots i_r k_1 \dots\dots k_s$$

eine Permutation der Zahlen:

$$1\,2 \dots n$$

bilden.“

Wir wollen aus diesem Brill'schen Satze einen andern herleiten, indem wir zunächst die sn Grössen u_{ik} durch die Coefficienten c_{ik} von r Functionen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \psi_1 = c_{1,n} x^{n-1} + c_{1,n-1} x^{n-2} \dots\dots\dots c_{11} \\ \psi_2 = c_{2,n} x^{n-1} + c_{2,n-1} x^{n-2} \dots\dots\dots c_{2,1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_s = c_{s,n} x^{n-1} + c_{s,n-1} x^{n-2} \dots\dots\dots c_{s,1}, \end{cases}$$

sodann aber die rn-Grössen x_{ik}

$$x_{i,k} = \pi_i^{k-1}$$

durch die Potenzen von r Grössen:

$$\pi_1; \quad \pi_2; \dots \pi_r$$

ersetzen. Wir erhalten durch diese Einsetzung folgenden neuen Satz:

„II. Haben die s-Gleichungen:

$$\psi_1 = 0 \dots\dots \psi_s = 0$$

die r Wurzeln:

$$\pi_1, \quad \pi_2 \dots \pi_r$$

gemein, so sind die r reihigen Determinanten $(i_1, i_2 \dots\dots i_r)_\pi$ des Potenzensystems:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \pi_1^2 & \dots & \pi_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_r & \pi_r^2 & \dots & \pi_r^{n-1} \end{vmatrix}$$

(wo $\begin{vmatrix} \pi_1^{i_1-1} & \dots & \pi_1^{i_r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_r^{i_1-1} & \dots & \pi_r^{i_r-1} \end{vmatrix} = (i_1 \dots i_r)_\pi$ gesetzt ist) den s-reihigen Determinanten $(k_1, k_2 \dots k_s)_c$ des Coefficientensystems:

$$\begin{vmatrix} c_{k_1 1} & \dots\dots\dots & c_{k_1 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k_s 1} & \dots\dots\dots & c_{k_s n} \end{vmatrix}$$

proportional, welche ihnen so entsprechen, dass:

$$i_1 i_2 \dots i_r k_1 \dots k_s$$

eine Permutation der Zahlen $1 \dots n$ ist."

Zunächst will ich den Brill'schen Satz in dieser zweiten Form dazu anwenden, um gewisse bekannte Relationen zwischen den Coefficienten und Wurzeln *einer* Gleichung herzustellen.

Die Gleichung:

$$f = a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} \dots a_0$$

möge die Wurzeln:

$$\pi_1, \quad \pi_2 \dots \pi_\mu$$

besitzen. Setzt man im Satze II. $n=\mu+1$; $r=\mu$; $s=1$ und ersetzt man ψ_1 durch f, so gelangt man zu folgendem Satze:

„III. Die Coefficienten

$$a_{i_{\mu+1}}$$

einer Gleichung $f=0$ sind den μ reihigen Determinanten $(i_1, i_2 \dots i_\mu)$ des Grössensystems:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \dots\dots\dots & \pi_1^\mu \\ 1 & \pi_2 & \dots\dots\dots & \pi_2^\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 1 & \pi_\mu & \dots\dots\dots & \pi_\mu^\mu \end{vmatrix}$$

proportional multiplicirt mit $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl der Inversionen der Permutation:

$$i_1, i_2 \dots\dots i_{\mu+1}$$

grade oder ungrade ist.“ —

Etwas verwickeltere Beziehungen zwischen den Coefficienten a und den Wurzeln π kann man folgendermassen erhalten. — Ersetzt man in dem Satze II. die Functionen ψ durch die Functionen

$$f, xf, x^2f, \dots\dots x^{\mu-1}f,$$

so gelangt man zu dem folgenden Satz:

„IV. Die μ-reihigen Determinanten $(i_1 \dots\dots i_\mu)_\pi$ des Systems der Wurzeln sind den ν-reihigen Determinanten $(i_{\mu+i} \dots\dots i_{\mu+\nu})_a$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu+1} \dots\dots & a_0 & 0 \dots\dots \\ 0 & a_\mu \dots\dots\dots & a_0 & 0 \dots \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0 \dots\dots & a_\mu \dots\dots & a_0 \end{vmatrix}$$

proportional.“

Für $\nu=1$ geht dieser Satz in den vorigen über.

Ist in dem vorigen Satze $\mu=1$, also:

$$f=a_1x+a_0$$

so werden die Determinanten des Systems:

$$1\, \pi_1\, \pi_1^2 \dots\dots \pi_1^\nu$$

denen des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots\dots\dots\dots \\ 0 & a_1 & a_0 & \dots\dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dots\dots\dots & & & a_1 \quad a_0 \end{vmatrix}$$

proportional. Hieraus lässt sich leicht der folgende Satz ableiten:

V. „Die Potenzen:

$$1\, x\, x^2 \ldots . x^\mu$$

sind den μ-reihigen Determinanten des Systems:

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & -x & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -x & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -x \end{vmatrix}$$

gleich."

Aus dem Satze IV. lassen sich Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln *mehrerer* Gleichungen ableiten.

Die Gleichungen

$$f = a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} \ldots . a_0$$
$$\varphi = b_\nu x^\nu + b_{\nu-1} x^{\nu-1} \ldots . b_0$$

mögen die Wurzeln haben:

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu; \quad \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu$$

Die Determinanten:

$$(i_1\, i_2 \ldots . i_\nu)_a \text{ und } (i_{\nu+1}\, i_{\nu+2} \ldots i_{\mu+\nu})_b$$

sind dann nach Satz IV. den Determinanten:

$$(i_{\nu+1}\, i_{\nu+2} \ldots . i_{\mu+\nu})_\alpha \text{ und } (i_1\, i_2 \ldots . i_\nu)_\beta$$

proportional, die Proportionalitätsfactoren haben die Werthe:

$$\frac{\begin{vmatrix} a_\mu & \ldots & \ldots & a_{\mu-\nu+1} \\ 0 & a_\mu & \ldots & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_\mu & \ldots & \alpha_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}} = \frac{a^\nu}{\Pi(\alpha_i - \alpha_k)} \text{ und } \frac{b_\nu^\mu}{\Pi(\beta_i - \beta_k)}$$

und man hat also die Identität:

$$\Sigma(i_1 \ldots i_\nu)_a \cdot (i_{\nu+1} \ldots . i_{\mu+\nu})_b = \frac{a_\mu^\nu\, b_\nu^\mu}{\Pi(\alpha_i - \alpha_k)\, \Pi(\beta_i - \beta_k)} \Sigma(i_1 \ldots . i_\nu)_\beta (i_{\nu+1} \ldots . i_{\mu+\nu})_\alpha \cdot$$

Nun ist nach dem Zerlegungssatz einer Determinante in Partialdeterminanten-Producte:

$$T = \begin{vmatrix} a_\mu & \ldots & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_\mu & \ldots & \ldots & a_0 & \ldots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_\mu & \ldots & \ldots & a_0 \\ b_\nu & \ldots & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & b_\nu & \ldots & \ldots & b_0 \end{vmatrix} = \Sigma_i (i_1 \ldots i_\nu)_a \cdot (i_{\nu+1} \ldots i_{\mu+\nu})_b$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{\mu+\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_\mu & \ldots & \alpha_\mu^{\mu+\nu-1} \\ 1 & \beta_1 & \ldots & \beta_1^{\mu+\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \beta_\nu & \ldots & \beta_\nu^{\mu+\nu-1} \end{vmatrix} = \Sigma_i (i_1 \ldots i_\nu)_\beta (i_{\nu+1} \ldots i_{\mu+\nu})_\alpha$$

$$= \Pi(\alpha_i - \alpha_k)\,\Pi(\beta_i - \beta_k)\,\Pi(\alpha_i - \beta_k)$$

mithin ist:

$$T = a_\mu^\nu\, b_\nu^\mu\, \Pi(\alpha_i - \beta_k)$$

In ähnlicher Weise, wie wir so eben die Determinante T aus den Coefficienten zweier Gleichungen zusammengesetzt haben, kann man auch Determinanten aus denen von mehr Gleichungen bilden.

Wir wollen uns hier auf die Untersuchung von 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} \ldots\ldots\ldots a_0 = 0 \\ \varphi &= b_\nu x^\nu + b_{\nu-1} x^{\nu-1} \ldots\ldots\ldots b_0 = 0 \\ \psi &= c_\varrho x^\varrho + c_{\varrho-1} x^{\varrho-1} \ldots\ldots\ldots c_0 = 0 \end{aligned}$$

beschränken, und ihre Wurzeln durch:

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu;\quad \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu;\quad \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_\varrho$$

bezeichnen. Wir bilden aus ihnen das System der Formeln:

$$\begin{aligned} f &= 0; & xf &= 0; \ldots\ldots x^{N-\mu-1} f = 0 \\ \varphi &= 0; & x\varphi &= 0; \ldots\ldots x^{N-\nu-1} \varphi = 0 \\ \psi &= 0; & x\psi &= 0; \ldots\ldots x^{N-\varrho-1} \psi = 0 \end{aligned}$$

welche linear in den N Potenzen sind:

$$1,\ x,\ x^2 \ldots\ldots x^{N-1}$$

und wählen N so, dass die Anzahl unserer Formeln ebenfalls N ist, also:

$$N = N - \mu + N - \nu + N - \varrho = \frac{\mu + \nu + \varrho}{2}$$

Die Determinante unseres Systems:

$$S = \begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & a_{\mu-2} & \dots & a_0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & & 0_0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & & & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & b_{\nu-2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & b_\nu & b_{\nu-1} & \dots & b_0 \\ c_\varrho & c_{\varrho-1} & c_{\varrho-2} & \dots & c_0 & 0 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & c_\varrho & c_{\varrho-1} & \dots & c_0 \end{vmatrix}$$

kann folgendermassen transformirt werden.

Nach Satz III. sind den $(N-\mu)$-reihigen Determinanten $(i_1 i_2 \dots i_{N-\mu})_a$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & & 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

den μ-reihigen Determinanten $(i_{N-\mu+1}, i_{N-\mu+1} \dots i_N)_\alpha$ des Systems

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{N-1} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & & \alpha_2^{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_\mu & \alpha_\mu^2 & \dots & \alpha_\mu^{N-1} \end{vmatrix}$$

proportional, der Proportionalitätsfactor ist:

$$\frac{a_\mu^{N-\mu}}{\Pi(\alpha_i - \alpha_k)}.$$

Ordnet man nun S nach Producten von Unterdeterminanten der $N-\mu$ 1ten Zeilen, trägt für diese ihre Werthe ein und wendet sodann den Multiplicationssatz an, so entsteht die Formel:

$$S \cdot \Pi(\alpha_i - \alpha_k) = a_\mu^{N-\mu} \begin{vmatrix} \alpha_1^{N-\nu-1}\varphi(\alpha_1) & \alpha_1^{N-\nu-2}\varphi(\alpha_1) \dots \varphi(\alpha_1) & \alpha_1^{N-\varrho-1}\psi(\alpha_1) & \alpha_1^{N-\varrho-2}\psi(\alpha_2) \dots \psi(\alpha_2) \\ \alpha_2^{N-\nu-1}\varphi(\alpha_2) & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_\varrho^{N-\nu-1}\varphi(\alpha_\varrho) & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Ordnet man diese Determinante nach Producten von Unter-Determinanten aus den $N-\nu$ ersten und $N-\varrho$ letzten Colonnen, so wird:

$$S\,.\,\Pi(\alpha_i-\alpha_k)=a_\mu^{N-\mu}\,\Sigma\varphi(\alpha_{i_1})\varphi(\alpha_{i_2})\ldots\varphi(\alpha_{i_{N-\nu}})\psi(\alpha_{i_{N-\nu+1}})\ldots\psi(\alpha_{i_\varrho})\,.$$

$$\tau\,.\begin{vmatrix}1 & \alpha_{i_1} & \alpha_{i_1}^2 & \ldots & \alpha_{i_1}^{N-\nu-1}\\ 1 & \alpha_{i_2} & \alpha_{i_2}^2 & \ldots & \alpha_{i_2}^{N-\nu-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \alpha_{i_{N-\nu}} & \alpha_{i_{N-\nu}}^2 & \ldots & \alpha_{i_{N-\nu}}^{N-\nu-1}\end{vmatrix}\;\begin{vmatrix}1 & \alpha_{i_{N-\nu+1}} & \ldots & \alpha_{i_{N-\nu+1}}^{N-\varrho-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \alpha_{i_\varrho} & \ldots & \alpha_{i_\varrho}^{N-\varrho-1}\end{vmatrix}$$

wo die Summation sich über alle Combinationen $i_1, i_2 \ldots i_{N-\nu}$ der Zahlen $1 \ldots \mu$ erstreckt und τ das Vorzeichen $+1$ oder -1 bedeutet, ja nachdem die Permutation $i_1 \cdots i_\varrho$ eine grade oder ungrade Anzahl Inversionen besitzt.

Die Determinanten rechter Hand sind gleich Producten von Differenzen der α; hebt man dieselben gegen das Product linker Hand weg, so wird:

$$(4^a)\qquad S=a_\mu^{N-\mu}\,\Sigma_i\,\frac{\varphi(x)\cdots\varphi(\alpha_{i_{N-\nu}})\,\psi(\alpha_{i_{N-\nu+1}})\cdots\psi(\alpha_{i_\mu})}{\prod\limits_{r=1}^{1=N-\nu}\ \prod\limits_{s=N-\nu+1}^{s=\mu}(\alpha_{i_r}-\alpha_{i_s})}\,\tau\,.$$

In ähnlicher Weise kann man die beiden andern Formeln ableiten:

$$(4^b)\quad S=(-1)^{(N-1)(N-\mu)}\,b_\nu^{N-\nu}\,\Sigma_i\,\frac{\psi(\beta_{i_1})\cdots\cdots\psi(\beta_{i_{N-\varrho}})f(\beta_{i_{N-\varrho+1}})\cdots\cdots f(\beta_{i_\nu})}{\prod\limits_{r=1}^{r=N-\varrho}\ \prod\limits_{s=N-\varrho+1}^{s=\nu}(\beta_{i_r}-\beta_{i_s})}\,\tau$$

$$(4^c)\quad S=(-1)^{(N-1)\varrho}\,c_\varrho^{N-\varrho}\,\Sigma_i\,\frac{f(\gamma_{i_1})\cdots\cdots f(\gamma_{i_{N-\mu}})\,\varphi(\gamma_{i_{N-\mu+1}})\cdots\cdots f(\gamma_{i_\varrho})}{\prod\limits_{r=1}^{r=N-\mu}\ \prod\limits_{s=N-\mu+1}^{s=\varrho}(\gamma_{i_r}-\gamma_{i_s})}\,\tau\,.$$

Wir wollen nun die Voraussetzung machen, dass die Formeln f und φ die λ Wurzeln:

$$\pi_1,\ \pi_2 \ldots\ldots \pi_\lambda$$

gemeinsam haben und dass dieselben mit den Wurzeln:

$$\alpha_\mu,\ \alpha_{\mu-1}\ldots\ldots\alpha_{\mu-\lambda+1}$$

von f und:

$$\beta_\nu,\ \beta_{\nu-1}\ldots\ldots\beta_{\nu-\lambda+1}$$

von φ übereinstimmen, dass also die Ausdrücke:

$$f(\pi_1)\ldots f(\pi_\lambda),\quad \varphi(\pi_1)\ldots\varphi(\pi_\lambda)$$

identisch verschwinden.

Wir wollen zwei Fälle untersuchen, in denen:

$$\lambda>\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}\ \text{oder}\ \lambda=\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$$

ist. — Im ersten Falle verschwinden in der Formel (4^a) alle Glieder rechter Hand, da in der Zahlenreihe:

$$i_1,\ i_2\ldots\ldots i_{N-\nu}$$

mindestens eine der Zahlen:

$$\mu,\ \mu-1\ ..\ \mu-\lambda+1$$

vorkommt, also mindestens einer der Factoren:

$$\varphi(\alpha_{i_1})\ .....\ \varphi(\alpha_{i_{N-\nu}})$$

verschwindet. — Hieraus folgt der Satz:

VI. „Haben die Gleichungen f und φ mehr als:

$$\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$$

Wurzeln gemein, so verschwindet die Determinante S für beliebige Werthe der Coefficienten c. Es verschwinden dann die ϱ-reihigen Determinanten des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_\mu & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_\mu & a_{\mu-1} & \dots & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_\nu & b_{\nu-1} & \dots & b_0 \end{vmatrix}.$$

(Man kann diesen Satz auch direct beweisen.)

In dem zweiten Falle, wo:

$$\lambda=\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$$

ist, verschwinden alle Glieder rechter Hand, bei denen die Combination

$$i_1,\ i_2\ ....\ i_{N-\nu}$$

eine der Zahlen: $\mu,\ \mu-1,\ \mu-2\ ...\ \mu-\lambda+1$ enthält, es bleibt also nur das Glied übrig, wo die Combination:

$$i_1,\ i_2\ ...\ i_{N-\nu}$$

mit der Combination

$$1,\ 2\ ....\ N-\nu$$

übereinstimmt. Statt der Formel II. haben wir in diesem Falle die Relation:

$$S=a_\mu^{N-\mu}\,\frac{\varphi(\alpha_1)\cdots\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})\,\psi(\alpha_{N-\nu+1})\cdots\cdots\psi(\alpha_\mu)}{\prod\limits_{r=1}^{r=N-\nu}\ \prod\limits_{s=N-\nu+1}^{s=\mu}(\alpha_r-\alpha_s)}$$

oder:

$$S=a_\mu^{N-\mu}\,\frac{\varphi(\alpha_1)\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})\,\psi(\pi_1)\cdots\cdots\psi(\pi_{\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}})}{\prod\limits_{r=1}^{r=N-\nu}\ \prod\limits_{s=1}^{s=\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}}(\alpha_r-\pi_s)}. \tag{5}$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

VII. „Die Determinante S verschwindet in 2 Fällen:

1. Wenn f und φ mehr als $\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$ Wurzeln gemein haben.

2. Wenn f und φ $\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}$ Wurzeln gemein haben und eine dieser Wurzeln ψ befriedigt."

Der zweite Theil lässt sich sehr leicht direct nachweisen.

Die obigen Formeln geben uns die Mittel an die Hand, den grössten gemeinsamen Factor:

$$\Theta = \Theta_\lambda x^\lambda + \Theta_{\lambda-1} x^{\lambda-1} \ldots\ldots \Theta_0 = \Theta_\lambda (x-\pi_1)(x-\pi_2)\ldots(x-\pi_\lambda)$$

der Functionen f und φ zu berechnen.

Zunächst erhält man Relationen zur Bestimmung der Coefficienten Θ_i mit Hülfe des Satzes IV. Nach demselben sind die ϱ-reihigen Determinanten $(i_1, i_2 \ldots i_\varrho)_\Theta$ des Systemes:

$$\begin{vmatrix} \Theta_\lambda & \Theta_{\lambda-1} & \ldots & \Theta_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Theta_\lambda & \ldots & \ldots & \Theta_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \Theta_\lambda & \ldots & \Theta_0 \end{vmatrix}$$

der Coefficienten der Formeln:

$$(6^a) \qquad \Theta = 0; \quad x\Theta = 0 \ldots\ldots x^{\varrho-1}\Theta = 0$$

den $N-\varrho$-reihigen Determinanten $(i_{\varrho+1} \ldots i_N)$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \ldots\ldots & \pi_1^{N-1} \\ 1 & \pi_2 & \ldots\ldots & \pi_2^{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \pi_{N-\varrho} & \ldots\ldots & \pi_{N-\varrho}^{N-1} \end{vmatrix}$$

proportional. Nach Satz II. sind nun die ϱ-reihigen Determinanten $(i_1 \ldots i_\varrho)_{ab}$ des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_\mu & \ldots & \ldots & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_\nu & \ldots & \ldots & b_0 \end{vmatrix}$$

der Formeln:

$$(6^b) \quad f=0;\ xf=0 \ldots x^{N-\mu-1}f=0;\ \varphi=0;\ x\varphi=0 \ldots\ldots x^{N-\nu-1}\varphi=0$$

gleichfalls den Determinanten $(i_{\varrho+1} \cdots i_N)_\pi$ proportional, mithin auch den Determinanten $(i_1 \ldots i_\varrho)_\Theta$. Aus diesen Proportionen lassen sich die Grössen Θ bestimmen. Man kann diese Relationen auch daraus folgern, dass das Formelsystem (6^b) eine lineare Folge des Systems (6^a) ist.

Um Θ direct zu berechnen, ersetze man die Gleichung $\psi = 0$ durch die Gleichung

$$x - \xi = 0,$$

die Determinante S geht durch diese Substitution in die Determinante:

$$S_1 = 0 \begin{vmatrix} a_\mu & a_{\mu-1} & a_{\mu-1} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & & & & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & & & & \cdots & a_0 \\ b_\nu & b_{\nu-1} & \cdots & b_0 & 0 & & & & & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & & & & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & & & & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & b_0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & -\xi & 0 & & & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & & & 0 & 1 & -\xi & & & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & & & & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & & & & & 1 & -\xi \end{vmatrix}$$

über. Derselbe hat nach F. (5) den Werth:

$$S_1 = a_\mu^{N-\mu} \frac{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})(\pi_1-\xi)(\pi_2-\xi)\cdots(\pi_\lambda-\xi)}{\prod(\alpha_r-\pi_s)}$$

$$(7) \qquad S_1 = \frac{(-1)^\lambda}{\Theta_\lambda} a_\mu^{N-\mu}\,\Theta(\xi)\,\frac{\varphi(\alpha_1)\cdots\cdots\varphi(\alpha_{N-\nu})}{\prod(\alpha_r-\pi_s)}$$

ist also dem grössten gemeinsamen Factor von f und φ proportional. — Man kann ihr nach Satz V. die Form geben:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} a_\mu x^\lambda + a_{\mu-1}x^{\lambda-1}\ldots a_{\mu-\lambda} & a_{\mu-1}\ldots a_0 & 0 \ldots & 0 \\ a_\mu x^{\lambda-1} \ldots\ldots a_{\mu-\lambda+1} & a_{\mu-2}\ldots a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ b_\nu x^\lambda + b_{\nu-1}x^{\lambda-1}\ldots b_{\nu-\lambda} & b_{\nu-1}\ldots b_0 & 0\ldots & 0 \\ b_\nu x^{\lambda-1}\ldots\ldots b_{\nu-\lambda+1} & b_\nu \ldots b_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_0 \end{vmatrix} = S_1.$$

Wir sind oben, um die Resultante zweier Functionen f und φ vom m^{ten} und n^{ten} Grade zu bilden, von dem Formelsystem:

$$(9) \quad f=0;\ xf=0\ldots x^{n-1}f=0;\ \varphi=0;\ x\varphi=0\ldots\ldots x^{m-1}\varphi=0$$

ausgegangen, und haben die Determinante T ihrer Coefficienten gebildet. Man kann nun, ohne den Werth T zu ändern, Combinationen dieser Formeln einführen. (Vgl. Baltzers Determinanten. 3. Aufl. S. 169.)

Wählen wir $n \geqq m$ und bezeichnen wir den Quotienten:

$$(10)\qquad F(x,y)=\frac{f(x)\,\varphi(y)-\varphi(x)\,f(y)}{x-y}=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}c_{ik}\,x^{i-1}y^{k-1},$$

so werden erstens die Coefficienten c_{ik} und c_{ki} einander gleich.

Ferner werden die Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases}\psi_1=c_{1,n-1}\,x^{n-1}+c_{1,n-2}\,x^{n-2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,c_{11}=0\\ \psi_2=c_{2,n-1}\,x^{n-1}+c_{2,n-2}\,x^{n-2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,c_{21}=0\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \psi_n=c_{n,n-1}\,x^{n-1}+c_{n,n-2}\,x^{n-2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,c_{n1}=0\end{cases}$$

Combinationen der Formeln (9) und werden wie diese durch die gemeinsamen Wurzeln:

$$\pi_1,\ \pi_2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\pi_\lambda$$

von f und φ befriedigt; endlich ist die Determinante:

$$(12)\qquad R=\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{n,1} & \dots & \dots & c_{n,n}\end{vmatrix}$$

gleich der Resultante T von f und φ.

Die Partialdeterminanten dieser Determinante sind:

$$\frac{\partial_\lambda R}{\partial c_{i_1,k_1}\,\partial c_{i_2,k_2}\cdots\partial c_{i_\lambda,k_\lambda}}=\varepsilon\begin{vmatrix}c_{i_{\lambda+1},k_{\lambda+1}} & \dots & c_{i_{\lambda+1},k_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{i_n,k_{\lambda+1}} & \dots & c_{i_n,k_n}\end{vmatrix}$$

wo $i_1\,i_2\,.\,.\,.\,.\,i_n$; $k_1\,.\,.\,.\,k_n$ irgend welche Permutationen der Zahlen $1\,.\,.\,.\,.\,n$ bedeuten und ε die Zahl $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl der Inversionen in diesen beiden Permutationen zusammen grade oder ungrade ist. — Ich will diese Partialdeterminanten durch

$$\begin{pmatrix}i_1\,i_2\,.\,.\,.\,.\,i_\lambda\\ k_1\,k_2\,.\,.\,.\,.\,k_\lambda\end{pmatrix}_c=\begin{pmatrix}k_1\,k_2\,.\,.\,.\,.\,k_\lambda\\ i_1\,i_2\,.\,.\,.\,.\,i_\lambda\end{pmatrix}_c$$

bezeichnen.

Da die Wurzeln π die Gleichungen (11) befriedigen, so folgt aus Satz II., dass die Determinanten $\begin{pmatrix}i_1\,i_2\,.\,.\,.\,i_\lambda\\ k_1\,k_2\,.\,.\,.\,k_\lambda\end{pmatrix}_c$ aus den Coefficienten der $n-\lambda$ Formeln $\psi_{k_{\lambda+1}}\,.\,.\,.\,\psi_{k_n}$ den Determinanten $(i_1 i_2\,.\,.\,.\,i_\lambda)_\pi$ (vgl. Satz II.) proportional sind, dass also der Quotient:

$$\frac{\begin{pmatrix}i_1\,i_2\,.\,.\,.\,.\,i_\lambda\\ k_1\,k_2\,.\,.\,.\,.\,k_\lambda\end{pmatrix}_c}{(i_1\,i_2\,.\,.\,.\,.\,i_\lambda)_\pi}$$

von der Indices i unabhängig ist. — Da aus dem nämlichen Grunde der Quotient:

$$\frac{\begin{pmatrix} k_1 k_2 \dots . k_\lambda \\ i_1 \; i_2 \dots . i_\lambda \end{pmatrix}_c}{(k_1 k_2 \dots . k_\lambda)_\pi}$$

von den Indices k unabhängig ist, so folgt hieraus, dass der Quotient:

$$\frac{\begin{pmatrix} i_1 \dots . i_\lambda \\ k_1 \dots . k_\lambda \end{pmatrix}_c}{(i_1 \dots .. i_\lambda)_\pi (k_1 \dots .. k_\lambda)_\pi}$$

von den Indices i und k unabhängig ist. Dieser Quotient hat den Werth:

$$(13) \qquad \frac{\begin{pmatrix} 1\,2 \dots \lambda \\ 1\,2 \dots \lambda \end{pmatrix}_c}{(1 \dots . \lambda)_\pi^2} = \frac{\begin{pmatrix} 1\,2 \dots \lambda \\ 1\,2 \dots \lambda \end{pmatrix}_c}{\Pi(\pi_\iota - \pi_k)^2} = C,$$

wir wollen ihn durch C bezeichnen und gelangen so zu dem Formelsystem:

$$(14) \qquad \begin{pmatrix} i_1 \dots . i_\lambda \\ k_1 \dots . k_\lambda \end{pmatrix}_c = C (i_1 \dots . i_\lambda)_\pi (k \dots . k_\lambda)_\pi .$$

Um diese Formeln in eine einzige zusammenzuziehen, führe ich 2λ neue Functionen ein:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= p_{1,n} x^{n-1} + p_{1,n-1} x^{n-2} \dots .. p_{11} \\
P_2(x) &= p_{2,n} x^{n-1} + p_{2,n-1} x^{n-2} \dots .. p_{21} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_\lambda(x) &= p_{\lambda,n} x^{n-1} + p_{\lambda,n-1} x^{n-2} \dots .. p_{\lambda,1} \\
Q_1(x) &= q_{1,n} x^{n-1} + q_{1,n-1} x^{n-2} \dots .. q_{11} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Q_\lambda(x) &= q_{\lambda,n} x^{n-1} + q_{\lambda,n-1} x^{n-2} \dots .. q_{\lambda,1}
\end{aligned}$$

und transformire die Determinante:

$$(15) \qquad U = \begin{vmatrix}
c_{11} \dots\dots . c_{1n} & p_{11} \dots .. p_{\lambda 1} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots \\
\dots\dots\dots & \dots\dots \\
c_{n1} \dots\dots . c_{nn} & p_{1n} \dots .. p_{\lambda n} \\
q_{11} \dots\dots . q_{1n} & 0 \dots .. 0 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots \\
\dots\dots\dots & \dots\dots \\
q_{\lambda 1} \dots\dots . q_{\lambda n} & 0 \dots .. 0
\end{vmatrix}.$$

Man kann für dieselbe leicht den Werth finden:

$$U = \Sigma \binom{i_1\, i_2 \,\ldots .\, i_\lambda}{k_1\, k_2 \ldots .\, k_\lambda}_c (i_1\, i_2 \ldots i_\lambda)_p\, (k_1\, k_2 \ldots k_\lambda)_q\,,$$

wo sich die Summe über alle Combinationen $i_1 \ldots . i_\lambda$, $k_1 \ldots . k_\lambda$ der Zahlen $1 \ldots .. n$ erstreckt. — Nach Formel (14) erhalten wir demnach:

$$(16)\quad U = C\,\Sigma_i (i_1\, i_2 \ldots i_\lambda)_\pi (i_1 i_2 \ldots i_\lambda)_p\; \Sigma_k (k_1 \ldots . k_\lambda)_p (k_1 \ldots . k_\lambda)_\pi\,.$$

Nun ist nach dem Multiplikationssatze:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_1 & \ldots . & \pi_1^{n-1} \\ 1 & \pi_2 & \ldots . & \pi_2^{n-1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & \pi_\lambda & \ldots . & \pi_\lambda^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots\ldots & p_{1,n-1} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots\ldots & p_{2,n-1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ p_{\lambda 1} & p_{\lambda 2} & \ldots\ldots & p_{\lambda,n-1} \end{vmatrix} = \Sigma_i (i_1 i_2 \ldots i_\lambda)_\pi (i_1 \ldots i_\lambda)_p$$

$$= \begin{vmatrix} P_1(\pi_1) & P_1(\pi_2) & \ldots . & P_1(\pi_\lambda) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ P_\lambda(\pi_1) & \ldots\ldots & \ldots & P_\lambda(\pi_\lambda) \end{vmatrix}$$

und ebenso:

$$\Sigma_k (k_1 \ldots k_\lambda)_\pi (k_1 \ldots k_\lambda)_q = \Sigma \pm Q_1(\pi_1) \ldots .. Q_\lambda(\pi_\lambda),$$

mithin:

$$(17)\quad U = C\,\Sigma \pm P_1(\pi_1) \ldots . P_\lambda(\pi_\lambda)\; \Sigma \pm Q_1(\pi_1) \ldots\ldots Q_\lambda(\pi_\lambda)\,.$$

Um den grössten gemeinsamen Factor:

$$\Theta(x) = \Theta_\lambda x^\lambda \ldots\ldots \Theta_0$$

zu erhalten, gehe ich von der Relation aus:

$$\Theta(x) \cdot \Pi(\pi_i - \pi_k) = \Theta_\lambda \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots\ldots & x^\lambda \\ 1 & \pi_1 & \ldots\ldots & \pi_1^\lambda \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & \pi_\lambda & \ldots\ldots & \pi_\lambda^\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \Theta_\lambda \left[(2,3 \ldots \lambda+1)_\pi - x(1,3,4 \ldots \lambda+1)_\pi \ldots\ldots . (-1)^\lambda (1,2,3 \ldots \lambda)_\pi x^\lambda \right]$$

und wende darauf die Formel (14) an. Es wird dann:

$$\frac{1}{\Theta_\lambda} C(1 \ldots\ldots \lambda)_\pi \Theta(x) \Pi(\pi_i - \pi_k)$$
$$= \binom{1 \ldots\ldots \lambda+1}{1 \ldots\ldots \lambda}_c - x \binom{1\,2 \ldots \lambda+1}{1\,2 \ldots \lambda}_c \ldots\ldots (-1)^\lambda \binom{1\,2 \ldots \lambda+1}{1\,2 \ldots \lambda}_c x^\lambda,$$

also nach Formel (13):

$$\frac{1}{\Theta_\lambda} (1 \ldots \lambda)_c (1 \ldots \lambda)_\pi \Theta(x)$$
$$= \begin{vmatrix} c_{\lambda+1,\lambda+1} x^\lambda + c_{\lambda+1,\lambda} x^{\lambda-1} \ldots\ldots c_{\lambda+1,1} & c_{\lambda+1,\lambda+2} & c_{\lambda+1,\lambda+3} \ldots\ldots c_{\lambda+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,\lambda+1} \quad x^\lambda + c_{n,\lambda} \quad x^{\lambda-1} \ldots\ldots c_{n,1} & c_{n,\lambda+2} & c_{n,\lambda+3} \quad \ldots\ldots c_{n,n} \end{vmatrix};$$

mithin stellt die Determinante rechter Hand den grössten gemeinsamen Factor von f und φ dar. In ähnlicher Weise kann man viele Determinanten bilden, welche dem Θ proportional sind, man kann alle diese Bildungen in eine einzige Formel zusammen fassen.

Um dieselbe zu erhalten, führe ich $n - \lambda = \mu$ neue Variable:

$$x_1, \; x_2 \; . \; . \; . \; x_\mu$$

ein und bilde die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 \; x_1 \; \ldots\ldots \; x_1^{n-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 \; x_\mu \; \ldots\ldots \; x_\mu^{n-1} \\ 1 \; \pi_1 \; \ldots\ldots \; \pi_1^{n-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 \; \pi_\lambda \; \ldots\ldots \; \pi_{\lambda-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \Pi(x_i - x_k) \Pi(\pi_i - \pi_k) \Pi(x_i - \pi_k) = \frac{1}{\Theta_\lambda^\mu} \Pi(x_i - x_k) \Pi(\pi_i - \pi_k) \Pi \Theta(x_i).$$

Ordnet man sie nach Producten von Partialdeterminanten, so erhält man für sie die Summe:

$$\Sigma_i \, \varepsilon (i_1 \, i_2 \ldots i_\mu)_x (i_{\mu+1} \ldots i_n)_\pi,$$

welche sich über alle Combinationen $i_1 \ldots i_\mu$ von $1 \ldots n$ erstreckt und worin ε das Vorzeichen bedeutet, welches in bekannter Weise von der Permutation der i abhängt.

So entsteht die Formel:

$$\Theta_\lambda^\mu \, \Sigma_i \, \varepsilon (i_1 \ldots i_\mu)_x (i_{\mu+1} \ldots\ldots i_n)_\pi = \Pi(x_i - x_k) \, \Pi(\pi_i - \pi_k) \, \Pi \Theta(x_i)$$

und wenn man μ neue Variable

$$y_1, y_2 \dots \dots y_\mu$$

einführt, auch:

$$\Theta_\lambda^\mu \Sigma_k \varepsilon(k_1 \dots k_\mu)_y (k_{\mu+1} \dots \dots k_n)_\pi = \Pi(y_i - y_k) \Pi(\pi_i - \pi_k) \Pi \Theta(y_i).$$

Multiplicirt man diese beiden Formeln mit einander und wendet die Formel (14) an, so wird:

$$\Theta_\lambda^{2\mu} \Sigma \varepsilon \begin{pmatrix} i_{\mu+1} & i_{\mu+2} & \dots & i_n \\ k_{\mu+1} & k_{\mu+2} & \dots & k_n \end{pmatrix}_c (i_1 \dots i_\mu)_x (k_1 \dots k_\mu)_y$$
$$= C \Pi (x_i - x_k) \Pi (y_i - y_k) \Pi (\pi_i - \pi_k)^2 \Pi \Theta(x_i) \Theta(y_i),$$

oder nach Formel (13):

$$(18) \quad \Theta_\lambda^{2\mu} \Sigma_{i,k} . (i_1 \dots i_\mu)_x (k_1 \dots k_\mu)_y \Sigma \pm c_{i_1, k_1} c_{i_2, k_2} \dots \dots c_{i_\mu, k_\mu}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \dots \lambda \\ 1 \dots \lambda \end{pmatrix}_c \Pi(x_i - x_k) \Pi(y_i - y_k) \Pi \Theta(x_i) \Theta(y_i).$$

Nun ist nach dem Multiplicationssatze:

$$\begin{vmatrix} c_{1,k_1} & c_{2,k_1} & \dots\dots & c_{n,k_1} \\ c_{1,k_2} & c_{2,k_2} & \dots\dots & c_{n,k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1,k_\mu} & c_{2,k_\mu} & \dots\dots & c_{n,k_\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots\dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots\dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_\mu & \dots\dots & x_\mu^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_i (i_1 \dots i_\mu)_x \Sigma \pm c_{i_1, k_1} c_{i_2, k_2} \dots c_{i_\mu, k_\mu} = \begin{vmatrix} \psi_{k_1}(x_1) & \psi_{k_1}(x_2) & \dots\dots & \psi_{k_1}(x_\mu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{k_\mu}(x_1) & \psi_{k_\mu}(x_2) & \dots\dots & \psi_{k_\mu}(x_\mu) \end{vmatrix}$$

und ebenso:

$$(19) \quad \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_2(x_1) & \dots\dots & \psi_n(x_1) \\ \psi_1(x_2) & & \dots\dots & \psi_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x_\mu) & \psi_2(x_\mu) & \dots\dots & \psi_n(x_\mu) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & \dots\dots & y_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & y_\mu & \dots\dots & y_\mu^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_k (k_1 \dots k_\mu)_y \Sigma \pm \psi_{k_1}(x_1) \psi_{k_2}(x_2) \dots \psi_{k_\mu}(x_\mu)$$

$$= \begin{vmatrix} F(x_1, y_1) & F(x_1, y_2) & \dots\dots & F(x_1, y_\mu) \\ F(x_2, y_1) & F(x_2, y_2) & \dots\dots & F(x_2, y_\mu) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F(x_\mu, y_1) & F(x_\mu, y_2) & \dots\dots & F(x_\mu, y_\mu) \end{vmatrix} = V,$$

mithin:

$$\Theta_\lambda^{2\mu}\, V = \binom{1\,.\,.\,.\,\lambda}{1\,.\,.\,.\,\lambda}_c \Pi(x_\iota - x_k)\, \Pi(y_i - y_k)\, \Pi\, \Theta(x_i)\, \Theta(y_i)\,.$$

Sieht man hier x_1 als variabel, die übrigen Grössen x, y als constant an, so ist der Quotient:

$$\frac{V}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3) \cdots\cdots (x_1 - x_\mu)}$$

der grösste gemeinsame Factor von f und φ.

Giessen, im October 1873.