SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1874
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0007
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0029
LOG Titel: Untersuchungen über orthogonale Flächensysteme
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Untersuchungen über orthogonale Flächensysteme.

Von A. Enneper in Göttingen.

Die ungemeinen Schwierigkeiten, welche die Aufstellung orthogonaler Flächensysteme darbietet, sowie die Wahrscheinlichkeit, dass die allgemeine Integration der drei Gleichungen, welche ausdrücken, dass sich die Flächen orthogonal schneiden, mit den vorhandenen Hülfsmitteln der Analysis kaum vollständig gelingen wird, führt von selbst darauf, dem allgemeinen Probleme noch weitere geometrische Beschränkungen beizufügen, welche es gestatten, die Coordinaten eines Punktes im Raume explicite in Function dreier Parameter darzustellen. In den nachfolgenden Untersuchungen sind zu den bisher bekannten Systemen einige neue Systeme von ziemlicher Allgemeinheit hinzugefügt, insofern die Ausdrücke für die Coordinaten willkührliche Functionen enthalten. Der grössern Deutlichkeit wegen sind die fundamentalen Gleichungen, soweit wie nöthig, kurz vorausgeschickt.

I.

Sind x, y, z die Coordinaten eines gemeinschaftlichen Punktes von drei gegenseitig zu einander orthogonalen Flächen, ferner u, v, w die drei Parameter des Systems, so finden bekanntlich die Gleichungen statt:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0,\\ &\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}=0,\\ &\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=0.\end{aligned}\right.$$

Setzt man:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=P^2,\\ &\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=Q^2,\\ &\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2=R^2,\end{aligned}\right.$$

bedeutet t eine der drei Coordinaten x, y, z, so findet man zur Bestimmung von t aus den Gleichungen (1) und (2) die folgenden sechs partiellen Differentialgleichungen:

$$
(3)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 t}{\partial u^2} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial u} - \dfrac{P}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial v} - \dfrac{P}{R^2}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial w}, \\
\dfrac{\partial^2 t}{\partial v^2} = -\dfrac{Q}{P^2}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial v} - \dfrac{Q}{R^2}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial w}, \\
\dfrac{\partial^2 t}{\partial w^2} = -\dfrac{R}{P^2}\dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial u} - \dfrac{R}{Q^2}\dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial v} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial w}.
\end{cases}
$$

$$
(4)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial v}, \\
\dfrac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial w} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial w}, \\
\dfrac{\partial^2 t}{\partial v\,\partial w} = \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial v} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial w}.
\end{cases}
$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergeben sich endlich die folgenden sechs Differentialgleichungen zur Bestimmung der drei Quantitäten P, Q und R:

$$
(5)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{P}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\right) + \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial Q}{\partial w} = 0, \\
\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial P}{\partial w}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{P}\dfrac{\partial R}{\partial u}\right) + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial R}{\partial v} = 0, \\
\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial R}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\right) + \dfrac{1}{P^2}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial R}{\partial u} = 0.
\end{cases}
$$

$$
(6)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 P}{\partial v\,\partial w} = \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial Q}{\partial w} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial R}{\partial v}, \\
\dfrac{\partial^2 Q}{\partial u\,\partial w} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial P}{\partial w} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial Q}{\partial w}\dfrac{\partial R}{\partial u}, \\
\dfrac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial P}{\partial v} + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial Q}{\partial u}.
\end{cases}
$$

Die Krümmungsverhältnisse einer der Flächen des Systems hängen bekanntlich von P, Q, R und den Differentialquotienten dieser Quantitäten nach u, v, w ab. Wird eine der Flächen dadurch geometrisch definirt, dass eine oder mehrere der Quantitäten P, Q, R bestimmte Werthe annehmen, so scheint es am einfachsten zu sein, zur analytischen Lösung sich der obigen Gleichungen zu bedienen. Einigen neuen Anwendungen dieser Gleichungen möge ein Verfahren vorangehn, mit dessen Hülfe es in manchen Fällen möglich ist, aus einem bestimmten orthogonalen Flächensysteme ein anderes System, oder unendlich viele Systeme abzuleiten, für den Fall, dass sich die Integration einer linearen, partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vollständig bewerkstelligen lässt.

II.

Dem Punkte (x, y, z) möge der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf beliebige Weise entsprechen. Die Cosinus der Winkel, welche die Verbindungslinie der beiden Punkte mit jeder der Normalen zu *einer* der drei orthogonalen Flächen, welche sich im Punkte (x, y, z) schneiden, seien respective:

$$\frac{f}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}, \quad \frac{g}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}, \quad \frac{h}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}},$$

wo f, g, h beliebige Functionen von u, v, w sind. Für x_1, y_1, z_1 hat man dann die Gleichungen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x + f\,\frac{1}{P}\,\frac{\partial x}{\partial u} + g\,\frac{1}{Q}\,\frac{\partial x}{\partial v} + h\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial x}{\partial w}, \\ y_1 &= y + f\,\frac{1}{P}\,\frac{\partial y}{\partial u} + g\,\frac{1}{Q}\,\frac{\partial y}{\partial v} + h\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial y}{\partial w}, \\ z_1 &= z + f\,\frac{1}{P}\,\frac{\partial z}{\partial u} + g\,\frac{1}{Q}\,\frac{\partial z}{\partial v} + h\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial z}{\partial w}. \end{aligned} \right.$$

Die Quantitäten f, g, h lassen sich so bestimmen, dass der Punkt (x_1, y_1, z_1) ebenfalls einem orthogonalen Systeme angehört und dieses System lässt sich weiter dahin bestimmen, dass die drei Normalen in correspondirenden Punkten beider Flächensysteme parallel sind. Analytisch betrachtet kommt dieses auf die Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{\dfrac{\partial x_1}{\partial s}}{\dfrac{\partial x}{\partial s}} = \frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial s}}{\dfrac{\partial y}{\partial s}} = \frac{\dfrac{\partial z_1}{\partial s}}{\dfrac{\partial z}{\partial s}}$$

heraus, wo successive u, v, w statt s zu setzen ist. Bildet man aus (1) die Differentialquotienten von x_1, y_1, z_1 nach u, v, w, so lassen sich die rechten Seiten der Gleichungen für:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial w}$$

mit Hülfe der Gleichungen (3) und (4) von I. auf die Form bringen:

$$\frac{H}{P}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{H_1}{Q}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{H_2}{R}\,\frac{\partial x}{\partial w}.$$

Nimmt man in den Gleichungen (2) $s = u$, bedeutet σ eine Unbestimmte, so hat man:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \sigma\,\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u} = \sigma\,\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} = \sigma\,\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Die vorstehenden Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (1) von I. geben:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0\,,$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}=0\,,$$

Diese Gleichungen zeigen, dass in dem Ausdrucke von $\frac{\partial x_1}{\partial u}$ die Factoren von $\frac{\partial x}{\partial v}$ und $\frac{\partial x}{\partial w}$ verschwinden müssen. Auf diese Art erhält man aus der Doppelgleichung (2) für $s=u, v, w$ die folgenden sechs Gleichungen:

$$(3)\quad \frac{\partial g}{\partial u}=\frac{f}{Q}\frac{\partial P}{\partial v}\,,\qquad (4)\quad \frac{\partial h}{\partial u}=\frac{f}{R}\frac{\partial P}{\partial w}\,,$$
$$(5)\quad \frac{\partial f}{\partial u}=\frac{g}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}\,,\qquad (6)\quad \frac{\partial h}{\partial v}=\frac{g}{R}\frac{\partial Q}{\partial w}\,,$$
$$(7)\quad \frac{\partial f}{\partial w}=\frac{h}{P}\frac{\partial R}{\partial u}\,,\qquad (8)\quad \frac{\partial g}{\partial w}=\frac{h}{Q}\frac{\partial R}{\partial v}\,.$$

Die vorstehenden sechs Gleichungen reduciren sich durch Elimination zweier der Functionen f, g, h auf zwei lineare, partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die dritte der bemerkten Functionen. Aus (5) und (7) folgt nämlich:

$$(9)\qquad g=\frac{P}{\frac{\partial Q}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial v}\,,\qquad h=\frac{P}{\frac{\partial R}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial w}\,.$$

Setzt man diese Werthe von g und h in die Gleichungen (6) und (8), so reduciren sich diese Gleichungen in Folge der Gleichungen (5) und (6) aus I. auf eine Gleichung, nämlich auf die folgende:

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w}=\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial w}\frac{\partial R}{\partial u}}{\frac{\partial Q}{\partial u}}+\frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\frac{1}{Q}\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial Q}{\partial u}}{\frac{\partial R}{\partial u}}\,.$$

Die Substitution der Werthe von g und h aus den Gleichungen (9) in die Gleichungen (3) und (4) giebt:

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial v}\,\dfrac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}\right)}{\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}}+\dfrac{f}{PQ}\dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial Q}{\partial u}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial w}=\dfrac{\partial f}{\partial w}\,\dfrac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}\right)}{\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u}}+\dfrac{f}{PR}\dfrac{\partial P}{\partial w}\dfrac{\partial R}{\partial u}\,. \end{cases}$$

Differentiirt man die erste Gleichung (11) nach w, die zweite nach v, bildet die Differenz der erhaltenen Resultate, so erhält man mittelst der Gleichungen (5) und (6) von I. die Gleichung (10). Man findet überhaupt, dass von den drei Gleichungen (10) und (11) immer eine Folge der beiden andern ist, so dass also zur Bestimmung von f sich zwei Gleichungen ergeben, welche wesentlich von einander verschieden sind. Eine sehr einfache Anwendung der Gleichungen (10) und (11) liefert das System von drei orthogonalen Kugelflächen. Nimmt man:

$$x = \frac{w}{D}, \quad y = \frac{v}{D}, \quad z = \frac{w}{D}, \tag{12}$$

wo:

$$D = u^2 + v^2 + w^2, \tag{13}$$

so ist:

$$P = Q = R = \frac{1}{D}. \tag{14}$$

Die Gleichung (10) giebt dann:

$$D \frac{\partial^2 f}{\partial v\, \partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial D}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial D}{\partial w} = 0.$$

Wegen des Werthes von D aus (13) lässt sich die vorstehende Gleichung kürzer schreiben:

$$\frac{\partial^2 Df}{\partial v\, \partial w} = 0. \tag{15}$$

Die Gleichungen (11) lassen sich nach (13) und (14) auf folgende Formen bringen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) = \left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial v},$$
$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) = \left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial w},$$

d. h. es ist:

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u}\right)$$

sowohl von v wie von w unabhängig. Bedeutet U_1 eine Function von u allein, so ist:

$$\frac{\partial Df}{\partial u} - \frac{Df}{u} = D\, U_1,$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{Df}{u} = \frac{D U_1}{u} = (v^2 + w^2) \frac{U_1}{u} + u U_1.$$

Durch Integration folgt:

$$\frac{Df}{u} = (v^2 + w^2) \int \frac{U_1}{u} \partial u + \int u U_1 \partial u + \tau,$$

wo τ von u unabhängig ist. Wegen der Gleichung (15) ist $\frac{\partial^2 \tau}{\partial v\, \partial w} = 0$, also $\tau = V + W$, wo V und W respective beliebige Functionen der Argumente v und w sind. Es ist also:

$$\frac{Df}{u} = V + W + \int u\,U_1\,\partial u + (v^2 + w^2)\int \frac{U_1}{u}\,\partial u,$$

oder $v^2 + w^2 = D - u^2$ gesetzt:

$$\frac{Df}{u} = V + W + \int u\,U_1\,\partial u - u^2 \int \frac{U_1}{u}\,\partial u + D\int \frac{U_1}{u}\,\partial u\,.$$

Nimmt man endlich zur Vereinfachung:

$$\int u\,U_1\,\partial u - u^2 \int \frac{U_1}{u}\,\partial u = U\,,$$

so ist:

$$-2\,u \int \frac{U_1}{u}\,\partial u = \frac{\partial U}{\partial u} = U'\,,$$

also:

(16) $$Df = (U + V + W)\,u - \tfrac{1}{2}\,D\,U'.$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (9) folgt:

(17) $$\begin{cases} Dg = (U + V + W)\,v - \tfrac{1}{2}\,D\,V', \\ Dh = (U + V + W)\,w - \tfrac{1}{2}\,D\,W'. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen (12), (13), (16) und (17) ergeben sich aus (1) für x_1, y_1, z_1 folgende Gleichungen:

(18) $$\begin{cases} x_1 = uH - \tfrac{1}{2}\,U', \quad y_1 = vH - \tfrac{1}{2}\,V', \quad z_1 = wH - \tfrac{1}{2}\,W', \\ H = \dfrac{u\,U' - U + v\,V' - V + w\,W' - w + 1}{u^2 + v^2 + w^2}\,. \end{cases}$$

Man kann die Gleichungen (18) leicht in etwas anderer Weise darstellen. Setzt man: $U - u\,U' = 2\,R$, so folgt durch Differentiation nach u die Gleichung:

$$-\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial U'}{\partial u} = \frac{1}{u}\,\frac{\partial R}{\partial u}\,.$$

Diese Gleichung nach u integrirt giebt, mit Weglassung einer unnöthigen Constanten:

$$-\tfrac{1}{2}\,U' = \int \frac{\partial R}{u}\,,$$

oder $u^2 = \varrho$ gesetzt:

$$-\tfrac{1}{2}\,U' = \int \frac{R'\,\partial\varrho}{\sqrt{\varrho}}\,.$$

Nimmt man ferner $v^2 = \varrho_1$, $w^2 = \varrho_2$, $V - v\,V' = 2\,R_1$, $W - w\,W' + 1 = 2\,R_2$, so treten an Stelle der Gleichungen (18) die folgenden:

$$x_1 = -H\sqrt{\varrho} + \int \frac{R'\,\partial\varrho}{\sqrt{\varrho}},$$

$$y_1 = -H\sqrt{\varrho_1} + \int \frac{R_1'\,\partial\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1}},$$

$$z_1 = - H \sqrt{\varrho_2} + \int \frac{R_2' \partial \varrho_2}{\sqrt{\varrho_2}},$$
$$H = \frac{R + R_1 + R_2}{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2}.$$

Diese Gleichungen hat zuerst Darboux gegeben, bei Aufstellung der Systeme orthogonaler Flächen, für welche alle Krümmungslinien plan sind. (Mémoires scientifiques de l'école normale supérieure. Année 1866, t. III, p. 129.) Die obige Ableitung scheint der einfachste Weg zu sein, auf welchem man zu den Gleichungen (18) gelangt.

Legt man drei confocale Flächen zweiten Grades zu Grunde, so hat man:

$$\frac{x^2}{a^2 - s^2} + \frac{y^2}{b^2 - s^2} + \frac{z^2}{c^2 - s^2} = 1,$$

wo successive u, v, w statt s zu setzen ist. Bildet man die Werthe von P, Q, R, so nimmt die Gleichung (10) folgende Form an:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \, \partial w} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{w(v^2 - u^2)}{(w^2 - u^2)(w^2 - v^2)} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{v(w^2 - u^2)}{(v^2 - u^2)(w^2 - v^2)},$$

wo $w > v > u$ angenommen ist. Führt man w_1 und v_1 als Variabele mittelst der Gleichungen:

$$\frac{1}{w^2 - u^2} = w_1, \quad \frac{1}{v^2 - u^2} = v_1$$

ein, so geht die obige Differentialgleichung über in:

$$2(v_1 - w_1) \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \, \partial w_1} + \frac{\partial f}{\partial v_1} - \frac{\partial f}{\partial w_1} = 0.$$

Die vorstehende Gleichung ist nicht in endlicher Form integrabel, wie sich ergiebt, wenn man eine von Laplace ausgearbeitete Methode anwendet. Uebrigens ist die Gleichung auch als specieller Fall in einer allgemeinen Gleichung enthalten, welche Laplace als Beispiel der zuerst von Euler entdeckten Integrationsmethode untersucht hat. (Mémoires de l'Académie pour l'année 1773. Paris 1777, pag. 376.)

III.

Besteht ein System von Krümmungslinien einer Fläche aus Kreisen, so ist dieselbe die Enveloppe einer Kugelfläche von variabelem Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige Raumcurve beschreibt. Sind beide Systeme Kreise, so kann die Fläche als Enveloppe einer Kugelfläche angesehen werden, welche drei gegebene Kugelflächen berührt. Diese Enveloppe, welche nach Dupin die Cyclide genannt wird, lässt sich so bestimmen, dass dieselbe einem orthogonalen Flächensysteme angehört, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Die Werthe der

Coordinaten geben, wegen der darin enthaltenen willkührlichen Functionen, zu manchen interessanten besondern Fällen Veranlassung. Für eine Fläche, welche einem orthogonalen Systeme angehört, seien u und v die Argumente der Krümmungslinien. Durch die Tangente zur Krümmungslinie, für welche u allein variabel ist, werde im Punkte (x, y, z) der Fläche der Normalschnitt gelegt und dessen Krümmungshalbmesser durch R_u bezeichnet. Nach bekannten Formeln ergiebt sich aus I.:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{1}{PR}\frac{\partial P}{\partial w}.$$

Ist dieser Krümmungshalbmesser constant, so muss R_u von u unabhängig sein, d. h. R_u kann nur Function von v und w sein. Ist $\psi(v, w)$ eine beliebige Function von v und w, setzt man einfach ψ statt $\psi(v, w)$, so folgt:

(1) $$\frac{1}{PR}\frac{\partial P}{\partial w} = \frac{1}{\psi} \text{ oder } \frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial w} = \frac{P}{\psi}.$$

Ist $\varphi(u, w)$ eine beliebige Function von u und w, welche einfach durch φ bezeichnet werde, so enthält die Gleichung:

(2) $$\frac{1}{QR}\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{1}{\varphi} \text{ oder } \frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{Q}{\varphi}$$

die Bedingung, dass das System der Krümmungslinien, für welche v allein variirt, gleichzeitig plan und sphärisch ist, d. h. aus Kreisen besteht.

Die Gleichung (1) werde nach v, die Gleichung (2) nach u differentiirt. Mit Zuziehung der Gleichungen (6) von I. folgt dann:

$$\frac{1}{QR}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{P}{\psi},$$
$$\frac{1}{PR}\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial P}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{Q}{\varphi}.$$

Wegen der Gleichungen (1) und (2) gehen diese Gleichungen über in:

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{P}{\psi} \text{ oder } \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}\right) P = 0,$$
$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{Q}{\varphi} \text{ oder } \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi}\right) Q = 0.$$

Ist φ_1 nur von u und w abhängig, ψ_1 nur von v und w abhängig, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

$$\left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}\right) P = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \qquad \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\psi}\right) Q = \frac{\psi_1}{\psi},$$

oder:

(3) $$P(\varphi - \psi) = \varphi_1\psi, \qquad Q(\psi - \varphi) = \psi_1\varphi.$$

Diese Werthe von P und Q in die Gleichungen (1) und (2) substituirt geben:

$$(4)\qquad \begin{cases} R = \dfrac{\psi}{\varphi_1}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial w} + \dfrac{\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial w} - \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}}{\varphi - \psi}\,, \\[2ex] R = \dfrac{\varphi}{\psi_1}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial w} + \dfrac{\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial w} - \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}}{\varphi - \psi}\,. \end{cases}$$

Der doppelte Werth von R giebt:

$$\frac{1}{\varphi\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial w} = \frac{1}{\psi\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial w}\,.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung nur von u und w, die rechte nur von v und w abhängt, so folgt:

$$(5)\qquad \frac{1}{\varphi\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial w} = \frac{1}{\psi\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial w} = E\,,$$

wo E eine beliebige Function von w ist. Die beiden Gleichungen (4) reduciren sich wegen (5) auf folgende Gleichung:

$$(6)\qquad R = E\varphi\psi + \frac{\varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial w} - \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}}{\varphi - \psi}\,.$$

Die erste der Gleichungen (5) von I. nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial Q}{\partial w} = 0$$

wie nach (1), (2) und (3):

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{(\varphi-\psi)\,\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{(\psi-\varphi)\,\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{1}{(\varphi-\psi)^2} = 0\,,$$

Führt man die Differentiationen aus, so folgt:

$$(7)\qquad \varphi\Psi + \psi\Phi = -1 + \Phi_1 + \Psi_1\,,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(8)\qquad \Psi = \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right), \qquad \Phi = \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right).$$

$$(9)\qquad \Psi_1 = \psi\Psi - \left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2, \qquad \Phi_1 = \varphi\Phi - \left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2.$$

Die Functionen Φ und Φ_1 hängen nur von u und w ab, die Functionen Ψ und Ψ_1 enthalten nur v und w. Differentiirt man die Gleichung (7) zuerst nach u und darauf nach v, so folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} = 0\,.$$

Diese Gleichung giebt unmittelbar:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = -D\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial u} = D\frac{\partial\psi}{\partial v}\,,$$

oder:

$$\Phi = C - D\varphi\,, \qquad \Psi = B + D\psi\,, \tag{10}$$

wo B, C, D von u und v unabhängig sind. Für diese Werthe von Φ und Ψ giebt die Gleichung (7):

$$C\psi + B\varphi = -1 + \Phi_1 + \Psi_1\,,$$

oder:

$$\Phi_1 - B\varphi = -(\Psi_1 - C\psi - 1)\,.$$

Da die eine Seite dieser Gleichung unabhängig ist von u, die andere unabhängig von v, so folgt:

$$\Phi_1 - B\varphi = -A\,, \qquad \Psi_1 - C\psi = 1 + A\,, \tag{11}$$

wo A nur von w abhängt. Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$\partial\frac{\varphi\,\Phi - \Phi_1}{\partial u} = \frac{2}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$

$$\partial\frac{\psi\,\Psi - \Psi_1}{\partial v} = \frac{2}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right),$$

d. i. nach (8):

$$\partial\frac{\varphi\Phi - \Phi_1}{\partial u} = 2\,\Phi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,, \qquad \partial\frac{\psi\Psi - \Psi_1}{\partial v} = 2\,\Psi\,\frac{\partial\psi}{\partial v}\,.$$

Setzt man hierin für Φ, Φ_1, Ψ, Ψ_1 ihre Werthe aus (10) und (11), so folgt $B + C = 0$. Setzt man ferner die Werthe von Φ, Φ_1, Ψ, Ψ_1 aus (10) und (11) in die Gleichungen (9), nimmt $B = -C$, so ist:

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 &= A + 2\,C\varphi - D\varphi^2\,, \\ \left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) &= -1 - A - 2\,C\psi + D\psi^2\,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Sollen die rechten Seiten dieser Gleichungen gleichzeitig positiv sein, so kann keine der Quantitäten $AD + C^2$ und $(A+1)\,D + C^2$ verschwinden. Zur Abkürzung setze man:

$$\left\{\begin{aligned} p &= \sqrt{A + 2\,C\varphi - D\varphi^2}\,, \\ q &= \sqrt{-1 - A - 2\,C\psi + D\psi^2}\,. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Die Gleichungen (12) lassen sich dann ersetzen durch:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = p\,, \qquad \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v} = q\,. \tag{14}$$

Differentiirt man diese Gleichungen logarithmisch in Beziehung auf w, so folgt mit Rücksicht auf die Doppelgleichung (5):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}} &= \frac{1}{p}\frac{dp}{\partial w} + E\varphi\,, \\ \frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v\,\partial w}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}} &= \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial w} + E\psi\,. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Da die Quantitäten A, C, D, E nur von u und v unabhängig sind, so sind dieselben allgemein Functionen von w. Die erste Gleichung (13) nach u differentiirt giebt:

$$(16)\qquad p\frac{\partial p}{\partial u} = (C - D\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach w, so folgt mittelst der ersten Gleichung (15):

$$(17)\qquad p\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial w} = \left[\frac{\partial C}{\partial w} - \varphi\frac{\partial D}{\partial w} - D\frac{\partial \varphi}{\partial w} + (C - D\varphi)E\varphi\right]\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Differentiirt man die Gleichung (6) nach u, so folgt, in Verbindung mit den Gleichungen (3) und (15):

$$\frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u} = \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi} - \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial w} - E\psi\right)\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,,$$

d. i. nach (14):

$$(18)\qquad \frac{1}{P}\frac{\partial R}{\partial u} = p\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi} - \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial w} - E\psi\right).$$

Analog folgt:

$$(19)\qquad \frac{1}{Q}\frac{\partial R}{\partial v} = q\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi} - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial w} - E\varphi\right).$$

Die Gleichung (18) nach u differentiirt, giebt nach (14) und (16):

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_1}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{P}\dfrac{\partial R}{\partial u}\right) = \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi}\left(\dfrac{-p^2}{\varphi - \psi} + C - D\varphi\right) \\ + \dfrac{p\frac{\partial p}{\partial w} + p^2 E\varphi}{\varphi - \psi} - (C - D\varphi)(\varphi + \psi)E \\ \qquad - \dfrac{\partial C}{\partial w} + \varphi\dfrac{\partial D}{\partial w} + D\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}\,. \end{cases}$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial w}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\frac{P}{\psi} = \frac{\partial}{\partial w}\frac{\varphi_1}{\varphi - \psi}\,,$$

d. i. nach (5):

$$(21)\qquad \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial w}\right) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{(\varphi - \psi)^2} + \frac{E\varphi}{\varphi - \psi}\,.$$

Die Gleichungen (3) und (14) geben:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\psi_1(\varphi - \psi)} = -\frac{q}{\varphi - \psi}\,.$$

Aus dieser Gleichung und (19) folgt durch Multiplication:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{1}{Q^2}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{(\varphi-\psi)^2}\, q^2 + \frac{q\frac{\partial q}{\partial w} + q^2 E\varphi}{\varphi - \psi}.$$

Addirt man diese Gleichung zur Summe der Gleichungen (20) und (21), so verschwindet in Folge der zweiten Gleichung (5) von I. die linke Seite. Es ist also:

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}}{\varphi - \psi}\left(C - D\varphi - \frac{1+p^2+q^2}{\varphi - \psi}\right)\\ &+ \frac{p\frac{\partial p}{\partial w} + q\frac{\partial q}{\partial w} + (1+p^2+q^2)\, E\varphi}{\varphi-\psi}\\ &-(C-D\varphi)(\varphi+\psi)\, E - \frac{\partial C}{\partial w} + \varphi\frac{\partial D}{\partial w} + D\frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0.\end{aligned}$$

Da nun nach (13):

$$1 + p^2 + q^2 = 2\, C\,(\varphi - \psi) - D\,(\varphi^2 - \psi^2),$$

so geht die obige Gleichung über in:

$$(\varphi - \psi)\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial w} + CE\right) = 0,$$

d. i.

(22) $$\tfrac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial w} + CE = 0.$$

Zu demselben Resultate führt die dritte Gleichung (5) von I. Die bisher entwickelten Werthe von P, Q, R in Verbindung mit den Gleichungen (5), (12) und (23) genügen den sämmtlichen sechs Gleichungen (5) und (6) von I. Es bleibt übrig, die Werthe von x, y, z in Function von u, v, w so darzustellen, dass dieselben den Gleichungen (1) und (2) von I. genügen.

Die beiden letzten Gleichungen (4) von I. lassen sich schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = \frac{1}{PR}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial t}{\partial u},$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = \frac{1}{QR}\frac{\partial Q}{\partial w}\frac{\partial t}{\partial v}.$$

In Folge der Gleichungen (1) ist also:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = \frac{1}{\psi}\frac{\partial t}{\partial u}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial t}{\partial v}.$$

Setzt man successive x, y, z statt t, sind

ξ, η, ζ nur abhängig von u und w,
ξ_1, η_1, ζ_1 nur abhängig von v und w,

so erhält man durch Integration die folgenden sechs Gleichungen:

$$x - \xi_1 = \frac{\psi}{R}\,\frac{\partial x}{\partial w}, \qquad x - \xi = \frac{\varphi}{R}\,\frac{\partial x}{\partial w},$$

$$y - \eta_1 = \frac{\psi}{R}\,\frac{\partial y}{\partial w}, \qquad y - \eta = \frac{\varphi}{R}\,\frac{\partial y}{\partial w},$$

$$z - \zeta_1 = \frac{\psi}{R}\,\frac{\partial z}{\partial w}, \qquad z - \zeta = \frac{\varphi}{R}\,\frac{\partial z}{\partial w}.$$

Diese Gleichungen geben:

$$(23) \qquad x = \frac{\xi\psi - \xi_1\varphi}{\psi - \varphi}, \quad y = \frac{\eta\psi - \eta_1\varphi}{\psi - \varphi}, \quad z = \frac{\zeta\psi - \zeta_1\varphi}{\psi - \varphi}.$$

$$(24) \quad \frac{1}{R}\,\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\xi - \xi_1}{\psi - \varphi}, \quad \frac{1}{R}\,\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\eta - \eta_1}{\psi - \varphi}, \quad \frac{1}{R}\,\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\zeta - \zeta_1}{\varphi - \psi}.$$

Differentiirt man die Gleichungen (23) nach u, dividirt die so erhaltenen Differentialquotienten durch P, so folgt mittelst der Gleichungen (3):

$$(25) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{P}\,\dfrac{\partial x}{\partial u} = -\dfrac{1}{\varphi_1}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \dfrac{\xi - \xi_1}{\varphi - \psi}\,\dfrac{1}{\varphi_1}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{1}{P}\,\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{1}{\varphi_1}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + \dfrac{\eta - \eta_1}{\varphi - \psi}\,\dfrac{1}{\varphi_1}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{1}{P}\,\dfrac{\partial z}{\partial u} = -\dfrac{1}{\varphi_1}\,\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + \dfrac{\zeta - \zeta_1}{\varphi - \psi}\,\dfrac{1}{\varphi_1}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}. \end{cases}$$

Ebenso erhält man durch Differentiation nach v:

$$(26) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{Q}\,\dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{1}{\psi_1}\,\dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} + \dfrac{\xi - \xi_1}{\varphi - \psi}\,\dfrac{1}{\psi_1}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{1}{Q}\,\dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{1}{\psi_1}\,\dfrac{\partial r_1}{\partial v} + \dfrac{\eta - \eta_1}{\varphi - \psi}\,\dfrac{1}{\psi_1}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{1}{Q}\,\dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{1}{\psi_1}\,\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial v} + \dfrac{\zeta - \zeta_1}{\varphi - \psi}\,\dfrac{1}{\psi_1}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial v}. \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate der Gleichungen (24) führt auf folgende Gleichung:

$$(27) \qquad (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 = (\varphi - \psi)^2.$$

Diese Gleichung giebt unmittelbar durch Differentiation nach u und v:

$$(28) \quad \begin{cases} (\xi - \xi_1)\,\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + (\eta - \eta_1)\,\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + (\zeta - \zeta_1)\,\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} = (\varphi - \psi)\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \\[2ex] (\xi - \xi_1)\,\dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} + (\eta - \eta_1)\,\dfrac{\partial \eta_1}{\partial v} + (\zeta - \zeta_1)\,\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial v} = (\varphi - \psi)\,\dfrac{\partial \psi}{\partial v}. \end{cases}$$

Bildet man die Summe der Quadrate der Gleichungen (25) und ebenso der Gleichungen (26), so erhält man mittelst der vorstehenden Gleichungen und der Gleichungen (12):

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_1^2}\left\{\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^2\right\} = 1 + A + 2\,C\varphi - D\varphi^2, \\[2ex] \dfrac{1}{\psi_1^2}\left\{\left(\dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \eta_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial v}\right)^2\right\} = -A - 2\,C\psi + D\psi^2. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen (24) — (28) werden zwei der Fundamentalgleichungen (1) von I. identisch, die dritte giebt:

$$(30)\qquad \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}+\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta_1}{\partial v}+\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta_1}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Diese Gleichung folgt auch, wenn die Gleichung (27) successive nach u und v differentiirt wird.

Bildet man aus (23) die Werthe der Differentialquotienten von x, y, z nach w, substituirt aus (6) den Werth von R, so gehen die Gleichungen (24) über in:

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial \xi}{\partial w}-E\xi=\dfrac{1}{\psi}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial w}-E\xi_1, \\ \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial \eta}{\partial w}-E\eta=\dfrac{1}{\psi}\dfrac{\partial \eta_1}{\partial w}-E\eta_1, \\ \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}-E\zeta=\dfrac{1}{\psi}\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial w}-E\zeta_1, \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen (3) von I. geben für $t=x$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{1}{Q^2}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial P}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial w}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\frac{1}{P^2}\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial Q}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial w}=0.$$

Hieraus erhält man, unter Zuziehung der Gleichungen (1), (3), (13), (14), (24), (25) und (26):

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_1}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\varphi_1}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\right)+\dfrac{\xi-\xi_1}{\varphi-\psi}(C-D\psi) \\ \qquad -\dfrac{1}{\varphi-\psi}\left(\dfrac{1}{\varphi_1^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}+\dfrac{1}{\psi_1^2}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)=0, \\ \dfrac{1}{\psi_1}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\psi_1}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}\right)-\dfrac{\xi-\xi_1}{\varphi-\psi}(C-D\varphi) \\ \qquad +\dfrac{1}{\varphi-\psi}\left(\dfrac{1}{\varphi_1^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}+\dfrac{1}{\psi_1^2}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}\dfrac{\partial \psi}{\partial v}\right)=0. \end{cases}$$

Die Summe dieser Gleichungen giebt:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)+D\xi+\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right)-D\xi_1=0.$$

Bezeichnet F eine Function von w, so zerfällt die vorstehende Gleichung in die beiden folgenden:

$$\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)+D\xi=F,$$

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right)-D\xi_1=-F.$$

Die beiden Gleichungen (32) reduciren sich hierdurch auf:

$$\frac{1}{\varphi_1^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \xi\,(C - D\varphi) - F\varphi$$
$$+ \frac{1}{\psi_1^2}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \xi_1\,(C - D\psi) + F\psi = 0\,,$$

d. i.

$$\frac{1}{\varphi_1^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \xi\,(C - D\varphi) - F\varphi = -G,$$
$$\frac{1}{\psi_1^2}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \xi_1\,(C - D\psi) + F\psi = G\,,$$

wo G nur von w abhängt. Die erste der vorstehenden Gleichungen multiplicire man mit $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, die zweite mit $\frac{\partial \psi}{\partial v}$, führe nach (14) die Werthe von p und q ein. Es folgt dann:

$$p^2\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi\, p\frac{\partial p}{\partial u} - F\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,,$$
$$q^2\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \xi_1 q\frac{\partial q}{\partial v} + F\psi\frac{\partial \psi}{\partial v} = G\frac{\partial \psi}{\partial v}\,,$$

oder:

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\xi}{p} = \dfrac{F}{p^3}\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \dfrac{G}{p^3}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\xi_1}{q} = -\dfrac{F}{q^3}\psi\dfrac{\partial \psi}{\partial v} + \dfrac{G}{q^3}\dfrac{\partial \psi}{\partial v}\,. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(34)\qquad AD + C^2 = a^2\,,\qquad (A+1)\,D + C^2 = b^2\,,$$

berücksichtigt die Werthe von p und q aus (13), so geben die Gleichungen (33) durch Integration:

$$\xi = pf_1 + \frac{CF - DG}{a^2}\varphi + \frac{AF + CG}{a^2}\,,$$
$$\xi_1 = qf_2 + \frac{CF - DG}{b^2}\psi + \frac{(A+1)\,F + CG}{b^2}\,,$$

wo f_1 und f_2 nur von w abhängen. Die vorstehenden Gleichungen schreibe man kürzer:

$$\xi = pf_1 + \frac{f}{a^2}\varphi - \frac{C}{2\,a^2b^2}f + f_0\,,$$
$$\xi_1 = qf_2 + \frac{f}{b^2}\psi + \frac{C}{2\,a^2b^2}f + f_0\,,$$

wo $CF - DG = f$ und:

$$\frac{AF + CG}{a^2} + \frac{(A+1)\,F + CG}{b^2} = 2\,f_0$$

gesetzt ist. Sind nun $f, g, h;\ f_1, g_1, h_1;\ f_2, g_2, h_2$ und f_0, g_0, h_0 Functionen von w, so erhält man auf die vorhin angegebene Art folgende Gleichungen:

$$(35)\quad \begin{cases} \xi = p f_1 + \dfrac{f}{a^2}\,\varphi - \dfrac{Cf}{2a^2b^2} + f_0\,, \\[2mm] \eta = p g_1 + \dfrac{g}{a^2}\,\varphi - \dfrac{Cg}{2a^2b^2} + g_0\,, \\[2mm] \zeta = p h_1 + \dfrac{h}{a^2}\,\varphi - \dfrac{Ch}{2a^2b^2} + h_0\,, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} \xi_1 = q f_2 + \dfrac{f}{b^2}\,\psi + \dfrac{Cf}{2a^2b^2} + f_0\,, \\[2mm] \eta_1 = q g_2 + \dfrac{g}{b^2}\,\psi + \dfrac{Cg}{2a^2b^2} + g_0\,, \\[2mm] \zeta_1 = q h_2 + \dfrac{h}{b^2}\,\psi + \dfrac{Ch}{2a^2b^2} + h_0\,, \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen (13), (14) und (35) geht die erste Gleichung (29) in folgende über:

$$(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2)\,(C - D\varphi)^2 + 2p\,(C - D\varphi)\,\frac{ff_1 + gg_1 + hh_1}{a^2}$$
$$+ \frac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4}\,(A + 2C\varphi - D\varphi^2) = 1 + A + 2C\varphi - D\varphi^2\,.$$

Soll nun φ nicht von u unabhängig sein, so kann die vorstehende Gleichung nur bestehen, wenn:

$$(37)\quad \begin{cases} ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0\,, \\[2mm] D\left\{D\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) - \dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} + 1\right\} = 0\,, \\[2mm] C\left\{D\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) - \dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} + 1\right\} = 0\,, \\[2mm] C^2\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) + A\,\dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} = 1 + A\,. \end{cases}$$

Da C und D nicht gleichzeitig wegen der Gleichungen (12) verschwinden können, so lässt sich das letzte System von Gleichungen durch folgende Gleichungen ersetzen:

$$(38)\quad \begin{cases} ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0\,, \\[2mm] D\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) = \dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{a^4} - 1\,, \\[2mm] a^2\,(f_1^2 + g_1^2 + h_1^2) = 1\,. \end{cases}$$

Die letzte der vorstehenden Gleichungen folgt aus der letzten Gleichung (37) mit Rücksicht auf den Werth von a^2 aus (34). Auf ganz ähnliche Weise geben die Gleichungen (36) in Verbindung mit den Gleichungen (13), (14) und der zweiten Gleichung (29) die folgenden Relationen:

$$(39)\quad \begin{cases} ff_2 + gg_2 + hh_2 = 0\,, \\[2mm] -D\,(f_2^2 + g_2^2 + h_2^2) = \dfrac{f^2 + g^2 + h^2}{b^4} - 1\,, \\[2mm] C^2\,(f_2^2 + g_2^2 + h_2^2) = 1\,. \end{cases}$$

Die Gleichung (30) endlich giebt, da φ und ψ nicht unabhängig von u und v sein sollen:

$$f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2 = 0\,,$$
$$f^2 + g^2 + h^2 = (ab)^2\,.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (38) und (39) zeigen, dass:

$$\begin{array}{ccc} af_1\,, & ag_1\,, & ah_1\,; \\ bf_2\,, & bg_2\,, & bh_2\,; \\ \frac{f}{ab}\,, & \frac{g}{ab}\,, & \frac{h}{ab} \end{array}$$

als die Cosinus der Winkel angesehen werden können, welche drei gegenseitig orthogonale Richtungen im Raume bestimmen. Man nehme diese Richtungen respective parallel der Tangente, der Normalen zur Krümmungsebene und dem Krümmungsradius einer Curve doppelter Krümmung. Sind:

$$\begin{array}{c} \alpha,\ \beta,\ \gamma; \\ l,\ m,\ n; \\ \lambda,\ \mu,\ \nu \end{array}$$

die Winkel, welche die bemerkten Geraden mit den Coordinatenaxen bilden, so setze man:

$$\begin{array}{lll} af_1 = \cos\alpha\,, & ag_1 = \cos\beta\,, & ah_1 = \cos\gamma\,, \\ bf_2 = \cos l\,, & bg_2 = \cos m\,, & bh_2 = \cos n\,, \\ \frac{f}{ab} = \cos\lambda\,, & \frac{g}{ab} = \cos\mu\,, & \frac{h}{ab} = \cos\nu\,. \end{array}$$

Hierdurch werden die Gleichungen (35) und (36):

$$(40)\qquad \begin{cases} \xi = \frac{p}{a}\cos\alpha + \left(\varphi\frac{b}{a} - \frac{C}{2ab}\right)\cos\lambda + f_0\,, \\ \eta = \frac{p}{a}\cos\beta + \left(\varphi\frac{b}{a} - \frac{C}{2ab}\right)\cos\mu + g_0\,, \\ \zeta = \frac{p}{a}\cos\gamma + \left(\varphi\frac{b}{a} - \frac{C}{2ab}\right)\cos\nu + h_0\,, \end{cases}$$

$$(51)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \frac{q}{b}\cos l + \left(\psi\frac{a}{b} + \frac{C}{2ab}\right)\cos\lambda + f_0\,, \\ \eta_1 = \frac{q}{b}\cos m + \left(\psi\frac{a}{b} + \frac{C}{2ab}\right)\cos\mu + g_0\,, \\ \zeta_1 = \frac{q}{b}\cos n + \left(\psi\frac{a}{b} + \frac{C}{2ab}\right)\cos\nu + h_0\,, \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Gleichungen und den Gleichungen (23) ergeben sich zur Bestimmung von x, y, z leicht die folgenden Gleichungen:

$$(42)\begin{cases}(x-f_0)\cos\alpha+(y-g_0)\cos\beta+(z-h_0)\cos\gamma=\frac{p}{a}\,\frac{\psi}{\psi-\varphi}\,,\\(x-f_0)\cos l+(y-g_0)\cos m+(z-h_0)\cos n=\frac{q}{b}\,\frac{\varphi}{\varphi-\psi}\,,\\(x-f_0)\cos\lambda+(y-g_0)\cos\mu+(z-h_0)\cos\nu=\frac{D\varphi\psi-\frac{1}{2}C(\varphi+\psi)}{\psi-\varphi}.\end{cases}$$

Um die Differentialquotienten der Functionen f_0, g_0, h_0 nach w einfach darstellen zu können, muss man auf die Gleichungen (15) zurückgehen. Wegen der Gleichungen (13) giebt die erste Gleichung (15):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}=\frac{C-D\varphi}{p^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\partial A}{\partial w}+2\,\varphi\,\frac{\partial C}{\partial w}-\varphi^2\,\frac{\partial D}{\partial w}}{p^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+E\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,.$$

Diese Gleichung mit $\frac{1}{p}$ multiplicirt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{1}{p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\Big)=\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{-\frac{1}{2}(C-D\varphi)\frac{\partial A}{\partial w}+(A+C\varphi)\frac{\partial C}{\partial w}}{p}$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi^2}{p^3}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial D}{\partial w}+\frac{E}{p}\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,,$$

wo a durch die Gleichung (34) bestimmt ist. Die vorstehende Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$(43)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{1}{p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\Big)=\frac{1}{p}\Big(\frac{A+C\varphi}{2\,a^2}\,\frac{\partial D}{\partial w}+E\varphi\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$
$$+\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{-\frac{1}{2}(C-D\varphi)\frac{\partial A}{\partial w}+(A+C\varphi)\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}(A+C\varphi)\varphi\frac{\partial D}{\partial w}}{p}\,.$$

Im ersten Terme rechts setze man nach (22) $\frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial w}=-CE$. Es ist dann:

$$\frac{1}{p}\Big(\frac{A+C\varphi}{2\,a^2}\,\frac{\partial D}{\partial w}+E\varphi\Big)=-\frac{AE}{a^2}\,\frac{C-D\varphi}{p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{AE}{a^2}\,\frac{\partial p}{\partial u},$$

da $C-D\varphi=p\,\frac{\partial p}{\partial u}$. Die rechte Seite der Gleichung (43) ist also ein vollständiger Differerentialquotient. Bezeichnet W eine Function von w, so folgt durch Integration:

$$(44)\qquad \frac{1}{p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}=W-\frac{AE}{a^2}\,p$$
$$+\frac{1}{a^2p}\Big\{-\frac{1}{2}(C-D\varphi)\frac{\partial A}{\partial w}+(A+C\varphi)\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}(A+C\varphi)\varphi\frac{\partial D}{\partial w}\Big\}\,.$$

Mittelt dieser Gleichung und der Gleichung (22) erhält man leicht die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{p}{a}=\frac{C-D\varphi}{a}\,W+\frac{p}{a}\,E\varphi\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\,\varphi\,\frac{b}{a}=p\,W\,\frac{b}{a}+\frac{\varphi}{a}\,\frac{\partial b}{\partial w}+\frac{b}{a}\,E\varphi^2$$
$$+\frac{1}{b}\,\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{C}{a}+\frac{A\,\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}\,C\,\frac{\partial A}{\partial w}-A\,(A+1)\,E}{ab}\,.$$

Mit Rücksicht auf diese Differentialquotienten führt die Gleichung (40) zu folgendem Resultate:

$$\frac{1}{\varphi}\,\frac{\partial \xi}{\partial w}-E\,\xi=\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial w}+b\,W\cos\lambda\right)\frac{p}{a\,\varphi} \tag{45}$$
$$+\left\{\frac{\partial f_0}{\partial w}+\frac{C\,W}{a}\cos\alpha-\frac{C}{2\,ab}\,\frac{\partial\cos\lambda}{\partial w}-\frac{\cos\lambda}{2}\,\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{C}{ab}\right.$$
$$\left.+\frac{A\,\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}\,C\,\frac{\partial A}{\partial w}-A^2\,E}{a^3}-b\cos\lambda\right\}\frac{1}{\varphi}$$
$$-E\left(f_0-\frac{C}{2\,ab}\cos\lambda\right)-\frac{D\,W}{a}\cos\alpha+\frac{\cos\lambda}{a}\,\frac{\partial b}{\partial w}+\frac{b}{a}\,\frac{\partial\cos\lambda}{\partial w}=0.$$

In den Gleichungen (31) sind die linken Seiten nur von u und w, die rechten Seiten nur von v und w abhängig, hieraus folgt, dass in den bemerkten Gleichungen jede Seite nur Function von w sein kann. Mit Beziehung hierauf folgt, dass in der Gleichung (45) die rechte Seite von u unabhängig sein muss, was nur stattfindet, wenn die Factoren von $\frac{p}{\varphi}$ und $\frac{1}{\varphi}$ verschwinden. Es ist also:

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial w}+b\,W\cos\lambda=0. \tag{46}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial w}+\frac{C\,W}{a}\cos\alpha-\frac{C}{2\,ab}\,\frac{\partial\cos\lambda}{\partial w}-\frac{\cos\lambda}{2}\,\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{C}{ab} \tag{47}$$
$$+\frac{A\,\frac{\partial C}{\partial w}-\frac{1}{2}\,C\,\frac{\partial A}{\partial w}-A^2\,E}{a^3}-b\cos\lambda=0.$$

Ist ds das Bogenelement, ferner ϱ der Krümmungsradius, r der Torsionsradius, welche den Winkeln α, l etc. entsprechen, so hat man bekanntlich:

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial w}=\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial s}{\partial w}\cos\lambda\,,\qquad \frac{\partial\cos l}{\partial w}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial s}{\partial w}\cos\lambda\,,$$
$$\frac{\partial\cos\lambda}{\partial w}=-\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho}+\frac{\cos l}{r}\right)\frac{\partial s}{\partial w}\,.$$

Die Gleichung (46) giebt dann:

$$\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial s}{\partial w}=-b\,W. \tag{48}$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (45) und (47) über in:

$$(49) \qquad \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \xi}{\partial w} - E\,\xi = - E\left(f_0 - \frac{C}{2\,ab}\cos\lambda\right) + \frac{\cos\lambda}{a}\frac{\partial b}{\partial w} - \left(\frac{1}{\varrho}\frac{a}{b}\cos\alpha + \frac{1}{r}\frac{b}{a}\cos l\right)\frac{\partial s}{\partial w}.$$

$$(50) \qquad \frac{\partial f_0}{\partial w} - \left(\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos l}{r}\right)\frac{C}{2\,ab}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{\cos\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{C}{ab} + \frac{A\dfrac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}C\dfrac{\partial A}{\partial w} - A^2 E}{a^3}\,b\cos\lambda = 0.$$

Multiplicirt und dividirt man in der Gleichung (49) den Factor von $\cos\lambda$ mit C, so lässt sich die Gleichung zur Bestimmung von f_0 auf folgende Form bringen:

$$(51) \quad \frac{\partial f_0}{\partial w} = \left(\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos l}{r}\right)\frac{C}{2\,ab}\frac{\partial s}{\partial w} + \frac{ab}{4\,C}\cos\lambda\,\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{A}{a^2} + \frac{A+1}{b^2}\right).$$

Vertauscht man in den Gleichungen (49) und (50) α, l, λ respective mit β, m, μ und γ, n, ν, so geht f_0 über in g_0 und h_0.

Analog wie die Gleichung (44) erhält man aus der zweiten Gleichung (15):

$$(52) \qquad \frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial w} = W_1 + \frac{(A+1)\,E}{b^2}\,q + \frac{1}{b^2 q}\left\{\frac{1}{2}(D\psi - C)\frac{\partial A}{\partial w} + (A + 1 + C\psi)\left(\frac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}\psi\frac{\partial D}{\partial w}\right)\right\},$$

wo W_1 eine Function von w allein ist. Aus dieser Gleichung und der ersten Gleichung (41) stelle man die rechte Seite der ersten Gleichung (31) her. Da der erhaltene Ausdruck von v unabhängig sein muss, so erhält man entsprechend den Gleichungen (48)—(50) die folgenden:

$$(53) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial w} = - a\,W_1.$$

$$(54) \qquad \frac{1}{\psi}\frac{\partial \xi_1}{\partial w} - E\,\xi_1 = - E\left(f_0 + \frac{C}{2\,ab}\cos\lambda\right) + \frac{\cos\lambda}{b}\frac{\partial a}{\partial w} - \left(\frac{1}{\varrho}\frac{a}{b}\cos\alpha + \frac{1}{r}\frac{b}{a}\cos l\right)\frac{\partial s}{\partial w}.$$

$$(55) \qquad \frac{\partial f_0}{\partial w} - \left(\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos l}{r}\right)\frac{C}{2\,ab}\frac{\partial s}{\partial w} + \frac{\cos\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{C}{ab} + \frac{(A+1)\dfrac{\partial C}{\partial w} - \frac{1}{2}C\dfrac{\partial A}{\partial w} - (A+1)^2 E}{b^3}\,a\cos\lambda = 0.$$

Man beweist ohne Schwierigkeit, dass die rechten Seiten der Gleichungen (49) und (54) identisch sind, wie das auch in Folge der ersten Gleichung (31) der Fall sein muss. Analog wie die Gleichung (50) lässt sich auch die Gleichung (55) auf die Form der Gleichung (51) bringen.

Die Gleichungen (40) und (41) zeigen unmittelbar, dass für ein constantes w jeder der Punkte (ξ, η, ζ) und (ξ_1, η_1, ζ_1) auf einem Kegelschnitte liegt, deren Ebenen normal zu einander sind. Liegt der eine Punkt auf einer Ellipse, so liegt der andere auf einer Hyperbel, je nachdem D eine positive oder negative Grösse ist. Für $D = 0$ ergeben sich zwei Parabeln. Man findet so sehr leicht sämmtliche Eigenschaften der Cyclide wieder wie bei der directen Behandlung des Problems: Die Fläche zu finden, für welche in beiden Systemen von Krümmungslinien der Krümmungshalbmesser längs jeder der bemerkten Curven constant ist.

Die Gleichungen (44) und (52) lassen sich in manchen Fällen leicht integriren, wenn von den Functionen A, C, D, E von w eine oder mehrere constant genommen werden, wobei indessen immer die Relation (22) in Betracht zu ziehen ist. Die arbiträren Constanten, welche die Integration der Gleichungen (44) und (52) involvirt, sind respective gleich arbiträren Functionen von u und v zu setzen.

IV.

Die allgemeinen Gleichungen von I. gestatten eine sehr einfache und elegante Lösung des Problems: Welche Flächen mit einem System planer Krümmungslinien, deren Ebenen die Normalen zur Fläche enthalten, können einem orthogonalen Systeme angehören?

Sind u und w die Argumente der Krümmungslinien, so fordert die Lösung des Problems eine der Gleichungen $\frac{\partial P}{\partial w} \quad 0$ oder $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$. Nimmt man $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$, so reducirt sich die dritte Gleichung (6) von I. auf $\frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial Q}{\partial u} = 0$, also entweder $\frac{\partial R}{\partial v} = 0$ oder $\frac{\partial Q}{\partial u} = 0$. Sei zuerst:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = 0\,, \qquad \frac{\partial R}{\partial v} = 0\,.$$

Wegen der vorstehenden Gleichungen reducirt sich die dritte Gleichung (3) von I. auf:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial w^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial w} \frac{\partial t}{\partial w}\,.$$

Setzt man successive x, y, z statt t, so folgt durch Integration:

$$(1) \qquad \frac{\partial x}{\partial w} = R \cos A\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial w} = R \cos B\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial w} = R \cos C\,,$$

wo A, B, C von w unabhängig sind. Wegen der dritten Gleichung (2) von I. geben die Gleichungen (1):

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1\,,$$

es sind also A, B, C die Winkel, welche eine Richtung, die in Beziehung auf den Parameter w constant ist, mit den Coordinatenaxen bildet.

Nimmt man in den Gleichungen (1):

$$R = \frac{\partial W}{\partial w},$$

wo W eine beliebige Function von w ist, sind X, Y, Z Functionen von u und v, so folgt:

(2) $$x = X + W \cos A, \quad y = Y + W \cos B, \quad z = Z + W \cos C.$$

Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} + W \frac{\partial \cos A}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} + W \frac{\partial \cos A}{\partial v},$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen, der ähnlichen Differentialquotienten von y, z nach u, v und der Gleichungen (1) geben die drei Gleichungen (1) von I.:

(3) $$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \cos A}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial \cos B}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial \cos C}{\partial v} + \\ \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \cos A}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial \cos B}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial \cos C}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial \cos A}{\partial u}\frac{\partial \cos A}{\partial v} + \frac{\partial \cos B}{\partial u}\frac{\partial \cos B}{\partial v} + \frac{\partial \cos C}{\partial u}\frac{\partial \cos C}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \cos A \frac{\partial X}{\partial u} + \cos B \frac{\partial Y}{\partial u} + \cos C \frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \\ \cos A \frac{\partial X}{\partial v} + \cos B \frac{\partial Y}{\partial v} + \cos C \frac{\partial Z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Da nun X, Y, Z nur von u und v abhängen, sonst gänzlich unbestimmte Functionen dieser Variabeln sind, so kann man X, Y, Z als die Coordinaten eines Punktes einer ganz beliebigen Fläche ansehen. Die Gleichungen (4) zeigen dann, dass A, B, C die Winkel sind, welche die Normale im Punkte (X, Y, Z) mit den Coordinatenaxen bildet. Aus den Gleichungen (3) folgt ferner, dass u und v die Argumente der Krümmungslinien der beliebig angenommenen Fläche sind. Die geometrische Interpretation der Gleichungen (1) gestaltet sich hierdurch sehr einfach als ein System paralleler Flächen und den beiden Systemen developpabeler Flächen, gebildet aus den Normalen zu den Krümmungslinien einer beliebigen Fläche des ersten Systems.

Die zweite Annahme $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial u} = 0$ ersetze man durch Vertauschung von u mit w durch die beiden folgenden Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{\partial P}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial w} = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen (4) von I. geben nach (5):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}\right) = 0,$$

d. h. es ist $\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial w}$ nur von w abhängig. Statt t setze man successive x, y, z; haben die Winkel α, l, λ etc. analoge Bedeutungen wie in III., so kann man setzen:

$$(6) \qquad \frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial w} = \cos\lambda, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial w} = \cos\mu, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial w} = \cos\nu.$$

Variiren u und v allein, so repräsentiren die linken Seiten der Gleichungen (6) die Cosinus der Winkel, welche die Normale im Punkte (x, y, z) der Fläche $w =$ const. mit den Coordinatenaxen bildet. Diese Winkel sind von u und v unabhängig, d. h. die Fläche $w =$ const. ist eine Ebene. Sind f, g, h Functionen von w, so ist die Fläche, für welche w constant ist, bestimmt durch:

$$(x - f)\cos\lambda + (y - g)\cos\mu + (z - h)\cos\nu = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch:

$$\begin{vmatrix} x - f, & y - g, & z - h \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos l, & \cos m, & \cos n \end{vmatrix} = 0.$$

Sind X und Y näher zu bestimmende Functionen von u, v, w, so lässt sich die vorstehende Gleichung ersetzen durch:

$$(7) \qquad \begin{cases} x = f + X\cos\alpha + Y\cos l, \\ y = g + X\cos\beta + Y\cos m, \\ z = h + X\cos\gamma + Y\cos n, \end{cases}$$

Die Gleichungen (6) geben:

$$(8) \qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial w}\cos\alpha + \frac{\partial y}{\partial w}\cos\beta + \frac{\partial z}{\partial w}\cos\gamma = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial w}\cos l + \frac{\partial y}{\partial w}\cos m + \frac{\partial z}{\partial w}\cos n = 0. \end{cases}$$

Man kann immer setzen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial w} = \dfrac{\partial W_1}{\partial w}\cos\alpha + \dfrac{\partial W_2}{\partial w}\cos l + W\cos\lambda\,, \\ \dfrac{\partial g}{\partial w} = \dfrac{\partial W_1}{\partial w}\cos\beta + \dfrac{\partial W_2}{\partial w}\cos m + W\cos\mu\,, \\ \dfrac{\partial h}{\partial w} = \dfrac{\partial W_1}{\partial w}\cos\gamma + \dfrac{\partial W_2}{\partial w}\cos n + W\cos\nu\,, \end{cases}$$

wo W, W_1, W_2 Functionen von w sind. Die Gleichungen (8) gehen mittelst der Gleichungen (7) und (9) über in:

$$\frac{\partial W_1}{\partial w} + \frac{\partial X}{\partial w} = 0\,, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial w} + \frac{\partial Y}{\partial w} = 0\,,$$

also:

$$(10)\qquad X = X_1 - W_1\,, \qquad Y = Y_1 - W_2\,,$$

wo X_1 und Y_1 von w unabhängig sind. Mit Weglassung einer Constanten giebt die erste Gleichung (9) durch partielle Integration:

$$f = W_1\cos\alpha + W_2\cos l + \int\left\{W - \frac{W_1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{W_2}{r}\frac{\partial s}{\partial w}\right\}\cos\lambda\,\partial w\,.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichungen (10) wird die erste Gleichung (7):

$$x = X_1\cos\alpha + Y_1\cos l + \int\left\{W - \frac{W_1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{W_2}{r}\frac{\partial s}{\partial w}\right\}\cos\lambda\,\partial w\,.$$

Setzt man einfach W statt $W - \frac{W_1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial w} - \frac{W_2}{r}\frac{\partial s}{\partial w}$, so kann man, unbeschadet der Allgemeinheit, $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ setzen. In Folge der Gleichungen (10) sind dann X und Y in (7) von w unabhängig. Setzt man die Werthe von f, g, h aus (9) in (7), so erhält man schliesslich:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int W\cos\lambda\,\partial w + X\cos\alpha + Y\cos l\,, \\ y = \displaystyle\int W\cos\mu\,\partial w + X\cos\beta + Y\cos m\,, \\ z = \displaystyle\int W\cos\nu\,\partial w + X\cos\gamma + Y\cos n\,. \end{cases}$$

In den vorstehenden Gleichungen ist W eine beliebige Function von w. Da die Werthe von x, y, z der Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

genügen müssen, so erhält man zwischen X und Y die Relation:

$$(12)\qquad \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} = 0\,.$$

Man kann X und Y als die Coordinaten eines Punktes ansehen, welcher zu zwei Systemen von planen Curven gehören kann, je nachdem in den, übrigens willkührlichen, Ausdrücken von X und Y als Functionen von u und v der eine oder andere Parameter constant genommen wird. Die Gleichung (12) zeigt, dass zwei Curven beider Systeme sich orthogonal schneiden, also X und Y zwei beliebigen Systemen orthogonaler, ebener Curven angehören. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich folgende einfache Generation des Systems.

In einer Ebene, welche zwei Systeme orthogonaler Curven enthält, werde ein fester Punkt und zwei zu einander senkrechte, feste Geraden angenommen. Die Ebene bewege sich so, dass der feste Punkt eine Raumcurve C_1 beschreibt, während die beiden festen Geraden dabei den Tangenten und Normalen zur Krümmungsebene einer Raumcurve C parallel sind. Die Curve C_1 hängt der Art von der Curve C ab, dass ihre Tangenten den Hauptnormalen der Curve C parallel sind. Die beiden Systeme orthogonaler Curven beschreiben zwei Flächensysteme, welche in Gemeinschaft der Ebene in ihren verschiedenen Lagen ein orthogonales Flächensystem bilden.

Göttingen, im Mai 1872.