SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1874
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0007
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0028
LOG Titel: Ueber das simultane System zweier binären cubischen Formen
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber das simultane System zweier binären cubischen Formen.

Von S. GUNDELFINGER in TÜBINGEN.

Im 57. Bande des Borchardt'schen Journals S. 375 hat Hermite zum ersten Male auf eine typische Darstellung dieses Systems aufmerksam gemacht, bei der die beiden gegebenen Formen als Differentialquotienten einer und derselben Function vierten Grades erscheinen. Clebsch hat alsdann im 67. Bande derselben Zeitschrift S. 360 und später in seiner Theorie der binären Formen (S. 221—228, 392—405) diese typische Darstellung aufs genaueste studirt und namentlich die dabei auftretenden Coefficienten durch die Invarianten des vollständigen Systemes ausgedrückt, allerdings mit Hülfe weitläufiger und künstlicher Rechnungen. In der folgenden Note sollen diese Ergebnisse übersichtlicher gruppirt und in bedeutend einfacherer Weise abgeleitet werden. Den Schluss bildet eine interessante Anwendung auf die Curven dritten Grades.

Seien

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^3 = a_x{}^3 = b_x{}^3 = \cdots$$
$$\varphi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^3 = \alpha_x{}^3 = \beta_x{}^3 = \cdots$$

die beiden gegebenen Formen und

$$R = (ab)^2 (cd) (ac) (bd)$$

die Discriminante von f. Ferner setze man R, gebildet für irgend eine lineare Combination $z_1 f + z_2 \varphi$:

$$(1) \qquad R_{z_1 f + z_2 \varphi} = z_1{}^4 R + 4 z_1{}^3 z_2 S + 6 z_1{}^2 z_2{}^2 T + 4 z_1 z_2{}^3 \Sigma + z_2{}^4 \mathrm{P} = \Phi(z_1, z_2)$$

und

$$J = (a\alpha)^3 = (f, \varphi)^3, \qquad \vartheta = (a\alpha) a_x^2 \alpha_x{}^2 = (f, \varphi) = \vartheta_x{}^4.$$

Um vollständige Uebereinstimmung mit der Bezeichnungsweise von Clebsch herbeizuführen, definiren wir endlich p, π und Ω durch die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} -\frac{4}{3}(\vartheta b)^3 \vartheta_x = p_1 x_1 + p_2 x_2 = \quad p\,, \\ \frac{4}{3}(\vartheta \beta)^3 \vartheta_x = \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 = \quad \pi\,, \\ \qquad\qquad (p_1 \pi_2 - p_2 \pi_1) = -2\,\Omega\,. \end{cases}$$

Führen wir alsdann p und π durch die Formeln (2) als neue Variabeln ein, so gehen $-8\,\Omega^3 f$ und $-8\,\Omega^3 \varphi$ in cubische Formen von p und π über, die wir beziehungsweise f' und φ' nennen wollen. Da

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}\left\{(\alpha p)\alpha_x^2 + (a\pi)a_x^2\right\} &= (\vartheta\alpha)(\vartheta a)\left\{(\vartheta a)^2 \alpha_x^2 - (\vartheta\alpha)^2 a_x^2\right\} \\ &= (\vartheta\alpha)(\vartheta a)\left\{(\vartheta a)\alpha_x + (\vartheta\alpha)a_x\right\}(\alpha a)\vartheta_x \\ &= \tfrac{1}{2}(\vartheta\vartheta')^3 \vartheta_x \vartheta'_x \equiv 0\,, \end{aligned}$$

so sind wegen der Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi'}{\partial\pi} &= \quad 4\,\Omega^2\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}p_2 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}p_1\right\} = \quad 12\,\Omega^2(\alpha p)\alpha_x^2 \\ \frac{\partial f'}{\partial p} &= -4\,\Omega^2\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}\pi_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2}\pi_1\right\} = -12\,\Omega^2(a\pi)a_x^2 \end{aligned}$$

$\frac{\partial\varphi'}{\partial\pi}$ und $\frac{\partial f'}{\partial p}$ identisch, und man hat also vermöge der Substitutionen (2) Gleichungen von der Gestalt

$$(3) \qquad -8\,\Omega^3 f = \tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial\pi} \text{ und } -8\,\Omega^3\varphi = \tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p}\,,$$

worin $F = F(\pi, p)$ eine gewisse biquadratische Form von π und p. Die Invarianten i und j dieser Form lassen sich durch Ω und J ausdrücken. Da nämlich die Covariante ϑ, sowie die Invariante J durch die lineare Transformation (2) nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante $(p\pi) = -2\,\Omega$ sich ändern, so ergiebt sich nach (3):

$$64\,\Omega^6\vartheta = \frac{1}{4^2\cdot 3^2}\left\{\frac{\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\pi}}{\partial p}\cdot\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial p}}{\partial\pi} - \frac{\partial\frac{\partial F}{\partial\pi}}{\partial\pi}\cdot\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial p}}{\partial p}\right\}(p\pi),$$

$$64\,\Omega^6(f,\varphi)^3 = \left(\tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial\pi},\ \tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p}\right)^3 (p\pi)^3,$$

oder

$$(4) \qquad 64\,\Omega^6\vartheta = \frac{2}{4^2\cdot 3^2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\pi^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial\pi}\right)^2\right\} = H_F\,,$$

$$(5) \qquad 16\,\Omega^6 J = (F, F)^4 = i_F\,,$$

Aehnlich wird nach (4) und (3)

$$-8\cdot 64\,(\vartheta, f\pi_x + \varphi p_x)^4\,\Omega^8 = (H_F, F)^4\,(p\pi)^4\,,$$

oder, weil

$$(\vartheta, f\pi_x + \varphi p_x)^4 = (\vartheta a)^3(\vartheta\pi) + (\vartheta\alpha)^3(\vartheta p) = -\tfrac{3}{4}(p\pi) + \tfrac{3}{4}(\pi p) = 3\,\Omega,$$

$$(6) \qquad -96\,\Omega^5 = (H_F, F)^4 = j_F\,.$$

Vermittelst (5) und (6) findet sich nunmehr F leicht. Bildet man nämlich die Discriminante irgend einer linearen Combination $-8\Omega^3(z_1 f + z_2\varphi)$, so unterscheidet sich diese nur um $(p\pi)^6$ von der Discriminante der in p und π cubischen Form $z_1\frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial\pi} + z_2\frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p}$. Da die letztere gleich $\frac{1}{3}j_F\,F(z_1, z_2) - \frac{1}{2}i_F H_{F(z_1, z_2)}$ *), so hat man mit Rücksicht auf (1):

$$8^4\Omega^{12}\Phi(z_1, z_2) = \left(\tfrac{1}{3}j_F F(z_1 z_2) - \tfrac{1}{2}i_F H_{F(z_1, z_2)}\right)(p\pi)^6,$$

oder, indem man die völlig willkührlichen z_1 und z_2 resp. durch π und p ersetzt,

$$(7)\qquad -8\Omega^3\Phi(\pi, p) = -8\Omega^3\Phi = 4\Omega^2 F + JH_F,$$

also auch nach bekannten Sätzen über biquadratische binäre Formen:

$$24\Omega^3 H_\Phi = -4J^2\Omega^2 F + H_F(6\Omega - J^3).$$

Durch Auflösung der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich endlich

$$(8)\qquad \begin{cases} F = \left(\frac{1}{3}J^3 + 2\Omega\right)\Phi - JH_\Phi \\ H_F = 4\left(H_\Phi - \frac{1}{3}J^2\Phi\right)\Omega^2, \end{cases}$$

so dass sämmtliche Coefficienten in F durch die fünf Invarianten R, S, $\cdot\cdot$ P und durch J und Ω ausgedrückt sind. Die zwei Relationen zwischen den sieben letzteren ergeben sich sofort, indem man die Invarianten i und j der Form $8\Omega^3\Phi$ aus (7) berechnet:

$$j_\Phi = 2J^4 + 24\Omega J$$

$$9j_\Phi = 2J^6 + 108\Omega^2 + 36\Omega J^3.$$

Ueberhaupt lässt sich, nachdem einmal F als Combination von Φ und H_Φ gefunden, ohne Mühe aus jedem Satze über binäre biquadratische Formen ein entsprechender für das vorliegende System ableiten. Als einziges Beispiel einer solchen Uebertragung führen wir hier noch die Berechnung von i_ϑ an, um daraus Schlüsse auf die Theorie der Curven dritter Ordnung ziehen zu können. Man hat nach (4) und (5)

$$64\Omega^{10}_{i_\vartheta} = i_{H_F}(p\pi)^4 = \frac{i_F^2}{6}(p\pi)^4 = \frac{16^3}{6}\Omega^{10}J^2,$$

d. h.

$$i_\vartheta = \frac{32}{3}J^2,$$

eine Formel, welche den Satz giebt:

Das Verschwinden von J ist nothwendig und hinreichend, damit das Doppelverhältniss aus den 4 Wurzeln der Gleichung $\vartheta = 0$ gleich einer imaginären Cubikwurzel der Einheit werde.

---

*) $F(z_1, z_2)$ geht aus F vermöge Ersetzung von π durch z_1 und von p durch z_2 hervor.

Geometrisch ausgedrückt lautet dieses Theorem:

Wenn die vier Doppelpunkte der Involution $\varkappa f + \lambda \varphi = 0$ *äquianharmonisch liegen, ist* $J = 0$, *und umgekehrt.*

Durch ein bekanntes Uebertragungsprincip erhält man hieraus für die Curvenlehre:

Alle Geraden $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, *welche von Curven eines Büschels dritter Ordnung* $\varkappa f (x_1 x_2 x_3) + \lambda \varphi (x_1 x_2 x_3) \equiv \varkappa a_x{}^3 + \lambda \alpha_x{}^3 = 0$ *in vier äquianharmonisch liegenden Punkten berührt werden, hüllen eine Curve dritter Classe ein, deren symbolische Gleichung* $(a \alpha u)^3 = 0$.

Wofern $\varphi (x_1 x_2 x_3) = \Delta f$, gleich der Hesse'schen Determinante von f, verschwindet $(a \alpha u)^3$ *) identisch, so dass man sagen kann:

Die vier Punkte, in denen irgend eine Gerade von vier Curven des syzygetischen Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta f = 0$ *berührt wird, liegen äquianharmonisch* **)

Mit diesem Satze hängt vermöge geometrischer Betrachtungen aufs engste zusammen ein anderer, der die Untersuchungen von Rosanes und Schröter in den Math. Annal. II, S. 549—562 ergänzt und in einem neuen Lichte erscheinen lässt:

Wenn zwei Dreiecke auf sechsfache Art perspectivisch liegen, so sind ihre 9 Schnittpunkte die Wendepunkte jeder durch sie gelegten Curve dritter Ordnung.

Der Beweis kann überaus leicht geführt werden. Sind nämlich $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ die Gleichungen der Scheitel des einen Dreiseits, so ist das Product der Ecken des andern Dreiseits nach dem von Rosanes auf S. 551 l. c. ausgesprochenen Theorem in der Form

$$a u_1{}^3 + b u_2{}^3 + c u_3{}^3 + 6\, d u_1 u_2 u_3 = 0$$

darstellbar, was offenbar den fraglichen Satz erhärtet.

Tübingen, im October 1873.

---

*) $(a \alpha u)^3 \equiv 0$ kommt überein mit der bekannten Salmon'schen Identität

$$a_x{}^3 \alpha_y{}^3 - 3\, a_x{}^2 a_y\, \alpha_x \alpha_y{}^2 + 3\, a_x a_y'^2\, \alpha_x{}^2 \alpha_y - a_y{}^3 \alpha_x{}^3 = 0,$$

wenn man

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \qquad a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \qquad a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

setzt.

**) Dieses Theorem ist umkehrbar und also für syzygetische Büschel charakteristisch.