MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Giessen, Prof. F. KLEIN zu Erlangen,
Prof. A. MAYER zu Leipzig, Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Carl Neumann,

Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

VII. Band. 4. Heft.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1874.

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.
1873. 1874.

Bardey, Dr. E., methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 7000 Aufgaben enthaltend, über alle Theile der Elementar-Arithmetik, für Gymnasien, Realschulen und polytechnische Lehranstalten. Dritte Auflage. [XII u. 306 S.] gr. 8. geh. 2 Mark 70 Pf.

— ——— besonderer Abdruck der in der zweiten Auflage neu hinzugekommenen Aufgaben. [XVI S.] gr. 8. geh. 30 Pf.

Die „Resultate" sind durch den Buchhandel nicht zu beziehen, sondern werden von der Verlagshandlung nur an Lehrer direkt geliefert gegen Einsendung von 10 Ngr. in Briefmarken.

Clebsch, Alfred. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde. [55 S.] gr. 8. geh. n. 1 Mark 20 Pf.

Frischauf, J., Professor an der Universität Graz, **absolute Raumlehre** nach Johann Bolyai bearbeitet. [LX u. 96 S.] gr. 8. geh. n. 2 Mark.

Hartig, Dr. **E.,** Professor am königl. Polytechnikum zu Dresden, **Versuche über d. Arbeitsverbrauch d. Werkzeugmaschinen.** A. u. d. T.: Mittheilungen d. polytechnischen Schule zu Dresden. III. Heft. Mit 24 lithogr. Tafeln in Royal-Folio. [243 S.] gr. 8. geh. 20 Mark.

Hesse, Dr. **Otto,** ord. Prof. an d. königl. Polytechnikum zu München, **Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie,** des Punktes und des Kreises in der Ebene. Zweite verbesserte u. vermehrte Auflage. gr. 8. geh. n. 5 Mark 20 Pf.

-- **Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.** Fortsetzung der Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises. gr. 8. [II u. 52 S.] geh. n. 1 Mark 60 Pf.

Hrabák, Josef, Professor an der Bergakademie zu Pribram, **mathematisch-technisches Tabellenwerk.** Eine möglichst vollständige Sammlung von Hilfstabellen für Rechnungen mit und ohne Logarithmen. Nebst Mass-, Gewichts- und Geldrechnungstabellen etc. [VIII u. 445 S.] gr. 8. geh. 8 Mark.

Kirchhoff, Dr. **Gustav,** Professor an der Universität in Heidelberg. **Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik.** Erste Lieferung. [124 S.] gr. 8. geh. n. 4 Mark.

Müller, Dr. **Hubert,** Oberlehrer am Kaiserl. Lyceum in Metz. **Leitfaden der ebenen Geometrie** mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. Erster Theil: Die geradlinigen Figuren und der Kreis. gr. 8. geh. n. 2 Mark.

Neumann, Dr. **Carl,** Professor an der Universität zu Leipzig. **Theorie der elektrischen Kräfte.** Darlegung und Erweiterung der von A. Ampère, F. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff entwickelten mathematischen Theorien. I. Theil. gr. 8. geh. n. 7 Mark 20 Pf.

Salmon, Georg, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Deutsch bearbeitet von Dr. W. Fiedler, Professor am eidgen. Polytechnikum zu Zürich. Dritte Auflage. [XXXV u. 609 S.] gr. 8. geh. n. 14 Mark 40 Pf.

——— **analytische Geometrie der höheren ebenen Curven.** Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. [XVI u. 472 S.] gr. 8. geh. n. 10 Mark.

——— **analytische Geometrie des Raumes.** Deutsch bearbeitet von Dr. Wilh. Fiedler. Erster Theil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. 2. Aufl. gr. 8. [XVI u. 320 S.] geh. n. 8 Mark.

Schlömilch, Dr. **Oskar,** Kgl. Sächs. Geh. Hofrath, Professor an der polytechnischen Schule in Dresden. **Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis.** Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. Mit Holzschnitten im Texte. [VII u. 287 S.] gr. 8. geh. n. 6 Mark.

Schmidt, Dr. **Wilibald, die Brechung des Lichts in Gläsern,** insbesondere die achromatische und aplanatische Objectivlinse. [121 S.] gr. 8. geh. n. 3 Mark 60 Pf.

Schröder, Dr. **E.,** Professor am Pro- und Realgymnasium in Baden-Baden. **Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** für Lehrer und Studirende. Erster Band. Die sieben algebraischen Operationen. [X u. 360 S.] gr. 8. geh. n. 8 Mark.

Schüler, Dr. **W. T.,** Assistent an der polytechnischen Hochschule zu München. **die Arithmetik und Algebra in philosophischer Begründung.** Vorlesungen. I. Theil: Die vier Species mit ganzen und gebrochenen positiven und negativen Grössen und die Determinanten. [VI u. 140 S.] gr. 8. geh. n. 1 Mark.

Weyrauch, Dr. **Jakob, allgemeine Theorie** und Berechnung der kontinuirlichen und einfachen Träger. Für den akademischen Unterricht und zum Gebrauch der Ingenieure. Mit vielen Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. gr. 8. geh. n. 5 Mark 20 Pf.

Wüllner, Dr. **Adolf,** Professor der Physik an der Kgl. polytechnischen Schule zu Aachen. **Lehrbuch der Experimentalphysik.** I. Band: Mechanik und Akustik. Dritte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. gr. 8. [VIII u. 738 S.] gr. 8. n. 9 Mark.

INHALT.

Die Form und Zahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen der Transformationen der ultraelliptischen Functionen für beliebige Transformationsgrade.

Von E. Dorn in Breslau.

Hermite basirt seine Untersuchungen über die Transformation der ultraelliptischen Functionen (Hermite, Théorie de la transformation des fonctions Abéliennes. Paris 1855.) auf die Behandlung des Systemes der 16 ganzzahligen Transformationscoefficienten:

$$(1)\qquad \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix},$$

zwischen denen die Gleichungen bestehen:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_0\,d_1 + b_0\,c_1 - c_0\,b_1 - d_0\,a_1 = 0, \\ a_0\,d_2 + b_0\,c_2 - c_0\,b_2 - d_0\,a_2 = 0, \\ a_0\,d_3 + b_0\,c_3 - c_0\,b_3 - d_0\,a_3 = a_1\,d_2 + b_1\,c_2 - c_1\,b_2 - d_1\,a_2 = k, \\ a_1\,d_3 + b_1\,c_3 - c_1\,b_3 - d_1\,a_3 = 0, \\ a_2\,d_3 + b_2\,c_3 - c_2\,b_3 - d_2\,a_3 = 0. \end{cases}$$

Es gelten sodann folgende Sätze:

Die Determinante des Systemes (1) ist ein vollständiges Quadrat, nämlich k^2. (Hermite pag. 3, 1⁰.)

Die Gleichungen (2) sind gleichbedeutend mit:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_0\,b_3 + a_1\,b_2 - a_2\,b_1 - a_3\,b_0 = 0, \\ a_0\,c_3 + a_1\,c_2 - a_2\,c_1 - a_3\,c_0 = 0, \\ a_0\,d_3 + a_1\,d_2 - a_2\,d_1 - a_3\,d_0 = k, \\ b_0\,c_3 + b_1\,c_2 - b_2\,c_1 - b_3\,c_0 = k, \\ b_0\,d_3 + b_1\,d_2 - b_2\,d_1 - b_3\,d_0 = 0, \\ c_0\,d_3 + c_1\,d_2 - c_2\,d_1 - c_3\,d_0 = 0. \end{cases}$$

(Hermite pag. 7.)

Sind zwei Systeme $a_0 \cdots$, $\alpha_0 \cdots$ den Gleichungen (2) unterworfen, so erhält man durch Zusammensetzung derselben ein neues System $A_0 \ldots$, für welches dieselben ebenfalls gelten, und zwar ist, wenn man die k entsprechende Grösse für das System $\alpha_0 \cdots \varkappa$, für das System $A_0 \cdots K$ nennt:

$$K = k\varkappa.$$

(Hermite, pag. 3, 4.)

Hermite theilt diese Sätze ohne den Beweis mit, der in der That leicht zu führen ist.

Wenn $\varkappa = 1$, nennt Hermite die Systeme $a_0 \cdots$ und $A_0 \cdots$ äquivalent.

Ist k eine Primzahl, so sind, wie Hermite ebenfalls ohne Beweis angiebt, die nicht äquivalenten Systeme repräsentirt durch folgende vier Grundformen:

$$\text{I.}\ \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix},\ \text{II.}\ \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix},\ \text{III.}\ \begin{Bmatrix} k & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},\ \text{IV.}\ \begin{Bmatrix} k & 0 & i & i' \\ 0 & k & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

worin i, i', i'' sämmtliche Werthe $0, 1 \cdots k-1$ annehmen können. Es giebt also $1 + k + k^2 + k^3$ Klassen der Transformationen. (Hermite, pag. 4, 3^0, 4^0.)

Ich stelle mir die Aufgabe, die Form und Zahl der Repräsentanten der nicht äquivalenten Transformationen für beliebige k zu ermitteln.

Ich hatte ursprünglich die Aufgabe so gelöst, dass ich direct den Repräsentanten aufsuchte, mit welchem die vorgelegte Transformation äquivalent ist. Indessen verlangt diese Behandlungsweise ziemlich complicirte Untersuchungen über die Möglichkeit simultaner Lösungen gewisser Congruenzen, und ich habe es einfacher gefunden, durch successive Anwendung mehrerer lineärer Transformationen auf den Repräsentanten zu gelangen. Auf die Brauchbarkeit des successiven Verfahrens war ich bei der Behandlung einer andern Transformationsaufgabe von Hrn. Prof. Richelot aufmerksam gemacht.

Die Operation der Zusammensetzung zweier Systeme werde durch ein zwischengesetztes $\times$ bezeichnet. Ich suche nun zunächst zu machen:

$$(4)\qquad \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & b_1' & b_2' & b_3' \\ 0 & c_1' & c_2' & c_3' \\ 0 & d_1' & d_2' & d_3' \end{Bmatrix},$$

worin die $a_0 \cdots$ die Gleichungen (2) und (3) erfüllen, und die $\alpha_0 \cdots$ entsprechende Gleichungen, in denen nur k durch 1 zu ersetzen ist.

Das Verschwinden der drei letzten Coefficienten in der ersten Colonne ergiebt die Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} 0 = b_0\,\alpha_0 + b_1\,\beta_0 + b_2\,\gamma_0 + b_3\,\delta_0\,, \\ 0 = c_0\,\alpha_0 + c_1\,\beta_0 + c_2\,\gamma_0 + c_3\,\delta_0\,, \\ 0 = d_0\,\alpha_0 + d_1\,\beta_0 + d_2\,\gamma_0 + d_3\,\delta_0\,. \end{cases}$$

Mit Benutzung der Gleichungen (2) erhält man hieraus:

$$(6)\qquad \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 : \delta_0 = d_3 : d_2 : -d_1 : -d_0\,.$$

Da die Determinante des Systems $\alpha_0 \cdots$ 1 ist, dürfen α_0, β_0, γ_0, δ_0 keinen gemeinsamen Factor besitzen und sind demnach durch (6) vollkommen bestimmt.

Man suche nun irgend ein Werthsystem α_3, β_3, γ_3, δ_3, welches der Gleichung genügt:

$$(7)\qquad \alpha_0\delta_3 + \beta_0\gamma_3 - \gamma_0\beta_3 - \delta_0\alpha_3 = 1\,,$$

und bestimme die Grössen α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2 aus folgenden Gleichungen (welche (3) entsprechen):

$$(8)\qquad \begin{cases} \text{a)}\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \alpha_3\beta_0 - \alpha_0\beta_3 = \nu_1\,, \\ \text{b)}\ \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 = \alpha_3\gamma_0 - \alpha_0\gamma_3 = \nu_2\,, \\ \text{c)}\ \alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1 = 1 + \alpha_3\delta_0 - \alpha_0\delta_3 = \dfrac{1-\nu_3}{2}\,, \\ \text{d)}\ \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = 1 + \beta_3\gamma_0 - \beta_0\gamma_3 = \dfrac{1+\nu_3}{2}\,, \\ \text{e)}\ \beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1 = \beta_3\delta_0 - \beta_0\delta_3 = \nu_4\,, \\ \text{f)}\ \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 = \gamma_3\delta_0 - \gamma_0\delta_3 = \nu_5\,. \end{cases}$$

Dass übrigens, wenn man die rechte Seite von c) $\frac{1-\nu_3}{2}$ gesetzt hat, die von d) $\frac{1+\nu_3}{2}$ ist, geht aus (7) hervor.

Ich beweise jetzt, dass die Gleichungen (8) a) $\cdots$ f) in ganzen Zahlen auflösbar sind.

Zunächst nehme ich δ_1 und δ_2 so an, dass sie den grössten gemeinsamen Factor χ von ν_5, ν_4, $\frac{1-\nu_3}{2}$ enthalten, sonst aber weiter keinen besitzen. Enthielte nämlich δ_1 oder δ_2 einen Theiler von χ nicht, so folgte aus den leicht beweisbaren Relationen:

$$\beta_1\nu_5 - \gamma_1\nu_4 + \delta_1\,\frac{1+\nu_3}{2} = 0$$

$$\beta_2\nu_5 - \gamma_2\nu_4 + \delta_2\,\frac{1+\nu_3}{2} = 0$$

dass derselbe in $\frac{1+\nu_3}{2}$ enthalten sein müsste. $\frac{1+\nu_3}{2}$ und $\frac{1-\nu_3}{2}$, deren Summe $= 1$ ist, können aber keinen gemeinsamen Factor besitzen.

Die Gleichungen c) e) f) werden jetzt ganzzahlig aufgelöst. Sind irgend welche Lösungen derselben:

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2;\quad \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2;\quad \mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,$$

so sind sämmtliche Lösungen enthalten in:

$$\mathfrak{A}_1 + m_1 \frac{\delta_1}{\chi},\quad \mathfrak{A}_2 + m_1 \frac{\delta_2}{\chi};$$
$$\mathfrak{B}_1 + m_2 \frac{\delta_1}{\chi},\quad \mathfrak{B}_2 + m_2 \frac{\delta_2}{\chi};$$
$$\mathfrak{C}_1 + m_3 \frac{\delta_1}{\chi},\quad \mathfrak{C}_2 + m_3 \frac{\delta_2}{\chi},$$

wo m_1, m_2, m_3 vorläufig beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Indem man hiemit in a) hineingeht, folgt:

$$\left(\mathfrak{A}_1 + m_1 \frac{\delta_1}{\chi}\right)\left(\mathfrak{B}_2 + m_2 \frac{\delta_2}{\chi}\right) - \left(\mathfrak{A}_2 + m_1 \frac{\delta_2}{\chi}\right)\left(\mathfrak{B}_1 + m_2 \frac{\delta_1}{\chi}\right) = \nu_1,$$

oder:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1 + m_1\left(\mathfrak{B}_2 \frac{\delta_1}{\chi} - \mathfrak{B}_1 \frac{\delta_2}{\chi}\right) + m_2\left(\mathfrak{A}_1 \frac{\delta_2}{\chi} - \mathfrak{A}_2 \frac{\delta_1}{\chi}\right) = \nu_1,$$

oder endlich:

$$(9)\qquad - m_1 \frac{\nu_4}{\chi} + m_2 \frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_1 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1),$$

und ebenso aus b):

$$(10)\qquad - m_1 \frac{\nu_5}{\chi} + m_3 \frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1).$$

Damit die Gleichung (9) lösbar ist, muss ein etwaiger gemeinsamer Factor von $\frac{\nu_4}{\chi}$ und $\frac{1-\nu_3}{2\chi}$, welcher $= \omega$ sei, auch in der rechten Seite enthalten sein.

Wie man sich durch Substitution der Werthe von $\nu_1 \cdots \nu_5$ leicht überzeugt, ist:

$$(11)\qquad \frac{1+\nu_3}{2} \cdot \frac{1-\nu_3}{2} = \nu_2\nu_4 - \nu_1\nu_5,$$

folglich:

$$\frac{1+\nu_3}{2}\,\frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 \frac{\nu_4}{\chi} - \nu_1 \frac{\nu_5}{\chi},$$

und es muss der $\frac{\nu_4}{\chi}$ und $\frac{1-\nu_3}{2\chi}$ noch gemeinsame Factor auch in $\nu_1 \frac{\nu_5}{\chi}$ enthalten sein, also in ν_1, weil eben $\frac{\nu_4}{\chi}$, $\frac{\nu_5}{\chi}$, $\frac{1-\nu_3}{2\chi}$ keinen gemeinsamen Factor mehr besitzen sollen.

Ferner ist nach c) und e):

$$\mathfrak{A}_1 \frac{\delta_2}{\chi} - \mathfrak{A}_2 \frac{\delta_1}{\chi} = \frac{1-\nu_3}{2\chi},$$
$$\mathfrak{B}_1 \frac{\delta_2}{\chi} - \mathfrak{B}_2 \frac{\delta_1}{\chi} = \frac{\nu_4}{\chi}.$$

Der den rechten Seiten gemeinsame Factor ω muss auch in der Determinante $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ enthalten sein, da sonst $\frac{\delta_1}{\chi}$ und $\frac{\delta_2}{\chi}$ noch einen gemeinsamen Factor besässen.

Der Nachweis für die Lösbarkeit von (10) ist ebenso mit Benutzung von c) und f) zu führen.

Wenn irgend eine ganzzahlige Lösung von (9) $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ ist, so sind die sämmtlichen Lösungen:

$$m_1 = \mathfrak{m}_1 + p\,\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}, \quad m_2 = \mathfrak{m}_2 + p\,\frac{\nu_4}{\chi\omega},$$

wo p eine vorläufig beliebige ganze Zahl ist.

Geht man mit dem Werthe von m_1 in (10) hinein, so erhält man:

$$-\left(\mathfrak{m}_1 + p\,\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}\right)\frac{\nu_5}{\chi} + m_3\,\frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1),$$

oder:

$$(12)\quad -p\,\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}\cdot\frac{\nu_5}{\chi} + m_3\,\frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{m}_1\,\frac{\nu_5}{\chi}\,.$$

Damit diese Gleichung nach m_3 und p ganzzahlig lösbar sei, muss die rechte Seite den Factor $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$ enthalten.

Zum Nachweise hievon setze ich in die rechte Seite von (12) aus (9) ein:

$$\mathfrak{m}_1 = \frac{-\nu_1 + (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1) + \mathfrak{m}_2\,\frac{1-\nu_3}{2\chi}}{\left(\frac{\nu_4}{\chi}\right)},$$

und finde:

$$(13)\quad \begin{cases} \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) - \frac{\nu_5}{\nu_4}\left\{\nu_1 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1) - \mathfrak{m}_2\,\frac{1-\nu_3}{2\chi}\right\} \\ = \frac{1}{\nu_4}\left\{\nu_2\nu_4 - \nu_1\nu_5 - \nu_4(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) + \nu_5(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1) + \mathfrak{m}_2\,\frac{1-\nu_3}{2\chi}\,\nu_5\right\}. \end{cases}$$

Der Divisor ν_4 thut hier nichts zur Sache, weil er zu $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$ relativ prim ist.

Das letzte Glied der Klammer in (13) enthält augenscheinlich $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$; die beiden ersten ebenfalls nach (11), und es handelt sich nur noch um:

$$\nu_4(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) - \nu_5(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1).$$

Setzt man für $\nu_4 : \mathfrak{B}_1\delta_2 - \mathfrak{B}_2\delta_1$, für $\nu_5 : \mathfrak{C}_1\delta_2 - \mathfrak{C}_2\delta_1$ so erhält man:

$$(\mathfrak{A}_1\delta_2 - \mathfrak{A}_2\delta_1)(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1) = \frac{1-\nu_3}{2\chi}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1),$$

woraus ersichtlich ist, dass auch hierin $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$ enthalten ist.

Schreibt man die Gleichung (12):

$$m_3\omega - p\,\frac{\nu_5}{\chi} = \frac{1}{\left(\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}\right)}\left\{\nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{m}_1\,\frac{\nu_5}{\chi}\right\},$$

so zeigt sich, dass sie in der That immer ganzzahlige Auflösungen zulässt, weil ω und $\frac{\nu_5}{\chi}$ relativ prim sind.

Die Gleichungen a) b) c) e) f) sind nun erfüllt; und d) ist auch befriedigt, da sie eine Folge der übrigen ist, wie man mit Hülfe von (11) leicht einsieht.

Daraus, dass die Coefficienten $a_0' \cdots$ die Gleichungen (2) befriedigen, folgt noch, dass auch $d_1' = 0$, $d_2' = 0$ werden.

Jetzt suche ich mit Hülfe einer zweiten linearen Transformation zu machen:

$$(14)\quad \begin{Bmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & b_1' & b_2' & b_3' \\ 0 & c_1' & c_2' & c_3' \\ 0 & 0 & 0 & d_3' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0' & \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ 0 & \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ 0 & \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0'' & a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ 0 & b_1'' & b_2'' & b_3'' \\ 0 & 0 & c_2'' & c_3'' \\ 0 & 0 & 0 & d_3'' \end{Bmatrix}.$$

Bei der Zusammensetzung der Systeme ergiebt sich sofort, dass hiezu noch die Gleichung zu erfüllen ist:

$$(15)\qquad c_1'\beta_1' + c_2'\gamma_1' = 0\,,$$

also:

$$(16)\qquad \beta_1' : \gamma_1' = c_2' : -c_1'\,.$$

Den Gleichungen (2) entsprechen hier folgende:

$$(17)\qquad \begin{cases} \alpha_0'\delta_3' = 1\,, \\ \beta_1'\gamma_2' - \gamma_1'\beta_2' = 1\,, \\ \alpha_1'\delta_3' + \beta_1'\gamma_3' - \gamma_1'\beta_3' = 0\,, \\ \alpha_2'\delta_3' + \beta_2'\gamma_3' - \gamma_2'\beta_3' = 0\,. \end{cases}$$

Hienach hat man $\alpha_0' = \delta_3' = 1$ zu setzen, ferner β_1' und γ_1' der Proportion (16) gemäss ohne gemeinsamen Factor anzunehmen. β_2' und γ_2' sind dann aus der zweiten Gleichung (17) zu bestimmen, welche ∞ viele Auflösungen zulässt. Endlich hat man noch zu machen:

$$\alpha_1' = -(\beta_1'\gamma_3' - \gamma_1'\beta_3')\,,$$
$$\alpha_2' = -(\beta_2'\gamma_3' - \gamma_2'\beta_3')\,,$$

wobei es übrigens freisteht, β_3' und $\gamma_3' = 0$ zu setzen, so dass auch α_1' und α_2' verschwinden.

Schliesslich setze ich die Transformation $a_0'' \cdots$ noch einmal mit einer linearen zusammen:

$$
(18)\quad \begin{Bmatrix} a_0'' & a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ 0 & b_1'' & b_2'' & b_3'' \\ 0 & 0 & c_2'' & c_3'' \\ 0 & 0 & 0 & d_3'' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0'' & \alpha_1'' & \alpha_2'' & \alpha_3'' \\ 0 & \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \\ 0 & 0 & \gamma_2'' & \gamma_3'' \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 0 & C_2 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 \end{Bmatrix}.
$$

Hierin ist:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= a_0''\alpha_0'', \quad A_1 = a_0''\alpha_1'' + a_1''\beta_1'', \quad A_2 = a_0''\alpha_2'' + a_1''\beta_2'' + a_2''\gamma_2'', \\
& \qquad\qquad B_1 = b_1''\beta_1'', \quad B_2 = b_1''\beta_2'' + b_2''\gamma_2'', \\
& \qquad\qquad\qquad C_2 = c_2''\gamma_2'', \\
A_3 &= a_0''\alpha_3'' + a_1''\beta_3'' + a_2''\gamma_3'' + a_3''\delta_3'', \\
B_3 &= b_1''\beta_3'' + b_2''\gamma_3'' + b_3''\delta_3'', \\
C_3 &= c_2''\gamma_3'' + c_3''\delta_3'', \\
D_3 &= d_3''\delta_3''.
\end{aligned}
$$

Die Coefficienten a_0'' und d_3'' können, da ihr Product $= k$, entweder beide $+$ oder beide $-$ sein, folglich kann man α_0'' und δ_3'', deren Product $= 1$, immer so wählen, dass A_0 und D_3 positiv werden. Ebenso kann man auch die beiden andern Diagonalcoefficienten positiv machen durch geeignete Annahme von β_1'' und γ_2''.

Zwischen den Grössen $\alpha_0'' \cdots$ bestehen noch folgende Relationen (cf. (3)):

$$
\alpha_0''\gamma_3'' + \alpha_1''\gamma_2'' = 0,
$$
$$
\alpha_0''\beta_3'' + \alpha_1''\beta_2'' - \alpha_2''\beta_1'' = 0,
$$

so dass man nur noch über α_1'', β_2'', α_2'' (und α_3'') verfügen kann, wodurch γ_3'' und β_3'' bestimmt sind.

Man kann nun durch geeignete Wahl von:

$$
(19)\quad \begin{cases} \alpha_1'' \text{ erreichen, dass } 0 \leqq A_1 < A_0, \\ \beta_2'' \quad ,, \quad ,, \quad 0 \leqq B_2 < B_1, \\ \alpha_2'' \quad ,, \quad ,, \quad 0 \leqq A_2 < A_0, \\ \alpha_3'' \quad ,, \quad ,, \quad 0 \leqq A_3 < A_0 \text{ wird.} \end{cases}
$$

B_3 und C_3 sind hiedurch schon bestimmt. Sie genügen den Gleichungen:

$$
(20)\quad \begin{cases} A_0 C_3 + A_1 C_2 = 0, \\ A_0 B_3 + A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0. \end{cases}
$$

Es ist also:

$$
C_3 = -\frac{A_1 C_2}{A_0}
$$

und, weil A_0, A_1, C_2 nicht negativ, mit Berücksichtigung von (19):

$$
0 \geqq C_3 > -C_2.
$$

Ferner ist:

$$
B_3 = -\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_0}.
$$

Da nun beide Glieder des Zählers an sich positiv sind, so folgt wegen (19), dass der absolute Werth von $B_3 < B_1$. Uebrigens kann B_3 positiv wie negativ sein.

Die Transformation $a_0 \cdots$ *ist also mit einer andern* $A_0 \cdots$ *äquivalent, bei der die Coefficienten unter der Diagonale 0, die Diagonalcoefficienten positiv, ferner jeder der noch übrigen Coefficienten absolut kleiner als der Diagonalcoefficient derselben Zeile und* $A_1, A_2, A_3, B \geqq 0$ *sind. Ausserdem befriedigen die Coefficienten die Gleichungen* (20) *und* $A_0 D_3 = B_1 C_2 = k$.

Man überzeugt sich ferner leicht, dass keine zwei Transformationen der eben angegebenen Form unter einander äquivalent sein können, ohne identisch zu sein.

Man kann sie daher als Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen wählen.

Eine nähere Betrachtung zeigt indessen, dass die Coefficienten der Repräsentanten innerhalb der so eben angegebenen Grenzen nicht vollkommen willkührlich sind.

Um daher die Form der Repräsentanten genauer festzustellen und später die Zahl der zu einem gegebenen Transformationsgrade gehörigen zu bestimmen, untersuche ich, welche Systeme*):

$$(21) \qquad \left\{\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{matrix}\right\}$$

mit den Gleichungen vereinbar sind:

$$(22) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_0 d_3 = k, \\ b_1 c_2 = k, \\ a_0 c_3 + a_1 c_2 = 0, \\ a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \end{array}\right.$$

wo a_0, b_1, c_2, d_3 positiv, die übrigen Coefficienten absolut kleiner als die Diagonalcoefficienten derselben Zeile und $a_1, a_2, a_3, b_2 \geqq 0$ sind.

Jedenfalls ist:

$$a_0 = t_0,$$
$$a_1 = t_1,$$

wo t_0 und t_1 Factoren von k sind, und:

---

*) Der Bequemlichkeit wegen ist die Bezeichnung geändert.

$$d_3 = t_3 = \frac{k}{t_0},$$
$$c_2 = t_2 = \frac{k}{t_1}.$$

Der grösste gemeinsame Factor von t_0 und t_1 sei σ_{01} und:

$$t_0 = \sigma_{01}\sigma_{02},$$
$$t_1 = \sigma_{01}\sigma_{13}.$$

σ_{02} und σ_{13} sind relativ prim.

Da $t_0 t_3 = t_1 t_2$, so ist:

$$\sigma_{01}\sigma_{02}t_3 = \sigma_{01}\sigma_{13}t_2.$$

Ich nenne $\frac{t_3}{\sigma_{13}} = \frac{t_2}{\sigma_{02}} : \sigma_{23}$, sodass also:

$$t_2 = \sigma_{02}\sigma_{23},$$
$$t_3 = \sigma_{13}\sigma_{23},$$

und σ_{23} der grösste gemeinsame Factor von t_2 und t_3 ist.

Der grösste gemeinsame Factor von σ_{01} und σ_{23} sei f, und:

$$\sigma_{01} = f\sigma_{01}'$$
$$\sigma_{23} = f\sigma_{23}',$$

so ist in Folge der vorhergehenden Definitionen f *der grösste gemeinsame Factor von* t_0, t_1, t_2, t_3.

Die dritte Gleichung (22) wird nun:

$$f\sigma_{01}'\sigma_{02}c_3 + a_1 f\sigma_{23}'\sigma_{02} = 0,$$

oder:

$$\sigma_{01}'c_3 + \sigma_{23}'a_1 = 0,$$

und:

$$a_1 = a_1'\sigma_{01}',$$
$$c_3 = -a_1'\sigma_{23}'.$$

Weil $a_1 < t_0$ sein sollte, ist $a_1' < \frac{t_0}{\sigma_{01}'} = f\sigma_{02}$ und besitzt auch $f\sigma_{02}$ Werthe.

Die letzte Gleichung (22) geht über in:

$$f\sigma_{01}'\sigma_{02}b_3 + a_1'\sigma_{01}'b_2 - a_2 f\sigma_{01}'\sigma_{13} = 0,$$

oder:

$$\sigma_{02}b_3 + \frac{a_1'b_2}{f} - a_2\sigma_{13} = 0.$$

Dies ergiebt zunächst die Bedingung:

(23) $$\frac{a_1'b_2}{f} \text{ eine ganze Zahl},$$

(24) $$a_2\sigma_{13} - \frac{a_1'b_2}{f} \equiv 0 \pmod{\sigma_{02}},$$

und liefert sodann:

$$b_3 = \frac{1}{\sigma_{02}}\left(a_2\sigma_{13} - \frac{a_1'b_2}{f}\right).$$

Der grösste gemeinsame Factor von a_1' und f sei φ und:

$$f = \varphi\psi,$$

so folgt aus (23):

$$b_2 = b_2'\psi.$$

Da nun $b_2 < t_1$, so besitzt b_2' für *ein einmal angenommenes* a_1': $\frac{t_1}{\psi} = \sigma_{01}'\varphi\sigma_{13}$ Werthe.

Weil σ_{02} und σ_{13} relativ prim sind, so folgt für ein bestimmtes a_1' und b_2 aus (24) a_2 bis auf Vielfache von σ_{02}. Da nun $a_2 < t_0$, so kann:

$$a_2 = a_2' + m\sigma_{02}, \quad (a_2' < \sigma_{02})$$

$\frac{t_0}{\sigma_{02}} = \sigma_{01}$ Werthe annehmen.

$a_3 < t_0$ ist weiter keiner Beschränkung unterworfen, und hat also t_0 Werthe.

Bei fest angenommenen t_0 und t_1 giebt es für ein bestimmtes a_1':

$$\sigma_{01}'\varphi\sigma_{13} \cdot \sigma_{01} \cdot t_0 = \sigma_{01}' t_0 t_1 \varphi$$

Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen, und für alle a_1':

$$\sigma_{01}' t_0 t_1 \sum_{\varrho=0}^{\varrho=f\sigma_{02}-1} \varphi_\varrho,$$

wo φ_ϱ den grössten gemeinsamen Factor von f und ϱ bedeutet.

Es wird sich also zunächst um die Ausführung der so definirten Summe handeln. Die möglichen Werthe von $\varrho(a_1')$ sind unter der Form darstellbar:

$$\varrho = xf + y,$$

wo:

$$x = 0,\ 1 \cdots (\sigma_{02} - 1),$$
$$y = 0,\ 1 \cdots (f - 1).$$

Der grösste gemeinsame Factor von f und ϱ ist daher auch der grösste gemeinsame Factor von f und y, daher ist obige Summe:

$$\sigma_{02} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=f-1} \varphi_\varrho.$$

Man hat also die Summe der grössten Factoren zu nehmen, welche f mit $0, 1, 2 \cdots f - 1$ gemein hat (wobei 1 auch mitzurechnen ist).

Es sei nun:

$$f = a^\alpha b^\beta \cdots n^\nu,$$

wo $a, b \cdots n$ Primzahlen bedeuten.

Ich bilde die Summe, indem ich untersuche, welchen Beitrag jeder Factor von f zu derselben liefert.

$a^\alpha b^\beta \cdots n^\nu$ ist enthalten in 0 und liefert den Beitrag $a^\alpha b^\beta \cdots n^\nu$.

Der Factor $\varphi = a^{\alpha-\varkappa} b^\beta \cdots n^\nu$ ist enthalten in:

$$1 \cdot \varphi,\ 2 \cdot \varphi \cdots (a^\varkappa - 1) \cdot \varphi.$$

Indessen ist φ nur dann der *grösste* gemeinsame Factor dieser Grössen mit f, wenn die Coefficienten nicht Vielfache von a sind. Es sind also fortzulassen:

$$1 \cdot a \cdot \varphi, \quad 2 \cdot a \cdot \varphi, \quad \cdots (a^{\varkappa-1} - 1)\, a \cdot \varphi.$$

Die Zahl der noch übrig bleibenden Grössen beträgt:

$$(a^{\varkappa} - 1) - (a^{\varkappa-1} - 1) = a^{\varkappa-1}(a - 1).$$

Jede derselben liefert zur Summe den Beitrag $a^{\alpha-\varkappa} b^{\beta} \cdots n^{\nu}$, folglich alle zusammen:

$$(a - 1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta} \cdots n^{\nu}.$$

Da nun $\varkappa = 1, 2 \cdots \alpha$ sein kann, so ist der Beitrag sämmtlicher Factoren der Form $a^{\alpha-\varkappa} b^{\beta} \cdots n^{\nu}$:

$$\alpha(a-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta} \cdots n^{\nu} = f \frac{\alpha(a-1)}{a}.$$

Ebenso liefern die Grössen $a^{\alpha} b^{\beta-\lambda} c^{\gamma} \cdots n^{\nu}$ den Beitrag:

$$\beta(b-1)\, a^{\alpha} b^{\beta-1} c^{\gamma} \cdots n^{\nu} = f \frac{\beta(b-1)}{b} \text{ etc.}$$

Der Factor $a^{\alpha-\varkappa} b^{\beta-\lambda} c^{\gamma} \cdots n^{\nu}$ ist enthalten in $(a^{\varkappa} b^{\lambda} - 1)$ Grössen aus der Reihe $1, 2 \cdots f - 1$. Von diesen sind aber fortzulassen diejenigen, welche eine höhere Potenz von a enthalten, also $(a^{\varkappa-1} b^{\lambda} - 1)$ Grössen, sowie die eine höhere Potenz von b enthaltenden, welche an Zahl sind: $(a^{\varkappa} b^{\lambda-1} - 1)$. Jetzt sind aber zweimal fortgelassen, folglich wieder hinzuzuzählen die $(a^{\varkappa-1} b^{\lambda-1} - 1)$ Grössen, welche sowohl durch höhere Potenzen von a, wie auch durch höhere Potenzen von b theilbar sind. Die Zahl der wirklich in Betracht kommenden Grössen ist also:

$$\begin{aligned}(a^{\varkappa} b^{\lambda} - 1) - (a^{\varkappa-1} b^{\lambda} - 1) - (a^{\varkappa} b^{\lambda-1} - 1) + (a^{\varkappa-1} b^{\lambda-1} - 1) &= \\ = a^{\varkappa-1} b^{\lambda-1} (a-1)(b-1)&,\end{aligned}$$

und der Beitrag zur Summe:

$$(a-1)(b-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma} \cdots n^{\nu} = f \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b}.$$

Da nun aber $\varkappa$ und λ die Werthe $1, 2 \cdots \alpha$ resp. $1, 2 \cdots \beta$ besitzen dürfen, so giebt es $\alpha\beta$ Factoren von f, welche obige Form haben und zur Summe:

$$f \frac{\alpha(a-1)}{a} \cdot \frac{\beta(b-1)}{b}$$

beitragen.

Man übersieht schon, wie dies Verfahren sich weiter fortsetzen lässt. Die ganze Summe wird hienach:

$$f\left\{1+\frac{\alpha(a-1)}{a}+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}\frac{\gamma(c-1)}{c}\right.$$
$$+\frac{\beta(b-1)}{b}+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\gamma(c-1)}{c}+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}\frac{\delta(d-1)}{d}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\left.+\frac{\nu(n-1)}{n}+\frac{\mu(m-1)}{m}\frac{\nu(n-1)}{n}+\frac{\lambda(l-1)}{l}\frac{\mu(m-1)}{m}\frac{\nu(n-1)}{n}+\cdots+\frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}\cdots\frac{\nu(n-1)}{n}\right\}$$
$$=f\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\left(1+\frac{\beta(b-1)}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right).$$

Die Anzahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen ist somit für dasselbe t_0 und t_1:

$$\text{(25)}\quad \begin{cases} \sigma_{01}'\sigma_{02}\,f\,t_0\,t_1\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\left(1+\frac{\beta(b-1)}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right) \\ \qquad = t_0^2 t_1\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\left(1+\frac{\beta(b-1)}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right). \end{cases}$$

Wenn k *keine quadratischen Factoren enthält*, wird $f=1$, denn f, welches in t_0, t_1, t_2, t_3 als Factor enthalten sein sollte, müsste für $k=t_0t_3$ einen Factor f^2 zur Folge haben. Die Exponenten $\alpha, \beta\cdots\nu$ werden 0 und die Anzahl der Repräsentanten für ein bestimmtes t_0 und t_1 reducirt sich auf:

$$t_0^2\,t_1,$$

also die Zahl der sämmtlichen zum Transformationsgrade k gehörigen Repräsentanten:

$$\Sigma\,t_0^2\,t_1,$$

wo für t_0 und t_1 sämmtliche Factoren von k zu setzen sind. Weil es freisteht, bei jedem t_0 t_1 seine sämmtlichen Werthe durchlaufen zu lassen, kann obige Summe geschrieben werden:

$$\Sigma t_0^2\,\Sigma t_1.$$

Wenn nun:

$$k=p_1p_2\cdots p_n,$$

wo die p Primzahlen bedeuten, so ist:

$$\begin{aligned}\Sigma t_1 &= 1+(p_1+p_2+\cdots p_n)+(p_1p_2+p_1p_3+\cdots p_{n-1}p_n)\\ &\quad+(p_1p_2p_3+\cdots\;)+\cdots\cdots+p_1p_2\cdots p_n\\ &=(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_n),\\ \Sigma t_0^2 &= 1+(p_1^2+p_2^2+\cdots p_n^2)+(p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2+\cdots p_{n-1}^2p_n^2)\\ &\quad+(p_1^2p_2^2p_3^2+\cdots\;)+\cdots\cdots+p_1^2p_2^2\cdots p_n^2\\ &=(1+p_1^2)(1+p_2^2)\cdots(1+p_n^2),\end{aligned}$$

und die Anzahl der Repräsentanten:

$$\prod_{k=1}^{k=n}(1+p_k+p_k^2+p_k^3),$$

welche Formel das Resultat von Hermite für einen primzahligen Transformationsgrad in sich schliesst.

Ich wende mich jetzt dazu für *beliebige* k die Gesammtzahl der Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen zu ermitteln.

Ich habe dazu:

$$\Sigma t_0^2 t_1 \left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\left(1+\frac{\beta(b-1)}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right) \tag{26}$$

auszudehnen über alle t_0 und t_1, welche Factoren von k sind, und es sind $\alpha, \beta \cdots \nu$ dadurch für jedes Werthepaar t_0, t_1 definirt, dass der grösste gemeinsame Factor von t_0, t_1, t_2, t_3 ist:

$$f = a^\alpha b^\beta \cdots n^\nu .$$

Die in k enthaltenen Primfactoren $a, b \cdots n$ können darin zu geraden und zu ungeraden Potenzen erhoben vorkommen. Es sei daher:

$$k = a^{2\alpha'} \cdots\cdot d^{2\delta'} \cdot e^{2\varepsilon'+1} \cdots n^{2\nu'+1} .$$

Bei der Bildung der Summe (26) verfahre ich so, dass ich sie zuerst ausdehne über alle Werthsysteme von t_0 und t_1, welche dasselbe f ergeben, und nachher f die sämmtlichen möglichen Werthe ertheile.

Für dasselbe f bleibt der letzte Factor in (26) constant, also habe ich nur:

$$\Sigma t_0^2 t_1$$

für die zu demselben f gehörigen t_0 und t_1 zu nehmen.

Wenn:

$$\left\{\begin{array}{l} t_0 = a^{\alpha_0} \cdots d^{\delta_0} \cdot e^{\varepsilon_0} \cdots n^{\nu_0}, \\ t_1 = a^{\alpha_1} \cdots d^{\delta_1} \cdot e^{\varepsilon_1} \cdots n^{\nu_1}, \end{array}\right. \tag{27}$$

so wird:

$$\Sigma t_0^2 t_1 = \Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} \cdots d^{2\delta_0+\delta_1} \cdot e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1} \cdots n^{2\nu_0+\nu_1}, \tag{28}$$

oder, da die α_0 und α_1 ihre sämmtlichen Werthe durchlaufen können, während die übrigen Exponenten constant bleiben, etc.:

$$\Sigma t_0^2 t_1 = \Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} \cdots\cdot \Sigma d^{2\delta_0+\delta_1} \cdot \Sigma e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1} \cdots \Sigma n^{2\nu_0+\nu_1}. \tag{28a}$$

Ich schreite jetzt zur Bestimmung von $\Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1}$ und $\Sigma e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1}$, welche eine gesonderte Behandlung erfordern.

Da:

$$t_3 = \frac{k}{t_0} = a^{2\alpha' - \alpha_0} \ldots d^{2\delta' - \delta_0} \cdot e^{2\varepsilon' + 1 - \varepsilon_0} \ldots n^{2\nu' + 1 - \nu_0},$$

$$t_2 = \frac{k}{t_1} = a^{2\alpha' - \alpha_1} \ldots d^{2\delta' - \delta_1} \cdot e^{2\varepsilon' + 1 - \varepsilon_1} \ldots n^{2\nu' + 1 - \nu_1},$$

so sind für α_0 und α_1 alle diejenigen Combinationen zu nehmen, welche als grössten gemeinsamen Factor von

$$a^{\alpha_0}, \quad a^{\alpha_1}, \quad a^{2\alpha' - \alpha_1}, \quad a^{2\alpha' - \alpha_0}$$

a^α ergeben.

Wenn nun nicht gerade $\alpha = \alpha'$, so sind diese Werthsysteme:

$$\begin{array}{llll} 1)\ \alpha_0 = \alpha, & \alpha_1 = \alpha + \lambda, & \\ 2)\ \alpha_0 = 2\alpha' - \alpha, & \alpha_1 = \alpha + \lambda, & \lambda = 0, 1, 2 \cdots 2(\alpha' - \alpha), \\ 3)\ \alpha_0 = \alpha + \mu, & \alpha_1 = \alpha, & \\ 3)\ \alpha_0 = \alpha + \mu, & \alpha_1 = 2\alpha' - \alpha, & \mu = 1, 2 \cdots 2(\alpha' - \alpha) - 1. \end{array}$$

Ist $\alpha = \alpha'$, so giebt es nur einen möglichen Fall:

$$\alpha_0 = \alpha', \quad \alpha_1 = \alpha'.$$

Hienach ist:

$$\Sigma a^{2\alpha_0 + \alpha_1} = (a^{3\alpha} + a^{4\alpha' - \alpha}) \sum_{\lambda=0}^{\lambda = 2(\alpha' - \alpha)} a^\lambda + (a^{3\alpha} + a^{2\alpha' + \alpha}) \sum_{\mu=1}^{\mu = 2(\alpha' - \alpha) - 1} a^{2\mu},$$

oder nach Ausführung der Summen und einigen Reductionen:

$$(29) \quad \Sigma a^{2\alpha_0 + \alpha_1} = \mathfrak{S}_{a,\alpha} = \frac{a^{3\alpha}}{a^2 - 1} \left\{ (a^{6(\alpha' - \alpha)} - 1)(1 + a + a^2) - a^{4(\alpha' - \alpha) + 1} + a^{2(\alpha' - \alpha) + 1} \right\}.$$

Wenn $\alpha = \alpha'$, so ist:

$$(30) \qquad \Sigma a^{2\alpha_0 + \alpha_1} = \mathfrak{S}_{a,\alpha'} = a^{3\alpha'}.$$

Ganz analog sind den ε_0 und ε_1 solche Werthsysteme beizulegen, dass:

$$e^{\varepsilon_0}, \quad e^{\varepsilon_1}, \quad e^{2\varepsilon' + 1 - \varepsilon_1}, \quad e^{2\varepsilon' + 1 - \varepsilon_0}$$

den grössten gemeinsamen Factor e^ε besitzen, also:

$$\begin{array}{llll} 1)\ \varepsilon_0 = \varepsilon, & \varepsilon_1 = \varepsilon + \lambda, & \\ 2)\ \varepsilon_0 = 2\varepsilon' + 1 - \varepsilon, & \varepsilon_1 = \varepsilon + \lambda, & \lambda = 0, 1, \cdots 2(\varepsilon' - \varepsilon) + 1, \\ 3)\ \varepsilon_0 = \varepsilon + \mu, & \varepsilon_1 = \varepsilon, & \\ 4)\ \varepsilon_0 = \varepsilon + \mu, & \varepsilon_1 = 2\varepsilon' + 1 - \varepsilon, & \mu = 1, 2, \cdots 2(\varepsilon' - \varepsilon), \end{array}$$

und man findet:

$$(31) \begin{cases} \Sigma e^{2\varepsilon_0 + \varepsilon_1} = \mathfrak{U}_{e,\varepsilon} = (e^{3\varepsilon} + e^{4\varepsilon' - \varepsilon + 2}) \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda = 2(\varepsilon' - \varepsilon) + 1} e^\lambda + (e^{3\varepsilon} + e^{2\varepsilon' + \varepsilon + 1}) \sum\limits_{\mu=1}^{\mu = 2(\varepsilon' - \varepsilon)} e^{2\mu} \\ \qquad = \dfrac{e^{3\varepsilon}}{e^2 - 1} \left\{ (e^{6(\varepsilon' - \varepsilon) + 3} - 1)(1 + e + e^2) - e^{4(\varepsilon' - \varepsilon) + 3} + e^{2(\varepsilon' - \varepsilon) + 2} \right\}. \end{cases}$$

Der Fall $\varepsilon = \varepsilon'$ ordnet sich hier der allgemeinen Formel unter.

Die Zahl der Repräsentanten, bei denen $f = a^\alpha \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot d^\delta \cdot e^\varepsilon \cdot \cdot n^\nu$ ist also:

$$(32)\quad \mathfrak{S}_{a,\alpha}\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\cdots\mathfrak{S}_{d,\delta}\left(1+\frac{\delta(d-1)}{d}\right)\cdot\mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right)\cdots\mathfrak{U}_{n,\nu}\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right).$$

Jetzt hat man noch hievon die Summe zu nehmen für sämmtliche f, d. h. $\alpha \cdot\cdot \delta$, $\varepsilon \cdot\cdot \nu$ die Werthe $0, 1 \cdot\cdot \alpha'$; $\cdots 0, 1 \cdot\cdot \delta'$; $0, 1 \cdot\cdot \varepsilon'$; $\cdots 0, 1 \cdots \nu'$ beizulegen.

Da nun wieder α seine sämmtlichen Werthe für jedes System der $\beta \cdots \nu$ durchlaufen kann, so erhält man die Gesammtzahl der Repräsentanten:

$$(33)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'}\mathfrak{S}_{a,\alpha}\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\cdots\sum_{\delta=0}^{\delta=\delta'}\mathfrak{S}_{d,\delta}\left(1+\frac{\delta(d-1)}{d}\right)\cdot\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'}\mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right)\cdots$$
$$\cdots\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu'}\mathfrak{U}_{n,\nu}\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right).$$

Nach (29) und (30) wird nun:

$$(34)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'}\mathfrak{S}_{a,\alpha}\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)=$$
$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'-1}\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\frac{a^{3\alpha}}{a^2-1}\left\{(a^{6(\alpha'-\alpha)}-1)(1+a+a^2)-a^{4(\alpha'-\alpha)+1}+a^{2(\alpha'-\alpha)+1}\right\}$$
$$+\left(1+\frac{\alpha'(a-1)}{a}\right)a^{3\alpha'}.$$

Die einzelnen Summen, auf deren Bildung es ankommt, haben die Form:

$$(35)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'-1}a^{\varrho\alpha}=\frac{a^{\varrho\alpha'}-1}{a^\varrho-1},$$

$$(36)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'-1}\alpha\, a^{\varrho\alpha}=\frac{(\alpha'-1)a^{\varrho\alpha'}}{a^\varrho-1}-\frac{a^{\varrho\alpha'}-a^\varrho}{(a^\varrho-1)^2}.$$

Führt man die Summation aus und reducirt, so findet man schliesslich:

$$(37)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'}\mathfrak{S}\,a,\alpha\left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)=G\,a,\alpha'=$$
$$a^{3\alpha'}+\frac{1}{a-1}\left\{\frac{a^{3\alpha'}-1}{a^3-1}\left(a^{3\alpha'+2}(a^2+1)-1\right)-\frac{a^{\alpha'}-1}{a-1}\,a^{3\alpha'+1}\right\}.$$

Analog wird:

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'}\mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right)=$$
$$\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right)\frac{e^{3\varepsilon}}{e^2-1}\left\{(e^{6(\varepsilon'-\varepsilon)+3}-1)(1+e+e^2)-e^{4(\varepsilon'-\varepsilon)+3}+e^{2(\varepsilon'-\varepsilon)+2}\right\},$$

und nach Ausführung der Summationen und einigen Reductionen:

$$(38)\quad \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'} \mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right)=U_{e,\varepsilon'}=$$

$$e^{3\varepsilon'}(1+e+e^2+e^3)+\frac{1}{e-1}\left\{\frac{e^{3\varepsilon'}-1}{e^3-1}(e^{3\varepsilon'+5}(e^2+1)-1)-\frac{e^{\varepsilon'}-1}{e-1}e^{3\varepsilon'+3}\right\}.$$

Die Anzahl der nicht äquivalenten Klassen, welche zum Transformationsgrade:

$$k=a^{2\alpha'}\cdots d^{2\delta'}\cdot e^{2\varepsilon'+1}\cdots n^{2\nu'+1}$$

gehören, ist also:

$$G_{a,\alpha'}\cdots G_{d,\delta'}\cdot U_{e,\varepsilon'}\cdots U_{n,\nu'},$$

worin G und U durch (37) *und* (38) *definirt sind.*

Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung.

Von Dr. O. Dersch in Offenbach a. M.

Die Aufgabe, welche ich in nachstehender Abhandlung behandle, besteht darin, eine allgemeine Gleichung für diejenige Curve zu finden, die durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung geht. Bevor ich hierzu übergehe, suche ich erst die Aufgabe zu lösen, auf welcher Curve diejenigen Schnittpunkte einer Tangente mit einer Curve n^{ter} Ordnung liegen, welche sich nicht in dem Berührungspunkte befinden. Die fragliche Curve wird $(n-2)^{ter}$ Ordnung sein, da die Tangente ausser dem Berührungspunkte noch $n-2$ Punkte mit der Curve n^{ter} Ordnung gemein hat. Ist die erwähnte Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung gefunden, so bietet die eigentliche Aufgabe, die Doppeltangenten zu finden, keine Schwierigkeiten mehr, indem man dann nur noch die Bedingung dafür aufzustellen hat, dass ausser den beiden im Berührungspunkte zusammenfallenden Schnittpunkten der Tangente mit der Curve n^{ter} Ordnung noch 2 andere von den Schnittpunkten zusammenfallen, d. i. die Bedingung dafür, dass die Tangente der Curve n^{ter} Ordnung auch noch die angegebene Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung berührt.

Die zur Lösung der genannten Aufgaben anzuwendenden Operationen werden sich auf einfache Sätze der symbolischen Rechnung, nämlich besonders auf Vertauschung von Buchstaben und auf Anwendung von Identitäten stützen.

Plücker, Jacobi, Clebsch behandelten das Problem der Doppeltangenten. Sie berechneten die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung.

Plücker zeigte „solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes“ Cr. J. Bd. 12, S. 105—108, ferner „Theorie der algebraischen Curven“ 1839, dass die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung $\frac{1}{2}\, n\,(n-2)\,(n^2-9)$ sei.

Jacobi fand dieselbe Zahl in Cr. J. Bd. 40, S. 237 u. f.

Clebsch hat, Cr. J. Bd. 63, S. 186 u. f., diese Jacobi'sche Arbeit in einfacher Form auf folgende Weise reproducirt:

$a_x^n = 0$ sei die Gleichung der gegebenen Curve n^{ter} Ordnung.

Die im Punkte x die Curve $a_x^n = 0$ berührende Tangente hat (wenn y ein beliebiger Punkt der Tangente ist) die Gleichung $a_x^{n-1} a_y = 0 = f_y$. Ferner mag y zugleich ein Punkt irgend einer Geraden $u_y = 0$ sein.

Jeder beliebige Punkt der Geraden, welche durch die Punkte x und y geht, hat die Coordinaten $\mu x + \lambda y$. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve $a_x^n = 0$ erhält man, wenn man $\mu x + \lambda y$ für x in $a_x^n = 0$ einträgt, wodurch sich ergiebt

$$(\mu a_x + \lambda a_y)^n = 0\,.$$

Ersetzt man y durch die aus

$$\left.\begin{array}{l} f_y = a_x^{n-1} a_y = 0 \\ u_y = 0 \end{array}\right\}$$

sich ergebenden Unterdeterminanten (fu), so folgt $a_y = (afu)$.

Aus $(\mu a_x + \lambda a_y)^n = 0$ wird dann $[\mu a_x + \lambda (afu)]^n = 0$.

Die fragliche Discriminante sei $F(x, u)$.

Behauptung: Aus $F(x, u)$ lässt sich der Factor u_x so oft absondern, dass die u im Reste nicht mehr vorkommen.

Beweis: Man setze $\lambda = \varrho v_x$, erhält dadurch

$$[\mu a_x + \varrho v_x (afu)]^n = 0\,.$$

Nach der bekannten Identität

$$\begin{aligned} v_x (afu) &= a_x (vfu) + f_x (avu) + u_x (afv) \\ &= a_x (vfu) + u_x (afv)\,, \text{ weil } f_x = 0\,, \end{aligned}$$

folgt hieraus

$$[(\mu + \varrho (vfu)) a_x + \varrho u_x (afv)]^n = 0 = [\mu' a_x + \lambda' (afv)]^n\,,$$

wobei

$$\text{(I.)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu' = \mu + \varrho (vfu) = \mu + \dfrac{\lambda (vfu)}{v_x} \\[2ex] \lambda' = \qquad \varrho u_x \qquad = \qquad \lambda \dfrac{u_x}{v_x} \end{array} \right.$$

gesetzt ist.

Die Substitutionsdeterminante ist

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{(vfu)}{v_x} \\[2ex] 0 & \dfrac{u_x}{v_x} \end{vmatrix} = \frac{u_x}{v_x}\,.$$

Der Ausdruck $[\mu' a_x + \lambda' (afv)]^n$ unterscheidet sich von dem ursprünglichen Ausdrucke $[\mu a_x + \lambda (afu)]^n$ nur dadurch, dass v an die Stelle von u getreten ist. Durch die Substitution (I.) geht also die Discriminante $F(x, u)$ in $F(x, v)$ über. Die Discriminante einer Function ist eine Invariante derselben. Daher kann sich $F(x, v)$ von $F(x, u)$ nur durch eine Potenz der Substitutionsdeterminante als Factor unterscheiden, folglich

$$F(x, u) = \left(\frac{u_x}{v_x}\right)^\alpha F(x, v),$$

$$\frac{F(x, u)}{u_x^\alpha} = \frac{F(x, v)}{v_x^\alpha}.$$

Hiernach lässt sich aus $F(x, u)$ der Factor u_x so oft absondern, dass der Rest $\frac{F(x, v)}{v_x^\alpha}$ kein u mehr enthält, w. z. b. w.

Der übrig bleibende Factor $\frac{F(x, v)}{v_x^\alpha}$ ist nach Jacobi vom $(n-2)(n^2-9)^{\text{ten}}$ Grade in x.

Erst Hesse bildete, Cr. J. Bd. 36, S. 156 u. f., Cr. J. Bd. 40, S. 260, Cr. J. Bd. 41, S. 292, eine Gleichung für diejenige Curve, auf welcher die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve 4^{ter} Ordnung liegen, und zwar folgendermassen:

$a_x^n = 0$ ist die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung. Die Coordinaten irgend eines Punktes der Geraden, welche durch die Punkte x und y geht, sind $x + \lambda y$. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve $a_x^n = 0$ erhält man, indem man $x + \lambda y$ statt x in $a_x^n = 0$ einträgt, wodurch man bekommt

$$(a_x + \lambda a_y)^n = 0.$$

Die Gerade wird zur Tangente, wenn 2 Schnittpunkte zusammenfallen. Bedingung hierfür ist, dass 2 Wurzeln λ einander gleich werden. Dies tritt ein, wenn die beiden Glieder von niedrigsten Dimensionen verschwinden. Die Tangente wird zur Doppeltangente, wenn ausserdem noch 2 Wurzeln λ einander gleich werden. Bedingung hierfür ist, dass von der Gleichung, welche nach Weglassung der beiden erwähnten Glieder von niedrigsten Dimensionen und Division durch λ^2 bleibt, die Discriminante verschwinde. Diese Bedingung stellte Hesse für $n = 4$ auf und erhielt als Gleichung derjenigen Curve, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve 4^{ter} Ordnung geht, folgende

$$w_1^2 V_{11} + w_2^2 V_{22} + w_3^2 V_{33} + 2 w_2 w_3 V_{23} + 2 w_3 w_1 V_{31} + 2 w_1 w_2 V_{12}$$
$$- 3 w (w_{11} V_{11} + w_{22} V_{22} + w_{33} V_{33} + 2 w_{23} V_{23} + 2 w_{31} V_{31} + 2 w_{12} V_{12}) = 0.$$

ierbei ist $v=0$ die gegebene Curve 4ter Ordnung,

$$w=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix}$$

$$V_{11}=v_{22}v_{33}-v_{23}^2\,,\quad V_{22}=v_{33}v_{11}-v_{31}^2\,,\quad V_{33}=v_{11}v_{22}-v_{12}^2\,,$$
$$V_{23}=v_{12}v_{13}-v_{11}v_{23}\,,\quad V_{31}=v_{23}v_{21}-v_{22}v_{31}\,,\quad V_{12}=v_{31}v_{32}-v_{33}v_{12}\,.$$

Die von Hesse aufgestellte Gleichung ist 14ten Grades in x. Das von mir für $n=4$ erhaltene Resultat lautet

$$(rsf)^2=0\,,$$

wo

$$r_y^2=a_x c_x^2 b_y (abc)^2\,[a_x b_y+b_x a_y]\,,\quad f=a_x^3 a_y\,.$$

Die Uebereinstimmung meines Resultates mit dem von Hesse gefundenen lässt sich, wie folgt, nachweisen.

Hesse's Ausdruck stelle ich zunächst symbolisch dar.

Der 1te Theil

$$w_1^2 V_{11}+w_2^2 V_{22}+w_3^2 V_{33}+2\,w_2 w_3 V_{23}+2\,w_3 w_1 V_{31}+2 w_1 w_2 V_{12}$$
$$=-\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & w_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & w_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & w_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 \end{vmatrix} = w_1 \begin{vmatrix} v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3 q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3 q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$
$$+w_3 \begin{vmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ q_2 q_1 & q_2 q_2 & q_2 q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = w_1 v_2 q_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} - w_2 v_1 q_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$
$$+w_3 v_1 q_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (vqw)\,(w_1 v_2 q_3 - w_2 v_1 q_3 + w_3 v_1 q_2) = K\,.$$

Vertauscht man hierin q mit v und addirt das Resultat zum ursprünglichen K, so erhält man

$$K=\tfrac{1}{2}\,(vqw)\,[w_1(v_2 q_3-q_2 v_3)-w_2(v_1 q_3-q_1 v_3)+w_3(v_1 q_2-q_1 v_2)]$$
$$=\tfrac{1}{2}\,(vqw)\,(vqw)=\tfrac{1}{2}\,(vqw)^2\,.$$

$$v=a_x^4\,,$$

folglich

$$v_{11}=12\,a_x^2 a_{11}\,,\quad v_{12}=12\,a_x^2 a_{12}\,,\quad v_{22}=12\,a_x^2 a_{22}\ \text{etc.},$$

also

$$\tfrac{1}{2}\,(vqw)^2=12\,a_x^2\cdot 12\,b_x^2\cdot\tfrac{1}{2}\,(abw)^2=72\,a_x^2 b_x^2\,(abw)^2\,.$$

$$w = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12\, a_x^2 a_{11} & 12\, a_x^2 a_{12} & 12\, a_x^2 a_{13}' \\ 12\, b_x^2 b_{12} & 12\, b_x^2 b_{22} & 12\, b_x^2 b_{23} \\ 12\, c_x^2\, c_{13} & 12\, c_x^2\, c_{23} & 12\, c_x^2\, c_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 12^3\, a_x^2 b_x^2 c_x^2 \begin{vmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ b_1 b_2 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3 c_3 \end{vmatrix} = 12^3\, a_x^2 b_x^2 c_x^2 a_1 b_2 c_3 (a b c)\,.$$

Vertauscht man hierin b mit c und addirt das Resultat zu w, so folgt

$$w = 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, a_1\, (a b c)\, [b_2 c_3 - b_3 c_2]\,.$$

Durch Vertauschung von a mit b wird

$$w = 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, b_1\, (b a c)\, [a_2 c_3 - a_3 c_2]\,,$$

durch Vertauschung von a mit c wird

$$w = 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, c_1\, (c b a)\, [b_2 a_3 - b_3 a_2]\,,$$

folglich

$$\begin{aligned} 3\,w &= 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, (a b c)\, [a_1 (b c)_{23} + b_1 (c a)_{23} + c_1 (a b)_{23}] \\ &= 6 \cdot 12^2\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, (a b c)\, (a b c)\,, \end{aligned}$$

also

$$w = 288\, a_x^2 b_x^2 c_x^2\, (a b c)^2 = 288\, \alpha_x^6\,,$$

$$w_1 = 6 \cdot 288\, \alpha_x^5 \alpha_1\,, \qquad w_2 = 6 \cdot 288\, \alpha_x^5 \alpha_2 \text{ etc.},$$

folglich

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\, (v q w)^2 &= 72\, a_x^2 b_x^2\, (a b w)^2 = 72\, a_x^2 b_x^2\, (a b w)\, (a b w) = \\ &= 72\, a_x^2 b_x^2\, 6 \cdot 288\, \alpha_x^5\, (a b \alpha)\, 6 \cdot 288\, \beta_x^5\, (a b \beta) \\ &= 72 \cdot 36 \cdot 288^2\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^5 \beta_x^5\, (a b \alpha)\, (a b \beta)\,. \end{aligned}$$

Der 2[te] Theil des Hesse'schen Ausdrucks, d. i.

$$- 3\, w\, (w_{11} V_{11} + w_{22} V_{22} + w_{33} V_{33} + 2 w_{23} V_{23} + 2 w_{31} V_{31} + 2 w_{12} V_{12}),$$

geht aus dem 1[ten] Theile hervor, wenn man

$$w_1^2 = 36 \cdot 288^2\, \alpha_x^5 \beta_x^5 \alpha_1 \beta_1 \text{ durch } w_{11} = 30 \cdot 288\, \alpha_x^4 \alpha_{11}\,,$$

$$w_1 w_2 = 36 \cdot 288^2\, \alpha_x^5 \beta_x^5 \alpha_1 \beta_2 \text{ durch } w_{12} = 30 \cdot 288\, \alpha_x^4 \alpha_{12} \text{ etc.}$$

ersetzt und mit $- 3\, w$ multiplicirt.

Mithin ist der 2[te] Theil

$$= - 3\, w \cdot 72 \cdot 30 \cdot 288\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^4\, (a b \alpha)^2\,.$$

Das von Hesse gefundene Resultat lautet also symbolisch

$$72 \cdot 36 \cdot 288^2 a_x^2 b_x^2 \alpha_x^5 \beta_x^5 (a b \alpha) (a b \beta) - 3 \cdot 30 \cdot 72 \cdot 288\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^4 (a b \alpha)^2 w = 0.$$

Dividirt man durch $72 \cdot 288 \cdot 18$, so folgt

$$2 \cdot 288\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^5 \beta_x^5\, (a b \alpha)\, (a b \beta) - 5\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^4\, (a b \alpha)^2 w = 0\,.$$

Führt man statt w die Grösse $D = \alpha_x^6$ ein, so wird, da $w = 288\, \alpha_x^6$,

$$2\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^5 \beta_x^5 (a b \alpha)(a b \beta) - 5\, a_x^2 b_x^2 \alpha_x^4 (a b \alpha)^2 D = 0 .$$

Mit diesem Resultate ist nun $(rsf)^2 = 0$ zu vergleichen.

$$D = \alpha_x^6 = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2 ,$$
$$\alpha_x^5 \alpha_y = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x c_y ,$$
$$5\, \alpha_x^4 \alpha_y^2 = (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_y^2 + 2 a_x^2 b_x c_x b_y c_y + 2\, a_x b_x^2 c_x a_y c_y] .$$
$$= (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_y^2 + 4 a_x b_x^2 c_x a_y c_y] = (abc)^2 c_x^2 a_x b_y [a_x b_y + 4 b_x a_y] .$$

Zur Abkürzung sei $(a b u)^4 = u_\nu^4$.

Ersetzt man u durch die Unterdeterminanten (xy), so wird
$$(a b u) = a_x b_y - b_x a_y , \quad u_\nu = (\nu x y) ,$$
folglich
$$c_x^2 c_\nu^2 (\nu x y)^2 = c_x^2 (a b c)^2 [a_x b_y - b_x a_y]^2 = (a b c)^2 c_x^2 [2 a_x^2 b_y^2 - 2 a_x b_y b_x a_y]$$
$$= 2 (a b c)^2 c_x^2 a_x b_y [a_x b_y - b_x a_y] .$$

Aus den 3 Gleichungen
$$r_y^2 = \quad a_x c_x^2 b_y (a b c)^2 [a_x b_y + b_x a_y] ,$$
$$5\, \alpha_x^4 \alpha_y^2 = \quad a_x c_x^2 b_y (a b c)^2 [a_x b_y + 4 b_x a_y] ,$$
$$c_x^2 c_\nu^2 (\nu x y)^2 = 2 a_x c_x^2 b_y (a b c)^2 [a_x b_y - b_x a_y]$$
ergiebt sich
$$r_y^2 = \tfrac{3}{10}\, c_x^2 c_\nu^2 (\nu x y)^2 + 2\, \alpha_x^4 \alpha_y^2 .$$

Hieraus folgt
$$(rsf)^2 = \tfrac{9}{100}\, c_x^2 c_\nu^2 d_x^2 d_{\nu_1}^2 (\nu x, \nu_1 x, f)^2 + \tfrac{6}{5}\, \alpha_x^4 c_x^2 c_\nu^2 (\nu x, \alpha, f)^2$$
$$+ 4 \alpha_x^4 \beta_x^4 (\alpha \beta f)^2 .$$

Nun ist aber $(\nu x, \nu_1 x, f) = f_x (\nu \nu_1 x) = 0$, weil $f_x = 0$,
$$(\nu x, \alpha, f) = \alpha_\nu f_x - f_\nu \alpha_x = - f_\nu \alpha_x ,$$
also
$$(rsf)^2 = \tfrac{6}{5}\, \alpha_x^6 c_x^2 c_\nu^2 f_\nu^2 + 4\, \alpha_x^4 \beta_x^4 (\alpha \beta f)^2 .$$

Die Gleichung $(rsf)^2 = 0$ lautet demnach jetzt
$$\tfrac{3}{5}\, \alpha_x^6 c_x^2 c_\nu^2 f_\nu^2 + 2\, \alpha_x^4 \beta_x^4 (\alpha \beta f)^2 = 0 .$$

Ich suche nun das Hesse'sche Resultat in dieselbe Form zu bringen.

Zur Umformung des Hesse'schen Ausdrucks bilde ich die Identität $\alpha_x (a b \beta) - \beta_x (a b \alpha) = a_x (\alpha b \beta) + b_x (a \alpha \beta)$, erhalte hieraus durch Quadriren
$$\alpha_x^2 (a b \beta)^2 + \beta_x^2 (a b \alpha)^2 - 2 \alpha_x \beta_x (a b \alpha)(a b \beta) = a_x^2 (\alpha b \beta)^2 + b_x^2 (a \alpha \beta)^2$$
$$+ 2\, a_x b_x (a \alpha \beta)(\alpha b \beta) ,$$
also
$$2\, \alpha_x \beta_x (a b \alpha)(a b \beta) = \alpha_x^2 (a b \beta)^2 + \beta_x^2 (a b \alpha)^2 - a_x^2 (\alpha b \beta)^2 - b_x^2 (a \alpha \beta)^2$$
$$- 2\, a_x b_x (a \alpha \beta)(\alpha b \beta) ,$$
folglich

$$2a_x^2b_x^2\alpha_x^5\beta_x^5(ab\alpha)(ab\beta)=a_x^2b_x^2\alpha_x^4\beta_x^4[\alpha_x^2(ab\beta)^2+\beta_x^2(ab\alpha)^2-a_x^2(\alpha b\beta)^2$$
$$-b_x^2(a\alpha\beta)^2-2a_xb_x(a\alpha\beta)(\alpha b\beta)]$$
$$=a_x^2b_x^2\alpha_x^4\beta_x^4[2\alpha_x^2(ab\beta)^2-2a_x^2(\alpha b\beta)^2-2a_xb_x(a\alpha\beta)(\alpha b\beta)]\,.$$

Da

$$a_x^4=0,\quad \alpha_x^6=D,\quad a_x^3(a\alpha\beta)=(f\alpha\beta),\quad b_x^3(\alpha b\beta)=(\alpha f\beta)=-(f\alpha\beta),$$

so ist

$$2a_x^2b_x^2\alpha_x^5\beta_x^5(ab\alpha)(ab\beta)=2a_x^2b_x^2\beta_x^4(ab\beta)^2D+2\alpha_x^4\beta_x^4(\alpha\beta f)^2\,.$$

Hesse's Resultat

$$2a_x^2b_x^2\alpha_x^5\beta_x^5(ab\alpha)(ab\beta)-5a_x^2b_x^2\alpha_x^4(ab\alpha)^2D=0$$

geht so über in

$$-3a_x^2b_x^2\beta_x^4(ab\beta)^2D+2\alpha_x^4\beta_x^4(\alpha\beta f)^2=0\,.$$

Der 2te Theil dieses Ausdrucks stimmt mit dem 2ten Theile des für $(rsf)^2$ gefundenen Werthes überein; es bleibt noch übrig, den 1ten Theil, d. i. $-3a_x^2b_x^2\beta_x^4(ab\beta)^2D$, umzuformen.

Um in $a_x^2b_x^2\beta_x^4(ab\beta)^2=d_x^2e_x^2\beta_x^4(de\beta)^2$ die ν einzuführen, benutze ich die beiden Gleichungen

$$5\beta_x^4\beta_y^2=\quad a_xc_x^2b_y(abc)^2[a_xb_y+4b_xa_y]\,,$$
$$c_x^2c_\nu^2(\nu xy)^2=2a_xc_x^2b_y(abc)^2[a_xb_y-b_xa_y]\,,$$

woraus folgt

$$10\beta_x^4\beta_y^2-c_x^2c_\nu^2(\nu xy)^2=10(abc)^2c_x^2a_xb_xa_yb_y\,.$$

Ersetzt man y durch die Unterdeterminanten (de) und multiplicirt mit $d_x^2e_x^2$, so erhält man

$$10\beta_x^4(\beta de)^2d_x^2e_x^2-2d_x^2e_x^2c_x^2c_\nu^2[d_x^2e_\nu^2-d_xe_\nu e_xd_\nu]=$$
$$=10(abc)^2c_x^2d_x^2e_x^2a_xb_x(adc)(bde)\,.$$

Da

$$d_x^3d_\nu=f_\nu\,,\quad e_x^3e_\nu=f_\nu\,,\quad d_x^4=0\,,$$

so wird

$$10\beta_x^4(\beta de)^2d_x^2e_x^2+2f_\nu^2c_x^2c_\nu^2=10(abc)^2c_x^2d_x^2e_x^2a_xb_x(ade)(bde)=10M.$$

Nach Aronhold, Cr. J. Bd. 55, S. 125 u. f. „Theorie der homogenen Functionen 3ten Grades von 3 Veränderlichen", hat der Ausdruck

$$(abc)^2(ade)(bde)c_xd_xe_x$$

die Form

$$(ade)^2a_xd_xe_x=\frac{e_x^3}{6}(abc)(abd)(acd)(bcd).$$

Wendet man diese Operation auf die Form 4ten Grades an, so erhält man für M den Werth

$$\tfrac{1}{6}a_xb_xc_xd_x(abc)(abd)(acd)(bcd)e_x^4=0\,,$$

weil

$$e_x^4=f_x=0.$$

Hiernach lautet die von Hesse gefundene Gleichung, wenn wir den aus der Gleichung

$$10\,\beta_x^4\,(\beta d e)^2 d_x^2 e_x^2 + 2\,f_v^2 c_x^2 c_v^2 = 10\,M = 0$$

sich ergebenden Werth

$$\beta_x^4\,(\beta d e)^2 d_x^2 e_x^2 = \beta_x^4\,(a b \beta)^2 a_x^2 b_x^2 = -\tfrac{1}{5}\,c_x^2 c_v^2 f_v^2$$

eintragen,

$$2\,\alpha_x^4 \beta_x^4\,(\alpha\beta f)^2 + \tfrac{3}{5}\,c_x^2 c_v^2 f_v^2 D = 0\,,$$

welches Resultat mit dem von mir erhaltenen Resultate übereinstimmt.

Salmon hat in phil. mag. for October 1858 eine Methode angegeben, die Doppeltangenten einer allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung zu finden. Diese Methode besteht im Wesentlichen in Folgendem:

Die Tangente einer planen Curve n^{ter} Ordnung trifft ausser im Berührungspunkte die Curve in noch $n-2$ Punkten. Bildet man nun eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch diese $n-2$ Schnittpunkte geht, und stellt die Bedingung dafür auf, dass die angegebene Tangente der Curve n^{ter} Ordnung auch noch diese Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung berührt, so erhält man unmittelbar eine Gleichung, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten befriedigt wird.

Um die Gleichung jener Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu erhalten, bilde man von der Curve n^{ter} Ordnung $a_x^n = 0$ die Polaren $a_x^{n-1} a_y$, $a_x^{n-2} a_y^2$, $\cdots$ allgemein $a_x^{n-h} a_y^h$, ferner von a_x^n, $a_x^{n-1} a_y$, $\cdots$ $a_x^{n-h} a_y^h$ die Hesse'schen Formen $(abc)^2\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}$, $(abc)^2\, a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} a_y b_y c_y$, $\cdots\cdot$ $(abc)^2\, a_x^{n-2-h} b_x^{n-2-h} c_x^{n-2-h} a_y^h b_y^h c_y^h$, also

$$H_h = (abc)^2 a_x^{n-2-h} b_x^{n-2-h} c_x^{n-2-h} a_y^h b_y^h c_y^h = \varphi_{h,x}^{3n-3h-6}\,\psi_{h,y}^{3h} = \chi_{h,x}^{3(n-2)}\,.$$

Die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare von H_h ist

$$D^{n-2} H_h = \chi_{h,x}^{3(n-2)-(n-2)}\,\mu_{h,y}^{n-2} = \chi_{h,x}^{2(n-2)}\,\mu_{h,y}^{n-2}$$

Dieselbe ist in x vom Grade $2(n-2)$, in y vom Grade $n-2$.

Die gesuchte Curvengleichung $r_y^{n-2} = 0$ ist ebenfalls in y vom Grade $n-2$, kann also durch eine Reihe angegebener $(n-2)^{\text{ter}}$ Polaren mit noch zu bestimmenden Coefficienten ausgedrückt werden.

Für $n = 4$ ist

$$r_y^{n-2} = r_y^2 = D^2 H - 3\,D^2 H_1 = (abc)^2 a_x c_x^2 b_y\,[a_x b_y + b_x a_y] = 0\,,$$

für $n = 5$ ist

$$\begin{aligned} r_y^{n-2} = r_y^3 &= D^3 H - 4\,D^3 H_1 + 6\,D^3 H_2 \\ &= (abc)^2 a_x^2 c_x^2 b_y\,[3\,a_x c_x b_y^2 + 6\,b_x c_x a_y b_y + b_x^2 a_y c_y]\,. \end{aligned}$$

Salmon hat hiernach einen Weg angezeigt, das Problem der Doppeltangenten allgemein zu lösen. Nur hat er noch nicht die allgemeine in den Coefficienten und in x rationale Gleichung der Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung aufgestellt, auf welcher die nicht im Berührungspunkte sich befindenden $n-2$ Punkte liegen, die eine Curve n^{ter} Ordnung mit ihrer Tangente gemein hat.

Ganz den von Salmon gegebenen Gang verfolgend, hat Cayley in phil. trans. 1859 diese allgemeine Gleichung aufgestellt. Eleganter Weise hat Cayley Summen von Producten zu gewinnen gesucht, die nicht bloss, wie weiter unten hier, möglichst oft $M = a_x b_x c_x$ und $M_{y^3} = 6\, a_y b_y c_y$, sondern auch noch die Polaren

$$M_y = a_x b_x c_y + a_x c_x b_y + b_x c_x a_y, \quad M_{y^2} = 2(a_x b_y c_y + b_x c_y a_y + c_x a_y b_y)$$

als gemeinsame Factoren besitzen. Salmons Gedankengang ist ebenfalls in meiner Arbeit eingehalten. Die Form, von welcher Cayley ausgeht, stimmt mit der meinen überein. Die einzelnen Operationen der Cayley'schen Arbeit sind jedoch sehr complicirt und schwierig, so dass ich in meiner Arbeit eine andere Methode anwenden wollte. Cayley's Resultat ist selbstverständlich dasselbe, wie das meinige, unterscheidet sich aber wesentlich von ihm durch die Form. Während nämlich Cayley eine Reihe von Polaren aufstellt, treten statt derselben bei mir einfache symbolische Producte auf.

Wie oben angegeben, handelt es sich zunächst darum, eine in x und in den Coefficienten rationale Gleichung $r_y^{n-2} = 0$ für diejenige Curve zu finden, auf welcher die nicht im Berührungspunkte liegenden $n-2$ Schnittpunkte einer Tangente mit einer Curve n^{ter} Ordnung sich befinden.

Die gegebene Curve n^{ter} Ordnung sei $a_x^n = 0$. In irgend einem Punkte x derselben werde eine Tangente $a_x^{n-1} a_y = f_y = 0$ gezogen. Um das Product der Gleichungen der Schnittpunkte dieser Tangente mit der Curve zu finden, nehme man eine beliebige Gerade $u_y = 0$, welche im Punkte y die Gerade $f_y = 0$ schneiden möge. Der Schnittpunkt y beider Geraden soll ferner ein Punkt der Curve $a_y^n = 0$ sein. Es müssen also zusammen die 3 Gleichungen $u_y = 0$, $f_y = 0$, $a_y^n = 0$ bestehen. Trägt man in $a_y^n = 0$ die aus den beiden Gleichungen $u_y = 0$, $f_y = 0$ für y_1, y_2, y_3 sich ergebenden Unterdeterminanten (uf) ein, so erhält man $(auf)^n = 0$ als Bedingung dafür, dass die Gerade $y_y = 0$ die Gerade $f_y = 0$ auf der Curve $a_y^n = 0$ schneidet. $(auf)^n = 0$ ist also das Product der Gleichungen der Schnittpunkte von $f_y = 0$ mit $a_y^n = 0$.

Da $f_y = a_x^{n-1} a_y$, so hat man die Coordinaten der Tangente f_y, d. i. f_1, f_2, f_3 durch die ihnen gleichen symbolischen Ausdrücke $a_x^{n-1} a_1$, $a_x^{n-1} a_2$, $a_x^{n-1} a_3$ oder $b_x^{n-1} b_1$, $b_x^{n-1} b_2$, $b_x^{n-1} b_3$ etc., je nach Forderung der symbolischen Rechnung zu ersetzen.

x ist Berührungspunkt der Tangente; es fallen also zwei von den Schnittpunkten der Tangente $f_y = 0$ und der Curve $a_y^n = 0$ im Punkte x zusammen. Das Product $(auf)^n = 0$ der Gleichungen der Schnittpunkte von $f_y = 0$ mit $a_y^n = 0$ besitzt demnach den Factor u_x^2. Ich suche dasselbe so zu transformiren, dass dieser Factor hervortritt. Ausser dem Berührungspunkte x hat die Tangente $f_y = 0$ mit der Curve $a_y^n = 0$ noch $n-2$ Punkte y gemein. Wenn man in $(auf)^n = 0$ den Factor u_x^2 abgesondert hat, so bleibt noch eine Gleichung $A = 0$ übrig. Man kann, wie wir sehen werden, die Umformung so vornehmen, dass A die Grössen $f_1, f_2, f_3, u_1, u_2, u_3$ nur in der Verbindung $u_1 f_2 - u_2 f_1$, $u_3 f_1 - u_1 f_3$, $u_1 f_2 - u_2 f_1$ enthält. Ist die Transformation in dieser Weise hergestellt, so hat A die Form $(ruf)^{n-2}$. Ersetzt man dann die aus u und f gebildeten Unterdeterminanten durch y_1, y_2, y_3, so erhält man die Form r_y^{n-2}, welche, $=0$ gesetzt, eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt. Diese Curve wird von der Linie f_y in Punkten geschnitten, bei welchen das Product der Gleichungen $(ruf)^{n-2} = 0$ ist, also in denselben Punkten, wie a_y^n.

Wir wollen zunächst den Ausdruck A finden, d. h. $(auf)^n$ in einer passenden Weise transformiren. Ich ersetze demgemäss in 1 Factor (auf) die Coordinaten der Tangente, d. i. f_1, f_2, f_3 durch die ihnen gleichen symbolischen Ausdrücke $b_x^{n-1} b_1$, $b_x^{n-1} b_2$, $b_x^{n-1} b_3$ und erhalte hierdurch

$$(auf)^n = (auf)^{n-1} b_x^{n-1} (aub) = p\,.$$

Vertauscht man hierin a mit b und addirt das durch diese Vertauschung sich ergebende Resultat zu p, so erhält man:

$$\begin{aligned}2p &= (aub)[b_x^{n-1}(auf)^{n-1} - a_x^{n-1}(buf)^{n-1}]\\ &= (aub)[b_x(auf) - a_x(buf)][b_x^{n-2}(auf)^{n-2} + b_x^{n-3}(auf)^{n-3} a_x (buf) + \cdots\\ &\qquad \cdots + a_x^{n-2}(buf)^{n-2}]\,.\end{aligned}$$

Benutzt man hierin die bekannte Identität

$$b_x(auf) = a_x(buf) + f_x(aub) + u_x(abf)\,,$$

welche, da x Berührungspunkt der Tangente f_y, also $f_x = 0$ ist, übergeht in

$$b_x(auf) = a_x(buf) + u_x(abf)\,,$$

so bekommt man

$$\begin{aligned}2p = u_x(aub)(abf)\,[b_x^{n-2}(auf)^{n-2} + b_x^{n-3}(auf)^{n-3} a_x(buf) + \cdots\\ \cdots + a_x^{n-2}(buf)^{n-2}]\,.\end{aligned}$$

Der erhaltene Ausdruck enthält u_x als Factor. Es handelt sich nun darum, einen weiteren Factor u_x abzusondern. Ich ersetze zu diesem Zwecke wieder in einem der symbolischen Factoren die Coordinaten f_1, f_2, f_3 durch ihnen gleiche symbolische Ausdrücke, und zwar ersetze ich diessmal in (abf) die Coordinaten f_1, f_2, f_3 durch $c_x^{n-1}c_1$, $c_x^{n-1}c_2$, $c_x^{n-1}c_3$. Diese Coordinatenersetzung nehme ich in (abf) und nicht in (auf) oder (buf) vor, um im Resultate die gewünschten $n-2$ Factoren von der Form (auf) zu behalten.

Ersetzt man in (abf) die Coordinaten f_1, f_2, f_3 durch $c_x^{n-1}c_1$, $c_x^{n-1}c_2$, $c_x^{n-1}c_3$, so folgt

$$2p = u_x(abu)c_x^{n-1}(abc)[b_x^{n-2}(auf)^{n-2} + b_x^{n-3}(auf)^{n-3}a_x(buf) + \cdots \\ \cdots + a_x^{n-2}(buf)^{n-2}].$$

Ersetzt man die Unterdeterminanten (uf) durch die aus $u_y = 0$, $f_y = 0$ folgenden Werthe y_1, y_2, y_3, so ergiebt sich:

$$2p = u_x(aub)c_x^{n-1}(abc)[b_x^{n-2}a_y^{n-2} + b_x^{n-3}a_y^{n-3}a_x b_y + \cdots + a_x^{n-2}b_y^{n-2}].$$

In diesem Ausdrucke sind in jedem folgenden Gliede die Exponenten von b_x und a_y um 1 geringer, dagegen diejenigen von a_x und b_y um 1 höher, als in dem jedesmaligen vorhergehenden Gliede. Ferner haben in jedem Gliede die Exponenten von a_x und b_x die Summe $n-2$, ebenso die Exponenten von a_y und b_y die Summe $n-2$. Hiernach kann man $2p$ auf folgende Art ausdrücken:

$$2p = u_x(abc)(aub)c_x^{n-1} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda.$$

Hierin ist nun noch ein weiterer Factor u_x abzusondern. Zu einem solchen Factor wird man durch passende Vertauschung der Buchstaben a, b, c und andere einfachen Operationen der symbolischen Rechnung gelangen. Bei der Vertauschung der Buchstaben a, b, c unter sich ändert sich der Ausdruck $a_x b_x c_x$, ebenso $a_y b_y c_y$ nicht. Ich werde möglichst viele Factoren $a_x b_x c_x$ und $a_y b_y c_y$ in $2p$ zu erlangen suchen, so dass, abgesehen von diesen Factoren, in $2p$ immer niederere Potenzen von x und y auftreten. Zu diesem Zwecke verringere ich in $2p$ die Exponenten derjenigen Grössen a_x, b_x, c_x, a_y, b_y, c_y, welche in höchster Potenz vorhanden sind, und vermehre die Exponenten der in geringerer Potenz vorkommenden Grössen.

Der Exponent von c_x^{n-1} ist grösser, als diejenigen von a_x und b_x; ferner treten a_y und b_y in höherer Potenz auf als c_y. Desshalb suche ich $2p$ so zu transformiren, dass Factoren $a_x b_x c_y$ gewonnen werden.

Allgemein sei

$$2p_\mu = a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu u_x(abc)(aub)c_x^{n-1-\mu} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda.$$

Wendet man hierin die bekannte Identität

$$c_x(aub) = a_x(cub) + u_x(acb) + b_x(auc)$$

an, so folgt:

$$2p_\mu = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} [u_x(acb) + a_x(cub) + b_x(auc)] \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

Der erste Theil (I) dieses Ausdrucks enthält den gewünschten Factor u_x^2.

$$(\mathrm{I}) = - u_x^2 a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc)^2 c_x^{n-2-\mu} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa a_y^\lambda .$$

Umzuformen ist nun noch der zweite Theil:

$$(\mathrm{II}) = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} a_x (cub) \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda$$

und der dritte Theil:

$$(\mathrm{III}) = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} b_x (auc) \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

(II) und (III) lassen sich zusammenziehen, wenn man in (II) das Glied für $\varkappa = 0$ und in (III) das Glied für $\lambda = 0$ ausscheidet. Nämlich in (II) hat das Glied für $\varkappa = 0$ den Werth

$$\delta_\mu = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} a_x (cub) a_x^{n-2-\mu} b_y^{n-2-\mu} .$$

Für $\lambda = 0$ in (III) ergiebt sich

$$\gamma_\mu = u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} b_x (auc) b_x^{n-2-\mu} a_y^{n-2-\mu} .$$

Durch Vertauschung von a mit b geht δ_μ in γ_μ über, folglich $\delta_\mu = \gamma_\mu$.

Nach Ausscheidung von δ_μ enthält (II) bloss noch Glieder von $\varkappa = 1$ an. Alle diese Glieder enthalten dann den gemeinschaftlichen Factor $b_x a_y$. Setzt man denselben vor die Summe, so ist $\varkappa + \lambda$ nicht mehr $= n - 2 - \mu$, sondern $= n - 3 - \mu$ zu setzen.

Hiernach ist

$$(\mathrm{II}) = \delta_\mu + u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} a_x (cub) b_x a_y \sum_{\varkappa+\lambda=n-3-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda :$$

In (III) bleiben nach Ausscheidung von γ_μ bloss noch Glieder von $\lambda = 1$ an; alle diese Glieder enthalten den gemeinschaftlichen Factor $a_x b_y$, welchen ich vor die Summe setze. Statt $\varkappa + \lambda = n - 2 - \mu$ ist dann wieder zu schreiben $\varkappa + \lambda = n - 3 - \mu$, folglich

$$(\mathrm{III}) = \gamma_\mu + u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} b_x (auc) a_x b_y \sum_{\varkappa+\lambda=n-3-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda$$

also

$$(\mathrm{II}) + (\mathrm{III}) = 2\delta_\mu + u_x a_x^{\mu+1} b_x^{\mu+1} c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} [a_y(cub) + b_y(auc)] \sum_{\varkappa+\lambda=n-3-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

Nach bekannter Identität

$$a_y(cub) = c_y(aub) + u_y(cab) + b_y(cua)$$

ergiebt sich, da $u_y = (uuf) = 0$,

$$a_y(cub) = c_y(aub) + b_y(cua) = c_y(aub) - b_y(auc),$$

folglich:

$$(\text{II}) + (\text{III}) = 2\delta_\mu + u_x a_x^{\mu+1} b_x^{\mu+1} c_y^{\mu+1} (abc) c_x^{n-2-\mu} (aub) \sum_{\varkappa+\lambda=n-3-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

Dieser Ausdruck ist aber $= 2\delta_\mu + 2p_{\mu+1}$. Mithin ist:

$$2p_\mu = (\text{I}) + 2\delta_\mu + 2p_{\mu+1}.$$

$2p_{n-1}$ verschwindet, also:

$$2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} p_\mu = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} (\text{I}) + 2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \delta_\mu + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=n-2} p_\mu$$

also:

$$2p = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} (\text{I}) + 2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \delta_\mu .$$

Wie oben gefunden, ist:

$$\begin{aligned} 2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \delta_\mu &= 2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} u_x a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc) c_x^{n-2-\mu} a_x (cub) a_x^{n-2-\mu} b_y^{n-2-\mu} \\ &= 2u_x a_x^{n-1} (abc)(cub) \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} b_x^\mu c_x^{n-2-\mu} c_y^\mu b_y^{n-2-\mu} \\ &= 2u_x a_x^{n-1} (abc)(cub) \sum_{\varkappa+\lambda=n-2} b_x^\varkappa c_x^\lambda c_y^\varkappa b_y^\lambda . \end{aligned}$$

Vertauscht man hierin a mit c so folgt:

$$2\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \delta_\mu = -2u_x (abc)(aub) c_x^{n-1} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda .$$

Dieser Ausdruck

$$= -4p,$$

folglich:

$$2p = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} (\text{I}) - 4p$$

$$\begin{aligned} 6p = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} (\text{I}) &= \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} \Big(-u_x^2 a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu (abc)^2 c_x^{n-2-\mu} \sum_{\varkappa+\lambda=n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda\Big) \\ &= -u_x^2 (abc)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-2} a_x^\mu b_x^\mu c_y^\mu c_x^{n-2-\mu} a_x^\lambda b_x^\varkappa a_y^\varkappa b_y^\lambda \\ &= -u_x^2 (abc)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-2} a_x^{\lambda+\mu} b_x^{\mu+\varkappa} c_x^{\varkappa+\lambda} a_y^\varkappa b_y^\lambda c_y^\mu . \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist, wenn man für die y ihre Werthe, nämlich die aus u und f gebildeten Determinanten einführt, das gesuchte Product der Gleichungen der Schnittpunkte der Tangente mit der Curve.

Der erhaltene Ausdruck enthält u_x^2 als Factor; dieser Factor drückt, wie oben erwähnt, aus, dass zwei von den Schnittpunkten der Tangente mit der Curve im Punkte x zusammenfallen, d. h. in x berührt die Tangente die Curve.

Ausser den beiden in x zusammenfallenden Schnittpunkten hat die Tangente $f_y = 0$ mit der Curve n^{ter} Ordnung noch $n-2$ Schnittpunkte y gemein. Der für $6p$ erhaltene Werth enthält ausser dem Factor u_x^2 noch den Ausdruck:

$$(abc)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-2} a_x^{\lambda+\mu} b_x^{\mu+\varkappa} c_x^{\varkappa+\lambda} a_y^{\varkappa} b_y^{\lambda} c_y^{\mu};$$

derselbe ist $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades in y; ich bezeichne ihn mit r_y^{n-2}.

$r_y^{n-2} = 0$ stellt eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit den Variabeln y dar. Jedem Punkte x der Curve entspricht also eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $r_y^{n-2} = 0$, rational in den Coefficienten und in x, welche durch die $n-2$ nicht in x liegenden Schnittpunkte der Tangente mit der Curve geht.

Soll nun die Tangente $f_y = 0$ eine *Doppeltangente* der Curve n^{ter} Ordnung werden, so müssen ausser den beiden im Punkte x zusammenfallenden Schnittpunkten der Tangente mit der Curve noch zwei von den übrigen $n-2$ Schnittpunkten zusammenfallen. Ist diess der Fall, so berührt die Tangente nicht nur die Curve n^{ter} Ordnung, sondern auch die Curve $r_y^{n-2} = 0$, weil die nicht in x liegenden $n-2$ Schnittpunkte auf der Curve $r_y^{n-2} = 0$ liegen. Zur Bestimmung der Doppeltangenten der Curve n^{ter} Ordnung muss man also die Bedingung dafür aufstellen, dass die Tangente $f_y = 0$, welche die Curve im Punkte x berührt, auch die Curve $r_y^{n-2} = 0$ berührt.

Die Bedingung dafür, dass die Gerade $u_y = 0$ die Curve $r_y^{n-2} = 0$ berührt, ist die Gleichung der Curve $r_y^{n-2} = 0$ in Liniencoordinaten; diese Gleichung sei $\Theta = 0$.

Die Coefficienten in Θ sind ganze Functionen von den Coefficienten in r_y^{n-2} und zwar vom Grade $2n-6$. Nun ist

$$r_y^{n-2} = (abc)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=n-2} a_x^{\lambda+\mu} b_x^{\mu+\varkappa} c_x^{\varkappa+\lambda} a_y^{\varkappa} b_y^{\lambda} c_y^{\mu}$$

vom $(2n-4)^{\text{ten}}$ Grade in x; folglich sind die Coefficienten in Θ vom $(2n-6)(2n-4)^{\text{ten}}$ Grade in x.

Θ enthält u im $(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Grade (weil von einem Punkte aus $(n-2)(n-3)$ Tangenten an eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gezogen werden können). In unserm speciellen Falle soll f_y Tangente der Curve $r_y^{n-2} = 0$ sein. Die Coordinaten u_1, u_2, u_3 sind desshalb durch f_1, f_2, f_3 zu ersetzen, wodurch man eine Gleichung $\Omega = 0$ erhält.

$\Omega = 0$ ist die Gleichung derjenigen Curve, auf welcher ein Punkt x liegen muss, damit seine Tangente Doppeltangente wird.

Ω enthält die Liniencoordinaten f_1, f_2, f_3 im $(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Grade, und diese sind wieder vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade in x. Mithin ist

$(n-1)(n-2)(n-3)$ der Grad in x, soweit er von den Grössen f_1, f_2, f_3 der Gleichung $\Omega = 0$ herrührt.

Demnach besitzt Ω den $(n-2)(n^2-9)^{\text{ten}}$ Grad in x, wovon die Coefficienten den Grad $2n-4$, ferner die Liniencoordinaten den $(n-1)(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Grad als Beitrag liefern.

Die Schnittpunkte der gefundenen Curve $\Omega = 0$ mit der Curve $a_x^n = 0$ sind die *Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve* $a_x^n = 0$.

Es mag nun noch zum Schlusse die Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten der Curve $a_x^n = 0$ folgen. Die Curve $\Omega = 0$ hat $n(n-2)(n^2-9)$ Schnittpunkte mit der Curve $a_x^n = 0$ gemein. Jede Doppeltangente absorbirt zwei solcher Schnittpunkte x. Hiernach besitzt eine Curve n^{ter} Ordnung $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten.

Giessen, im September 1873.

Bemerkung über die Abbildung einer gewissen Fläche vierter Ordnung.

Von W. Frahm in Tübingen.

Ein interessantes Beispiel einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden liefert die Complexfläche vierter Ordnung und Classe, deren Herr Klein in einer Note (diese Ann. Bd. II) erwähnt hat. Einen andern bemerkenswerthen Fall bietet diese Fläche dar, wenn sie nur vier Knotenpunkte enthält, welche nicht in einer Ebene liegen. Dann sind auf derselben noch 36 Kegelschnitte und nur vier Paare gerader Linien vorhanden, aber ausser der Abbildung von Clebsch findet eine andere statt, bei der die Abbildungsfunctionen von der fünften Ordnung sind, bei der acht einfache, ein doppelter und ein dreifacher Fundamentalpunkt vorhanden sind, und welche vermittelt wird durch einen willkührlichen Kegelschnitt der Schaar nebst einem Büschel von Raumcurven dritter Ordnung auf der Fläche. Auf diese Abbildung wird man sofort geführt, indem man die Gleichung dieser Fläche aufsucht.

Drei Flächen zweiter Ordnung, welche die Doppelgerade und die vier Knotenpunkte enthalten, haben weitere Punkte nicht gemein. Zwei derselben, etwa φ, ψ, schneiden sich ausser in der Doppelgeraden α noch in einer Raumcurve dritter Ordnung C_3, welche α in zwei Punkten begegnet. Letztere Curve hat also 12 Punkte mit der Fläche (F_4) gemein, die beiden zuletzt erwähnten und die vier Knotenpunkte, welche aber alle doppelt zu rechnen sind. Jede Fläche $\varphi + \mu\psi$ enthält C_3 und schneidet offenbar noch eine weitere C_3' aus F_4 aus, welche ebenfalls die vier Knotenpunkte enthalten muss. Den Factor μ kann man (auf eine Weise) so bestimmen, dass C_3' durch einen beliebigen Punkt von F_4 geht. Lässt man nun diesen Punkt unendlich nahe an die Curve C_3 heranrücken, so fallen beim Uebergange zur Grenze beide Curven zusammen, oder $\varphi + \mu\psi \equiv \Phi$ berührt die Fläche F_4 längs einer Raumcurve dritter Ordnung; es muss also möglich sein, die Gleichung

$F_4 = 0$ mit Hülfe von $\Phi = 0$ in die Form eines vollständigen Quadrats zu bringen, oder es wird*)

$$F_4 = \Psi^2 - \Phi\Phi_0 .$$

Ist daher die Doppelgerade der Schnitt der Ebenen $p = 0$, $q = 0$, so enthalten die Flächen zweiter Ordnung Φ_0, Φ, Ψ alle die Gerade $p = 0$, $q = 0$ und es wird schliesslich F_4 von der Form

$$F_4 = (pa + qa')(pb + qb') - (pc + qc')^2, \tag{1}$$

wo p, q, a, a', b, b', c, c' lineare Functionen der Coordinaten $x_1 \cdots x_4$ sind.

Die Flächen zweiter Ordnung, welche längs der erwähnten Curven dritter Ordnung berühren, bilden die Schaar

$$(pa + qa') + 2\mu(pc + qc') + \mu^2(pb + qb') = 0,$$

wo μ einen veränderlichen Parameter bedeuten soll.

Auch die Regelfläche:

$$\Delta_4\Delta_4 \equiv 4(ab - c'^2)(a'b' - c'^2) - (ab' + a'b - 2cc'^2) = 0$$

berührt offenbar die Fläche F_4 und man beweist leicht, dass sie von den vier Ebenen durch je drei der Knotenpunkte längs eines Kegelschnitts berührt wird. Uebrigens ist die Classe unserer Fläche $= 8$.

Indem wir jetzt zur Abbildung der Fläche übergehen, nehmen wir als Fundamentaltetraeder der Coordinatenbestimmung dasjenige der vier Knotenpunkte und als Gleichungen der Doppelgeraden:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 0.$$

Die allgemeinste Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, welche diese und die Knotenpunkte enthält, ist dann:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)(a_1p_1x_1+\cdots+a_4p_4x_4)-(p_1x_1+\cdots+p_4x_4)(a_1x_1+\cdots a_4x_4)$$
$$= \Sigma\Sigma\, x_i x_k (a_i - a_k)(p_i - p_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$
$$= \begin{vmatrix} x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 1 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \binom{a}{p} = 0.$$

*) Sind u, v, w quadratische Ausdrücke in x_1, $x_2 \cdot\cdot x_4$, so kann offenbar jede Gleichung, welche in u, v, w homogen und quadratisch ist, in die Form gebracht werden: $\Psi^2 - \Phi\Phi_0 = 0$, wie man sofort sieht, indem man zunächst u, v, w

Mithin wird die Gleichung unserer Fläche F_4,

$$\binom{a}{p}\binom{b}{p} - \binom{c}{p}^2 = 0, \tag{2}$$

welche sich ohne Weiteres in folgende drei zerlegen lässt

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma p_i x_i + \lambda \Sigma x_i = 0, \\ &\Sigma a_i p_i x_i + \lambda \Sigma a_i x_i + \mu (\Sigma c_i p_i x_i + \lambda \Sigma c_i x_i) = 0, \\ &\Sigma c_i p_i x_i + \lambda \Sigma c_i x_i + \mu (\Sigma b_i p_i x_i + \lambda \Sigma b_i x_i) = 0, \end{aligned}\right. \tag{2a}$$

oder:

$$\begin{aligned} &\Sigma x_i (p_i + \lambda) = 0, \\ &\Sigma x_i (p_i + \lambda)(a_i + \mu c_i) = 0, \\ &\Sigma x_i (p_i + \lambda)(c_i + \mu b_i) = 0, \end{aligned}$$

Die Auflösung ergiebt

$$\left\{\begin{aligned} \varrho x_1 &= (p_2 + \lambda)(p_3 + \lambda)(p_4 + \lambda) A_1, \\ \varrho x_2 &= (p_1 + \lambda)(p_3 + \lambda)(p_4 + \lambda) A_2, \\ \varrho x_3 &= (p_1 + \lambda)(p_2 + \lambda)(p_4 + \lambda) A_3, \\ \varrho x_4 &= (p_1 + \lambda)(p_2 + \lambda)(p_3 + \lambda) A_4, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

wo die A die aus dem System

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 + \mu c_1 & a_2 + \mu c_2 & a_3 + \mu c_3 & a_4 + \mu c_4 \\ c_1 + \mu b_1 & c_2 + \mu b_2 & c_3 + \mu b_3 & c_4 + \mu b_4 \end{Vmatrix}$$

mit Auslassung von je einer Vertikalreihe gebildeten Determinanten bedeuten. Diese Form zeigt, indem man $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$ für λ, μ setzt, sofort das Vorhandensein eines dreifachen Fundamentalpunktes ($\lambda = 0$, $\nu = 0$) und einer doppelten ($\mu = 0$, $\nu = 0$), sowie acht einfacher, welche auf vier Geraden durch den dreifachen Fundamentalpunkt liegen. Diesen vier Geraden entsprechen auf der Fläche die vier Knotenpunkte, jedem Punkte einer solchen eine durch den entsprechenden Knotenpunkt gehende Richtung. Ebenso entspricht der Geraden $\nu = 0$ auf der Fläche ein einzelner fester Punkt.

Die Gleichungen (2^a) beweisen, dass die Abbildung vermittelt wird durch die Schaar der oben erwähnten Raumcurven dritter Ordnung und einen Ebenenbüschel durch die Doppelgerade, dessen Ebenen jede Curve noch in einem Punkte schneiden.

Dem doppelten Fundamentalpunkte entspricht ein Kegelschnitt der durch die Ebenen des Büschels bestimmten Schaar, dem dreifachen

als Dreieckscoordinaten in der Ebene annimmt. (Cayley, Quarterly Journal Bd. X und XI.)

eine rationale Raumcurve von der mehrfach erwähnten Art, und der Punkt der Fläche, welcher der Geraden $\nu = 0$ entspricht, ist eben der beiden gemeinsame Punkt.

Die Geraden eines Paares liegen auf der Fläche in einer Ebene, welche durch die Doppelgerade und einen der vier Knotenpunkte geht, sie bilden sich ab als zwei einfache Fundamentalpunkte, welche mit dem dreifachen in einer Geraden liegen. Ausser den durch die 4×2 einfachen Fundamentalpunkte abgebildeten vier Paaren giebt es keine Geraden auf der Fläche. Acht Kegelschnitte liegen in den vier Ebenen des Tetraeders der Knotenpunkte; je zwei zusammengehörige werden abgebildet durch drei Gerade, welche den dreifachen Fundamentalpunkt mit sechs einfachen verbinden, und durch das Geradenpaar, welches das übrigbleibende Paar einfacher Fundamentalpunkte mit dem doppelten verbindet. Achtundzwanzig weitere Kegelschnitte liegen auf der Fläche, von denen je zwei sich zu einem ebenen Schnitte ergänzen. Ein solches Paar wird abgebildet durch zwei Kegelschnitte, deren jeder drei einfache Fundamentalpunkte, sowie den doppelten und den dreifachen enthält. Die Kegelschnittschaar wird abgebildet durch einen Strahlbüschel, dessen Centrum der dreifache Fundamentalpunkt ist. Die Discussion der übrigen Curven auf der Fläche möge übergangen werden. Die niedrigste Abbildung erhält man aus der erwähnten, indem man mittelst Cremona'scher Transformationen die Abbildungsfunctionen auf den vierten Grad reducirt. Als Transformationscurven werden Kegelschnitte angewendet, welche durch den doppelten, den dreifachen, und einen beliebigen der einfachen Fundamentalpunkte gehen.

Abbildung der Doppelgeraden. Ein Ebenenbüschel durch die Doppelgerade hat die Gleichung:

$$\Sigma p_i x_i + \theta\, \Sigma x_i = 0 .$$

Setzt man die Werthe von x_i in λ, μ, ν ein, so zerfällt das Resultat in den Factor: $\theta\lambda - \nu$ und in den anderen:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ (\nu p_1 + \lambda)(a_1 + \mu c_1) & (\nu p_2 + \lambda)(a_2 + \mu c_2) & (\nu p_3 + \lambda)(a_3 + \mu c_3) & (\nu p_4 + \lambda)(a_4 + \mu c_4) \\ (\nu p_1 + \lambda)(\nu a_1 + \mu c_1) & (\nu p_2 + \lambda)(\nu a_2 + \mu c_2) & (\nu p_3 + \lambda)(\nu a_3 + \mu c_3) & (\nu p_4 + \lambda)(\nu a_4 + \mu c_4) \end{vmatrix}$$

und dieser, gleich Null gesetzt, stellt die Abbildung der Doppelgeraden dar. Sie ist also eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten im doppelten und im dreifachen Fundamentalpunkte, welche durch die anderen acht Fundamentalpunkte je einmal hindurchgeht.

Mit Hülfe eines Kegelschnittbüschels kann man leicht beliebig viele solche Punktepaare der Abbildung auffinden, welche die einzelnen

Punkte der Doppelgeraden abbilden. Führt man die von der Abbildungscurve herrührenden elliptischen Integrale erster Gattung mit gehörig bestimmten unteren Grenzen ein, so hat man, wenn $b_1 \dots b_8$ die Integrale für die einfachen b, b' beziehungsweise die Summen der beiden Integrale, welche den beiden Doppelpunkten zugehören und u, v die Integrale eines Punktepaares sind, die Gleichung

$$u + v + 3\,b + 2\,b' + b_1 + \cdots + b_8 = 5\,c\,,$$

weil das Paar u, v auf der Abbildung unendlich vieler ebener Schnitte liegt; aber

$$b_1 + b_2 + b = c\,; \qquad b_3 + b_4 + b = c\,;$$
$$b_5 + b_6 + b = c\,; \qquad b_7 + b_8 + b = c\,,$$

daher

$$b_1 + \cdot \cdot + b_8 = 4\,c - 4\,b\,,$$
$$u + v + 2\,b' - b = c\,,$$

ausserdem auch:

$$b + b' = c\,.$$

Bestimmt man nun irgend zwei Punkte mit den Argumenten u', v', welche der Gleichung

$$u' + v' = 2\,b' - b\,,$$

genügen, so ist:

$$u + v + u' + v' + b + b' = 2\,c\,.$$

Die letzte Gleichung aber sagt aus, dass u, v mit den Punkten u', v' und den Doppelpunkten auf einem Kegelschnitte liegen, alle Punktepaare sind mithin bestimmt durch den Schnitt der Abbildung mit dem Büschel der Kegelschnitte durch zwei Punkte u', v' und die Doppelpunkte.

Elmshorn, 18. Juli 1873.

Der Feuerbach'sche Satz von den Berührungskreisen des ebenen Dreiecks.

Von H. Schröter zu Breslau.

Der schöne Satz der Elementargeometrie:

Die vier Kreise, welche die Seiten eines geradlinigen Dreiecks berühren, werden selbst von ein und demselben Kreise berührt, welcher durch die Mitten der Dreiecksseiten geht,

wurde von Feuerbach*) aus den berechneten Werthen der Radien und Mittelpunktsabstände jener beim Dreieck auftretenden Kreise geschlossen; Steiner erwähnt ihn an zwei Orten**), ohne ihn zu beweisen. Die in neuerer Zeit gegebenen Beweise des Satzes***) gehen meist aus algebraisch-trigonometrischen Rechnungen hervor, deren Complication zur Einfachheit des Resultates in Widerspruch steht. Auch der in den Baltzer'schen Elementen mitgetheilte geometrische Beweis von Casey stützt sich auf algebraische Umformungen und entbehrt trotz seiner scheinbaren Kürze wesentlich der Anschaulichkeit. Ein synthetischer Beweis ist kürzlich von Hrn. Lappe†) gegeben worden, der aus den Gesetzen der Kreisberührung hervorgeht. Trotz seiner Einfachheit lässt er doch die eigentliche Natur der vollständigen hiebei in Betracht kommenden Figur nicht in dem Maasse hervortreten, dass der Feuerbach'sche Satz als eine natürliche Folge der Eigenschaften der Figur erschiene, indem z. B. die Berührungspunkte jener Kreise nicht zum Vorschein kommen. Einer solchen Forderung entspricht mehr die von Hrn. C. W. Baur††) ohne Beweis gegebene Construction der gemeinschaftlichen Tangenten jener sich berührenden Kreise; aber ein von Hrn. Schubert†††) hinzugefügter Beweis der-

*) K. W. Feuerbach: Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, Nürnberg 1822, S. 38.

**) Annales de mathématiques p. J. D. Gergonne t. XIX. p. 86 und: „Die geometrischen Constructionen etc. von J. Steiner, Berlin 1833, S. 55.

***) Vgl. Baltzer's Elemente der Mathematik Bd. II., S. 92 und S. 312.

†) Borchardt's Journal Bd. 71, S. 387.

††) Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys. Jahrgang XII., S. 354.

†††) Dieselbe Zeitschrift, Jahrg. XVI., S. 83.

selben erfordert wiederum einen unverhältnissmässigen Aufwand von Rechnung.

Einen aus einer allgemeineren Auffassung des Satzes hervorgehenden Beweis im Zusammenhange mit der Erweiterung derjenigen Eigenschaften des Dreiecks, welche sich auf die sogenannten merkwürdigen Punkte desselben beziehen, habe ich an einem andern Orte*) gegeben; doch ist derselbe nicht ganz elementarer Natur; er setzt vielmehr die Kenntniss der Theorie der Kegelschnitte voraus.

Der in den folgenden Blättern enthaltene Beweis unterwirft die vollständige Figur der vier Berührungskreise eines Dreiecks einer näheren Untersuchung, wobei einige bisher nicht bemerkte Eigenschaften derselben zum Vorschein kommen und führt den Feuerbach'schen Satz auf den Satz von Ptolemäus zurück, jene bekannte Eigenschaft des Kreisvierecks oder Bedingung dafür, dass vier Punkte auf einem Kreise liegen. Insofern diese algebraischer Natur ist, ist es allerdings auch unser Beweis des Feuerbach'schen Satzes. Alle übrigen Lagen- und Grössen-Verhältnisse ergeben sich aber in ungezwungener Weise aus unmittelbarer Anschauung der Figur und führen mit einer gewissen naturgemässen Nothwendigkeit zu dem Feuerbach'schen Satze. Eine weitere Betrachtung der interessanten Figur eröffnet dem Liebhaber elementar-geometrischer Forschung ein empfehlenswerthes Feld für dieselbe und verspricht noch manches neue Resultat.

---

1. Einem ebenen Dreieck ABC, dessen Seiten

$$BC = a \quad CA = b \quad AB = c$$

bezeichnet werden (siehe die Figur**)) lassen sich vier Kreise $m m_1 m_2 m_3$ einschreiben, welche die Dreiecksseiten berühren; der eine m liegt innerhalb des Dreiecks, die drei andern $m_1 m_2 m_3$ ausserhalb desselben und jeder der letzteren berührt nur eine Dreiecksseite zwischen den Ecken, die beiden andern in ihren Verlängerungen, nämlich:

m_1 berührt die Seite a zwischen den Ecken des Dreiecks
m_2 „ „ „ b „ „ „ „ „
m_3 „ „ „ c „ „ „ „ „ .

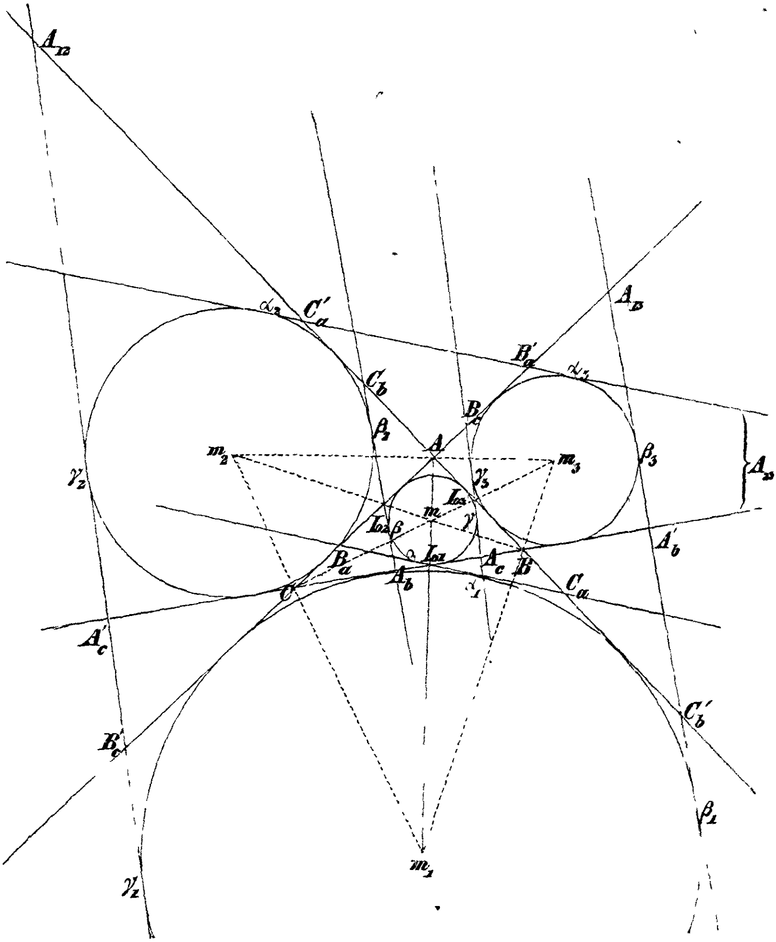
Fassen wir die vollständige Figur dieser vier Kreise $m m_1 m_2 m_3$ in's Auge, so lassen sich dieselben in 6 Paare je zweier ordnen; jedes

---

*) Borchardt's Journal Bd. 68. S. 208.

**) Die Figur enthält nicht alle im Texte eingeführten Buchstaben; die fehlenden sind absichtlich weggelassen, um die Auffassung der Figur zu erleichtern und können ohne Mühe vom Leser hinzugedacht werden.

Paar hat die drei Seiten des Dreiecks zu drei gemeinschaftlichen Tangenten, mithin noch eine *vierte* gemeinschaftliche Tangente. Diese 6 vierten gemeinschaftlichen Tangenten treten dreimal als äussere, dreimal als innere auf und laufen dreimal paarweise (je eine äussere



mit einer inneren) parallel. Denn die vier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise bilden allemal ein symmetrisches Vierseit mit paarweise gleichen Seiten; nun sind die Dreiecksseiten b und c

äussere gem. Tang. für das Kreispaar m und m_1

innere „ „ „ „ „ m_2 „ m_3.

Die dritte Dreiecksseite a dagegen ist

innere gem. Tang. für das Kreispaar m und m_1
äussere „ „ „ „ „ m_2 „ m_3,

folglich schneidet die vierte (innere) gemeinschaftliche Tangente für das Kreispaar m und m_1 die Stücke b und c auf den Dreiecksseiten AC und AB verwechselt ab und ebenso die vierte (äussere) gemeinschaftliche Tangente des Kreispaares m_2 und m_3 nach entgegengesetzter Richtung hin; folglich läuft die letztere mit der ersteren parallel; es laufen also parallel:

vierte (innere) gem. Tang. d. Kreispaars:		vierte (äussere) gem. Tang. d. Kreispaars:
$m\,m_1$	und	$m_2\,m_3$
$m\,m_2$	„	$m_3\,m_1$
$m\,m_3$	„	$m_1\,m_2$.

Es ist auch leicht zu sehen, *welchen* drei Richtungen diese drei Tangentenpaare parallel laufen; denkt man sich die Höhen in dem Dreieck ABC gezogen und merkt die Fusspunkte derselben, so sind die Abschnitte auf zwei in einer Ecke zusammenstossenden Dreiecksseiten von dieser Ecke bis zu den Höhenfusspunkten hin verwechselt den Seiten proportional gerade so, wie die von jenen zwei parallelen Tangenten gebildeten Abschnitte verwechselt die Seiten selbst sind; folglich laufen die obigen drei Tangentenpaare parallel den Seiten des Höhenfusspunkts-Dreiecks und wir haben folgenden Satz:

Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei noch eine vierte gemeinschaftliche Tangente, welche dreimal als äussere, dreimal als innere gemeinschaftliche Tangente auftritt; diese 6 Geraden laufen dreimal paarweise parallel mit den Seiten desjenigen Dreiecks, welches von den Höhenfusspunkten des ursprünglichen gebildet wird und zwar sind jedesmal eine äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente parallel.

2. Von nicht geringerem Interesse, als die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Kreise unseres Kreisquadrupels sind die *Berührungspunkte* derselben; diese zerfallen in zwei Gruppen: 1) die Berührungspunkte der Kreise mit den ursprünglichen Dreiecksseiten (und deren Verlängerungen); 2) die Berührungspunkte der neuen 6 vierten gemeinschaftlichen Tangenten; zu jeder der beiden Gruppen gehören 12 Punkte und diese zweimal 12 Punkte ordnen sich zu Paaren in folgender Art:

Die Dreiecksseite BC oder a werde berührt von den vier Kreisen

$$m\,m_1\,m_2\,m_3$$

beziehungsweise in den Punkten

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3;$$

die Dreiecksseite CA oder b beziehungsweise in den Punkten

$$\mathfrak{b}\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{b}_3\,;$$

die Dreiecksseite AB oder c beziehungsweise in den Punkten

$$\mathfrak{c}\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{c}_2\ \mathfrak{c}_2\ ^{*}).$$

---

*) Diese 12 Berührungspunkte bieten auch an sich eigenthümliche Lagenverhältnisse dar, welche wir, da sie zu dem eigentlichen Zweck, den wir im Auge haben, nicht nothwendig erörtert zu werden brauchen, nur kurz angeben wollen. Diese 12 Berührungspunkte bilden vier den Berührungskreisen einbeschriebene Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_3\,, \end{array}$$

deren Seiten einander durchschneiden in 54 Punkten, welche sich in gewisse Gruppen vertheilen:

Die vier Geraden:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3$$

bilden ein Rechteck, dessen Seiten parallel laufen den beiden Halbirungslinien des Winkels C und dessen Ecken einerseits auf einem Kreise liegen, welcher AB zum Durchmesser hat und anderseits auf den beiden Paaren von Halbirungsstrahlen der Dreieckswinkel A und B.

In ganz gleicher Weise bilden die vier Geraden:

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3$$

ein zweites Rechteck und

$$\mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3$$

ein drittes Rechteck, dessen Ecken in gleicher Weise, wie oben angegeben, gelegen sind.

Die 12 Ecken dieser drei Rechtecke erscheinen in anderer Weise gepaart als Grenzpunkte (Nullkreise) *der sechs Kreisschaaren, welche durch je zwei der vier Berührungskreise bestimmt werden.* (Zwei Kreise haben bekanntlich ein gemeinschaftliches Tripel conjugirter Punkte, von denen einer immer im Unendlichen, die beiden andern auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte liegen und diejenigen beiden ausgezeichneten Punkte sind, welche Grenzpunkte oder Nullkreise heissen und durch welche alle die beiden gegebenen rechtwinklig schneidenden Kreise hindurchgehen.) Da sich die vier Kreise $m m_1 m_2 m_3$ in sechs Paare ordnen lassen und jedes Paar zwei Grenzpunkte liefert, so erhalten wir 12 solcher Punkte, welche die Ecken der obigen drei Rechtecke sind.

Rechnen wir noch die 6 unendlich-entfernten Schnittpunkte der Seiten dieser Rechtecke hinzu, so haben wir in dieser ersten Gruppe 18 Punkte von den im Ganzen oben angegebenen 54 Punkten.

Eine zweite Gruppe bilden die folgenden zwölf Schnittpunkte, welche in vier Quadrupel zerfallen.

Die vier Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1) \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1) \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3) \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3)$$

liegen auf der durch A gehenden Höhe des Dreiecks ABC. Die vier Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2) \quad (\mathfrak{b}\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2) \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_3) \quad (\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1)$$

liegen auf der durch B gehenden Höhe des Dreiecks ABC und endlich liegen die vier Schnittpunkte:

Die beiden Kreise m und m_1 haben nun zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten, welche in den Punkten $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1$ und eine innere gemeinschaftliche Tangente, welche in den Punkten $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}_1$ berührt; die vierte innere gemeinschaftliche Tangente wird daher den Kreis m in einem Punkte α und den Kreis m_1 in einem Punkte α_1 berühren, so dass $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{a}_1$ und α_1 symmetrisch liegende Punkte sind. Die 12 Berührungspunkte der 6 neuen gemeinschaftlichen Tangenten ordnen sich in solcher Art für

die Kreispaare	Berührungspunkte
$m\ m_1$	$\alpha\ \alpha_1$
$m\ m_2$	$\beta\ \beta_2$
$m\ m_3$	$\gamma\ \gamma_3$
$m_2\ m_3$	$\alpha_2\ \alpha_3$
$m_3\ m_1$	$\beta_3\ \beta_1$
$m_1\ m_2$	$\gamma_1\ \gamma_2$

und zu jedem deutschen Berührungspunkte wird ein bestimmter (symmetrisch liegender) griechischer mit gleichem Index, d. h. auf demselben Kreise zugehören.

Hiernach haben wir auf dem

Kreise	m	drei neue	Berührungspunkte	$\alpha\ \beta\ \gamma$
„	m_1	„ „	„	$\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$
„	m_2	„ „	„	$\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$
„	m_3	„ „	„	$\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$

oder in jedem der vier Kreise ein neues Dreieck, gebildet von diesen Berührungspunkten. Die Lage dieser vier neuen Dreiecke zu dem ursprünglichen Dreieck ABC ist eine sehr einfache; sie sind nämlich sämmtlich mit demselben *ähnlich und ähnlich-liegend.*

In der That die Dreiecksseiten AB und AC sind gleichartige gemeinschaftliche Tangentenpaare (d. h. beide äussere oder beide innere) nur für zwei Kreispaare, nämlich für

$$m\,m_1 \text{ und } m_2\,m_3.$$

Dagegen für die übrigen vier Kreispaare ungleichartige gemeinschaftliche Tangentenpaare und ein solches ungleichartiges Tangentenpaar bildet allemal dieselben Winkel miteinander, wie die beiden übrig-

---

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{a},\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{b}_3)\quad(\mathfrak{c}\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3)\quad(\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_2)\quad(\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2)$$

auf der durch C gehenden Höhe des Dreiecks ABC.

Die übrigen 24 Durchschnittspunkte, welche noch von den oben angegebenen 54 Punkten übrig bleiben, scheinen kein so einfaches Gesetz hinsichtlich ihrer Lage erkennen zu lassen.

bleibenden gemeinschaftlichen Tangenten, die natürlich auch ungleichartig sind; folglich bildet die dritte Dreiecksseite BC mit den vier Tangenten:

$$\begin{array}{l} \beta\ \beta_2 \\ \gamma\ \gamma_3 \\ \beta_3 \cdot \beta_1 \\ \gamma_1\ \gamma_2, \end{array}$$

von denen je zwei einander parallel sind, gleiche Winkel (A). Da aber am Kreise m die Tangente BC gleiche Winkel bildet mit den Tangenten in β und γ, so läuft $\beta\gamma$ parallel BC und der Berührungspunkt $\mathfrak{a}$ ist die Mitte des Bogens $\beta\gamma$; ebenso läuft $\gamma\alpha$ parallel CA u. s. f. $\beta_1\gamma_1$, $\beta_2\gamma_2$, $\beta_3\gamma_3$ parallel BC etc.

Wir haben also folgenden Satz:

Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei noch eine vierte gemeinschaftliche Tangente, welche in je zwei Punkten die Kreise berührt; von den dadurch erhaltenen 12 Berührungspunkten liegen auf jedem der vier Kreise drei und bilden je ein Dreieck, welches mit dem ursprünglichen ähnlich und ähnlichliegend ist.

Ferner haben wir die Lage der deutschen Berührungspunkte zu den griechischen als eine solche erkannt, dass auf dem Kreise m

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{a} & \text{gleich weit absteht von} & \beta & \text{und} & \gamma \\ \mathfrak{b} & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & \gamma & \text{,,} & \alpha \\ \mathfrak{c} & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & \alpha & \text{,,} & \beta \end{array}$$

und ebenso auf den drei übrigen Kreisen, z. B. auf dem Kreise m_1

$\mathfrak{a}_1$ gleich weit ab von β_1 und γ_1 u. s. f.

In Bezug auf die perspectivisch-ähnliche Lage der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ mit dem ursprünglichen Dreieck ABC bemerken wir noch (was aus der Lage der Kreise $m m_1 m_2 m_3$ zum Dreieck ABC folgt), dass die Dreieckspaare:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 & \text{und} & ABC \\ \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2 & \text{,,} & ABC \\ \alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3 & \text{,,} & ABC \end{array}$$

in directer Lage, dagegen

$$\alpha\,\beta\,\gamma \quad \text{und} \quad ABC$$

in inverser Lage ähnlich-liegend sich befinden; fassen wir dagegen die Mitten der Seiten des ursprünglichen Dreiecks auf:

$$\begin{array}{ll} A_1 & \text{die Mitte von } BC \\ B_1 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad CA \\ C_1 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad AB \end{array}$$

so bilden $A_1 B_1 C_1$ ein neues, ebenfalls dem ursprünglichen ähnliches und ähnlich-liegendes Dreieck, aber in inverser Lage; daher werden umgekehrt die Dreieckspaare:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 & \text{und} & A_1\,B_1\,C_1 \\ \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2 & \text{„} & A_1\,B_1\,C_1 \\ \alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3 & \text{„} & A_1\,B_1\,C_1 \end{array}$$

in inverser Lage, dagegen

$$\alpha\,\beta\,\gamma \quad \text{und} \quad A_1\,B_1\,C_1$$

in directer Lage ähnlich-liegend sich befinden. Wir wollen die perspectivischen Centra dieser letzteren Dreieckspaare durch $T\,T_1\,T_2\,T_3$ bezeichnen, d. h.

$$\begin{array}{llll} \alpha\ A_1 & \beta\ B_1 & \gamma\ C_1 & \text{treffen sich in } T \\ \alpha_1\ A_1 & \beta_1\ B_1 & \gamma_1\ C_1 & \text{„ „ „ } T_1 \\ \alpha_2\ A_1 & \beta_2\ B_1 & \gamma_2\ C_1 & \text{„ „ „ } T_2 \\ \alpha_3\ A_1 & \beta_3\ B_1 & \gamma_3\ C_1 & \text{„ „ „ } T_3 \end{array}$$

und wir werden später (5) die nahe Beziehung erkennen, in welcher diese vier Punkte $T\,T_1\,T_2\,T_3$ zum Feuerbach'schen Satze stehen.

3. Untersuchen wir jetzt die Lage, welche die 6 neuen vierten gemeinschaftlichen Tangenten zu den drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks einnehmen. Hiezu müssen wir die *Schnittpunkte* jener Geraden mit diesen in zweckmässiger Weise bezeichnen. Von den $6 \cdot 3 = 18$ Schnittpunkten, in welchen die 6 neuen Geraden von den drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks getroffen werden, sondern sich sofort 6 ab, welche Aehnlichkeitspunkte der 6 Kreispaare sind, während die übrigen 12 Schnittpunkte nicht Aehnlichkeitspunkte sind. Die Lage der ersteren 6 Aehnlichkeitspunkte ist folgende: Sie zerfallen in drei äussere und drei innere:

$$\begin{array}{lllll} A_{23} & \text{äusserer} & \text{Aehnlichkeitspunkt} & \text{des Kreispaars} & m_2\,m_3 \\ A_{31} & \text{„} & \text{„} & \text{„ „} & m_3\,m_1 \\ A_{12} & \text{„} & \text{„} & \text{„ „} & m_1\,m_2 \\ J_{01} & \text{innerer} & \text{Aehnlichkeitspunkt} & \text{des Kreispaars} & m\ m_1 \\ J_{02} & \text{„} & \text{„} & \text{„ „} & m\ m_2 \\ J_{03} & \text{„} & \text{„} & \text{„ „} & m\ m_3. \end{array}$$

Nun liegen nach bekannten Sätzen der Kreistheorie:

$$\begin{array}{ll} A_{12}\,A_{13}\,A_{23} & \text{in einer Geraden} \\ J_{01}\,J_{02}\,A_{12} & \text{„ „ „} \\ J_{02}\,J_{03}\,A_{23} & \text{„ „ „} \\ J_{03}\,J_{01}\,A_{31} & \text{„ „ „} \end{array}$$

folglich lässt sich der Satz aussprechen:

Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei eine Dreiecksecke zum Aehnlichkeitspunkt, also ausserdem noch einen zweiten Aehnlichkeitspunkt. Diese 6 neuen Aehnlichkeitspunkte zerfallen in drei äussere und drei innere und liegen zu je dreien auf vier geraden Linien, indem einmal die drei äusseren und dreimal ein äusserer mit zwei inneren Aehnlichkeitspunkten auf je einer Geraden liegt.

Es bleiben uns die übrigen 12 Schnittpunkte zu betrachten; diese erscheinen paarweise mit einer Dreiecksecke zusammengenommen als die Ecken von 6 neuen Dreiecken, welche mit dem ursprünglichen congruent sind und jedesmal eine Ecke und die in derselben zusammenstossenden zwei Seiten gemeinschaftlich haben, aber verwechselt und nach beiderlei entgegengesetzten Richtungen hin abgetragen. Die Dreiecksseite BC wird nun von den 6 vierten gemeinschaftlichen Tangenten in 6 Punkten getroffen, von denen zwei (J_{01} und A_{23}) als Aehnlichkeitspunkte bereits abgesondert sind; diese bilden ein Paar, indem überhaupt die sechs Schnittpunkte in drei Paare zerfallen nach den drei Paaren von Parallelen, in welche die sechs vierten gemeinschaftlichen Tangenten zerfallen; das eine Paar besteht also aus zwei Aehnlichkeitspunkten; die beiden übrigen Paare von Punkten, in welchen BC getroffen wird, erhalten wir durch die

die vierte (innere) gem. Tang. des Kreispaars $m\,m_2$	und	die vierte (äussere) gem. Tang. des Kreispaars $m_1\,m_3$

wir bezeichnen diese Schnittpunkte beziehlich durch

$$A_b \text{ und } A_b'$$

und zweitens durch

die vierte (innere) gem. Tang. des Kreispaars $m\,m_3$	und	die vierte (äussere) gem. Tang. des Kreispaars $m_1\,m_2$;

wir bezeichnen diese Schnittpunkte beziehlich durch

$$A_c \text{ und } A_c',$$

so dass wir also auf der Geraden BC die vier Schnittpunkte:

$$A_b A_b' A_c A_c'$$

haben, wobei die ungestrichenen auf eine innere, die gestrichenen auf eine äussere vierte gemeinschaftliche Tangente sich beziehen.

In gleicher Weise haben wir auf der Geraden CA die vier Schnittpunkte:

$$B_c B_c' B_a B_a'$$

und auf der Geraden AB die vier Schnittpunkte:

$$C_a C_a' C_b C_b'\ .$$

Diese zwölf Punkte gruppiren sich nun in folgender Weise zu den oben genannten 6 einander congruenten Dreiecken:

$$ABC$$

$$AB_a C_a \qquad A_b B C_b \qquad A_c B_c C$$

$$AB_a' C_a' \qquad A_b' B C_b' \qquad A_c' B_c' C.$$

Aus der Lage dieser Dreiecke zu einander erkennen wir unmittelbar, wie sich die Abstände der neuen Punkte von einander durch die Dreiecksseiten abc ausdrücken, nämlich:

$$\begin{aligned} a+b+c &= A_b' A_c' = B_c' B_a' = C_a' C_b' \\ a+b-c &= A_b A_c' = B_c' B_a = C_a C_b \\ a+c-b &= A_b' A_c = B_c B_a = C_a C_b' \\ b+c-a &= A_b A_c = B_c B_a' = C_a' C_b . \end{aligned}$$

Die Mitten dieser 12 Strecken sind die 12 deutschen Berührungspunkte (2)*).

4. Die oben betrachteten 6 Aehnlichkeitspunkte

$$A_{12}\, A_{23}\, A_{31}\, J_{01}\, J_{02}\, J_{03},$$

welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, sind nichts anderes, als die Schnittpunkte der drei Paare von Halbirungsstrahlen der Winkel und Nebenwinkel des ursprünglichen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten desselben; da sich bekanntlich die Abschnitte auf den Seiten, welche durch die Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks gebildet werden, verhalten wie die anliegenden Seiten selbst,

---

*) In gleicher Weise wie die gemeinschaftlichen Tangenten können wir auch die *Potenzlinien* der sechs Kreispaare unseres Quadrupels von Berührungskreisen aufsuchen und erkennen dann ein theilweise schon von Hrn. J. Lappe (a. a. O.) bemerktes Resultat, welches aber für den Feuerbach'schen Satz hier nicht verwerthet wird:

Die vier Mittelpunkte $m m_1 m_2 m_3$ bilden ein besonderes vollständiges Viereck, welches man passend ein *gleichseitig-hyperbolisches Viereck* nennen kann, nämlich eine solche Gruppe von vier Punkten, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist und welche bekanntlich die Grundpunkte eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln bilden. Das Diagonaldreieck dieses vollständigen Vierecks ist das ursprüngliche Dreieck ABC.

Die sechs Potenzlinien der Kreispaare unseres Quadrupels von Berührungskreisen schneiden sich zu je dreien in vier Punkten (Potenzpunkten), welche ebenfalls ein gleichseitig-hyperbolisches vollständiges Viereck bilden. Das Diagonaldreieck desselben wird gebildet von den Mitten $A_1 B_1 C_1$ der Seiten des ursprünglichen Dreiecks.

Die beiden, einerseits von den Mittelpunkten $m m_1 m_2 m_3$ und andererseits von den Potenzpunkten gebildeten gleichseitig-hyperbolischen Vierecke sind ähnlich und ähnlich-liegend; sie haben den Schwerpunkt des Dreiecks ABC zu ihrem perspectivischen Centrum, befinden sich in inverse-ähnlicher Lage und verhalten sich in ihren linearen Dimensionen $= 1:2$.

so folgen unmittelbar die Werthe der Abstände unserer Aehnlichkeitspunkte von den Ecken des Dreiecks.

Nehmen wir das Dreieck allgemein als ein ungleichseitiges an und bezeichnen die Seiten nach der Grösse, so dass

$$a > b > c$$

ist, so ergeben sich folgende Werthe:

$$A J_{03} = \frac{bc}{a+b}; \quad B J_{01} = \frac{ca}{b+c}; \quad C J_{02} = \frac{ab}{c+a}$$

$$B J_{03} = \frac{ac}{a+b}; \quad C J_{01} = \frac{ba}{b+c}; \quad A J_{02} = \frac{cb}{c+a}$$

$$A A_{12} = \frac{bc}{a-b}; \quad B A_{23} = \frac{ca}{b-c}; \quad C A_{13} = \frac{ab}{a-c}$$

$$B A_{12} = \frac{ac}{a-b}; \quad C A_{23} = \frac{ba}{b-c}; \quad A A_{13} = \frac{cb}{a-c}.$$

Es liegen nun die drei Punkte

$$J_{01} \; J_{02} \; A_{12}$$

in einer Geraden und es verhalten sich

$$\frac{C J_{01}}{C J_{02}} = \frac{a+c}{b+c} = \frac{C A_b'}{C B_a'},$$

folglich wird die Verbindungslinie $A_b' B_a'$ mit dieser Aehnlichkeitslinie $J_{01} J_{02}$ parallel laufen; ebenso verhalten sich

$$\frac{B J_{01}}{B A_{12}} = \frac{a-b}{b+c} = \frac{B A_c}{B C_a'},$$

folglich ist auch die Verbindungslinie $A_c C_a'$ mit derselben Aehnlichkeitslinie $J_{01} A_{12}$ parallel, und endlich verhalten sich

$$\frac{A J_{02}}{A A_{12}} = \frac{a-b}{a+c} = \frac{A B_c}{A C_b},$$

folglich läuft auch die dritte Verbindungslinie $B_c C_b'$ mit der Aehnlichkeitslinie $J_{02} A_{12}$ parallel; also laufen die drei Verbindungslinien

(1) $\qquad A_b' B_a' \qquad A_c C_a' \qquad B_c C_b'$

mit einander und mit der Aehnlichkeitslinie

$$J_{01} \; J_{02} \; A_{12}$$

parallel; in ganz derselben Weise erkennen wir, dass die Verbindungslinien

(2) $\qquad B_c' C_b' \qquad B_a A_b' \qquad C_a A_c'$

mit der Aehnlichkeitslinie

$$J_{02} \; J_{03} \; A_{23}$$

und die Linien

(3) $\qquad C_a' A_c' \qquad C_b B_c' \qquad A_b B_a'$

mit der Aehnlichkeitslinie

$$J_{03} \; J_{01} \; A_{31}$$

endlich die Linien

(4) $A_b B_a$ $A_c C_a$ $B_c C_b$

mit der Aehnlichkeitslinie

$$A_{12} A_{13} A_{23}$$

parallel laufen; demgemäss lässt sich folgender Satz aussprechen:

Die zwölf Schnittpunkte:

$$A_b A_b' \; A_c A_c' \; B_c B_c' \; B_a B_a' \; C_a C_a' \; C_b C_b'$$

liegen viermal paarweise auf je drei Parallelstrahlen, welche selbst zu den Seiten desjenigen vollständigen Vierseits parallel laufen, dessen Ecken die sechs Aehnlichkeitspunkte

$$A_{12} A_{23} A_{31} J_{01} J_{02} J_{03}$$

sind.

Sehr einfacher Art ist auch das Verhältniss, in welchem die Längen dieser je drei parallelen Strecken zu einander stehen; da nämlich BB_a' und CC_a' parallel laufen und sich wie $c:b$ verhalten, da ferner BA_b' und CA_c gleich gerichtet sind und ebenfalls sich wie $c:b$ verhalten, so ist nicht nur $B_a' A_b'$ mit $C_a' A_c$ parallel, sondern sie verhalten sich auch wie $c:b$; dasselbe Raisonnement gilt für alle übrigen Paare unserer parallelen Strecken und wir erhalten daher folgende Verhältnisse:

$$\begin{aligned}
B_c' C_b' : C_a A_c' : A_b' B_a &= a:b:c \\
B_c' C_b \;: C_a' A_c' : A_b B_a' &= a:b:c \\
B_c C_b' : C_a' A_c \;: A_b' B_a' &= a:b:c \\
B_c C_b' : C_a A_c \;: A_b B_a &= a:b:c,
\end{aligned}$$

d. h.: *Bei jedem der vier Tripel von je drei parallelen Strecken zwischen den obigen zwölf Schnittpunkten verhalten sich die Längen solcher drei parallelen Strecken zu einander wie die Seiten des ursprünglichen Dreiecks.*

5. Fassen wir eines von diesen vier Tripeln je dreier paralleler Strecken näher ins Auge, z. B.

$$B_c' C_b' \quad C_a A_c' \quad A_b' B_a,$$

und bemerken, dass der Berührungspunkt $\mathfrak{c}_1$ die Mitte ist zwischen den Punkten C_b' und C_a (3), so wird eine durch $\mathfrak{c}_1$ zu der Richtung der drei Parallelen gezogene neue Parallele auch die Strecke $A_c' B_c'$ halbiren müssen. Aus der symmetrischen Lage der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise m_1 und m_2 geht aber hervor, dass diese neue Parallele gleich ist und symmetrisch liegt mit der Verbindungslinie des Berührungspunktes γ_1 und des Mittelpunktes C_1 der Dreiecksseite AB; folglich haben wir die Verhältnisse:

$$\frac{\gamma_1 C_1}{B_c' C_b'} = \frac{a+b}{2a} \quad \text{und ebenso} \quad \frac{\beta_1 B_1}{B_c' C_b'} = \frac{a+c}{2a},$$

oder auch

$$\frac{\gamma_1 C_1}{C_a A_c'} = \frac{a+b}{2b} \text{ und ebenso } \frac{\alpha_1 A_1}{C_a A_c'} = \frac{b-c}{2b}.$$

Hieraus ergeben sich also die Verhältnisse:

(1) $$\alpha_1 A_1 : \beta_1 B_1 : \gamma_1 C_1 = (b-c) : (c+a) : (a+b)$$

und in ganz gleicher Weise die folgenden:

(2) $$\alpha_2 A_1 : \beta_2 B_1 : \gamma_2 C_1 = (b+c) : (a-c) : (a+b),$$

(3) $$\alpha_3 A_1 : \beta_3 B_1 : \gamma_3 C_1 = (b+c) : (c+a) : (a-b)$$

und endlich:

(4) $$\alpha A_1 : \beta B_1 : \gamma C_1 = (b-c) : (a-c) : (a-b).$$

Diese einfachen metrischen Verhältnisse beziehen sich auf die Lage des Mittendreiecks $A_1 B_1 C_1$ und der vier Dreiecke:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha & \beta & \gamma, \end{array}$$

von welchen wir oben (2) gesehen, dass sie sämmtlich mit $A_1 B_1 C_1$ ähnlich und ähnlich-liegend sind; da also die Dreiecke $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $A_1 B_1 C_1$ ähnlich und ähnlich-liegend sind, mithin die Verbindungsstrahlen

$$\alpha_1 A_1 \quad \beta_1 B_1 \quad \gamma_1 C_1$$

sich in einem Punkte T_1 treffen, dem perspectivischen Centrum der beiden ähnlichen Figuren, so stehen auch die Strahlen

$$\alpha_1 A_1 \quad \beta_1 B_1 \quad \gamma_1 C_1$$

in demselben Verhältnisse zu einander, wie die Strahlen

$$T_1 A_1 \quad T_1 B_1 \quad T_1 C_1,$$

also verhalten sich auch

$$T_1 A_1 : T_1 B_1 : T_1 C_1 = (b-c) : (c+a) : (a+b);$$

die Seiten des Mittendreiecks $A_1 B_1 C_1$ verhalten sich aber zu einander

$$B_1 C_1 : C_1 A_1 : A_1 B_1 = a : b : c$$

und bilden mit den vorigen drei Strahlen zusammen die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks $A_1 B_1 C_1 T_1$; wegen der vorhin ermittelten Verhältnisse hat aber die Identität:

$$a(b-c) + c(a+b) = b(a+c)$$

zur Folge

$$A_1 T_1 \cdot B_1 C_1 + C_1 T_1 \cdot A_1 B_1 = B_1 T_1 \cdot A_1 C_1$$

und dies sagt nach dem Satze von Ptolemäus aus, dass die vier Punkte $A_1 B_1 C_1 T_1$ auf einem Kreise liegen; aus gleichem Grunde liegen auch die vier Punkte $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 T_1$ auf einem Kreise (m_1); der Punkt

T_1 ist nun ein Aehnlichkeitspunkt der beiden den Dreiecken $A_1 B_1 C_1$ und $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ umschriebenen Kreise, weil die Dreiecke ähnlich und ähnlich-liegend sind; wenn aber ein Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise auf diesen beiden Kreisen selbst liegt, so müssen sie sich offenbar in demselben berühren.

Der um das Mittendreieck $A_1 B_1 C_1$ gelegte Kreis M_1 berührt also den Kreis m_1 im Punkte T_1, und in gleicher Weise folgt aus den Identitäten:

$$\begin{aligned} c(a+b) + b(a-c) &= a(b+c) \\ b(a+c) + c(a-b) &= a(b+c) \\ a(b-c) + c(a-b) &= b(a-c), \end{aligned}$$

dass der Kreis M_1 auch die drei andern Berührungskreise $m_2\, m_3$ und m in den Punkten $T_2\, T_3$ und T berührt, und aus der oben (2) hervorgehobenen inversen oder directen Aehnlichkeitslage der Dreiecke $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ und $\alpha \beta \gamma$ zum Dreieck $A_1 B_1 C_1$ folgt, dass die Kreise

$$\left.\begin{array}{llllll} M_1 & \text{und} & m_1 & \text{in} & T_1 \\ M_1 & „ & m_2 & „ & T_2 \\ M_1 & „ & m_3 & „ & T_3 \end{array}\right\}$$

sich ausschliessend berühren,

$$M_1 \text{ aber } m \text{ in } T$$

einschliessend berührt.

Dies ist der Feuerbach'sche Satz, dessen Herleitung nun auch die Construction der Berührungspunkte und die geometrische Bedeutung derselben hervortreten lässt.

Breslau, den 14. Januar 1874.

Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie" (diese Annalen Bd. VI., S. 112 ff.).

Von Felix Klein in Erlangen.

In dem in der Ueberschrift genannten Aufsatze behandelte ich neben anderen Fragen, zu denen die neueren Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie Anlass geben, insbesondere auch die, ob v. Staudt's nur auf die Betrachtung sogenannter Lagenverhältnisse gegründeter Aufbau der projectivischen Geometrie vom Parallelenaxiome unabhängig gemacht werden könne. Ich hatte dabei Gelegenheit (vergl. daselbst § 5. des zweiten Theiles) eine (auch sonst bemerkte) Lücke in v. Staudt's Betrachtungen zur Sprache zu bringen, die freilich keine nähere Beziehung zu der Frage nach dem Einflusse des Parallelenaxioms besitzt. Es handelt sich nämlich um den Nachweis, dass eine projectivische Beziehung zweier Grundgebilde erster Stufe vollkommen festgelegt ist, sowie man drei Paare entsprechender Elemente kennt. Nach der bei v. Staudt eingeführten Definition der projectivischen Beziehung sind die unbegrenzt vielen Elemente, welche man auf den beiden Grundgebilden, bez. aus den drei gegebenen durch wiederholte Construction des vierten harmonischen Elementes ableiten kann, ohne Weiteres als entsprechend gesetzt. Von Staudt unternimmt es daher zu zeigen, dass diese unendlich vielen Elemente das Grundgebilde völlig überdecken und ihr Entsprechen deshalb das Entsprechen aller Elemente nach sich zieht. Dies Verfahren implicirt bereits eine Voraussetzung, die im Folgenden (§ 3.) noch weiter gekennzeichnet werden soll, nämlich die: dass es gestattet sei, aus dem Verhalten der jedenfalls discreten Reihe der harmonischen Elemente auf das Verhalten des ganzen continuirlichen Gebietes zu schliessen, dem sie angehören. Aber die Lücke in v. Staudt's Beweisgang, von der in meinem Aufsatze gehandelt wurde, betrifft den ersten Theil des von ihm eingeschlagenen Weges. Um zu zeigen, dass die harmonischen Elemente das Grundgebilde völlig überdecken, d. h. *dass in jedem gegebenen Segmente des Grundgebildes Elemente liegen, welche man, von drei beliebig gegebenen Elementen ausgehend, durch fortgesetzte*

Construction des vierten harmonischen Elementes wirklich erreichen kann, macht v. Staudt einfach darauf aufmerksam, dass die Reihe der harmonischen Elemente nicht plötzlich abbrechen kann. Aber es ist dadurch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass diese Reihe, obgleich unbegrenzt, doch in gewisse Segmente des Grundgebildes nicht eindringt, und der Beweis, der zu erbringen war, ist also noch unvollständig.

Dem gegenüber glaubte ich in dem genannten „zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie"*) ausdrücklich folgende zwei Voraussetzungen einführen zu sollen, die freilich dort, wo überhaupt die ganze Frage mehr beiläufig berührt wird, nicht mit der Bestimmtheit bezeichnet und auseinandergehalten sind, wie es hier geschehen soll. Ich verlangte zunächst:

Wenn auf einem Gebilde erster Stufe eine unendliche Reihe von Elementen gegeben ist, die in ein Segment des Gebildes nicht eindringt, so soll es gestattet sein, von einem Grenzelemente, dem die Reihe zustrebt, als einem völlig bestimmten Elemente zu sprechen.

Sodann aber insonderheit mit Bezug auf die Reihe der harmonischen Elemente:

*Sollten in der Reihe der harmonischen Elemente solche Grenzelemente auftreten***), *so dürfen sie der Reihe zugezählt werden.*

Dass man unter Annahme dieser Voraussetzungen durch geeignete Fortsetzung der Reihe der harmonischen Elemente in jedes Segment hineingelangen kann, beweist man genau so, wie v. Staudt die Unmöglichkeit eines plötzlichen Abbrechens der Reihe zeigt. Es genügt nämlich, daran zu erinnern, dass das zu drei getrennten Elementen harmonische vierte Element mit keinem der drei Elemente zusammenfällt, und, je nach der Anordnung, die man den drei Elementen ertheilen mag, einem jeden der drei Segmente angehört, in welche das Grundgebilde durch die drei Elemente getheilt wird.

Aber andererseits ist auch die oben bezeichnete zweite Frage bereits erledigt, die sich darauf bezieht, ob man aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente auf das Entsprechen der übrigen Elemente

---

*) In ganz ähnlicher Weise berührte ich diese Frage bereits in einer Mittheilung an die Göttinger Societät, vgl. Göttinger Nachrichten, 1871, S. 290.

**) Ob solche Elemente wirklich auftreten oder nicht, hängt von der Art und Weise ab, vermöge deren man die harmonischen Elemente fortsetzt, was auf sehr mannigfache Weise geschehen kann, weil immer drei beliebige Elemente unter den schon construirten zur weiteren Construction verwandt werden können. Im Texte soll nicht gezeigt werden, dass solche Elemente überhaupt nicht auftreten, wenn man die Reihe der harmonischen Elemente in bestimmter Weise unendlich fortsetzt, sondern nur, dass sie jedesmal wieder überschritten werden können, wenn man die Art der Fortsetzung ändert, und dass sie also für die Gesammtheit der harmonischen Elemente keine Grenze constituiren.

schliessen kann. Man wird nämlich auf Grund unserer ersten Voraussetzung jedes Element als Grenzelement einer unendlichen Reihe harmonischer Elemente auffassen können*), und, gemäss der zweiten Voraussetzung, demjenigen Elemente entsprechend setzen, welches auf dem anderen Grundgebilde durch den nämlichen Grenzprocess definirt wird.

Nach Veröffentlichung meines Aufsatzes erhielt ich eben mit Bezug auf diese Ueberlegungen Zuschriften von den Herren G. Cantor, Lüroth und Zeuthen, und ich verdanke es hauptsächlich der Correspondenz mit diesen Herren, wenn ich in der gegenwärtigen Mittheilung in der Lage bin, den Gegenstand, um den es sich handelt, sehr viel deutlicher zu bezeichnen, als ich es damals gethan hatte. Insbesondere haben mir die Herren Lüroth und Zeuthen unabhängig von einander einen Beweis mitgetheilt, vermöge dessen es gelingt, auch ohne Einführung der zweiten oben genannten Voraussetzung zu beweisen, dass man mit der Reihe der harmonischen Elemente in jedes Segment des Grundgebildes eindringen kann. Es benutzt dieser Beweis den (oben schon in einer Note hervorgehobenen) Umstand, dass die Reihe der harmonischen Elemente, weil immer drei beliebige der bereits construirten zur Construction verwandt werden dürfen, in sehr mannigfacher Weise fortgesetzt werden kann. Ich werde weiter unten (§ 2.) diesen Beweis, durch dessen Mittheilung der gegenwärtige Nachtrag zu meinem früheren Aufsatze wesentlich veranlasst ist, in Herrn Zeuthen's Darstellung**) geben. Durch ihn wird also die zweite oben aufgestellte Voraussetzung zunächst überflüssig; sie tritt erst wieder ein, wenn es sich darum handelt, aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente auf das Entsprechen aller Elemente zu schliessen. Sie kann dann, worauf mich besonders Hr. Lüroth aufmerksam gemacht hat, durch verschiedene äquivalente ersetzt werden. Der dritte Paragraph des Folgenden mag diesen Betrachtungen gewidmet sein. Ich wende mich zunächst dazu, die erste oben eingeführte Voraussetzung noch näher zu bezeichnen und ihren Zusammenhang mit ähnlichen Voraussetzungen, die in der gewöhnlichen (metrischen) Geometrie nöthig sind, darzulegen.

---

*) Dies sollte eigentlich explicite bewiesen werden. Ich glaube die betreffenden Ueberlegungen hier aber um so mehr unterdrücken zu können, als das Operiren mit Würfen, wie zu diesem Zwecke systematisch würde untersucht werden müssen, von Hrn. Lüroth neuerdings eine gründliche Darstellung erfahren hat (Göttinger Nachrichten Nov. 1873).

**) Hr. Lüroth hatte bei seinen Ueberlegungen im Wesentlichen dieselben Momente benutzt.

§ 1.

Von der Stetigkeit der Gebilde in der projectivischen Geometrie.

Was man in der gewöhnlichen Geometrie meint, wenn man sagt, irgend ein Gebilde erster Stufe, also etwa eine Punktreihe, sei *stetig*, ist neuerdings von verschiedenen Seiten her mit besonderer Schärfe auseinander gesetzt worden*). Man legt durch die Forderung der Stetigkeit dem betreffenden Gebilde eben dieselbe Eigenschaft bei, die durch unsere erste Voraussetzung (welche sich in ganz ähnlicher Form in den Schriften von G. Cantor und Dedekind findet**)) formulirt ist. Der Unterschied ist nur der, dass wir diese Voraussetzung ausdrücklich auch in die projectivische Geometrie einführen. Wir können also auch folgendermassen sagen:

Die in der gewöhnlichen Geometrie vorausgesetzte Stetigkeit der Gebilde erster Stufe soll auch in der projectivischen Geometrie zu Grunde gelegt werden.

Es bringt das mit sich oder ist geradezu gleichbedeutend damit, dass in der projectivischen Geometrie, wie in der gewöhnlichen, das analytische Gegenbild eines Gebildes erster Stufe die einfach unendliche Zahlenreihe ist. Auch in der projectivischen Geometrie können also Segmente eines Gebildes erster Stufe *gemessen* werden, nur dass nicht, wie in der gewöhnlichen Geometrie, eine Massbestimmung vor allen anderen als besonders naturgemäss ausgezeichnet wird.

In dem letzteren Umstande liegt scheinbar eine gewisse Schwierigkeit hinsichtlich der Einführung der Zahlen in die projectivische Geometrie, insofern man nämlich von vornherein nur dann von zwei Segmenten sagen kann: das eine sei kleiner als das andere, wenn das eine ganz in dem anderen enthalten ist. Aber bei der Feststellung des Grenzbegriffs kommen eben nur solche Segmente in Vergleich, die in dieser Relation stehen, dass das eine ein Stück des anderen ist.

Eine entsprechende Voraussetzung der Stetigkeit, wie sie nunmehr für Gebilde erster Stufe eingeführt wurde, wird in der gewöhnlichen wie in der projectivischen Geometrie zu machen sein, wenn es sich um Gebilde höherer Stufe handelt. Doch braucht das hier wohl nicht näher entwickelt zu werden. Auch braucht hier nicht auf die Frage eingegangen zu werden, ob und wie weit wir zu diesen Vor-

---

*) Vgl. Heine, die Elemente der Functionenlehre, Borchardt's Journal Bd. 74; G. Cantor, über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen Bd. V; sowie besonders Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig 1872).

**) Ich bin kurz vor dem Erscheinen dieser Schriften von Hrn. Weierstrass auf diese Voraussetzung als eine in der gewöhnlichen Geometrie nothwendige aufmerksam gemacht worden.

aussetzungen*) axiomatischen Charakters durch unsere räumliche Anschauung gezwungen sind.

§ 2.

Der Lüroth-Zeuthen'sche Beweis.

Ich erlaube mir weiterhin den Lüroth-Zeuthen'schen Beweis mit Zeuthen's Worten wiederzugeben, und bemerke hinsichtlich der beigesetzten Zeichnungen nur, dass dieselben allein die Aufeinanderfolge der in Betracht kommenden Punkte veranschaulichen sollen. Es kommt in der That beim Beweise nur auf diese Aufeinanderfolge an, womit eine Verallgemeinerung angedeutet sein mag, die man diesen Betrachtungen zu Theil werden lassen kann. Hr. Zeuthen schreibt:

„Si AB harm. CD, c'est à dire, si A et B divisent harmoniquement CD,

A C B D

A et B restant fixes, C et D ne pourront se mouvoir que dans des sens inverses entre eux; mais si A et C restent fixes, B et D ne pourront se mouvoir que dans le même sens. Il s'agit de démontrer *qu'il n'existe pas dans une série fondamentale complète***) *des segments ou des angles où l'on ne puisse entrer par des constructions successives du quatrième point harmonique, les trois premiers éléments étant donnés.*“

„Considérons comme v. Staudt une droite complète (dont les deux bouts sont liés l'un à l'autre par un point à l'infini) et désignons par AB, $CD \cdots$ les segments qui se trouvent à droite (par exemple) du premier point A, $C \cdots$, sans demander s'ils contiennent le point à l'infini ou non. Essayons d'attribuer à la droite un segment FG, qui ne contienne aucun point du système déterminé par les constructions successives du quatrième point harmonique, et supposons qu'on ait donné à ce segment l'extension la plus grande possible***). Alors, si F n'est pas lui-même un point du système, tout segment extérieur à FG et limité par F, quelque petit qu'il soit, contiendra des points du système, et de même pour le point G.

A B F H D L G K C J

---

*) Hr. Cantor und Dedekind bezeichnen das Postulat der Stetigkeit der Gebilde erster Stufe auch ausdrücklich als ein *Axiom*.

**) „unbegrenztes Grundgebilde erster Stufe“, vgl. diese Annalen Bd. VI, S. 137.

***) Damit dies in allen Fällen möglich sei, wird man die in § 1. besprochene Voraussetzung der Stetigkeit voraufschicken müssen.

Soit A un point quelconque du système et soient H et J les points satisfaisant aux conditions

(1) $$AH \text{ harm. } FG,$$

(2) $$AG \text{ harm. } FJ.$$

En désignant par B un nouveau point du système placé sur le segment AF convenablement près de F, on peut obtenir que le point K déterminé par

(3) $$AH \text{ harm. } BK$$

se trouve sur le segment GJ si près de G que le segment KJ contient un point du système. (Car au cas contraire ou pourrait, en laissant A et H rester fixes, rapprocher K de G jusqu'à ce que non seulement K a passé un point du système, mais aussi B, qui se meut dans le sens inverse, a gagné de nouveau un point du système.) Désignons par C un point du système qui se trouve sur KJ. Alors, comme le point L déterminé par

(4) $$AL \text{ harm. } BJ$$

se trouve sur le segment HG (voir (3) et (2)), le point D déterminé par

(5) $$AD \text{ harm. } BC,$$

se trouvant sur le segment HL (voir (3) et (4)), se trouve aussi sur le segment FG. Or A, B, C étant des points du système, D en est aussi un. Donc etc. ⋯ —"

„Si F est un point du système on peut y placer le point B, et si en même temps G appartient au système (supposition de v. Staudt), on peut y placer le point C."

§ 3.

Von der Stetigkeit der projectivischen Zuordnung.

Wenn es sich um eine systematische Darstellung der Grundlagen der projectivischen Geometrie handelt, wird man an die Voraussetzung des § 1. zunächst den Lüroth-Zeuthen'schen Beweis anschliessen und erst dann die in der Einleitung an zweiter Stelle eingeführte Voraussetzung folgen lassen. Dieselbe ist übrigens auch dadurch mit der ersteren ungleichwerthig, dass sie keinen axiomatischen Charakter besitzt, vielmehr als ein Zusatz zu *Staudt's Definition* der Projectivität aufgefasst werden muss.

Dass ein solcher Zusatz in der That nothwendig ist, dass man also aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente noch nicht auf das Entsprechen aller Elemente schliessen darf, mag man sich an der folgenden, analog gebildeten Aufgabe überlegen, bei der, entsprechend ihrer rein analytischen Fassung, eine Beurtheilung leichter scheint:

Eine Function sei für alle rationalen Werthe ihres Argumentes gegeben, für die irrationalen aber nicht, welche Werthe wird sie für die letzteren annehmen? Man kann diese Frage nicht nur nicht beantworten, wenn nichts Weiteres über die Function bekannt ist, sondern man kann nicht einmal behaupten, dass die Function für irrationale Werthe des Arguments existirt.

Die Forderung, wie sie durch unsere zweite Voraussetzung ausgesprochen worden ist, kann prägnanter als die Forderung der *Stetigkeit* der projectivischen *Beziehung* bezeichnet werden. Sie verlangt, dass einem Elemente, das in einer kleinsten Strecke zwischen zwei Elementen liegt, deren entsprechende Elemente bekannt sind, ein Element zugeordnet sein soll, das eben zwischen diesen letzteren liegt. Mit Beziehung auf die Staudt'sche Terminologie und unter besonderer Beachtung der projectivischen Beziehung kann man daher auch so sagen: *Vier Elementen des einen Gebildes, die in einem Sinne liegen, sollen vier Elemente des anderen entsprechen, die ebenfalls in einem Sinne liegen.*

Bei Gebilden mit mehr Dimensionen wird man bei Definition der projectivischen Beziehung in ganz entsprechender Weise die Stetigkeit dieser Beziehung zu verlangen haben, wie es hier für Gebilde erster Stufe geschah. Andererseits sei auch ausdrücklich hervorgehoben, dass in allen Fällen, in denen die projectivische Beziehung durch einmalige oder wiederholte Projection gewonnen wird, diese Stetigkeit der Beziehung von vornherein gegeben ist.

Erlangen, im Januar 1874.

Die neuere Algebra und die Ausdehnunglehre.

Von Hermann Grassmann in Stettin.

Die neuere Algebra hat durch die vereinten Bemühungen der hervorragendsten Mathematiker gegenwärtig eine Ausbildung erlangt, welche sie fast mit allen Zweigen der Mathematik in die engste Beziehung setzt und auch diese mit ihren Ideen befruchtet. Und in dem Mittelpunkte aller dieser Bestrebungen stand seit einer Reihe von Jahren der seinen zahlreichen Freunden und der gesammten Wissenschaft so früh entrissene Clebsch, der fast nach allen Seiten hin diese Bestrebungen anregte und förderte, und die vereinzelten hier und dort gewonnenen Resultate zu verweben und durch neue und umfassende Gedanken zu beleben und auf neue viel verheissende Bahnen zu lenken verstand. Durch ihn bin auch ich wieder auf das Gebiet der neueren Algebra zurückgeführt und zu dem Versuche angeregt worden, dasselbe mit dem nahe angrenzenden Gebiete der Ausdehnungslehre in näheren Zusammenhang zu setzen. Indem ich die Principien dieser Wissenschaft, wie ich sie in meinen Werken von den Jahren 1844 und 1862 bearbeitet habe, auf die Probleme der Invariantentheorie anwandte, gelangte ich zu einem Satze, der, wie ich glaube, als ein Fundamentalsatz dieser Theorie angesehen werden muss, und den ich seinem wesentlichen Inhalte nach hier sogleich aufstelle.

§ 1.

Fundamentalsatz.

In diesem Satze bedeutet m die Anzahl der Einheiten (in der geraden Linie 2, in der Ebene 3 u. s. w.), aus denen die der Betrachtung unterworfenen extensiven Grössen numerisch abgeleitet werden, k die Anzahl sämmtlicher Zahlcoefficienten, welche in dem zu Grunde liegenden Vereine algebraischer Formen vorkommen und welche sämmtlich als von einander unabhängig betrachtet werden.

Alle Formen (Invarianten, Covarianten, Zwischenformen u. s. w.), *welche einer gegebenen algebraischen Form oder einem Vereine solcher*

Formen entspriessen, lassen sich aus $k - m + 1$ *von einander unabhängigen Stammformen als rationale Functionen ableiten, und zwar als ganze Functionen, wenn man eine gewisse ganze Function* u *dieser Stammformen gleich* 1 *setzt. Man erhält diese Stammformen, indem man in den gegebenen Formen statt der extensiven Variabeln* x m *extensive Variabeln* $x_1, \cdots x_m$ (statt jedes einzelnen Factors eine beliebige derselben) *einführt, von denen eine, etwa* x_1, *mit* x *gleich, und eine andere, etwa* x_m, *durch die übrigen und durch eine der gegebenen Formen in der Art bestimmt ist, dass sie in Bezug auf diese Form Centrum erster Ordnung zu den Polen* $x_1, \cdots x_{m-1}$ *wird und ausserdem* $u = (x_1 x_2 \cdots x_m) = 1$ *ist. Wenn dann eine beliebige dem gegebenen Vereine entsprossene Form* Π *als ganze Function der Stammformen dargestellt werden soll, so gelingt dies unmittelbar, indem man in* Π *statt der Einheiten* $e_1, \cdots e_m$, *von denen die* k *Coefficienten abhängen,* $x_1, \cdots x_m$ *einführt, eine der veränderlichen Zahlen, von denen* x $(= x_1)$ *abhängt* (etwa x_{11}) *gleich* 1 *und die übrigen Null setzt.*

Auch wenn diese invarianten Bildungen Π nur symbolisch gegeben sind, lässt sich die Reduction auf die Stammformen aufs leichteste ausführen.

Dadurch, dass man $u = 1$ setzt, kann die Homogenität aufhören, aber man kann sie stets sofort wieder herbeiführen, wenn man u so oft (statt 1) als Factor hinzufügt, bis die Homogenität erreicht ist.

Ferner gilt dieser Satz nicht nur, wenn die gegebenen Formen einfach-algebraische, sondern auch, wenn sie alle oder einige unter ihnen Connexe oder Complexe, oder aus beiden beliebig zusammengesetzte Formen sind, z. B. Formen, welche in der Ebene von Punkten und Linien (Annalen VI, 203), im Raume von Punkten, Linien (oder Summen derselben) und Ebenen, überhaupt in einem Gebiete m^{ter} Stufe von Grössen erster, zweiter bis $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe abhängen (Annalen VII, 43).

In allen diesen Fällen kann man statt der $k - m + 1$ Stammformen auch beliebige andere, aber von einander unabhängige invariante Bildungen (Invarianten, Covarianten u. s. w.) einführen, welche dem gegebenen Vereine entsprossen sind; aber es hört dann, wenn man statt aller Stammformen die üblichen invarianten Bildungen einführen will, schon bei ternären Formen die Rationalität auf und man muss dann zu einer grösseren Zahl jener Bildungen seine Zuflucht nehmen, wenn man die Rationalität bewahren will.

Diese Bemerkungen werden genügen, um die Bedeutung und die Anwendbarkeit des neuen Fundamentalsatzes vorläufig festzustellen. Für das nähere Verständniss ist es erforderlich, einige Grundbegriffe aus der Ausdehnungslehre aufzunehmen und sie mit der üblichen Symbolik (die ich unverändert beibehalte) in Beziehung zu setzen; doch beschränke ich mich auf das für den vorliegenden Zweck Unentbehrlichste, indem ich im Uebrigen auf die Paragraphen meiner Ausdehnungslehre von 1844 ($\mathfrak{A}_1$) und auf die Nummern der Bearbeitung derselben von 1862 ($\mathfrak{A}_2$) verweise.

§ 2.

Grundbegriffe der Ausdehnungslehre und ihre Anwendung auf die neuere Algebra.

Den extensiven Grössen, welche die Ausdehnungslehre behandelt, liegt eine Reihe von Grössen zu Grunde, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, d. h. von denen sich keine aus den übrigen numerisch ableiten oder, anders ausgedrückt, keine sich als lineare Function der übrigen mit Zahlcoefficienten darstellen lässt, und die ich, sofern sie als ursprünglich zu Grunde liegend betrachtet werden, *Einheiten* erster Stufe genannt habe. Als solche können z. B. im Raume 4 beliebige Punkte betrachtet werden, die nicht in einer Ebene liegen. Es seien $e_1, \cdots e_m$ diese Einheiten, so nenne ich Grösse erster *Stufe* jede Grösse $x_1 e_1 + \cdots x_m e_m$, wo $x_1, \cdots x_m$ Zahlgrössen sind, und die Gesammtheit dieser Grössen nenne ich ein Gebiet m^{ter} Stufe ($\mathfrak{A}_1$ 13; $\mathfrak{A}_2$ 1 ff.).

Das *Product* zweier Grössen erster Stufe nenne ich ein *combinatorisches*, wenn für dasselbe die Gesetze $(aa) = 0$, $(ab) = -(ba)$ gelten, und nenne diese Producte und die aus ihnen numerisch ableitbaren Grössen Grössen zweiter Stufe. Entsprechend bei 3 und mehr Factoren erster Stufe, bei denen gleichfalls das Product Null wird, wenn zwei Factoren gleich werden, und entgegengesetzten Werth annimmt, wenn man zwei derselben vertauscht. ($\mathfrak{A}_1$ 28, $\mathfrak{A}_2$ 52 ff.)

Man erhält so Grössen erster bis m^{ter} Stufe, während die Zahlen als Grössen nullter Stufe erscheinen. Grössen von höherer als m^{ter} Stufe kann es in einem Gebiete m^{ter} Stufe nicht geben, da das combinatorische Product von $m+1$ Grössen erster Stufe schon ersichtlich Null wird. Aber auch die Grössen m^{ter} Stufe liefern keine eigenthümlichen neuen Grössen. Denn sie verhalten sich wie blosse Zahlen, indem $(a_1 a_2 \cdots a_m) = (e_1 e_2 \cdots e_m)\,\Delta$ ist, wenn Δ die Determinante der Zahlenreihen bezeichnet, durch welche $a_1, \cdots a_m$ aus $e_1, \cdots e_m$ abgeleitet sind ($\mathfrak{A}_1$ 45, $\mathfrak{A}_2$ 62 ff.). Schon hieraus ist ersichtlich, dass diese Bezeichnung eines combinatorischen Productes von m Factoren mit der der symbolischen Producte in der Invariantentheorie im Wesen übereinstimmt. Um diese Producte (von m Factoren) als wirkliche Zahlen darzustellen, genügt es, das combinatorische Product der m Einheiten erster Stufe $(e_1 e_2 \cdots e_m) = 1$ zu setzen.

Jede Grösse p^{ter} Stufe ist offenbar aus Einheiten p^{ter} Stufe, welche die Combinationen ohne Wiederholung aus den m Einheiten erster Stufe zur p^{ten} Classe darstellen, numerisch ableitbar. So wie aber die Grössen m^{ter} Stufe vermöge obiger Gleichung $(e_1 e_2 \cdots e_m) = 1$ als Grössen nullter Stufe sich darstellen, so entsprechen sich überhaupt die Grössen p^{ter} und $m-p^{\text{ter}}$ Stufe (immer im Ganzen m Einheiten erster Stufe vorausgesesetzt). Um dies Entsprechen klar hervortreten zu lassen, setze ich einem combinatorischen Producte von Einheiten erster Stufe das combinatorische Product der übrigen Einheiten erster Stufe reciprok und zwar mit der Zeichenbestimmung, dass, wenn an jenes Product dies *reciproke* (ergänzende $\mathfrak{A}_1$ 138, $\mathfrak{A}_2$ 89 ff.) angeschlossen wird, und dadurch beide zu *einem* Producte von m Einheiten verbunden werden, dies gesammte Product gleich $+1$ wird. Dadurch ist dann zu jeder Grösse ihre reciproke, die aus den reciproken Einheiten durch dieselben Zahlen abgeleitet ist, wie jene aus den ihrigen, genau bestimmt. Alle Gesetze der Ausdehnungslehre lassen sich dann unmittelbar auf die reciproken Grössen übertragen. Als Beispiel wähle ich die Grössen in einem Gebiete vierter Stufe im Raume. Hier treten hervor die Grössen erster Stufe als Punkte, die Grössen zweiter Stufe als Linien und Summen von Linien ($\mathfrak{A}_1$ 113, 122; $\mathfrak{A}_2$ 285), die Grössen dritter Stufe als Ebenen; während die Grössen vierter Stufe, da sie Raumtheile darstellen, sich in Zahlen verwandeln, wenn man einen Raumtheil $(e_1 e_2 e_3 e_4) = 1$ setzt. Die Grössen erster Stufe sind aus den 4 Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4, die Grössen dritter Stufe aus den 4 zu jenen reciproken Einheiten r_1, r_2, r_3, r_4, die Grössen zweiter Stufe aus 6 Einheiten, nämlich $(e_2 e_3)$, $(e_3 e_1)$, $(e_1 e_2)$ und den reciproken $(e_1 e_4)$, $(e_2 e_4)$, $(e_3 e_4)$ ableitbar, und ist X aus diesen 6 Einheiten durch die Zahlen $x_1, \cdots x_6$ abgeleitet, so stellt eine Function dieser Zahlen einen von X beschriebenen Complex dar, welcher ein lineärer Complex wird, wenn $(XX) = 0$ ist ($\mathfrak{A}_1$ 124; $\mathfrak{A}_2$ 286 vgl. 393 und vor allem Klein's gedankenreiche Arbeiten im 2^{ten} und 5^{ten} Bande der Annalen).

Für die Invariantentheorie sind von besonderem Interesse die combinatorischen Producte von einer Grösse $(m-1)^{\text{ter}}$ und einer Grösse erster Stufe, welche wieder, da die Gesammtzahl der Factoren erster Stufe, die in ihnen enthalten sind, m beträgt, als Zahlen erscheinen. Ist x eine Grösse erster Stufe $= x_1 e_1 + \cdots x_m e_m$ (wo $x_1, \cdots x_m$ Zahlen sind) und a eine Grösse $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe $= a_1 r_1 + \cdots a_m r_m$, wo $r_1, \cdots r_m$ die zu $e_1, \cdots e_m$ reciproken Einheiten und $a_1 \cdots a_m$ Zahlen sind, so ist nach obigem $(e_i r_i) = 1$, hingegen $(e_i r_k) = 0$, wenn i von k verschieden ist, also

$$(ax) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_m x_m = a_x\,,$$

letzteres, wie unten gezeigt wird, nach der üblichen symbolischen Bezeichnung.

Ferner ist für den Begriff der invarianten Bildungen noch der Begriff der *linealen Aenderung* ($\mathfrak{A}_2$ 71—76) von Wichtigkeit. Ich sage nämlich, eine Grösse einer Reihe von Grössen ändere sich lineal, wenn sie in eine andere Grösse übergeht, welche sich von jener nur dadurch unterscheidet, dass zu ihr eine mit einem beliebigen Zahlfactor (μ) versehene andere Grösse der Reihe hinzutritt, also z. B. A sich in $A + \mu B$ verwandelt, wenn A und B beliebige Grössen jener Reihe sind, und ich sage, die Grössenreihe sei lineal geändert, wenn sie beliebigen und beliebig wiederholten linealen Aenderungen der darin enthaltenen Grössen unterworfen ist. Es leuchtet sogleich ein, dass ein combinatorisches Product von Grössen erster Stufe sich nicht ändert, wenn seine Factorenreihe lineal geändert wird; aber ich habe auch ($\mathfrak{A}_2$ 76) gezeigt, dass von 2 gleichen combinatorischen Producten jedes in das andere durch lineale Aenderung seiner Factorenreihe übergeführt werden kann (die Factoren als Grössen erster oder auch $m - 1^{\text{ter}}$ Stufe vorausgesetzt).

Hiernach kann man *alle invarianten Bildungen* (Invarianten, Covarianten u. s. w.) als *solche* definiren, *die bei linealer Aenderung der Einheiten ungeändert bleiben*, eine Definition, die ihrer Einfachheit wegen wohl vor der gewöhnlichen den Vorzug verdient, zumal da sie ohne weiteres auch alle symbolischen Bildungen als invariant nachweist.

Wenn sich nun die Einheiten $e_1, \cdots e_m$ in beliebige aus ihnen numerisch ableitbare Grössen $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_m$ verwandeln, aber so, dass $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m) = (e_1 e_2 \cdots e_m) = 1$ ist, und

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11} e_1 + \cdots a_{1m} e_m \\ &\vdots \\ \varepsilon_m &= a_{m1} e_1 + \cdots a_{mm} e_m \end{aligned}$$

$$x = x_1 e_1 + \cdots x_m e_m = \xi_1 \varepsilon_1 + \cdots \xi_m \varepsilon_m$$

ist, so wird, wie man sogleich durch Einführung der Werthe der ε in die letzte Gleichung sieht,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} \xi_1 + \cdots a_{m1} \xi_m \\ &\vdots \\ x_m &= a_{1m} \xi_1 + \cdots a_{mm} \xi_m , \end{aligned}$$

d. h. die Substitutionen, durch welche die neuen Einheiten aus den alten, und die, durch welche die alten Variabeln aus den neuen hervorgehen, sind zu einander transponirt, und es lassen sich daher die invarianten Eigenschaften ebenso gut auf die Einheiten als auf die veränderlichen Zahlgrössen gründen; die Substitutionsdeterminante ist in beiden Fällen gleich und zwar unter obiger Voraussetzung gleich 1. Die extensive Variable x bleibt dabei dieselbe und kann also als *Covariante erster Stufe* aufgefasst werden.

Schon diese nahe liegende Betrachtungsweise führt vermöge der durch Hermite eingeführten typischen Darstellung unmittelbar zu einem dem obigen Fundamentalsatze entsprechenden Satze, während für die Ableitung des Fundamentalsatzes selbst noch die Idee der Polaren (Centralen) zu Hülfe genommen werden muss.

Ausser der combinatorischen Multiplication ist nun für die neuere Algebra von gleicher Wichtigkeit diejenige Multiplication, welche in ihren Gesetzen vollkommen mit der algebraischen Multiplication der Zahlgrössen übereinstimmt, und welche ich daher, auch wenn die Factoren Grössen höherer Stufen sind, die *algebraische* genannt und auch wie diese bezeichnet habe. Ihr Begriff und die Anwendung desselben auf Functionen findet sich ausführlich entwickelt in *n.* 348—427 der Ausdehnungslehre von 1862 und dem wesentlichen Grundgedanken nach dargelegt auf S. 266 ff. der Ausdehnungslehre von 1844. Ist nämlich $f = f(x_1, x_2, \cdots x_m)$ eine beliebige Function der m veränderlichen Zahlgrössen $x_1, \cdots x_m$, und ist

$$x = x_1 e_1 + \cdots x_m e_m,$$

wo $e_1, \cdots e_m$ Einheiten von erster oder auch höherer Stufe sind, $r_1, \cdots r_m$ die reciproken Einheiten, so ist nach dem Obigen $(e_i r_i) = 1$, hingegen $(e_i r_k) = 0$, wenn i von k verschieden ist; also ist $(x r_1) = x_1$, $(x r_2) = x_2$, u. s. w. also:

$$f(x_1, x_2, \cdots x_m) = f([x r_1], [x r_2], \cdots [x r_m]),$$

also eine Function einer einzigen, aber extensiven Variablen ($\mathfrak{A}_2$ 350). Ist insbesondere f eine homogene Function n^{ten} Grades, so kommt in $f([x r_1], \cdots [x r_m])$ die extensive Variable x in jedem Gliede n-mal als Factor vor.

Entfernt man daher x aus diesen Verbindungen $(x r_i)$, und setzt an die Stelle, wo x gestanden hat, irgend ein Zeichen, welches die dadurch entstandene Lücke darstellt, und setzt nun den so aus

$$f([x r_1], \cdots [x r_m])$$

hervorgehenden Ausdruck $= a$, so wird

$$f = a x^n \quad (\mathfrak{A}_2\ 358).$$

Ich habe diese Lücke Anfangs ($\mathfrak{A}_1$ Seite 266 ff.) durch leer gelassene Klammern, später ($\mathfrak{A}_2$ 353 ff.) durch l bezeichnet; das Bequemste ist, sie durch irgend eine bestimmt gewählte extensive Variable zu bezeichnen, und ich werde dazu allemal x selbst wählen, so dass also $a = a x^n$ ist und $a y^n$ aus $a x^n$ (oder a) dadurch hervorgeht, dass man überall y statt x setzt. Sollen nun zu diesem Ausdrucke $a = a x^n = f([x r_1], \cdots [x r_m])$ verschiedene extensive Factoren, die jedoch mit x von gleicher Stufe sein müssen, und deren Anzahl p nicht grösser als n sein darf, hinzutreten, so hat man (nach $\mathfrak{A}_2$ 353) diese auf alle möglichen Arten in p der Lücken (also hier statt x) einzuführen, und die Summe der so erhaltenen Ausdrücke durch ihre Anzahl, die hier $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ beträgt, zu dividiren. Nachdem dies festgesetzt ist, ergiebt sich leicht, ($\mathfrak{A}_2$ 360 ff.), dass für diese hinzutretenden Factoren die Gesetze der gewöhnlichen algebraischen Multiplication gelten, namentlich auch, dass

$$a x^n = a(x_1 e_1 + \cdots x_m e_m)^n = x_1^n \cdot a e_1^n + \frac{n}{1} x_1^{n-1} x_2 a e_1^{n-1} e_2 + \cdots,$$

insbesondere wenn $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ ist

$$a x^2 = x_1^2 a e_1^2 + x_2^2 a e_2^2 + x_3^2 a e_3^2 + 2 x_1 x_2 a e_1 e_2 + 2 x_1 x_3 a e_1 e_3 + 2 x_2 x_3 a e_2 e_3$$
$$= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3$$

ist, wenn $a e_1^2$ mit a_{11}, $a e_1 e_2$ mit a_{12} u. s. w. bezeichnet wird, kurz $a x^n$ ist dasselbe, was symbolisch durch a_x^n bezeichnet wird, während $\frac{d^p a x^n}{d x_1^\alpha \, d x_2^\beta \cdots} = n(n-1) \cdots (n-p+1) a e_1^\alpha e_2^\beta \cdots$ ist. Ist x ein Punkt in der Ebene, so wird $a x^n = 0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung; dann drückt die Gleichung $a x^{n-1} y = 0$ aus, dass (nach der Poncelet'schen Benennung) y harmonisches Centrum (erster Ordnung) zu der Curve $a x^n = 0$ (nach der ursprünglichen Benennung zu den n Durchschnitten der Geraden xy mit dieser Curve) in Bezug auf den Pol x ist; daher habe ich (Theorie der Centralen in Crelle's Journal Band 24 und 25) den Ort von x bei festem y die erste Polare von y und den Ort von y bei festem x die erste *Centrale* von x genannt*), und diese erste Centrale, die ich schlechthin Centrale nenne, spielt in der Invariantentheorie eine schon in dem Fundamentalsatze erkennbare Hauptrolle.

Im Allgemeinen werde ich $a x^{n-p} y^p$, als Function von y betrachtet, die p^{te} Centrale von x und, als Function von x betrachtet, die p^{te} Polare von y in Bezug auf die Function $a x^n$ nennen, so dass also die p^{te} Polare der $n-p^{\text{ten}}$ Centrale identisch ist. Endlich bemerke ich noch, dass auch die Complexe durch eine Function der Form $a x^n x'^{n'} x''^{n''} \cdots$ dargestellt werden können, wo x eine Grösse erster Stufe, x' zweiter, x'' dritter Stufe ist u. s. w.

§ 3.

Symbolik.

Die angestellten Betrachtungen führen uns hinüber zu der symbolischen Bezeichnung, wie sie zuerst von Aronhold (Borch. J. Bd. 55)

---

*) Vgl. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1872, S. 567 ff. Gelegentlich bemerke ich, dass, was ich dort Wendelinie genannt habe, mit der von Clebsch so genannten Polardeterminante (Borch. Journ. 59. S. 125) zusammenfällt, was mir entgangen war.

in die neuere Algebra eingeführt, und von Clebsch und in Anschluss an ihn von Gordan zu der hohen Stufe von Vollkommenheit gebracht ist, welche sie gegenwärtig zu einer unentbehrlichen oder doch äusserst bequemen Waffe gemacht hat, um neue Gebiete mathematischen Wissens zu erobern. Die Bezeichnungen, die ich im vorhergehenden § angewandt habe, und die sich aus dem Wesen der Ausdehnungsgrössen mit unabweislicher Nothwendigkeit ergaben, und die ich daher kurz die organischen Bezeichnungen nennen will, sollen daher keineswegs jene vortreffliche Symbolik verdrängen oder ersetzen, sondern nur sie ergänzen, indem sie einerseits jener Symbolik stets eine reale, anschauliche Bedeutung unterlegen, andrerseits da eintreten, wo jene nicht ausreicht. Es sei zuerst die reale Bedeutung der symbolischen Producte $(abc\cdots)$ betrachtet, wo a, b, $\cdots$ sich auf die Functionen ax^α, bx^β, u. s. w. beziehen, von denen aber auch mehrere einander gleich sein können. Dann bedeutet $(abc\cdots)$ zunächst die gleichfalls symbolische Determinante $\Sigma \mp a_1 b_2 c_3 \cdots$, und der ganze Ausdruck, sofern er nur solche symbolische Producte enthält, gewinnt erst dadurch eine reale Bedeutung, dass man ihn nach Potenzen der $a_1, a_2, \cdot\cdot\, b_1, b_2 \cdots$ entwickelt und die Potenzen der a zusammenordnet, ebenso die der b u. s. w.; alsdann hat man statt $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots\cdot$ zuletzt den Coefficienten $a_{\alpha_1, \alpha_2}, \cdots$ von ax^n zu setzen. Dieser ist nach dem obigen $ae_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \cdots\cdot$; also kann man $(abc\cdots) = \Sigma \mp ae_1 \cdot be_2 \cdot ce_3 \cdots$ setzen, d. h. $(abc\cdots)$ bedeutet, dass man in die zu a, b, c, $\cdot\cdot$ gehörigen Functionen die Schaar der Einheiten $e_1, \cdot\cdot\, e_m$ in allen möglichen Folgen (jede Einheit statt *eines* Factors x der Function) eintreten lässt, dem so erhaltenen Product das $+$ oder $-$-Zeichen vorsetzt, je nachdem das combinatorische Product der Einheiten in dieser Folge $+1$ oder -1 ist, und diese Producte addirt; ich will dies so ausdrücken, dass ich sage, man habe dann in $abc\cdots$ die Schaar der Einheiten *harmonisch* eingeführt. Diese Einführung wird dann bei den folgenden symbolischen Producten, die in dem ganzen Ausdrucke als Factoren vorkommen, als schon vollzogen vorausgesetzt, so dass also in jeder Function nur noch die Factoren x übrig bleiben, welche nicht schon früher durch Einheiten verdrängt waren. Kommen ausser jenen symbolischen Producten $(abc\cdots)$ noch die symbolischen Factoren a_x^p u. s. w. vor, so bedeuten diese weiter nichts, als dass die noch übrig gebliebenen x in den betreffenden Functionen ungeändert stehen bleiben sollen; sie können also alle weggelassen werden, nur wenn noch eine zweite Reihe von Veränderlichen (oder mehrere solche), die durch die extensive Grösse y bezeichnet sei, hinzukommt, so sind die Factoren a_y^p u. s. w. nicht mehr zu unterdrücken; aber ihre Bedeutung ist aus dem Vorigen ohne weiteres ersichtlich. Man kann aber die Bedeutung der symbolischen Producte $(abc\cdots)$ noch concreter fassen. Nämlich setzen wir $r_1, r_2 \cdots r_m$ als die zu e_1, $e_2 \cdots e_m$ reciproken Einheiten und bezeichnen mit $\bar{a}$ die Grösse $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots a_m r_m$, wo $a_1, \cdots a_m$ die Zahlgrössen sind, welche aus a durch Einführung von $e_1, e_2, \cdots e_m$ statt eines x entstehen, so ergiebt sich $(a\,b\,c \cdots) = (\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \cdots)$, wo das Product rechts als combinatorisches zu fassen und zugleich $a_x = (\bar{a}x)$ ist; die Grössen $\bar{a}$ sind dann als (erste) Centralen von x in Bezug auf die Function ax^n zu fassen, oder in Bezug auf die Function, welche daraus durch Einführung der Einheiten, die durch die früheren symbolischen Producte bedingt war, hervorging.

Diese Andeutungen mögen genügen, um die reale Bedeutung der Symbole festzustellen; es wird die Auffassung dieser Bedeutung überall da von wesentlichem Nutzen sein, wo man gezwungen ist, die symbolische Darstellung zu verlassen.

§ 4.

Theorie binärer Formen.

Es wird hinreichend sein, wenn ich den Fundamentalsatz für binäre Formen erweise und seine Bedeutung für dieselben darlege, indem dadurch schon auf gewisse Weise der Weg vorgezeichnet ist, den man bei Formen, die aus mehr als 2 Einheiten entspringen, einzuschlagen hat. Ich werde dabei der Bequemlichkeit wegen x und y statt der im Fundamentalsatze mit x_1 und x_2 bezeichneten extensiven Grössen einführen und zunächst die Aufgabe stellen, die aus einer binären Form ax^n entspringenden invarianten Bildungen, wenn sie als Functionen der Coefficienten $a_1 = a\,e_1{}^n$, $a_2 = a\,e_1{}^{n-1}\,e_2, \cdots a_k = a\,e_2{}^n$ und der veränderlichen Zahlgrössen x_1 und x_2 gegeben sind, als Functionen der $k-1$ Stammformen darzustellen. Es sei $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Da nun alle jene Bildungen unverändert bleiben, wenn man statt e_1 und e_2 zwei aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, deren combinatorisches Product 1 ist, so kann man x und y dafür einführen mit der vorläufigen Bedingung, dass (xy), was wir mit u bezeichnen wollen, gleich 1 sei. Jede aus den Einheiten numerisch ableitbare Grösse p lässt sich dann auch aus x und y ableiten. Es sei $p = p_1 e_1 + p_2 e_2 = \pi_1 x + \pi_2 y$, so wird nun die invariante Bildung

$$\Pi(a_1, \cdots a_k, p_1, p_2) = \Pi(\varphi_0, \cdots \varphi_n, \pi_1, \pi_2),$$

wo die φ aus den a hervorgehen, indem man x und y statt e_1 und e_2 setzt, nämlich $\varphi_0 = a\,x^n$, $\varphi_1 = ax^{n-1}y, \cdots \varphi_n = a\,y^n$. Setzt man nun $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 0$, so wird $p = x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, und es wird

$$\Pi = \Pi(a_1, \cdots a_k, x_1, x_2) = \Pi(\varphi_0, \cdots \varphi_n, 1, 0),$$

oder wenn

$$\Pi(a_1, \cdots a_k, x_1, x_2) = F(a_1, \cdots a_k) \cdot x_1{}^q + \cdots$$

ist, wo q den Grad der invarianten Bildung bezeichnet, so ist

$$\Pi = F(\varphi_0, \cdots \varphi_n),$$

also als ganze Function der k Formen $\varphi_0 \cdots \varphi_n$ dargestellt. Aber eine dieser Formen, nämlich $\varphi_1 = a x^{n-1} y$ ist Null, wenn y harmonisches Centrum erster Ordnung zu dem Pole x in Bezug auf die durch die Gleichung $a x^n = 0$ dargestellten n Punkte ist, und es ist also dann Π als ganze Function der $k - 1 = n$ Stammformen $\varphi_0, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ dargestellt. Hierbei war $u = (xy)$ vorläufig gleich 1 gesetzt; es ist y durch die Gleichung $a x^{n-1} y = 0$ bedingt, d. h. y ist, abgesehen von einem Zahlfactor gleich $a x^{n-1}$, d. h. $y \equiv a x^{n-1}$ also,

$$u \equiv a x^{n-1} x \equiv a x^n \equiv a,$$

der ursprünglichen Function. Ist also die erhaltene Gleichung nicht homogen, so macht man sie nun homogen durch Hinzufügung von Factoren a.

Diese Entwickelung stimmt im Resultate, wie auch dem Wesen nach in der Art der typischen Darstellung mit Clebsch Theorie der binären algebraischen Formen S. 321—328 überein (vgl. auch Gundelfinger in Borch. J. Bd. 74); sie gilt auch unmittelbar für (simultane) Bildungen, die einem Vereine binärer Formen entsprossen sind, indem man nur für $a_1, a_2, \cdots a_k$ die sämmtlichen Zahlcoefficienten der Formen dieses Vereines zu setzen hat.

Viel wichtiger als diese Zurückführung der explicite gegebenen Bildungen auf die Stammformen ist die der symbolisch gegebenen, die aber ganz nach denselben Principien erfolgt. Das symbolische Product (ab) ist $= a_{e_1} b_{e_2} - a_{e_2} b_{e_1}$; ersetzt man also wie oben e_1 und e_2 durch y und x (ich habe beide der einfacheren Zeichenbestimmung wegen vertauscht) wo (yx) vorläufig 1 gesetzt wird, so wird nun

$$(ab) = a_y b_x - a_x b_y$$

oder, da, wie oben gezeigt, die Factoren a_x, b_x entbehrlich sind, $= a_y - b_y$, also

$$(ab)^n = (a_y - b_y)^n = a_y^n - \frac{n}{1} a_y^{n-1} b_y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_y^{n-2} b_y^2 - \cdots,$$

oder wenn a und b dieselbe Function darstellen

$$= a y^n - \frac{n}{1} a x y^{n-1} \cdot a x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a x^2 y^{n-2} a x^{n-2} y^2 - \cdots$$

$$(ab)^n = \varphi_0 \varphi_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \varphi_2 \varphi_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi_3 \varphi_{n-3} + \cdots,$$

wenn man, wie oben, y so bestimmt, dass $\varphi_1 = a x^{n-1} y = 0$ wird.

Dies ist der Satz, den Clebsch in seiner Theorie der binären Formen S. 334 als einer schriftlichen Mittheilung Brioschi's entnommen darstellt.

Derselbe lässt sich aber vermöge der von mir angegebenen Methode unmittelbar zu folgendem Satze erweitern, welcher fast alle Beziehungen, die zwischen binären Formen herrschen, zur Evidenz bringt.

Wenn $(ab)^p(ac)^q \cdots$ *eine beliebige symbolische Invariantenbildung* (Invariante oder Covariante) *einer algebraischen Form* $a_x^n = b_x^n = c_x^n = \cdots$ *ist, so setze man* $a - b$ *für* (ab), $a - c$ *für* (ac) *u. s. w., entwickele nach Potenzen von* $a, b, c, \cdots$, *schreibe dann* φ_r *statt* $a^r, b^r, \cdots$ *und setze* $\varphi_1 = 0$, *so ist der so hervorgehende Ausdruck gleich* $(ab)^p(ac)^q \cdots$

Man erhält so, abgesehen von dem Factor φ_0, der die ursprüngliche Function darstellt, und erst zuletzt zur Herstellung der Homogenität hinzugefügt zu werden braucht,

$$c_2 = \tfrac{1}{2}(ab)^2 \equiv \varphi_2, \quad c_3 = (ab)^2(ac) \equiv \varphi_3, \quad c_4 = \tfrac{1}{2}(ab)^4 \equiv \varphi_4 + 3\varphi_2^2;$$
$$c_5 = (ab)^4(ac) \equiv \varphi_5 + 4\varphi_2\varphi_3; \quad c_6 = \varphi_6 + 15\varphi_2\varphi_4 + 10\varphi_3^2, \cdots$$

Also

$$\begin{array}{l|l} \varphi_2 = c_2 & \varphi_5 = c_5 - 4c_2c_3 \\ \varphi_3 = c_3 & \varphi_6 = c_6 - 15c_2c_4 + 45c_2^3 + 10c_3^2 \\ \varphi_4 = c_4 - 3c_2^2 & \text{(vgl. Cl. bin. F. 337).} \end{array}$$

Als Beispiel mögen die von Clebsch mit R und j bezeichneten Bildungen dienen $R = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd) \equiv (a-b)^2(c-d)^2(a-c)(b-d) \equiv (a^2-2ab+b^2)(c^2-2cd+d^2)(ab-bc-ad+cd)$ oder mit Weglassung der Glieder, die zuletzt nur eine erste Potenz erhalten, und die nach dem Obigen null sind, $-b^3c^3 - a^3d^3 - 2a^2b^2c^2 - 2a^2c^2d^2 - 2a^2b^2d^2 - 2b^2c^2d^2 \equiv -2\varphi_3^2 - 8\varphi_2^3 \equiv -2c_3^2 - 8c_2^3$. Um sie durch Hinzufügung der Factoren $\varphi_0 = f$ (bei Clebsch) homogen zu machen, ist zu bedenken, dass die Functionen φ in jedem Gliede so oft vorkommen müssen, als die Anzahl der symbolischen Elemente beträgt, also in $c_2, c_4, c_6, \cdots$ je zweimal, in $c_3, c_5, c_6, \cdots$ je dreimal, in R viermal, also

$$\tfrac{1}{2}R = -\frac{c_3^2 + 4c_2^3}{f^2}$$

in Uebereinstimmung mit Clebsch S. 337.

Ferner $j = (ab)^2(ac)^2(bc)^2 \equiv (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$, was sich mit Weglassung der Glieder, welche eine erste Potenz enthalten, verwandelt in $6(\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2 - \varphi_2^3) \equiv 6(c_2c_4 - 4c_2^3 - c_3^2)$, also homogen gemacht, da j nur 3 symbolische Elemente enthält

$$\tfrac{1}{6}j = \frac{f^2c_2c_4 - 4c_2^3 - c_3^2}{f^3}$$

in Uebereinstimmung mit Clebsch S. 338.

Wie sich alles dies für ternäre und höhere Formen gestalten, denke ich späterhin zu zeigen.

Stettin, den 21. Februar 1874.

Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen.

Von Felix Klein in Erlangen.

Die auf den Zusammenhang der Flächen bezüglichen Definitionen werden bei Riemann zunächst ohne besondere Festsetzungen hinsichtlich des Unendlich-Weiten hingestellt. Aber entsprechend der von ihm beabsichtigten Verwerthung dieses geometrischen Begriffes für functionentheoretische Untersuchungen wird bei ihm eine solche Festsetzung implicite eingeführt, indem nämlich die unbegrenzte Ebene einer Kugelfläche äquivalent gesetzt wird, auf die sie durch stereographische Projection bezogen ist. In ähnlicher Weise kann man jede sich in's Unendliche erstreckende Fläche auf eine durchaus im Endlichen gelegene reduciren: man braucht sie nur einer Transformation durch reciproke Radien zu unterwerfen, deren Inversionscentrum nicht selbst der Fläche angehört. Man kann dann alle Betrachtungen über den Zusammenhang der Flächen, wie sie gewöhnlich unter der stillschweigenden Voraussetzung durchaus im Endlichen gelegener Flächen angestellt werden, auf beliebig sich in's Unendliche erstreckende übertragen.

Aber die so eingeführte Festsetzung, vermöge deren das Unendlich-Weite als ein einzelner Punkt erscheint*), ist an und für sich willkührlich; sie widerspricht überdies dem Wesen der Sache, wenn man, wie in der projectivischen Geometrie, das Unendlich-Ferne als eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Punkten, als eine Ebene, betrachten muss. Auch bei dieser projectivischen Anschauungsweise kann man für Flächen, die sich beliebig in's Unendliche erstrecken, dieselben Probleme aufstellen, auf welche sich, bei durchaus im Endlichen gelegenen Flächen, die Riemann'schen Betrachtungen beziehen. Es fragt sich, ob dann specifisch neue Ueberlegungen noth-

*) Dieselbe ist auch in anderen auf die Analysis situs bezüglichen Fragen gelegentlich gebraucht worden; vgl. z. B. Listing: Der Census der räumlichen Complexe. Göttinger Abhandlungen 1861. — Dass man und wie man dieselbe verwerthen kann, um auf sie ein ganzes System der Geometrie zu begründen, welches als eine Art von Seitenstück zur projectivischen Geometrie betrachtet werden darf, vgl. meine Schrift: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Erlangen 1872.

wendig werden, oder ob es gelingt, die betr. Probleme durch blosse Benutzung der Riemann'schen Betrachtungen zu erledigen. So ungefähr stellte ich diese Frage in einem neuerdings in diesen Annalen erschienenen Aufsatze (Ueber Flächen dritter Ordnung. t. VI.)*), ohne aber eine Beantwortung derselben in definitiver Form zu versuchen. Vielmehr machte ich nur auf eine Reihe von Schwierigkeiten aufmerksam, die sich einer unmittelbaren Verwerthung der Riemann'schen Betrachtungen entgegenstellen. Ich betonte besonders, dass der ungewöhnliche Zusammenhang der unbegränzten Ebene in Anlehnung an die projectivische Anschauung nicht, wie in der Riemann'schen Theorie, gleich Null, sondern gleich Zwei zu setzen ist, falls man ohne nähere Festsetzung die *gewöhnliche* Definition dieses Zusammenhang's**) beibehalten will. Denn die Ebene wird entsprechend der projectivischen Anschauung durch eine in ihr verlaufende Gerade, die doch auch eine geschlossene Curve ist, noch nicht in zwei Stücke getheilt. Dementsprechend glaubte ich die Zahlen, welche Hr. Schläfli in einem kurz zuvor veröffentlichten Aufsatze (Annali di Matemetica. t. V. Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca una parte etc.) für die fünf verschiedenen Arten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung aufgestellt hatte, alle um zwei Einheiten erhöhen zu sollen.

Ich bin nun von Hrn. Schläfli brieflich darauf aufmerksam gemacht worden, dass man, unbeschadet der Richtigkeit dieser meiner Betrachtungen und Einwände, doch auch bei projectivischer Anschauung für die unbegränzte Ebene den Zusammenhang Null ansetzen kann, wenn man dieselbe nämlich als Doppelfläche betrachten will, also etwa als Gränze eines zweischaligen Hyperboloid's. In der That, man denke sich, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, eine Ebene horizontal und ziehe in ihr eine Linie Süd-Nord. Dann wird die als Doppelfläche betrachtete Ebene in zwei Theile zerfallen, deren einer die östliche Hälfte des oberen Blattes und die westliche des unteren, deren

*) Dass sich die Problemstellung der Analysis situs je nach der Beurtheilung des Unendlich-Weiten modificirt, hatte ich bereits in der oben citirten Schrift: „Vergleichende Betrachtungen etc.“ angegeben (p. 30 derselben).

**) Wenn man auf einer geschlossenen Fläche im Maximum q geschlossene Curven ziehen kann, ohne die Fläche zu zerstücken, so setzt Riemann den Zusammenhang derselben $= 2q + 1$. Aber es ist bereits in den Neumann'schen „Vorlesungen über Riemann's Theorie etc.“ angedeutet und neuerdings von Hrn. Schläfli hervorgehoben worden (vgl. z. B. Borchardt's Journal. t. 76. p. 152. Note), dass es consequenter ist, in einem solchen Falle nur von einem $2q$-fachen Zusammenhange zu sprechen. Indem ich mich im Texte dieser Bezeichnung anschliesse, füge ich, nach dem Vorgange Schläfli's, wo eine Undeutlichkeit entstehen könnte, dem Worte „Zusammenhang“ das Attribut „ungewöhnlich“ hinzu.

anderer die beiden übrigen Hälften enthält. Dabei wird die gerade Linie selbst doppelt gedacht, nämlich sowohl im oberen als im unteren Blatte verlaufend.

Eine solche Einführung von Doppelflächen erscheint um so mehr zulässig, als sie schon in den Untersuchungen der Analysis situs, welche sich nur auf im Endlichen gelegene Flächen beziehen, nothwendig wird*). Ein bekanntes Beispiel dafür bietet die (mit einer Randcurve versehene) Fläche, welche man aus einem Papierstreifen bilden kann, indem man die beiden Enden des Streifens so aneinanderheftet, dass die eine Seite desselben in die andere übergeht. Ein anderes Beispiel für eine solche Fläche, und zwar eine geschlossene Fläche, giebt, wie weiter unten gezeigt werden soll, die Steiner'sche Fläche, die man ja bekanntlich als völlig im Endlichen gelegen voraussetzen darf. (Von den isolirten Stücken, welche ihre Doppelgeraden besitzen, wird dabei abgesehen.)

Ich habe nun gefunden, dass man die Theorie des Flächenzusammenhangs, wie sie gewöhnlich entwickelt wird, in der That auf die projectivischen Vorstellungen unverändert übertragen kann, wenn man sich überhaupt entschliesst, *die unpaaren Flächen der projectivischen Geometrie als Doppelflächen zu betrachten, und eine unpaare Curve erst dann als geschlossen anzusehen, wenn man sie zweimal durchlaufen hat.*

Ob man sich dieser Anschauung anschliessen will, oder nicht, wird zunächst dem freien Entschlusse des Einzelnen überlassen sein. Es mag sogar hervorgehoben werden, dass es von vorneherein sehr unnatürlich scheint, in der projectivischen Geometrie die Ebene als Grenzfall der nicht-geradlinigen Flächen zweiter Ordnung betrachten zu sollen. Aber die Anschauung empfiehlt sich durch ihren Erfolg. Denn man kann im Anschlusse an sie auch für die projectivische Auffassung des Unendlich-Weiten den Satz aussprechen, der den Zusammenhangsbegriff für die functionentheoretischen Untersuchungen so werthvoll macht: *dass nämlich zwei geschlossene Flächen dann und nur dann auf einander Punkt für Punkt bezogen werden können, so dass consecutiven Punkten der einen consecutive Punkte der anderen entsprechen, wenn der Zusammenhang der beiden Flächen der gleiche ist.* (Für ungeschlossene Flächen kommt nur die weitere Bedingung hinzu,

---

*) Freilich verlangt dann die Consequenz, dass man, wenn von einer Fläche, deren entgegengesetzte Seiten nicht in einander übergehen, schlechthin die Rede ist, unter dem Zusammenhange der Fläche die Grundzahl versteht, die man dem von den beiden Seiten gebildeten *Systeme* beizulegen hat (cf. Neumann's Vorlesungen). Der Zusammenhang der Kugel wäre dann $= -2$; der Zusammenhang der einzelnen Kugelseite $= 0$.

dass auch die Anzahl der Randcurven bei beiden übereinstimmen muss*)).

Dem widerspricht nicht, wie vorab bemerkt sei, wenn ich in meiner schon genannten Arbeit hervorhob, das einschalige Hyperboloid und die Ringfläche seien nicht in einander überführbar, obgleich ihr Zusammenhang nach Schläfli's wie nach meiner Zählung übereinstimmend gleich Zwei zu setzen ist. Denn unter Ueberführbarkeit wurde damals etwas Anderes verstanden, als hier für die Transformirbarkeit zweier Flächen in einander verlangt wird. Eine Fläche wurde damals (vgl. § 16. meiner Arbeit) in eine andere überführbar genannt, wenn es gelang, durch Verbindung von Collineationen, die das Unendliche in's Endliche bringen, mit stetigen, unendlich kleinen Transformationen, die nur das Endliche betreffen, die eine Fläche aus der anderen abzuleiten. Durch solche Mittel ist das einschalige Hyperboloid allerdings nicht in eine Ringfläche zu verwandeln.

Dagegen kann eine eindeutige, stetige Beziehung zwischen beiden durch den folgenden unstetigen Process ohne Weiteres hergestellt werden: Man zerschneide das Hyperboloid längs der unendlich fernen Ebene, bringe die so entstandene zweifach berandete Fläche durch Verzerrung ganz in's Endliche und hefte die beiden Ränder dann wieder in der Weise an einander, dass jeder Punkt des einen Randes mit demjenigen des anderen vereinigt wird, von dem er vorher durch den Schnitt getrennt worden war. (Damit dies geschieht, muss man den einen Rand des Hyperboloids gegen den anderen Rand um 180^0 drehen, ehe man die Ränder durch Zusammenbiegen vereinigt). — Aehnliche unstetige Processe zur Herstellung der eindeutigen Beziehung werden übrigens schon nothwendig, wenn man nur von Flächen handelt, die ganz im Endlichen liegen. Man kann z. B. eine einfach berandete, mit einem Verzweigungspunkte versehene Riemann'sche Fläche nur dadurch mit einem einfach zusammenhängenden Stücke einer Ebene zur Deckung bringen, dass man sie durch einen vom Verzweigungspunkte zum Rande gehenden Schnitt zerschneidet und hinterher die durch den Schnitt getrennten Partieen wieder an einander heftet. Ich finde, dass die Darstellungen dieser Theorie, welche mir gerade zur Hand sind, hierüber keine volle Klarheit geben: es wird von der Möglichkeit eines solchen Zerschneidens und Wieder-Verbindens gesprochen, aber dasselbe wird nur als nützlich, nicht als für viele Fälle nothwendig dargestellt. — Es ist wohl kaum nöthig, hervorzuheben, dass der Unterschied, den ich zwischen Hyperboloid und Ringfläche

---

*) Dass diese Bedingungen für die Transformirbarkeit zweier Flächen in der That *hinreichend* sind, findet sich kurz und übersichtlich bei C. Jordan bewiesen in Liouville's Journal t. XI. 1866.

und überhaupt zwischen paaren und unpaaren Flächen in meiner früheren Arbeit hervorhob, durch diese Bemerkungen nicht bedeutungslos wird; er kommt nur bei der Frage nach der Möglichkeit der eindeutigen Beziehung zweier Flächen auf einander, wie sie hier gestellt wird, nicht in Betracht. —

Den Beweis für das aufgestellte Theorem erbringe ich in der Weise, dass ich den Raum mit unendlich ferner Ebene zu dem Raume mit unendlich fernem Punkte in eine einfache ein-zweideutige Beziehung setze, vermöge deren das Theorem unmittelbar aus dem gleichlautenden Satze der gewöhnlichen Analysis situs hervorgeht.

Es mag das zunächst bei der Ebene erörtert werden. In der gewöhnlichen Analysis situs wird die Ebene einer Kugel äquivalent gesetzt, auf die sie durch stereographische Projection bezogen ist. Aber man kann die Kugel dann weiterhin durch centrale Projection auf eine neue Ebene beziehen. Diese Ebene ist dann doppelt von den Bildern der Kugelpunkte überdeckt; ihre unendlich ferne Gerade kommt als solche zur Geltung, indem ihr ein grösster Kreis auf der Kugel entspricht. Sieht man nun von der Kugel ab, welche die Beziehung zwischen den beiden Ebenen vermittelte, so hat man eine ein-zweideutige Verwandtschaft zwischen der Ebene mit unendlich ferner Geraden und der Ebene mit unendlich fernem Punkte, vermöge deren jeder in der letzteren gezogenen Curve, falls man nur die unpaaren Curven der ersteren als Doppel-Curven ansieht, eine Curve der ersteren Ebene eindeutig entspricht.

Ganz entsprechend kann man eine ein-zweideutige Beziehung zwischen den beiden Räumen herstellen. Da sich der Process bei ihnen, wegen des Nothwendigwerden's einer vierten Dimension, minder anschaulich bezeichnen lässt, so mögen die Formeln hergesetzt werden, welche ihn repräsentiren. Sind x, y, z rechtwinklige Coordinaten des Raumes mit unendlich fernem Punkte, x', y', z' des Raumes mit unendlich ferner Ebene, ist endlich λ eine beliebige Constante, so hat man zu setzen:

$$x' = \frac{x}{1-\lambda(x^2+y^2+z^2)}, \quad y' = \frac{y}{1-\lambda(x^2+y^2+z^2)}, \quad z' = \frac{z}{1-\lambda(x^2+y^2+z^2)}.$$

Jeder Fläche des Raumes mit unendlich fernem Punkte entspricht dann eindeutig eine Fläche des anderen Raumes, vorausgesetzt, dass man seine unpaaren Flächen als Doppelflächen betrachtet, *und unser Theorem betr. die Flächen des letzteren Raumes ist richtig, weil es für die Flächen des anderen gilt.*

Es mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, die sich auf gewisse Beziehungen erstrecken, welche zwischen dem Zusammenhange algebraischer Flächen und ihrem Verhalten bei algebraisch-eindeutigen Transformationen Statt finden.

Wenn zwei Flächen algebraisch eindeutig in einander übergeführt werden können, wenn dabei jedem reellen Punkte der einen ein reeller Punkt der anderen entspricht*), wenn endlich auf keiner von beiden dabei reelle Fundamentalpunkte auftreten, so haben die Flächen ersichtlich denselben Zusammenhang. Man kann von dieser Bemerkung Gebrauch machen, um den Zusammenhang gewisser algebraischer Flächen ohne Weiteres zu bestimmen. Die vierte der von Schläfli aufgezählten Flächen dritter Ordnung z. B. (welche nur 3 reelle Gerade und 7 reelle Dreiecksebenen besitzt) lässt sich auf die Ebene ohne Zwischentreten reeller Fundamentalpunkte reell abbilden, denn die 6 bei ihrer Abbildung im algebraischen Sinne vorhandenen Fundamentalpunkte sind paarweise conjugirt imaginär. Der Zusammenhang der Fläche ist daher Null; überdiess ist sie eine Doppelfläche, weil jedem Punkte der Ebene, unabhängig davon, ob man ihn der einen oder anderen Seite der Ebene zurechnet, ein und derselbe Punkt der Fläche entspricht. Aus demselben Grunde ist, wie bereits oben angegeben wurde, die Steiner'sche Fläche eine Doppelfläche vom Zusammenhange Null; denn es ist bekannt, dass sie ohne Auftreten von Fundamentalpunkten durch reelle Functionen zweiten Grades auf die Ebene abgebildet werden kann**).

Es drängt sich nun von selbst die Frage auf, welche Beziehungen für den Zusammenhang zweier Flächen gelten, die zwar auf reelle Weise algebraisch eindeutig auf einander bezogen werden können, bei deren Abbildung aber reelle Fundamentalpunkte auftreten. Dabei müssen natürlich solche Flächen von der Betrachtung ausgeschlossen sein, die nicht isolirte, vielfache Punkte besitzen. Denn es wird bei den Definitionen des Zusammenhangs, wie sie gewöhnlich gegeben werden, überhaupt von solchen Flächen abgesehen. Lässt man sie bei Seite, so kann man folgenden Satz aussprechen: *Finden sich auf der einen Fläche μ, auf der andern ν (reelle) Fundamentalpunkte, so ist der Zusammenhang der ersten, vermehrt um μ, gleich dem Zusammenhang der zweiten, vermehrt um ν.*

---

*) Dies ist nicht immer der Fall. Z. B. kann die Fläche dritter Ordnung ohne Knoten, mit 3 reellen Geraden und 13 reellen Dreiecksebenen (die fünfte Art der allgemeinen Fläche nach Schläfli's Eintheilung) nur durch Functionen mit complexen Coefficienten eindeutig auf die Ebene abgebildet werden.

**) Es sei hier daran erinnert, dass Clebsch gelegentlich seiner Untersuchung der Linienflächen vom Geschlechte Null (Math. Annalen Bd. V.) alle Flächen, die ohne Auftreten von (reellen oder imaginären) Fundamentalpunkten algebraisch eindeutig auf einander bezogen werden können, als Flächen eines *Typus* zusammenfasst.

Einige Beispiele mögen das zunächst erläutern.

1. Zwei Ebenen sollen algebraisch eindeutig (durch eine Cremona-Transformation) auf einander bezogen sein. Dann ist bekannt, dass die Zahl der beiderseits überhaupt auftretenden (reellen und imaginären) Fundamentalpunkte die gleiche ist; gemäss unserer Behauptung muss auch die Zahl der reellen Fundamentalpunkte allein beiderseits übereinstimmen.

2. Eine Kugel werde stereographisch auf die Ebene (die Doppelebene) bezogen. Dann entspricht die Ebene eindeutig dem Aggregate der beiden Kugelflächen, welche durch die innere und äussere Seite der Kugel vorgestellt werden, und die zusammen nach einer bereits oben gemachten Bemerkung den Zusammenhang — 2 repräsentiren. In der That treten auf der Kugel bei der Abbildung zwei Fundamentalpunkte auf, nämlich sowohl auf der äusseren als der inneren Seite je einer.

3. Ein einschaliges Hyperboloid werde durch stereographische Projection auf eine Ebene bezogen. Dann ist wiederum die eine Seite der Fläche der einen Seite der Ebene, die andere der zweiten Seite der Ebene entsprechend gesetzt, und man hat nicht sowohl ein einzelnes Hyperboloid, als ein System von zwei Hyperboloiden mit der Ebene zu vergleichen. Jedes der beiden Hyperboloide trägt einen Fundamentalpunkt: den Projectionspunkt. Aber die Ebene trägt vier Fundamentalpunkte; denn man muss die beiden Fundamentalpunkte, von denen man bei der Abbildung eines Hyperboloids gewöhnlich spricht, hier doppelt zählen, weil sie sowohl der einen als der anderen Seite der Ebene angehören. Der Zusammenhang des Hyperboloidsystems wird daher gleich + 2, wie es in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Zählung sein muss; denn jedes der beiden Hyperboloide ist zweifach zusammenhängend, und ihre Trennung zählt für — 2.

4. Wenn man die drei ersten Schläfli'schen Arten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung (die bez. 27, 15, 7 reelle Gerade enthalten) auf die Ebene abbildet, so erscheinen in der Ebene bez. 6, 4, 2 reelle Fundamentalpunkte, die man wiederum doppelt zu zählen hat. Auf der Fläche selbst treten keine Fundamentalpunkte auf. *Dementsprechend wird der Zusammenhang bez. gleich* 12, 8, 4. Schläfli gab die Zahlen 6, 4, 2. Aber er betrachtet bei seiner Abzählung die Flächen als einfache, nicht als Doppelflächen. Thut man das Letztere, so hat man die Processe, vermöge deren Schläfli diese Flächen aus der mit dem Zusammenhange Null vorausgesetzten, unbegrenzten Ebene herstellt, in der That doppelt zu zählen, da sie sich auf beide Seiten der Fläche beziehen. Schläfli's Zählung war von dem hier entwickelten Standpunkte aus inconsequent, weil die

Annahme, dass die Ebene nullfach zusammenhängend sei, bereits darüber entscheidet, dass man die Ebene als Doppelebene betrachten muss. Will man die Ebene und dementsprechend diese Flächen als einfache betrachten, so ergeben sich für die Flächen die Zusammenhangs-Zahlen 8, 6, 4, wie ich in meiner früheren Arbeit ausführte. —

Um den Beweis der nunmehr an einzelnen Beispielen erläuterten Regel zu führen, ist es nöthig, für reelle Elemente insbesondere einige Ueberlegungen zu entwickeln, welche sonst nur für beliebig complexe Elemente in der Theorie des algebraisch-eindeutigen Entsprechens bewiesen werden.

Es seien zwei geschlossene Flächen auf einander reell eindeutig bezogen. Jedem Fundamentalpunkte der einen Fläche entspricht auf der anderen eine Fundamentalcurve. Es ist leicht zu sehen, dass diese Curve nur aus einem Zuge bestehen kann. Denn man muss sich die Vorstellung bilden, dass dem Büschel von Fortschreitungsrichtungen, welche von dem Fundamentalpunkte ausgehen, eindeutig die Punkte dieser Curve entsprechen: sowie jenes Büschel ohne Unterbrechung ist, so müssen die Punkte der Curve eine einzige, zusammenhängende Reihenfolge bilden. Die den verschiedenen Fundamentalpunkten der einen Fläche entsprechenden Fundamentalcurven werden sich, wie leicht zu sehen, nur in den Fundamentalpunkten der zweiten Fläche schneiden können. Sie werden durch sie in eine Anzahl, S, von Segmenten zerlegt, die gleich ist der Anzahl von Malen, dass sie überhaupt durch die Fundamentalpunkte durchgehen.

Man überzeugt sich nun von folgendem Satze: *Die Anzahl S der Segmente, in welche die Fundamentalcurven zerlegt werden, ist auf beiden Flächen dieselbe.* Geht nämlich die Fundamentalcurve, welche dem i^{ten} Fundamentalpunkte der ersten Fläche entspricht, a_{ik} mal durch den k-Fundamentalpunkt der zweiten, so wird auch die Curve, welche letzterem auf der ersten Fläche entspricht, a_{ik} mal durch den i^{ten} Fundamentalpunkt der ersten Fläche gehen müssen. Denn durch beide Behauptungen wird nur gleichmässig ausgesprochen, dass a_{ik} Fortschreitungsrichtungen in dem einen und dem anderen Fundamentalpunkte existiren, welche einander entsprechen. Die Zahl S ist aber die Summe aller a_{ik}; sie fällt also beiderseits gleich aus. — Durch die a_{ik} Fortschreitungsrichtungen, welche den verschiedenen Fundamentalpunkten k der zweiten Fläche entsprechen, wird das Büschel der von dem i^{ten} Fundamentalpunkte der ersten Fläche ausgehenden Richtungen in $\sum\limits_k a_{ik}$ Theile, oder, wenn man will, in $2\sum\limits_k a_{ik}$ Halbbüschel zerlegt. In eben soviele Segmente wird die dem i^{ten} Fundamentalpunkte auf der zweiten Fläche entsprechende Curve durch die Fundamentalpunkte der zweiten Fläche getheilt; der

Unterscheidung der Halbbüschel entspricht die Unterscheidung der beiden Seiten der verschiedenen Segmente.

Nunmehr wandele man jede der beiden Flächen in folgender Weise um. Man hebe die μ Fundamentalpunkte der ersten Fläche und die ν Fundamentalpunkte der zweiten heraus (d. h. man schneide aus den Flächen kleine Stücke aus, welche diese Punkte umgeben). Dadurch wächst der Zusammenhang der ersten Fläche um μ, der der zweiten um ν. Sodann zerschneide man die Flächen längs der auf ihnen liegenden Fundamental-Curven: eine Operation, welche nun, nachdem durch das Herausheben der Fundamentalpunkte Begränzungen entstanden sind, in dem Ziehen von S Querschnitten besteht. So ist die eine Fläche um $\mu - S$, die andere um $\nu - S$ im Zusammenhange vermehrt; *die so veränderten Flächen sind aber nunmehr ohne Zwischentreten von Fundamentalpunkten eindeutig auf einander bezogen.* Der Rand jeder der beiden so erhaltenen Flächen besteht, wie der grösseren Bestimmtheit wegen hervorgehoben sei, abwechselnd aus Segmenten von Fundamentalcurven und Stücken der um Fundamentalpunkte herumgelegten kleinen Ovale, wie sie auf diesen Ovalen durch die von den Fundamentalpunkten ausgehenden Halb-Büschel bestimmt werden. Die beiden Ränder der beiden Flächen sind dann so eindeutig auf einander bezogen, dass jedem Stücke des einen, welches aus einem Segmente einer Fundamentalcurve besteht, ein Stück des anderen zugeordnet ist, welches einem der kleinen Ovale angehört, und umgekehrt. Zu jedem von einem Halbbüschel ausgeschnittenen Stück eines Ovals gehört ein zweites, welches durch das complementäre Halbbüschel bestimmt wird. Dem entspricht, dass auch jedes Segment einer Fundamentalcurve zweimal in der Begrenzung auftritt. — Aber der Zusammenhang der beiden so erhaltenen Flächen ist um $\mu - S$ und bez. $\nu - S$ grösser, als der Zusammenhang der beiden ursprünglichen Flächen; *addirt man also zum Zusammenhange der einen ursprünglichen Fläche μ, zu dem der anderen ν, so erhält man gleiche Zahlen, wie behauptet wurde.*

Erlangen, Februar 1874.

Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen.

Von Felix Klein in Erlangen.

Bei der Untersuchung der algebraischen Functionen y einer Veränderlichen x pflegt man sich zweier verschiedener anschauungsmässiger Hülfsmittel zu bedienen. Man repräsentirt nämlich entweder y und x gleichmässig als Coordinaten eines Punktes der Ebene, wo dann die reellen Werthe derselben allein in Evidenz treten und das Bild der algebraischen Function die algebraische Curve wird — oder man breitet die complexen Werthe der einen Variabeln x über eine Ebene aus und bezeichnet das Functionsverhältniss zwischen y und x durch die über der Ebene construirte Riemann'sche Fläche. Es muss in vielen Beziehungen wünschenswerth sein, zwischen den beiden Anschauungsbildern einen Uebergang zu besitzen. Ich darf mit Bezug hierauf nur das Eine hervorheben, dass nämlich ein solcher Uebergang vom rein geometrischen Standpunkte aus geradezu gefordert werden muss, wenn die Sätze, welche sich auf die Zahl und Periodicität der längs einer algebraischen Curve erstreckten Integrale beziehen, zu einem unmittelbaren Verständnisse gebracht werden sollen.

Ein solcher Uebergang ist nun in einfachster Weise herzustellen. Er schliesst sich an die Auffassung einer Curve als des Umhüllungsgebildes ihrer Tangenten*) an; er setzt ferner in einem gewissen Masse diejenigen Erörterungen über den Zusammenhang der Flächen voraus, welche in dem vorstehenden Aufsatze entwickelt wurden.

Man gehe von der Bemerkung aus, dass man jeder Tangente einer algebraischen Curve, mag die Tangente reell oder imaginär sein, im Allgemeinen *einen* reellen Punkt zuordnen kann. Ist nämlich die Tangente reell, so wähle man als entsprechenden Punkt ihren Berührungspunkt; ist die Tangente imaginär, so wähle man den einen reellen Punkt, den sie überhaupt besitzt. Diese beiden Festsetzungen, deren eigentlicher Sinn übrigens aus den weiter unten angeführten Beispie-

*) Wollte man die dualistisch entgegenstehenden Ueberlegungen anstellen, so würde die Anschaulichkeit des Resultats, auf die ich eben Gewicht legen möchte, verloren gehen.

len völlig deutlich werden soll, stimmen insofern mit einander, als die auf reelle Tangenten bezügliche aus der anderen durch Grenzübergang hervorgeht. Denn der reelle Punkt einer imaginären Tangente ist ihr Durchschnittspunkt mit der conjugirten Tangente, und, wenn diese beiden Linien in eine reelle zusammenfallen, so wird aus ihrem Durchschnittspunkte eben der Berührungspunkt.

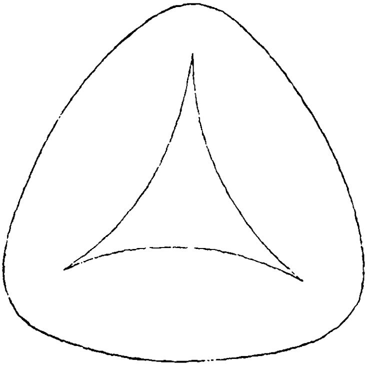
Diese Festsetzungen werden bei etwaigen mehrfach berührenden reellen Tangenten ungenügend. Wir wollen nur den Fall reeller Doppel- oder Wende-Tangenten ins Auge fassen. Hat die Doppeltangente reelle Berührungspunkte, so werden wir ihr eben diese beiden Punkte zuordnen; ist sie aber isolirt, so mag ihr die Gesammtheit der ihr angehörigen reellen Punkte entsprechend gesetzt sein. Ebenso sollen einer Wendetangente alle auf ihr gelegenen reellen Punkte zugeordnet werden. Es wird noch aus den weiteren Ausführungen hervorgehen, dass diese Festsetzungen mit den voraufgeschickten nicht nur verträglich sind, sondern sich aus ihnen in naturgemässer Weise ergeben.

Die zweifach unendlich vielen reellen Punkte, welche man, diesen Festsetzungen zufolge, der Gesammtheit der reellen und imaginären Tangenten der Curve zuordnet, werden eine geschlossene Fläche bilden, welche die verschiedenen Theile der Ebene mit einer Anzahl von Blättern überdeckt, die jedesmal gleich ist der Anzahl der imaginären Tangenten, welche man von einem Punkte des betreffenden Theiles der Ebene an die Curve legen kann (und die also immer gerade ist). *Diese Fläche ist dann ein vollständiges Bild der durch die Curve definirten algebraischen Function.* Sie ist auf die gewöhnliche Riemann'sche Fläche, wie man sie für diese Function construiren könnte, im Allgemeinen eindeutig bezogen. Eine Ausnahme tritt nur für diejenigen Werthsysteme ein, welche den reellen, isolirten Doppeltangenten und den reellen Wendetangenten der Curve entsprechen. Denn während dieselben auf der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche durch je zwei Punkte vorgestellt werden (welche im Falle der Wendetangenten consecutiv sind), entsprechen ihnen bei unserer Fläche ganze gerade Linien, die der Fläche, wie man findet, bez. als Doppel- und Rückkehrkanten angehören: die beiden Flächen sind also in der Art auf einander bezogen, dass auf der einen eine Reihe von Fundamentalpunkten auftritt. Um also von dem Zusammenhange unserer Fläche auf den Zusammenhang der entsprechenden Riemann'schen Fläche schliessen zu können, wird man den Satz benöthigen, der im vorstehenden Aufsatze gegen Ende aufgestellt und bewiesen wurde.

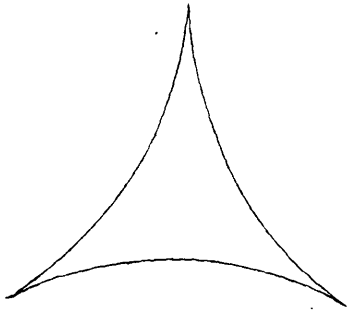
Doch betrachten wir eine Reihe von Beispielen. Sei zunächst ein Kegelschnitt gegeben, der als Ellipse vorausgesetzt sein mag. Die reellen Punkte, welche den imaginären Tangenten der Ellipse entsprechen, erfüllen das Innere der Ellipse doppelt, *unsere Fläche hat* *also in diesem Falle die Gestalt eines elliptischen Doppelblattes*, oder, wenn man will, eines flachen Ellipsoids. Ein Ellipsoid ist aber eine nullfach zusammenhängende Fläche*); deshalb giebt es beim Kegelschnitte kein längs der Curve erstrecktes überall endliches Integral.

Nehmen wir ferner eine Curve dritter Classe. Auch sie kann, was für die Anschauung bequem ist, als völlig im Endlichen gelegen vorausgesetzt werden, und besteht dann entweder aus zwei geschlossenen Zweigen oder nur aus einem, wie dies in den beistehenden, übrigens nur schematischen Zeichnungen dargestellt ist.

I.



II.



Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Sowohl von jedem Punkte ausserhalb des Ovals als von jedem Punkte innerhalb des mit drei Spitzen versehenen Curvenzugs kann man drei reelle Tangenten an die Curve legen; die reellen Punkte, welche imaginären Tangenten der Curve entsprechen, erfüllen daher den Raum zwischen den beiden Curvenzügen doppelt, *unsere Fläche ist eine Art Ringfläche*. Sie ist also in der That zweifach zusammenhängend, wie es für eine Curve mit dem Geschlechte 1 sein muss, oder umgekehrt, *es liegt darin der Beweis, dass die Curve dem Geschlechte 1 angehört*. Es ist leicht, die Werthe, welche das eine auf die Curve bezügliche überall endliche Integral für die einzelnen Punkte der Fläche annimmt, ihrer allgemeinen Vertheilung nach anzugeben. Zu dem Zwecke sei es gestattet, von *Meridianen* der Ringfläche und von *Breitencurven* derselben zu sprechen; die beiden Züge, aus denen die Curve dritter Classe besteht, werden selbst zu den Breitencurven gehören. Die beiden Perioden, welche das auf die Curve bezügliche überall endliche Integral besitzt, entstehen dadurch, dass man dem zwischen bestimmten Grenzen ge-

*) Wegen dieser Art der Zählung vgl. den vorstehenden Aufsatz.

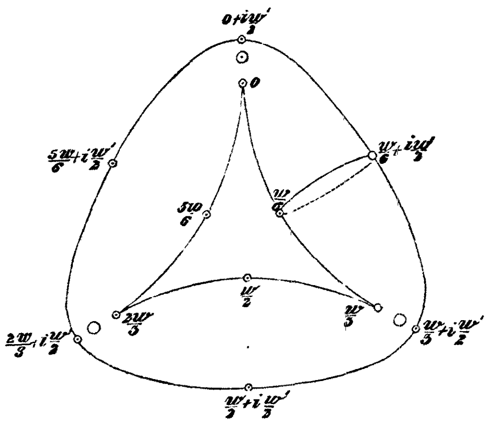
führten Integrationswege beliebig Meridiancurven und Breitencurven zufügen kann. (Diese und die folgenden Behauptungen, welche sich aus den bekannten Sätzen über die Integrale auf Riemann'schen Flächen ohne Weiteres ergeben, sollen hier ohne Beweis angeführt sein.) Die erstere dieser Perioden sei imaginär genommen, gleich iw', die zweite reell, gleich w. Als untere Grenze werde dasjenige Werthsystem gewählt, welches durch die in der Zeichnung vertical gestellte reelle Rückkehrtangente bezeichnet ist, und dem auf unserer Fläche der obere von den drei reellen Rückkehrpunkten entspricht. Das bis zu irgend einem anderen Punkte hingeleitete Integral werde, unter Trennung des reellen und imaginären Theiles, $u + iv$ genannt, wo also u nur bis auf Multipla von w, v bis auf Multipla von w' bestimmt ist. Dann hat man als Bedingung dafür, dass drei Tangenten der Curve dritter Classe, welche den Integralwerthen

$$u_1 + iv_1\,, \quad u_2 + iv_2\,, \quad u_3 + iv_3$$

entsprechen, sich in einem Punkte schneiden, die Relationen*):

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \;(\mathrm{mod.}\; w\,)$$
$$v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \;(\mathrm{mod.}\; w')\,.$$

In Folge dessen ergiebt sich eine Vertheilung der Werthe von $u + iv$ über unsere Fläche, wie sie auf der beigesetzten Zeichnung veranschaulicht ist.



Längs des Zuges mit drei Spitzen sind die reellen Zahlen von 0 bis w in der Weise vertheilt, dass die drei Spitzen die Argumente 0,

*) Vgl. Clebsch in Borchardt's Journal t. 63, p. 105. Es sind dort nur nicht, wie im Texte, der reelle und imaginäre Theil getrennt, überdies ist die untere Grenze des Integrals beliebig gelassen.

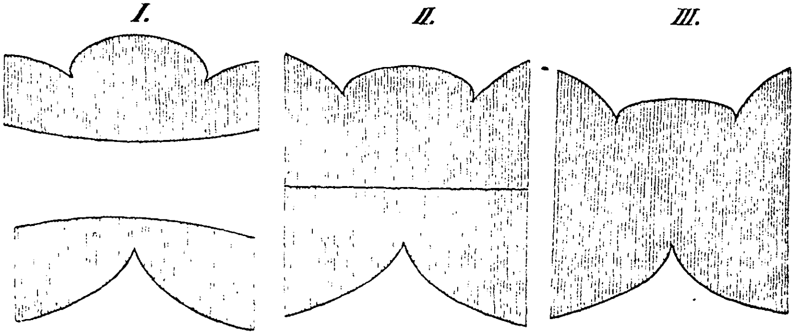
$\frac{1}{3}w$, $\frac{2}{3}w$ bekommen. Die Punkte einer Meridiancurve, welche durch eine Tangente dieses Curvenzuges auf der Fläche bezeichnet ist, besitzen alle dasselbe u, längs der Curve ändert sich nur das v von 0 anfangend bis w'. Für die Punkte des umschliessenden Ovals hat v gleichmässig den Werth $\frac{w'}{2}$. An den drei Stellen etwa, die durch kleine Kreise bezeichnet sind, befinden sich diejenigen Punkt, welche die 6 paarweise conjugirt imaginären Rückkehrtangenten der Curve repräsentiren; ihre Argumente sind bezüglich $0 \pm \frac{iw'}{3}$, $\frac{w}{3} \pm \frac{iw'}{3}$, $\frac{2w}{3} \pm \frac{iw'}{3}$.

Für die Curven dritter Classe ohne Oval gestalten sich diese Verhältnisse im Allgemeinen ähnlich. Der ganze Raum ausserhalb des mit drei Spitzen versehenen Curvenzuges wird bei ihnen doppelt von den Punkten überdeckt, die imaginären Tangenten entsprechen. *Die zugehörige Fläche erstreckt sich also ähnlich ins Unendliche, wie ein einschaliges Hyperboloid.* Der Zusammenhang der Fläche ist nach wie vor gleich 2 (vgl. den vorstehenden Aufsatz), die Curve hat das Geschlecht 1.

Es ist nun besonders interessant, zu sehen, wie sich die zugehörige Fläche modificirt, wie im Zusammenhange damit das Geschlecht der algebraischen Function auf Null herabsinkt, wenn man der Curve eine Doppeltangente oder Wendetangente ertheilt. Die Doppeltangente kann isolirt oder mit reellen Berührungspunkten vorausgesetzt werden. Beidemal bildet die zugehörige Curve einen Uebergang zwischen den beiden vorstehend unterschiedenen Arten ohne Doppeltangente. Die Curve mit Wendetangente endlich stellt sich wieder als Uebergangsform zwischen die beiden Curven mit Doppeltangente.

Um nämlich zunächst eine Curve mit isolirter Doppeltangente zu erhalten, kann man das Oval der ersten Figur nach allen Richtungen

I. II. III.

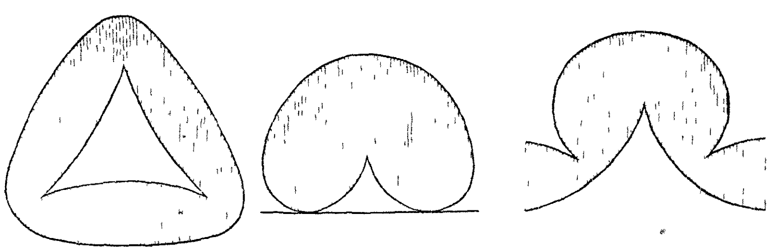


gleichmässig unbegrenzt wachsen lassen. Dann geht es schliesslich, indem es zur isolirten Doppeltangente wird, in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade über; setzt man den Aenderungsprocess noch weiter fort, so wird es imaginär und man hat die allgemeine Curve ohne Oval. Doch besser lassen sich diese Verhältnisse übersehen, wenn man die betreffenden Figuren so durch eine Collineation umgestaltet, dass die fragliche Doppeltangente ins Endliche fällt. Die Curven haben dann die in der Zeichnung dargestellte Gestalt; die von der zugehörigen Fläche überdeckten Partieen der Ebene sind schraffirt.

Im Falle II hat die Fläche eine Doppelgerade bekommen (oder richtiger eine Selbstberührungsgerade), sie ist nach wie vor zweifach zusammenhängend. Aber die zugehörige Riemann'sche Fläche ist nur noch nullfach zusammenhängend. Denn sie trägt zwei Fundamentalpunkte, denen diese Doppelgerade entspricht, und also ist ihr Zusammenhang, nach den Auseinandersetzungen des vorstehenden Aufsatzes, um Zwei kleiner als der Zusammenhang der von uns construirten Fläche.

Doch nehmen wir die Doppeltangente nicht isolirt. Dann kann sich der Uebergang in der folgenden Weise gestalten, die aus den nebenstehenden Figuren wohl verständlich ist:

I. II. III.

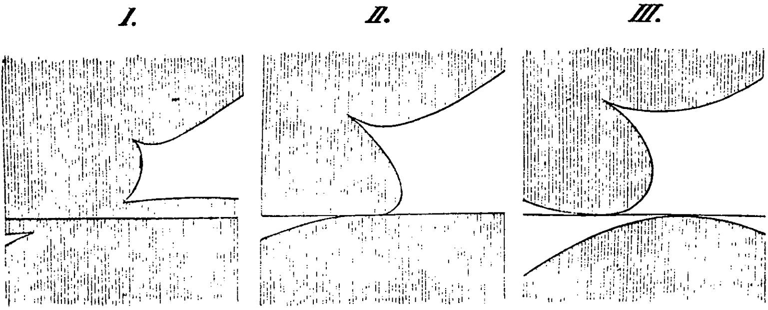


Dabei ist es nun völlig deutlich, dass die in Figur I und III zweifach zusammenhängende Fläche im Falle II nullfach zusammenhängend geworden ist.

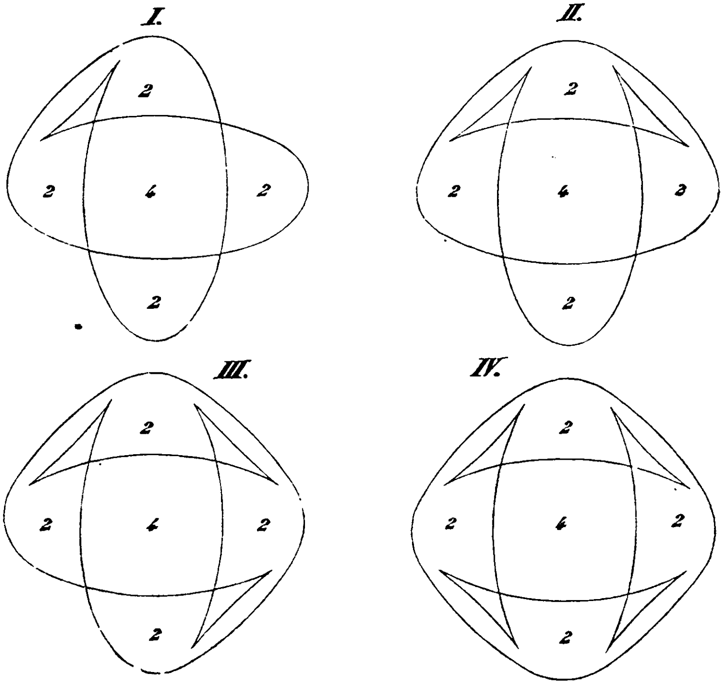
Den Fall der Curve dritter Classe mit Wendetangente endlich mag man in der Art als Zwischenfall zwischen den zweierlei Curven mit Doppeltangente betrachten, wie die Zeichnung auf der folgenden Seite veranschaulicht.

Es mag dadurch insbesondere deutlich werden, warum man eine Wendetangente als Rückkehrtangente unserer Fläche aufzufassen hat. Denn sie entsteht in Figur II aus der Doppelkante von Figur I. Es würde in gewissem Sinne consequenter sein, die Doppeltangente in Figur III als isolirte Curve unserer Fläche beizubehalten, statt sie durch ihre beiden Berührungspunkte zu ersetzen; man müsste dann nur die

Festsetzung hinzufügen, dass eine solche isolirte Curve für den Zusammenhang der Riemann'schen Fläche nicht in Betracht kommt, wodurch das Resultat dasselbe bleibt.



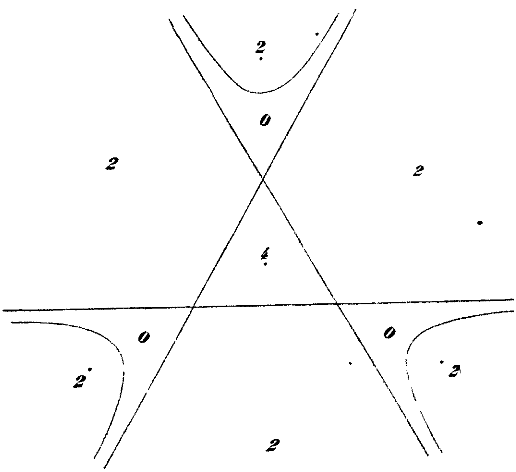
Von Curven *vierter* Classe will ich nur einige Beispiele angeben, welche sich der Anschauung besonders leicht darbieten. Eine solche Curve werde zunächst als in zwei Kegelschnitte zerfallen vorausge-



setzt; man nehme für diese Kegelschnitte zwei Ellipsen mit vier gemeinsamen Punkten. Die auf sie bezügliche Fläche besteht dann aus zwei Ellipsoiden, welche sich zum Theil überlagern, aber keinen Punkt mit einander gemein haben, womit eben dem Umstande, dass man es mit einer reducibeln Curve vierter Classe zu thun hat, Ausdruck gegeben wird und geradezu diese Reducibilität bewiesen ist. Man construire nun die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen und und wende auf dieselben (auf eine oder mehrere) den soeben bei den Curven dritter Classe bereits gebrauchten Auflösungsprocess an. Ich will hier nur diejenigen Zeichnungen hinsetzen, welche man erhält, wenn man die im Endlichen gelegenen Theile der bez. gemeinsamen Tangenten in reelle Curvenzweige spaltet. Die beigesetzten Zahlen beziehen sich auf die Zahl der Blätter, mit der die Fläche die verschiedenen Theile der Ebene überdeckt; die nicht bezeichneten Theile der Ebene sind nullfach überdeckt, insbesondere also die kleinen, mit zwei Spitzen versehenen Dreiecke im Innern der bez. Zeichnungen

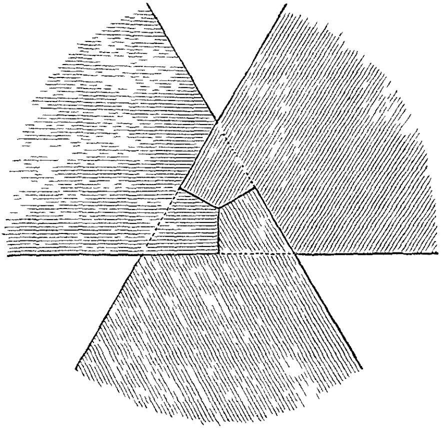
Die so hergestellten Flächen sind in der That bez. 0-, 2-, 4-, 6-fach zusammenhängend, wie sie es sein müssen, da sie sich auf Curven vierter Classe mit 3, 2, 1, 0 Doppeltangenten beziehen, die also $p = 0, 1, 2, 3$ ergeben.

Die bisher betrachteten Flächen zeichnen sich durch ihre grosse Uebersichtlichkeit, durch das Fehlen jeder Verzweigung aus. Eine solche wird aber im Allgemeinen vorhanden sein, und ich darf mit Bezug hierauf als ein Beispiel das Folgende anführen. Es sei eine Curve dritter Ordnung mit isolirtem Doppelpunkte gegeben; als Classencurve aufgefasst ist sie vom vierten Grade und dadurch singulär,



dass sie drei reelle Wendetangenten besitzt. Eine solche Curve werde in der Art gezeichnet, dass ihre Wendetangenten zugleich ihre Asymptoten sind, wo dann der isolirte Punkt in dem Innern des von den drei Asymptoten gebildeten Dreiecks liegen wird.

Es sind der Figur bereits die Zahlen zugesetzt, welche angeben, wie viele imaginäre Tangenten von den Punkten der verschiedenen Theile der Ebene an die Curve gehen. Das Innere des Asymptotendreiecks wird, wie man sieht, viermal von der Fläche überdeckt, während es die angrenzenden Partieen der Ebene nur zweimal oder nullmal sind. Dies wird möglich, indem man der Fläche eine von dem isolirten Doppelpunkte ausgehende Verzweigung ertheilt, wie sie etwa, in symmetrischer Weise, durch die beigesetzte Zeichnung veranschaulicht ist.



Erlangen, im Februar 1874.

Ueber Normalen an algebraische Flächen.

Von Rud. Sturm in Darmstadt.

In meinem Aufsatze Bd. VI S. 241 dieser Annalen habe ich die Wahrscheinlichkeit des Satzes ausgesprochen, dass *die Zahl der Normalen aus einem Punkte an eine Fläche stets gleich der Summe* $n+r+m$ *ist, wenn* n *die Ordnung,* r *der Rang (Grad des Tangenten-Complexes) und* m *die Classe der Fläche ist**). Ich will in Folgendem einen Beweis dieses Satzes mittheilen und dann noch einige andere Untersuchungen anknüpfen, unter anderm *Ordnung und Classe der Fläche der Krümmungscentren* angeben.

1. Nennen wir l *die fragliche Zahl*, so ist ersichtlich der Grad n' derjenigen geradlinigen Fläche N, welche von den einer beliebigen Geraden g begegnenden Normalen der Fläche $F=(n, r, m)$ erzeugt wird, gleich $l+r$, denn in einer Ebene liegen im Allgemeinen r Normalen von F und die Gerade g ist eine l-fache Leitgerade von N.

Die Torse, welche der F längs eines ebenen Schnitts C umschrieben ist, ist bekanntlich r^{ter} Classe, folglich die Polarcurve ihres unendlich fernen Schnitts in Bezug auf C_∞^2 von der Ordnung r; dieselbe ist eindeutig auf C bezogen, demnach erzeugen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, d. h. die Flächennormalen längs C nach Chasles (C. R. Bd. 62) eine Fläche (Normalie) vom Grade $n+r$; da also $n+r$ von diesen Normalen von der Geraden g getroffen werden, so *ist die Curve* B *der Fusspunkte derjenigen Normalen von* F, *welche* g *treffen, von der Ordnung* $v=n+r$, indem auf jedem ebenen Schnitte von F v Fusspunkte liegen. B begegnet der g in den n Punkten $S=(F, g)$ und jede Ebene durch g enthält ausserdem r Fusspunkte, weil so viele Normalen.

*) Ich habe nachträglich bemerkt, dass schon Salmon im Jahre 1847 (Cambridge and Dublin Math. Journ. Bd. III, S. 47) diesen Satz gefunden, jedoch nur für den Fall, dass der Punkt unendlich fern ist, bewiesen und auf die endlichen Punkte übertragen hat (vgl. Nr. 2.).

Der Kegel, der der Fläche F aus einem beliebigen Punkte umschrieben ist, ist m^{ter} Classe, seine Berührungscurve r^{ter} Ordnung, mithin die Fläche der Normalen von F längs dieser Curve vom Grade $r+m$, woraus wiederum hervorgeht, dass *die Torse T der Tangentenebenen von F, deren Normalen die g treffen und welche also in den Punkten von B berühren, von der Classe $\mu_1 = r + m$ ist.* Daher ist die Polarcurve ihres unendlich fernen Schnitts in Bezug auf C^2_∞, welche eindeutig auf B bezogen ist, von der Ordnung $r+m$; und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, also *die Normalen, welche g treffen, erzeugen eine Fläche N vom Grade $n' = n + r + r + m$ $= n + 2r + m$*; da diese Grösse andererseits gleich $l + r$ ist, so ergiebt sich

$$l = n + r + m\,,$$

wie zu beweisen war.

2. Durch den unendlich fernen Punkt von g — sowie überhaupt durch jeden unendlich fernen Punkt — gehen m endliche Normalen, welche den auf g senkrechten Berührungsebenen zugehören, und $n+r$ in E_∞ gelegene, nämlich die von jenem Punkte an die unendlich ferne Curve C_∞ von F gehenden; denn alle (in E_∞ gelegenen) Normalen dieser Curve sind, wie bekannt, Flächennormalen.

Der Schnitt von N mit E_∞ besteht aus diesen $n+r$ Normalen und der oben genannten Polarcurve der unendlich fernen Curve der Torse T.

3. *Die Anzahl h der Normalen von F, welche zwei Gerade treffen, ist $n' = n + 2r + m$*; mithin begegnen sich die zwei Geraden zugehörigen Curven B in $n + 2r + m$ Punkten. Schneiden sich die beiden Geraden, so sind $n+r+m$ von diesen Punkten die Fusspunkte der aus dem Schnittpunkte gefällten Normalen, die r übrigen gehören den r Normalen in der Ebene der beiden Geraden an.

4. Suchen wir die Classe ϱ der Curve B, d. i. die Ordnung ihrer Tangentenfläche. Bei den Flächen 2. Ordnung kann B nur 4. Ordnung 8. Classe sein, da sie sich offenbar gegen beide Schaaren gleichartig verhalten muss und ein Doppel- oder Cuspidalpunkt nicht möglich ist.

Es sei α die Zahl der Osculanten (Wendetangenten) von F, welche in einer beliebigen Ebene liegen, σ dagegen die der Osculanten, welche durch einen beliebigen Punkt gehen (beide Zahlen bekanntlich dualistisch zu einander). Die Ordnung der Torse, welche der Fläche F längs eines ebenen Schnitts C umschrieben ist, ist $n+\alpha$, denn der Schnitt dieser Torse mit der Ebene von C besteht aus C und deren α Osculanten.

Das dualistische Resultat hiervon ist: Die Classe der Berührungscurve des der Fläche aus einem Punkte O umschriebenen Kegels ist $m+\sigma$; von den Tangenten dieser Curve, welche z. B. einer durch O

gehenden Geraden begegnen, liegen m in den durch diese Gerade an die Fläche geführten Berührungsebenen, die übrigen sind die σ Osculanten, welche von O ausgehen. Bemerken wir weiter: jede Tangente der Curve C und die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der längs C umschriebenen Torse sind conjugirte Tangenten, und ebenso jede Tangente, die durch O geht, und die Tangente der Berührungscurve des aus O der Fläche umschriebenen Kegels in dem Berührungspunkte jener sind conjugirte Tangenten.

Dreht man nun eine Ebene um eine Gerade g und construirt längs jeden Schnittes mit F die umschriebene Torse, so lautet die Frage: „wie viele dieser Torsen gehen durch einen Punkt O?" mit andern Worten: „wie viele Tangenten von F gehen durch O, deren conjugirte die Gerade g treffen?" oder „welches ist die Classe der Berührungscurve des aus O umschriebenen Kegels?".

Man sieht also, dass $m+\sigma$ der genannten Torsen durch einen Punkt gehen.

5. Sei nun g die Leitgerade unserer Normalenfläche N; l_∞ die allen zu g normalen Ebenen gemeinsame Gerade, T_∞ ein Punkt derselben; π die Ebene durch g, welche auf der Richtung nach P_∞ normal ist. Die längs des Schnitts derselben der Fläche umschriebene Torse trifft l_∞ in $n+\alpha$ Punkten P'_∞; umgekehrt durch jeden Punkt P'_∞ auf l_∞ gehen $m+\sigma$ der den Ebenen durch g zugehörigen Torsen; also giebt jeder P'_∞ $m+\sigma$ Punkte P_∞. Die Zahl der Coincidenzen ist demnach $n+m+\alpha+\sigma$. Durch jeden dieser Punkte gehen zwei unendlich nahe Berührungsebenen von F, deren Berührungspunkte sich auf derjenigen Ebene π befinden, welche zur Richtung nach dem Coincidenzpunkte normal ist, d. h. durch g gehen $n+m+\alpha+\sigma$ Ebenen, welche zwei unendlich nahe Normalen enthalten.

Da nun die Fläche der Krümmungscentren von F bekanntlich von allen den Ebenen eingehüllt wird, in denen zwei von den r Flächennormalen unendlich nahe sind, so hat sich das Resultat ergeben:

Die Fläche der Krümmungscentren von F ist von der Classe $m''=n+m+\alpha+\sigma$.

6. Die Ebenen durch g mit zwei unendlich nahen Normalen liefern weiter ebenso viele Tangenten der Curve B, welche die Gerade g treffen; dazu kommen noch die $2n$ Tangenten von B, welche von den n Punkten S herrühren; daraus folgt, dass *die Classe ϱ der Curve B gleich $3n+m+\alpha+\sigma$ ist.* Wir erkennen ferner, dass wir in den durch g gehenden Ebenen mit zwei unendlich nahen Normalen zugleich diejenigen Torsallinien von N erhalten, deren Spitzen*) nicht auf g liegen; es sind deren also $q=n+m+\alpha+\sigma$.

*) Hinsichtlich dieser Benennungen sehe man meinen am Anfang genannten Aufsatz Nr. 20.

Weil ferner die Fläche N und die Curve B eindeutig auf einander bezogen sind, so besteht, *wenn r' der Rang von N ist,* folgende Relation:

$$2(n'-1)-r'=2(\nu-1)-\varrho\,,$$

also

$$r'=2(n'-\nu)+\varrho=3n+2r+3m+\alpha+\sigma.$$

Mithin besitzt die Fläche N ausser der l-fachen Leitgeraden g noch eine Doppelcurve D von der Ordnung

$$\delta=\frac{r}{2}(2n+3r+2m)-\tfrac{3}{2}(n+r+m)-\tfrac{1}{2}(\alpha+\sigma).$$

Auf ihr liegen die Spitzen der oben erwähnten q Torsallinien; jede Ebene durch g trifft sie in den $\frac{1}{2}r(r-1)$ Schnittpunkten ihrer r Normalen; folglich begegnet D der Geraden g in

$$d=r(n+r+m)-\tfrac{1}{2}(3n+2r+3m)-\tfrac{1}{2}(\alpha+\sigma)$$

Punkten. In diesen Punkten von g begegnen sich zwei endlich verschiedene Normalen, deren Ebene durch g geht, während sonst von den $\frac{1}{2}l(l-1)$ Ebenen, welche durch je zwei der l von einem Punkte auf g ausgehenden Normalen gebildet werden, keine durch g geht.

7. An der eben citirten Stelle meines Aufsatzes habe ich gezeigt, dass die Gesammtzahl der Torsallinien einer Regelfläche von dem Grade n' und dem Range r' gleich $2(r'-n')$ ist. Mithin hat die Fläche N im Ganzen $4(n+m)+2(\alpha+\sigma)$ Torsallinien, folglich bleiben nach Abzug der q oben erhaltenen noch übrig $3(n+m)+\alpha+\sigma$ Torsallinien, welche ihre Spitze auf g — also in deren Cuspidalpunkten — haben. Dies sind Normalen der Fläche, welche von einer unendlich nahen und zwar auf g getroffen werden, ohne dass die Ebene beider durch g geht.

Diese Begegnungspunkte sind aber ersichtlich die auf g gelegenen Punkte der Fläche der Krümmungscentren; mithin *ist die Ordnung n'' der Fläche der Krümmungscentren gleich* $3(n+m)+\alpha+\sigma$ *).

Nach einer brieflichen Bemerkung des Herrn Schubert ist also $n''=(3n+\alpha)+(3m+\sigma)$ gleich der Summe der Ordnungen der Evoluten zweier ebenen Schnitte, welche beziehlich in die gegebene Fläche und in deren Reciprocalfläche gemacht sind.

Die Fläche der Krümmungscentren ist die Brennfläche des Systems der Normalen, welches von der Ordnung $n+r+m$ und der Classe r ist; folglich muss**)

---

*) Durch Abzählung im Unendlichen hat, wie ich neuerdings (April 1874) gesehen habe, Herr Samuel Roberts dies Resultat schon im vorigen Jahre gefunden (Proceedings of the London Mathematical Society, 13. März 1873).

**) Klein, in S. Lie's Aufsatz Göttinger Nachr. 1870, Nr. 4.

$$n'' - m'' = 2(n + r + m - r)$$
$$= 2(n + m)$$

sein, wie auch auf der Stelle ersichtlich ist.

8. Es sei g' irgend eine andere Gerade; durch jeden Punkt von g gehen $n + r + m$ Normalen; ihre Fusspunkte erzeugen mit g' ebenso viele Ebenen; die Normalie längs des Schnitts jeder dieser Ebenen ist $(n + r)^{\text{ten}}$ Grades und trifft g noch mit $n + r - 1$ Normalen.

Also jedem Punkte auf g entsprechen so $(n + r + m)(n + r - 1)$ andere Punkte und umgekehrt; von den $2(n + r + m)(n + r - 1)$ Coincidenzpunkten sind die einen — der Zahl nach v — so beschaffen, dass von jedem zwei endlich verschiedene Normalen ausgehen, deren Fusspunkts-Verbindungsgerade die g' trifft, und diese Punkte sind doppelt zu rechnen, weil bei jedem derselben zwei von den $n + r + m$ Ebenen und damit zwei von den $n + r + m$ entsprechenden Gruppen von je $n + r - 1$ Punkten identisch sind, also jeder dieser Punkte sich gleich mit zwei seiner entsprechenden Punkte vereinigt hat; die andern sind solche Punkte, von deren Normalen eine und die unendlich nahe vom Nachbarpunkte auf g so beschaffen sind, dass ihre Fusspunkts-Verbindungsgerade, also eine Tangente von B, die Gerade g' trifft. Die Zahl der letzteren ist demnach ϱ. Folglich ist

$$2v + \varrho = 2(n + r + m)(n + r - 1),$$

demnach

$$v = (n + r + m)(n + r) - \tfrac{1}{2}(5n + 2r + 3m) - \tfrac{1}{2}(\alpha + \sigma).$$

Fällt man also aus jedem Punkte von g die l Normalen an F, verbindet deren Fusspunkte unter einander, so erhält man durch diese Verbindungsgeraden eine Fläche vom Grade v. Die Curve B ist auf derselben offenbar $(n + r + m - 1)$-fach; folglich wird die Fläche von der Geraden g ausserhalb der n Punkte S noch in $v - n(n + r + m - 1)$ Punkten getroffen; das sind die d Begegnungspunkte der Doppelcurve D von N mit g.

Da die Formeln für $l, n', r', m'', n'', d, \delta$ in Bezug auf n und m einerseits und α und σ andererseits symmetrisch sind, so *haben diese Grössen für zwei polare Flächen denselben Werth.*

9. Die in den meisten Formeln auftretende Summe $\alpha + \sigma$ lässt sich nicht als lineare Function von n, r, m darstellen. Bei den allgemeinen Flächen n^{ter} Ordnung ist $\alpha + \sigma = m + 2r - 3n$; dies stimmt aber, wie ich mich bei mehreren früher von mir untersuchten Flächen mit Doppelcurven*) überzeugt habe, bei denselben nicht, vielmehr ist, wie sich bis jetzt empirisch gezeigt hat, die rechte Seite kleiner als die linke und zwar um die doppelte Zahl der auf der Dop-

*) Math. Ann. Bd. IV, S. 249.

pelcurve befindlichen Cuspidalpunkte. Auch ist die Ungleichheit a priori ersichtlich, da die Summe $\alpha + \sigma$ durch polare Transformation in sich selber übergeht, während dies bei $m + 2r - 3n$ ja nicht der Fall ist. Also muss jene Summe in den Formeln bleiben.

Für eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung verwandeln sich die Formeln, weil $r = n(n-1)$, $m = n(n-1)^2$, $\alpha = 3n(n-2)$, $\sigma = n(n-1)(n-2)$, also $\alpha + \sigma = n(n+2)(n-2) = n(n^2-4)$ ist, in folgende:

$$l = n(n^2 - n + 1), \quad \nu = n^2, \quad \mu_1 = n^2(n-1), \quad n' = h = n^3,$$
$$\varrho = 2n^2(n-1), \quad r' = 4n^2(n-1), \quad m'' = 2n(n^2 - n - 1),$$
$$\delta = \tfrac{1}{2} n(2n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 2n + 1), \quad d = n^2(n^3 - 2n^2 + 1),$$
$$n'' = 2n(n-1)(2n+1), \quad v = n(n-1)(n^3 - n + 1)\ *).$$

Die Formeln für l, n', r', m'', d, δ, n'' gelten wegen ihrer Symmetrie mit Vertauschung von n in m *für eine allgemeine Fläche m^{ter} Classe,* weil ebenso $r = m(m-1)$, $n = m(m-1)^2$, $\alpha = m(m-1)(m-2)$, $\sigma = 3m(m-2)$ ist.

Bei einer windschiefen Regelfläche ist $m = n$, $\sigma = \alpha$, also $l = 2n + r$ **), $\nu = \mu_1 = n + r$, $n' = h = 2(n+r)$, $\varrho = 2(2n+\alpha)$, $r' = 2(3n + r + \alpha)$, $m'' = 2(n+\alpha)$, $n'' = 2(3n+\alpha)$.

10. Der Schnitt der Fläche der Krümmungscentren (n''^{ter} Ordnung) durch E_∞ ***) besteht aus 3 Theilen. Der eine ist, weil alle Normalen von C_∞ Flächennormalen sind, die Evolute dieser Curve (n^{ter} Ordnung, r^{ter} Classe), welche bekanntlich von der Classe $n + r$ und der Ordnung $3n + \alpha$ ist; dieselbe enthält die auf diesen unendlich fernen Normalen befindlichen Krümmungscentra, insofern C_∞ deren

*) Der Werth für l findet sich zuerst angegeben von Terquem Journ. v. Liouville sér. I, t. V, p. 175; geometrische Beweise haben noch gegeben F. August, Journ. f. Math. Bd. 68, S. 245, und Mannheim, Comptes rendus 1870, erste Hälfte, p. 1025; F. August hat auch den Werth von v ermittelt und zugleich gefunden, dass (bei einer allgemeinen Fläche) die Curve B die Grundcurve eines Büschels von Flächen n^{ter} Ordnung ist; Mannheim hat noch den Werth für n' oder h hinzugefügt und Darboux, Comptes rendus 1870 erste Hälfte p. 1328, die Werthe für ϱ, m'', n''; die zwei letzteren sind gleichzeitig von dem der Wissenschaft als Opfer des Krieges so früh entrissenen L. Marcks gefunden: Math Ann. Bd. V, S. 29. Mit der Darboux'schen Note, von welcher ich erst nach Vollendung meiner Untersuchungen Kenntniss erhielt, werden sich in meinem Aufsatze mancherlei übereinstimmende Schlüsse finden; immerhin aber hoffe ich, auch ausser der wesentlichen Verallgemeinerung, doch einiges Neue zu bieten.

**) Vgl. meinen Aufsatz, Math. Annalen Bd. VI, S. 254.

***) Vgl. Marcks a. a. O., wo die Untersuchung für den Fall der allgemeinen Flächen n^{ter} Ordnung mit zum Theil ähnlichen Schlüssen gemacht wird, nur dass dort aus der Ordnung des unendlichfernen Schnitts erst auf die der Fläche geschlossen wird, in ähnlicher Weise wie es bei Salmon in Bezug auf die Zahl l geschieht.

Hauptnormalschnitt ist. Der zweite Theil wird von den zweiten Krümmungscentren derselben Normalen gebildet, welche zu den endlichen Hauptnormalschnitten der Punkte von C_∞ gehören.

Die Ordnung dieser Curve kann auf folgende Weise ermittelt werden: man denke sich einen von dem unendlich fernen Schnitt unendlich wenig verschiedenen ebenen Schnitt; von demselben kann angenommen werden, dass er auf den zweiten Krümmungslinien, welche durch die Punkte von C_∞ gehen, je die unendlich nahen Punkte enthält. Die Normalie längs desselben ist vom Grade $n+r$; n Erzeugende von ihr liegen in E_∞, welche ihre Fusspunkte in den beiden Schnitten gemeinsamen Punkten haben; der übrige Schnitt dieser Normalie mit E_∞, eine Curve r^{ter} Ordnung, ist der gesuchte zweite Theil. Diese Curve r^{ter} Ordnung ist übrigens der Curve C_∞ in Bezug auf C_∞^2 polar. Der dritte Theil endlich enthält die unendlich fernen Krümmungscentren der Punkte der parabolischen Curve; es ist leicht einzusehen, dass diese dritte Curve die Polarcurve (in Bezug auf C_∞^2) des unendlich fernen Schnitts der Torse der stationären Berührungsebenen (spinode torse) ist, welche ja längs der parabolischen (Wende-) Curve berührt. Ist also die Classe dieser Torse ι, so ist dies die Ordnung der dritten Curve; es ist bekannt, dass $\iota = 3(m-r)+\sigma$. Damit nun die Ordnung $n'' = 3(n+m)+\alpha+\sigma$ der Fläche der Krümmungscentren gleich der Summe der Ordnungen $3n+\alpha$, r und $3(m-r)+\sigma$ sei, muss die mittelste Curve dreifach gezählt werden; sie ist mithin Rückkehrcurve*) und zeigt sich so die Cuspidalität, die bekanntlich immer bei Normalenproblemen im Unendlichen auftritt. Interessant ist, wie die beiden Summanden von $\alpha+\sigma$ sich hier bez. auf den ersten und dritten Bestandtheil vertheilen.

11. *Die Gerade g, welche wir als Leitgerade für Normalen von F aufgefasst haben, sei nun selbst eine Normale.* Ein ebener Schnitt, der nicht durch den Fusspunkt von g geht, zeigt, dass die Fusspunktscurve B der die g treffenden Normalen nach wie vor $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung ist; geht aber der ebene Schnitt durch den Fusspunkt P von g, so gehört g zur Normalie dieses Schnittes, welche $(n+r)^{\text{ten}}$ Grades ist, und wird, wie bekannt, von $n+r-2$ andern Erzeugenden derselben getroffen. Dies beweist, dass ein solcher ebener Schnitt der Curve B ausserhalb P nur $(n+r-2)$-mal begegnet, dass also *P ein Doppelpunkt auf B ist, und die Normale g von zwei unendlich nahen Normalen getroffen wird.* In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass die

*) Vgl. Steiner, Journ. f. Math. Bd. 49, S. 349 u. 340. Auf ähnliche Weise wie oben können auch die Rückkehrkegelschnitte der Fläche der Krümmungscentren einer F^2 in den Hauptdiametralebenen ermittelt werden, welche Clebsch, Journ. f. Math. Bd. 62, S. 64 ff., gefunden hat.

längs B umschriebene Torse T noch $(r+m)^{\text{ter}}$ Classe ist, die Berührungsebene τ von F in P zur doppelten Berührungsebene hat. Die Polarcurve (in Bezug auf C_∞^2) des unendlich fernen Schnitts von T, welche also einen Doppelpunkt hat, ist wie oben eindeutig auf die Curve B bezogen und zwar so, dass sich die beiden Doppelpunkte entsprechen. *Das Erzeugniss N der sich auf die Normale g stützenden andern Normalen ist also, wie oben, vom Grade $n+2r+m$*; g aber ist nun sowohl Leitgerade als auch Erzeugende, und unendlich nahe an ihr sind zwei andere Erzeugende, so dass *N längs g von zwei Ebenen „torsal" berührt wird. In jedem Punkte von g wird N von $n+r+m+1$ Berührungsebenen berührt, von denen zwei die beiden „torsalen" sind, die andern von den $n+r+m-1$ Erzeugenden herrühren, die durch den Punkt gehen.* Mithin liegt g auf N $(n+r+m+1)$-fach: als Leitgerade $(n+r+m-1)$-fach, als Erzeugende doppelt; in jeder Ebene durch g liegen $r-1$ Erzeugende. Bei F^2 ist also N vom 8. Grade und g auf ihr 7-fach, was freilich von der Angabe des Herrn Geiser abweicht*).

Dass die beiden Richtungen, in denen die Fusspunkte der Nachbarnormalen liegen, welche g schneiden, also die Tangenten der durch P gehenden Krümmungslinien, zu einander normal sind, ist leicht in folgender Weise zu ersehen: Sei P_1 einer dieser Fusspunkte, g_1 seine Normale, so steht die Ebene (g, g_1) auf der Schnittlinie der beiden Berührungsebenen τ und τ_1 in P und P_1 senkrecht, mithin auf der conjugirten Tangente von PP_1; also die Tangente einer Krümmungslinie steht stets auf ihrer conjugirten senkrecht. Da es nun durch jeden Punkt zwei Krümmungslinien und im Allgemeinen in der Involution der conjugirten Tangenten nur ein Paar zu einander rechtwinkliger conjugirten giebt, so erhellt, dass *die Krümmungslinien-Tangenten diese zu einander rechtwinkligen conjugirten Tangenten sind.* Umgekehrt ist leicht darzuthun, dass, wenn PP_1 und PP_2 die beiden rechtwinkligen conjugirten Tangenten in P sind, dann die Normale in P von denen in P_1 und P_2 getroffen werden muss**).

---

*) Sulle normali all' ellissoide, Annali di Matematica Ser. II, t. I, p. 327.

**) Ueberhaupt scheint diese Definition der Krümmungslinien, dass jede ihrer Tangenten zu ihrer conjugirten senkrecht ist, diejenige zu sein, von der aus wohl am besten auf rein geometrischem Wege dieses Gebiet zu bearbeiten ist. Aus ihr ergeben sich z. B. die bekannten Sätze, dass zwei auf einander folgende Berührungsebenen einer der Fläche längs einer Krümmungslinie umschriebenen Torse gegen die zugehörige Osculationsebene der Krümmungslinie gleiche Neigung haben (also wenn die Krümmungslinie eben ist, alle Ebenen der Torse gegen die Ebene der Krümmungslinie, Joachimsthal's Satz), ferner dass, wenn eine Linie für zwei Flächen Krümmungslinie ist, dieselben sich in ihr unter constantem Winkel durchschneiden, und dessen Umkehrungssatz auf rein geometrischem Wege in sehr einfacher Weise.

Die Erzeugenden der Torse T, in denen sie von τ berührt wird, sind in Folge dessen, weil sie zu den Tangenten von B im Doppelpunkte, also den Krümmungslinien-Tangenten conjugirt sind, mit ihnen identisch.

12. *Ein Nabel- oder Kreispunkt ist ein Punkt, bei welchem die Involution der conjugirten Tangenten aus lauter Paaren zu einander rechtwinkliger Strahlen besteht. Die (imaginären) Osculanten* — auf F^2 die durch den Punkt gehenden Geraden — *begegnen also* C_∞^2, *und die Normale des Nabelpunktes wird von* a l l e n *Nachbarnormalen getroffen. Sei g nun eine solche Nabelpunkts-Normale*; die Curve B der Fusspunkte der sie treffenden (im Allgemeinen endlich von ihr verschiedenen) Normalen ist noch von der Ordnung $n+r$; jeder ebene Schnitt, der durch den Nabelpunkt P gelegt ist, zeigt, dass B mit ihm ausserhalb P nur $n+r-3$ Punkte gemein hat; denn die Normale von P ist auf der Normalie dieses Schnittes, wie er auch sonst gelegt sei, Torsallinie, trifft demnach nur $n+r-3$ endlich entfernte Erzeugenden der Normalie. Also *ist der Nabelpunkt auf der Curve B, die seiner Normale zugehört, ein dreifacher Punkt, d. h. drei Richtungen gehen von ihm aus, in denen auch noch die zweite Normale der des Kreispunktes begegnet**).

Die längs B umschriebene Torse T hat ebenfalls noch die Classe $r+m$; die Berührungsebene des Nabelpunktes berührt sie dreifach. *Die Fläche N der (im Allgemeinen endlich von g verschiedenen) Normalen, welche die Normale g des Kreispunktes treffen, hat*, wie im allgemeinen Falle, *den Grad $n+2r+m$; sie hat die g zur $(n+r+m-1)$-fachen Leitgeraden*, weil von jedem ihrer Punkte $n+r+m-1$ Normalen ausgehen, was auch so viele Berührungsebenen giebt; ausserdem ist g noch dreifache Erzeugende von N, und dem entsprechen 3 *Ebenen, welche* — von g mit den 3 oben genannten unendlich nahen Normalen gebildet — *längs g, also torsal berühren*; in jeder Ebene durch g liegen — ausser g und der unendlich nahen — noch $r-2$ Normalen, woraus sich ebenfalls die $(n+r+m+2)$-fachheit der g auf N ergiebt.

13. Bei *den Flächen* 2. *Grades* gestaltet sich dies durch Degenerationen folgendermassen: Es ist von vornherein ersichtlich, dass, weil die Osculanten eines Nabelpunktes stets imaginär sein müssen, nur bei den Flächen mit imaginären (punktirten) Geraden reelle Nabelpunkte vorhanden sind; Nabelpunkte sind überhaupt bei einer Fläche 2. Grades die Berührungspunkte der 12 Tangentialebenen, welche durch die 6 Seiten des durch C_∞^2 und C_∞, die unendlich ferne Curve von F^2,

*) Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raumes (erste Aufl.), II, S. 46.

constituirten Vierecks an F^2 gehen; von diesen 6 Seiten sind nur zwei Gegenseiten reell, und da dieselben F^2 jedenfalls in imaginären Punkten treffen, so sind die 4 von ihnen ausgehenden Berührungsebenen nur bei den Flächen mit imaginären Geraden reell. Die 4 durch zwei Gegenseiten gehenden Tangentialebenen gehen stets durch den unendlich fernen Punkt einer Axe der Fläche, also liegen die 4 ihnen entstammenden Nabelpunkte auf derselben Haupt(diametral)ebene; folglich gilt dies auch für die vier reellen Nabelpunkte einer Fläche mit imaginären Geraden.

Da ein Nabelpunkt (P) stets auf einer Hauptebene liegt, so fällt seine Normale (g) in diese Ebene; die Normalen des Hauptschnitts sind nun sämmtlich Flächennormalen; also löst sich von der einer Nabelpunkts-Normale zugehörigen Curve B (4. Ordnung) der ganze Hauptschnitt, von der zugehörigen Torse T (4. Classe) der längs desselben umschriebene Cylinder und von der Normalenfläche N (8. Grades) die Evolute des Hauptschnitts (als ebene Curve 4. Classe, als Linienfläche 4. Grades) ab. Der übrig bleibende Theil von B bez. von T besteht aus den beiden durch den Nabelpunkt gehenden Flächengeraden g' und l', bez. deren Ebenenbüscheln; denn weil diese Geraden die C_∞^2 treffen und die Verbindungslinie dieser Begegnungspunkte G'_∞ und L'_∞, also die unendlich ferne Gerade der Berührungsebene des Nabelpunkts, dem unendlich fernen Punkte G_∞ der Normale g in Bezug auf C_∞^2 polar ist, also $G_\infty G'_\infty$ und $G_\infty L'_\infty$ den C_∞^2 tangiren, so fallen die Normalen sämmtlicher Punkte von g' bez. l' in die Ebene (g, g'), bez. (g, l'), treffen also g und umhüllen in jeder dieser Ebenen eine die g berührende (stets imaginäre) Parabel, in welche demnach das Paraboloid, das sonst von den Normalen längs einer Geraden der Fläche erzeugt wird, ausgeartet ist. Diese Parabel wird auch von g' bez. l' tangirt, also sind 24 Geraden der Fläche Normalen, nämlich die durch die Nabelpunkte gehenden; die zugehörige Tangentialebene ist die durch die Gerade und die Normale des Nabelpunkts bestimmte. Die beiden Parabeln vervollständigen die Evolute zur vollen Fläche 8. Grades; die Normale g, die Evolute und beide Parabeln berührend, zeigt sich als dreifache Erzeugende; der dreifache Punkt auf B und die dreifache Berührungsebene von T kommt dadurch zu Stande, dass P und seine Berührungsebene τ zu jedem der drei Bestandtheile von B bez. T gehört. In jeder Ebene durch g liegt im Allgemeinen ausser g und der unendlich nahen keine Normale mehr, weil $r - 2$ hier gleich 0 ist; die 6 Normalen aber, welche ein Punkt von g immerhin liefern muss, sind g, die drei weitern Tangenten der Evolute und je die andere Tangente der Parabeln in (g, g') und (g, l').

Es liefert nun zwar jeder Nabelpunkt zwei Parabelebenen, es ergeben sich aber nicht 24 Parabelebenen, sondern nur 8, nämlich jede der 4 Tangenten des Kreises C_∞^2 in seinen Begegnungspunkten mit C_∞ bestimmt mit den beiden Geraden von F^2, die durch ihren Berührungspunkt gehen, zwei derartige Parabelebenen, so dass 8 mal je drei Normalen von Nabelpunkten, die nicht derselben Hauptebene angehören, in derselben Ebene liegen. Die drei Nabelpunkte befinden sich auf derselben Geraden von F^2 und sind also deren Durchgangspunkte durch die Hauptebenen. Es ergeben sich auf diese Weise die singulären Ebenen des Normalensystems einer F^2, welches 6. Ordnung und 2. Classe ist; nämlich 4 mit Curven 4. Classe (E_∞ und die Hauptebenen) und 8 mit Curven 2. Classe, welche Ebenen also vierfache, bez. doppelte Berührungsebenen der Fläche der Krümmungscentren sind*).

14. Da die Flächen höherer Ordnung im Allgemeinen nicht Ebenen besitzen, welche den Hauptebenen der Flächen F^2 entsprechen, und da auch die für die Nabelpunkte einer F^2 eben entwickelten Eigenschaften wesentlich auf dem Umstande beruhen, dass die Osculanten ganz der Fläche angehören, so *lässt sich über singuläre Ebenen der Normalensysteme der Flächen höherer Ordnung nur die eine allgemeine Eigenschaft angeben, dass die E_∞ stets eine solche mit einer Curve $(n+r)^{ter}$ Classe ist* (Nr. 10).

Hingegen muss natürlich für die (windschiefen) *geradlinigen Flächen* überhaupt etwas Aehnliches sich aussagen lassen wie für die F^2. *Reelle Nabelpunkte kann eine solche Fläche,* weil ihre Osculanten stets reell sind, *nicht haben.* Es ist aber wieder ersichtlich, dass die *Normalen längs jeder der 2n (imaginären) Erzeugenden, welche C_∞^2 treffen***), *sich sämmtlich in der durch diese Erzeugende gelegten und C_∞^2 berührenden Ebene befinden und dort eine Parabel einhüllen, welche auch die Erzeugende berührt,* so dass diese auch eine *Normale ist und auf der genannten Ebene, obgleich in derselben gelegen, senkrecht steht.*

Jede dieser Erzeugenden g_i' geht durch eine Reihe (imaginärer) Nabelpunkte, deren Zahl gleich der nicht auf g_i' gelegenen Schnittpunkte von C_∞^2 mit der Fläche der zweiten Osculanten der Punkte von g_i' ist; diese zweiten Osculanten erzeugen aber die andere Schaar des Hyperboloids, welches mit der Regelfläche die betrachtete und zwei unendlich nahe Erzeugende gemein hat; also *liegen auf jeder der 2n Erzeugenden 3 Nabelpunkte,* und da auf andern Erzeugenden keine sich befinden, so *enthält jede Regelfläche n^{ten} Grades 6n (imaginäre) Nabelpunkte.*

---

*) Vgl. den Aufsatz von Clebsch über das Normalenproblem (Borchardt's Journ. Bd. 62) und Herrn Kummer's Abhandlung über Strahlensysteme 1. und 2. Ordnung § 11. (Abh. der Berliner Acad. von 1866).

**) Vgl. Darboux a. a. O.

Das einer Regelfläche zugehörige Normalensystem $(2n+r)^{ter}$ *Ordnung und* r^{ter} *Classe,* welches bekanntlich aus einer einfach unendlichen Schaar gleichseitiger hyperbolischer Paraboloide besteht, *enthält also eine singuläre Ebene* (E_∞) *mit einer Curve* $(n+r)^{ter}$ *Classe und* $2n$ *(imaginäre) singuläre Ebenen mit Curven zweiter Classe (Parabeln)* *). Diese Parabeln gehören zur Schaar der Paraboloide.

Weil jedes der Normalenparaboloide von der Geraden g, welche zur Leitgeraden einer Normalenfläche N gewählt ist, zweimal getroffen wird, so begegnet die der g zugehörige Curve B jeder Erzeugenden zweimal und zwei Ebenen der Torse T gehen durch jede Erzeugende.

15. *Wird eine Erzeugende* g' *selbst zur Leitgeraden einer Normalenfläche genommen,* so löst sich von B die Erzeugende g' selbst ab; es bleibt als eigentliche Curve B' der im Allgemeinen nicht auf g' gelegenen Fusspunkte von die g' treffenden Normalen eine Curve $(n+r-1)^{ter}$ Ordnung, welche jeder andern Erzeugenden zweimal, der g' aber in n Punkten begegnet, weil es in jeder Ebene durch g' $r-1$ Normalen giebt, deren Fusspunkte nicht auf g' liegen; $n-2$ dieser Punkte sind die Fusspunkte der Normalen auf den Doppelebenen durch g, deren jede eine der $n-2$ die g' treffenden Erzeugenden enthält.

Von der T sondert sich das Ebenenbüschel durch g' ab und es bleibt eine Torse T' $(n+r-1)^{ter}$ Classe, für die das Dualistische wie für B' gilt; endlich von N löst sich das Normalenparaboloid längs g' ab und es bleibt eine Fläche N' vom Grade $2(n+r-1)$, welche die g' zur $(2n+r-1)$-fachen Leitgeraden hat.

Darmstadt, den 12. October 1873.

Nachtrag.

1. Herr von Jonquières hat Comptes rendus Bd. 58 S. 570 *die Anzahl der Flächen eines Systems* (μ, ν, ϱ) *angegeben, welche eine allgemeine Fläche* F n^{ter} *Ordnung berühren,* nämlich

$$(1) \qquad N = n\,[\mu\,(n-1)^2 + \nu\,(n-1) + \varrho]$$

und daraus schon in einer andern Abhandlung Comptes rendus Bd. 61 S. 442, freilich nur durch das Princip der Continuität, die Folgerung gezogen, dass wenn die Fläche F nicht allgemein ist, sondern von der Ordnung n, dem Range r und der Classe m ist (nach meiner Be-

*) Wegen der zwei Schaaren subsumiren sich die F^2 nicht hierunter.

zeichnungsweise), die Zahl der sie berührenden Flächen im Systeme (μ, ν, ϱ) ist:

(2) $$N = \mu m + \nu r + \varrho n\,.$$

Herr Zeuthen hat in den Nouv. Ann. für 1868 S. 390 einen Beweis der Formel (1) für den Fall gegeben, dass das System aus Flächen 2. Grades besteht, und mit Hülfe derselben die bekannte Zahl der Normalen aus einem Punkte an eine allgemeine Fläche von neuem gefunden.

Dieser Beweis lässt sich ohne irgend welche wesentliche Aenderung auch für die allgemeinere Formel (2) (wie Herr Zeuthen gewiss selbst bemerkt hat) benutzen, und ich will ihn in dieser Verallgemeinerung hier reproduciren.

Sei nach der Chasles'schen Benennung

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho$$

der Modul für die Bedingung Z, d. h. in einem Systeme (μ, ν, ϱ) von Flächen 2. Ordnung gebe es $\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho$ Flächen, welche der neunten Bedingung Z genügen, so hat Herr Zeuthen an der genannten Stelle folgende Formeln ermittelt:

$$\begin{aligned}
\psi\,(6\,p,\ \ P, Z) &= 10\,\gamma,\\
\psi\,(\ \ p,\ 6\,P, Z) &= 10\,\alpha,\\
\varphi\,(4\,p,\ 3\,P, Z) &= \ \ 8\,\alpha + 16\,\beta,\\
\chi\,(3\,p,\ 4\,P, Z) &= 16\,\beta + \ \ 8\,\alpha,
\end{aligned}$$

worin φ, χ, ψ die Anzahl der Kegel, der Kegelschnitte und der Oberflächen, die aus zwei Ebenen mit in zwei Punkten begrenzter Schnittlinie bestehen, in dem betreffenden Systeme sind; dabei ist freilich jeder solche Kegel, bez. Kegelschnitt achtfach gerechnet, weil sein Scheitel sich in 3 gegebenen Ebenen befindet, bez. seine Ebene durch 3 gegebene Punkte geht, wie dies Herr Zeuthen vorher auseinander gesetzt hat.

Wenn nun Z die Bedingung ist, dass die Fläche $F = (n, r, m)$ berührt werde, so findet sich zunächst leicht:

$$\psi\,(6\,p, P, F) = 10\,n\,,$$

weil es durch 6 Punkte 10 Ebenenpaare giebt, von denen jedes n-fach zu rechnen ist, indem der eine Grenzpunkt seiner Schnittgeraden deren Begegnungspunkt mit der Ebene, der andere je einer der n Schnittpunkte mit F ist; das Dualitätsprincip giebt:

$$\psi\,(p, 6\,P, F) = 10\,m.$$

Da sich ferner (in einer Ebene) wie bekannt stets $n + 2r$ Kegelschnitte befinden, welche eine Curve n^{ter} Ordnung und r^{ter} Classe, wie

z. B. den Schnitt der Ebene mit der Fläche F, und 4 Gerade berühren, so ist

$$\chi(3p, 4P, F) = 8(n + 2r)$$

und dualistisch

$$\varphi(4p, 3P, F) = 8(m + 2r).$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den obigen giebt für die Berührung mit F

$$\alpha = m, \quad \beta = r, \quad \gamma = n.$$

Also *befinden sich in einem Systeme* (μ, ν, ϱ) *von Flächen zweiten Grades stets* $m\mu + r\nu + n\varrho$ *Flächen, welche eine Fläche* (n, r, m) *berühren.*

2. Daraus ergiebt sich:

1) weil ein System concentrischer Kugeln alle drei Charakteristiken gleich 1 hat, so *ist die Anzahl der Normalen aus einem Punkte an eine Fläche* (n, r, m) *gleich* $n + r + m$;

2) es ist früher (Math. Ann. Bd. VI, S. 248) von mir gefunden worden, dass die Classe der Fusspunktsfläche einer Fläche gleich der Zahl der Rotationsparaboloide ist, welche denselben zwei Kegeln eingeschrieben sind und die Fläche F tangiren. In einem Systeme von Flächen zweiten Grades, die denselben zwei Kegeln eingeschrieben sind, befindet sich ein Ebenenpaar, bestehend aus den beiden gemeinsamen Berührungsebenen der Kegel, dessen Schnittgerade in den Scheiteln der Kegel begrenzt ist. Daher ist die Charakteristik μ dieses Systems nur 2; $\nu = 2$, $\varrho = 1$. Also ist die Zahl der Flächen eines solchen Systems, welche F berühren, mithin *die Classe der Fusspunktsfläche von* F

$$2m + 2r + n,$$

wie von mir a. a. O. S. 249 vermuthungsweise ausgesprochen ist.

3. Die gefundene Formel

$$N = m\mu + r\nu + n\varrho$$

überträgt sich unmittelbar auf *die Curven und abwickelbaren Flächen.* Haben wir eine Curve von der Ordnung n' und der Classe r' *) (Zahl der eine Gerade treffenden Tangenten) und fassen sie als Fläche (n, r, m) auf, so ist $n = 0$, $r = n'$, $m = r'$; also

$$N = \mu r' + \nu n';$$

und fasst man eine abwickelbare Fläche von der Ordnung r' und der Classe m' als Fläche (n, r, m) auf, so ist $n = \nu'$, $r = m'$, $m = 0$, also

---

*) Ich muss hier nothwendig von meiner in der Abh. von Bd. VI gebrauchten Bezeichnungsweise abgehen.

$$N = \nu m' + \varrho r';$$

beides in Uebereinstimmung mit den von Herrn Zeuthen Nouv. Ann. 1868 S. 392 gefundenen Zahlen.

4. Es giebt drei einfach unendliche Systeme von Flächen 2. Ordnung, für die je zwei Charakteristiken 0, die dritte 1 ist; nämlich eine Punktreihe, ein ebener Strahlbüschel, ein Ebenenbüschel, deren Elemente involutorisch gepaart sind; die Charakteristiken sind bez. $\mu = \nu = 0$, $\varrho = 1$; $\mu = \varrho = 0$, $\nu = 1$; $\mu = 1$, $\nu = \varrho = 0$ und eine Fläche $F = (n, r, m)$ wird ersichtlich bez. von n, r, m Flächen jeder dieser Systeme tangirt, was mit der obigen Formel übereinstimmt.

5. In gleicher Weise lassen sich auch zwei andere von Herrn Zeuthen a. a. O. S. 392—397 gefundene Resultate in die allgemeinere Form umsetzen.

Ist noch $\varkappa$ die Ordnung der Cuspidalcurve der Fläche F und ι die Classe der Torse der stationären Berührungsebenen, so ergiebt sich für *die Zahl der Flächen 2. Ordnung, welche 7 Bedingungen* $Z_1 \cdots Z_7$ *genügen und die Fläche F doppelt berühren,*

$$N = \tfrac{1}{2} Am(m-1) + \tfrac{1}{2} Br(r-1) + \tfrac{1}{2} Cn(n-1)$$
$$+ D[r(n-2) - \tfrac{1}{4}(r + 3\varkappa)] + Enm + F[r(m-2) - \tfrac{1}{4}(r + 3\iota)],$$

worin die Zahlen $A, B, C, \cdots, F$*) *allein von den 7 Bedingungen* $Z_1 \cdots Z_7$ *abhängen.*

6. Wenn α, σ die Zahlen der Wendetangenten von F bez. in einer Ebene und durch einen Punkt sind, so findet sich in derselben Weise für *die Zahl der Flächen 2. Ordnung, die den 7 Bedingungen* $Z_1 \cdots Z_7$ *genügen und F stationär berühren,*

$$N_1 = \tfrac{1}{2} D(3n + \alpha) + \tfrac{1}{2} F(3m + \sigma),$$

worin auch $3r + \varkappa$ für $3n + \alpha$ und $3r + \iota$ für $3m + \sigma$ treten kann.

7. Aus dem letzteren Resultate ergiebt sich nun durch dieselben Schlüsse, wie sie Herr Zeuthen macht, dass *die Ordnung der Fläche der Krümmungsmittelpunkte für F ist:*

$$n'' = (3n + \alpha) + (3m + \sigma),$$

wie in der vorangehenden Abhandlung auf anderem Wege gefunden worden ist, oder auch

$$n'' = 6r + \varkappa + \iota.$$

8. Die Ermittelung der Formeln für N und N_1 in Nr. 5. und 6. geschah mit Hülfe der Formeln (4a) und (11a) in dem Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit (Kopenhagen 1865) des Herrn

---

*) Eine Verwechselung der beiden F ist wohl nicht möglich.

Zeuthen (der in den Nouv. Ann. 1866 in französischer Uebersetzung erschienen ist); in diesen Formeln sind die Plücker'schen Relationen benutzt; da dieselben für in Büschel zerfallende ebene Curven und Kegel nicht mehr gelten, so sind die Formeln für N und N_1 auf die Curven und Torsen nicht in der Weise von Nr. 3. zu übertragen.

9. *Die Grössen A, B, C, D, E, F, welche allein von den 7 Bedingungen Z_1, Z_2, $\cdots$, Z_7 abhängen*, lassen sich auf einem etwas umständlichen, aber sonst nicht schweren Wege ganz nach der Anleitung des Herrn Zeuthen *als die 6 Charakteristiken des durch die 7 Bedingungen bestimmten doppelt unendlichen Systems von Flächen 2. Grades nachweisen, nämlich:*

$$A = N(7Z, 2p), \quad B = N(7Z, 2l), \quad C = N(7Z, 2P),$$
$$D = N(7Z, l, P), \quad E = N(7Z, p, P), \quad F = N(7Z, p, l);$$

etwas Aehnliches gilt *bei dem 6 Bedingungen unterworfenen dreifach unendlichen Systeme,* das nachher von Herrn Zeuthen betrachtet wird; *die 10 Grössen A, B, C, $\cdots$, K sind dessen Charakteristiken, nämlich:*

$$A = N(6Z, 3p), \quad B = N(6Z, 3l), \quad C = N(6Z, 3P),$$
$$D = N(6Z, 2p, l), \quad E = N(6Z, 2p, P), \quad F = N(6Z, p, 2l),$$
$$G = N(6Z, 2l, P), \quad H = N(6Z, p, 2P), \quad J = N(6Z, l, 2P),$$
$$K = N(6Z, p, l, P).$$

Es ist wohl kaum einem Zweifel unterworfen, dass dies so weiter fortgeht; so dass *das von Chasles für ein einfach unendliches System ausgesprochene Gesetz sich einem allgemeineren subsumirt.*

Darmstadt, den 28. December 1873.

Einige Worte zum Andenken an Hermann Hankel.

Von W. v. Zahn.

Das Leben des Mathematikers Hermann Hankel, auf welches wir durch die nachfolgenden Zeilen die Aufmerksamkeit der Leser dieser Zeitschrift hinzulenken wünschen, ist kurz nach seiner Dauer und einfach in seinem äussern Verlaufe, aber reich an Früchten gewesen, welche dasselbe überdauern und dem früh Verstorbenen einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften sichern.

Hermann Hankel wurde am 14. Februar 1839 zu Halle geboren, wo sein Vater, der rühmlichst bekannte Physiker, Dr. Wilhelm Hankel, damals eine Lehrerstelle an der Realschule bekleidete, und zugleich als Docent an der Universität thätig war. Die geistige Befähigung des Knaben sprach sich früh in einem lebhaften Wissensdrange aus, der durch den Vater umsichtig befriedigt und zugleich fortdauernd rege erhalten wurde.

Seit der im Jahre 1849 in Folge der Berufung des Vaters an die Universität Leipzig erfolgten Uebersiedelung der Familie nach dieser Stadt besuchte Hermann Hankel das Nicolaigymnasium daselbst. Zeitig entwickelte sich seine ausgesprochene Befähigung für seinen spätern Beruf, und mit grösster Energie verwandte er seine Kräfte, soweit sie nicht von der Schule in Anspruch genommen wurden, auf das Studium der Mathematik.

Seine hervorragenden Leistungen in dieser verschafften ihm in den letzten Schuljahren die Erlaubniss des Rectors der Schule, zum Gegenstande seines Privatstudiums statt der alten Classiker die Schriften der Mathematiker des Alterthums in der Ursprache zu wählen, um so in höherem Maasse den philologischen Anforderungen der Schule und seinem der Mathematik zugewandten Wissensdrange zu genügen. — Bei seiner reich angelegten Natur musste hierdurch ein lebhaftes Interesse für die Geschichte der Mathematik um so mehr geweckt werden, als die ihm eigene Gründlichkeit ihn stets auf den Zusammenhang der von ihm gewonnenen Kenntnisse blicken, und rechte Befriedigung erst dann finden liess, wenn er ihnen durch Zusammenschluss unter eine höhere Einheit Abrundung zu geben wusste.

Nachdem er so schon auf dem Gymnasium eine für seine Jahre ungewöhnliche mathematische Bildung sich angeeignet hatte, bezog er Ostern 1857 die Universität Leipzig, wo er in den Vorträgen seines Vaters, so wie in denen von Drobisch, Möbius und vor allen von Scheibner Belehrung und immer neue Anregung zu seinen eigenen rastlosen Studien fand.

Der in die Zeit des Anfanges der Leipziger Universitätsstudien fallende Ausbruch eines schweren körperlichen Leidens, den seine damals ungeachtet der geistigen Anstrengungen noch kräftige Constitution glücklich überwand, nöthigte ihn in Allem, was neben der Mathematik ihn noch geistig anzog, strenges Maass zu halten. So stellte er z. B. seine historischen Forschungen wieder ein, um sich zuvörderst mit ganzer Kraft den streng mathematischen Arbeiten zu widmen.

Von Ostern 1860 an setzte er seine Studien in Göttingen fort, wo die epochemachenden Vorträge von Riemann ihn in die Theorie der complexen Functionen einführten und seinen Interessen die Richtung gaben, die seiner speciellen Begabung wohl die angemessenste war, und der er auch bis zu seinem Ende treu geblieben ist.

Aber auch den physikalisch-mathematischen Vorträgen des genialen Riemann wusste er mit reger Theilnahme zu folgen, und einen schönen Beweis, wie tief er schon damals in den Geist der analytischen Methoden eingedrungen war und mit welcher Gewandtheit er dieselben zu handhaben verstand, liefert seine unter dem Titel: „Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten“ veröffentlichte, preisgekrönte Lösung der von der philosophischen Facultät der Georgia Augusta im Jahre 1860 gestellten Aufgabe· Die Gesetze für die Bewegung der Flüssigkeiten insbesondere für die von Helmholtz behandelten Wirbelbewegungen aus den Lagrange'schen Gleichungen abzuleiten.

Nachdem Hankel in so ehrenvoller Weise die Bahn eines mathematischen Schriftstellers betreten hatte, verliess er im Herbst 1861 Göttingen, um noch einige Zeit in Berlin zu studiren und dort namentlich Weierstrass und Kronecker zu hören. — Vorher hatte er noch in Leipzig auf eine Abhandlung: „Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten, Göttingen 1861“ die philosophische Doctorwürde erworben. In dieser Abhandlung werden Determinanten, in denen die auf einer Parallele zu einer Diagonale befindlichen Elemente einander gleich sind, mehreren eleganten Transformationen unterzogen, und das Problem der Entwickelung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch auf die Bildung solcher Determinanten zurückgeführt. Im engern Anschluss hieran steht eine in den Berichten der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften für 1862 publicirte kleine Abhandlung „Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche“.

Im Herbste 1862 kehrte Hankel nach Leipzig zurück, in der Absicht, sich an der dortigen Universität zu habilitiren. Seine Gesundheit hatte sich befestigt, und der Aufenthalt auf den beiden fremden Universitäten hatte wie seine wissenschaftliche auch seine Charakterbildung vollendet. Klarheit des Denkens, welche die Voraussetzung hervorragender Leistungen in den mathematischen Disciplinen ist, beherrschte den ganzen Kreis seiner geistigen Bestrebungen. Sein durch strenge Selbstzucht ihm zur andern Natur gewordenes Streben nach Gründlichkeit und Tiefe machte sich bei der Beantwortung aller Fragen geltend, die das Leben dem Menschen stellt, und dieselbe Ehrfurcht, die er den ernsten Arbeiten des menschlichen Geistes auf dem mathematischen Gebiete entgegenbrachte, beseelte ihn auch allem geschichtlich Gewordenen gegenüber. Diese Ehrfurcht in Verbindung mit dem tiefen sittlichen Ernste seines Charakters liess ihn auch inmitten einer entgegengesetzten Zeitströmung an der geoffenbarten Wahrheit des Christenthums bis zu seinem Lebensende unerschütterlich festhalten.

Zu Anfang des Jahres 1863 habilitirte sich Hankel als Privatdocent der Mathematik an der Universität Leipzig. Zu der von ihm eingereichten Habilitationsschrift „Ueber die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes“ hatten die Vorlesungen von Riemann über Functionen complexer Variabeln die erste Anregung gegeben. Die Schrift ist ein Muster klarer Darstellung und historischer Gewissenhaftigkeit. Ihr besonderes Verdienst besteht aber darin, dass sie die Resultate der früheren Untersuchungen unter einen allgemeinen Gesichtspunkt zusammenfasst und ihre Ableitung vereinfacht. Dieser Art der Darstellung blieb Hankel stets getreu. — In allen spätern Arbeiten gleicher Gattung geht er von dem historisch gegebenen Materiale aus und giebt Rechenschaft von dem Verhältnisse seiner eigenen Entwickelung zu dem schon Geleisteten.

In seinen akademischen Vorträgen wusste der jugendliche Docent seine Zuhörer in seltenem Grade für den jedesmal behandelten Gegenstand zu interessiren, obwohl er (ganz entfernt vom Streben nach falscher Popularität) an seine Zuhörer nicht geringe Anforderungen stellte. Vor allem und mit dem glücklichsten Erfolge strebte er aber danach, durch klare Darlegung des Gedankenganges und durchsichtige Gliederung der Entwickelung auch dem schwächeren Verständnisse den

Ueberblick über das Ganze zu wahren und doch dabei die Theilnahme der höher Strebenden zu fesseln.

Diese Leistungen als akademischer Lehrer, verbunden mit seinen weiteren wissenschaftlichen Arbeiten, verschafften ihm die Anerkennung, dass er im Herbst 1867, nachdem er im Frühjahr desselben Jahres zum ausserordentlichen Professor in Leipzig ernannt war, als ordentlicher Professor der Mathematik an die Universität Erlangen und Ostern 1869 in gleicher Eigenschaft an die Universität Tübingen berufen wurde. In Erlangen gründete er einen eigenen Hausstand, indem er Marie Dippe aus Schwerin, die Tochter einer seinem elterlichen Hause lange befreundeten Familie als Gattin heimführte, an deren Seite er das gehoffte Lebensglück bis zu seinem Tode in reichem Masse fand.

Im Uebrigen waren die Verhältnisse in Erlangen nicht danach angethan, dem strebsamen Geiste Hankel's auf die Dauer zu genügen, weil die Zahl derjenigen, welche Mathematik studirten, überaus gering war. Bei der Begeisterung, mit welcher er dem akademischen Berufe anhing, empfand er daher den Ruf nach Tübingen als ein hohes Glück, wo ihm ein reiches Wirken für Wissenschaft und Leben in Aussicht gestellt schien. Zwar muthete ihn Manches fremd an, aber das reiche Geistesleben des schwäbischen Stammes, die Fülle des Interessanten in allen neuen ungewohnten Verhältnissen, die sorgenfreie Existenz, vor allem aber der grössere Kreis von Studenten gewährten ihm volle Befriedigung und die Hoffnung auf erspriessliche Thätigkeit. Diese Hoffnung ist, obwohl ihm nur eine vierjährige Wirksamkeit beschieden gewesen ist, nicht unerfüllt geblieben. — Von Anfang an arbeitete er darauf hin, das mathematische Studium zu heben, die Ziele desselben zu erweitern und den wissenschaftlichen Sinn der Studirenden zu beleben. — In dem beim Eintritt in den akademischen Senat der Universität Tübingen im April gehaltenen Vortrage: „Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten“ gab Hankel dieser Absicht in beredten Worten Ausdruck, indem er als das Ziel der akademischen Vorlesungen bezeichnete, das ganze Ideal der Wissenschaft denen vorzuführen, die derselben ihr Leben widmen wollen, und sich zu dem Grundsatze bekannte: „Will man gewiss sein, ein mittleres Ziel zu erreichen, so stelle man sich das höchste, wer nur nach Mittelmässigkeit strebt, wird auch diese nicht erreichen“.

Nachdem Hankel sich genau mit den höchst eigenthümlichen und interessanten Verhältnissen des württembergischen Unterrichtswesens bekannt gemacht hatte, richtete er noch im Sommer 1869 ein mathematisches Seminar von vier Cursen ein, dessen Verfassung der des schon bestehenden philologischen Seminars nachgebildet war. Die Theilnahme an den Uebungen des Seminars wurde für die Candidaten des Reallehramts obligatorisch gemacht. Eine weitere von Hankel bewirkte Verbesserung bestand in der Erhöhung der Anforderungen in dem sogenannten Professoratsexamen, indem die Prüfung mit auf analytische Mechanik und neuere Geometrie erstreckt wurde. Hankel's Ueberzeugung, dass bei der durch ausgezeichnete Schulbildung im Allgemeinen weit geförderten geistigen Entwickelung der Studenten mit dem Ziele auch die Kräfte wachsen würden, fand sich bald durch manchen schönen Erfolg bestätigt. Die Aufgabe des Professors der Mathematik war es nun, vor Allem seinen Vorträgen eine dem gesteckten Ziele entsprechende Mannigfaltigkeit und Vollendung zu geben.

Mit verdoppelter Sorgfalt arbeitete Hankel jetzt an seinen Heften, welche die Grundlage seiner stets frei gehaltenen Vorträge bildeten, und freudig empfand er die durch volle Hingabe auf beiden Seiten bedingte Wechselwirkung zwischen ihm und seinen Zuhörern.

Aufmerksam auf die Aufnahme seiner Worte im Zuhörerkreise achtend, lernte er selbst immer mehr sich dessen Bedürfnissen zu accomodiren, und die Gewissheit, nicht vergeblich zu arbeiten, gab ihm die Sicherheit, die den Meister kennzeichnet. Im Bewusstsein, hier auch für tiefer gehende Bemerkungen Verständniss zu finden, konnte er mehr als sonst seine eigenartige Auffassung hervortreten lassen und in gesteigerter Lebhaftigkeit des Vortrags die Zuhörer mit fortreissen.

Bei solcher Hingabe an den Beruf als akademischer Lehrer blieb für Hankel in Tübingen nur wenig Zeit übrig, seine früheren litterarischen Arbeiten fortzusetzen oder neue zu unternehmen.

Die grosse Aufgabe, die er sich schon in Leipzig gestellt hatte, durch eine fundamentale Untersuchung die eigentliche Natur jener Vorstellungen und Begriffe aufzuklären, auf welcher die complexen Zahlen und ihre Functionen beruhen, und damit zugleich das Gebiet zu begrenzen, innerhalb dessen sie ihre volle Berechtigung haben, sowie gewissermassen die Direction für den weiteren Fortschritt zu geben, ist von ihm rücksichtlich der complexen Zahlensysteme durch den im Jahre 1867 in Leipzig erschienenen ersten Theil der Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen mit glücklichem Erfolge gelöst worden. Um so mehr ist es zu bedauern, dass er zur Ausarbeitung des zweiten Theils, welcher die Functionen der complexen Zahlen in entsprechender Weise behandeln sollte, nicht gelangt ist. — Es ist damit eine Lücke unausgefüllt geblieben, welche als solche auch von denen empfunden wird, die selbstthätig an der Erweiterung des bezeichneten Gebietes der Wissenschaft arbeiten. Von kleineren Arbeiten sind zu erwähnen:

„Die Zerlegung algebraischer Functionen in Partialbrüche nach den Principien der complexen Functionentheorie in der Zeitschrift für Mathematik und Physik I, S. 425—433.“

„Mathematische Bestimmung des Horopters. Poggendorff Annalen, CXXII, 575."

„Ueber die Vieldeutigkeit der Quadratur und Rectification algebraischer Curven. Eine Gratulationsschrift. Leipzig 1864."

„Darstellung symmetrischer Functionen durch Potenznummern, Borchardt's Journal Bd. 67."

„Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art, in den Mathematischen Annalen von Clebsch und Neumann, Leipzig 1869, S. 467—501." Von dieser Abhandlung hat sich eine Fortsetzung in Hankel's Nachlasse vorgefunden und steht die Publication derselben in diesen Annalen in Aussicht.

Auch dürfen wir die Artikel „Gravitation", „Grenze" und „Lagrange's Lehrsatz" in der Encyklopädie von Ersch und Gruber nicht mit Stillschweigen übergehen, von denen der erstere eine höchst geistreiche Beleuchtung einer der wichtigsten Episoden aus der Geschichte der exacten Wissenschaften ist, der zweite aber um deswillen eine besondere Erwähnung verdient, weil er die Grundlage der Analysis ganz im Geiste und mit der historischen und sachlichen Gründlichkeit der „Theorie der complexen Zahlensysteme" behandelt.

Einige populäre Aufsätze, die Hankel schrieb, beweisen die Vielseitigkeit und Feinheit seiner Bildung; wegen seines höhern wissenschaftlichen Werthes möchte dagegen hervorzuheben sein: „Ein Beitrag zur Beurtheilung der Naturwissenschaft des griechischen Alterthums. Deutsche Vierteljahrsschrift, 1867, IV, p. 120—155."

Hankel's letzte rein mathematische Arbeit waren die „Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen", in einem 1870 in Tübingen erschienenen Universitätsprogramme. Im Anschluss an die erwähnte Arbeit über den Grenzbegriff unterzieht Hankel in dieser Abhandlung den Functionsbegriff im Allgemeinen einer systematischen Analyse. Wenn er dabei zwar von gelegentlichen Untersuchungen Riemann's ausgeht und mit peinlicher Sorgfalt den sporadischen Aeusserungen älterer und neuerer Mathematiker über die Fragen dieses eminent schwierigen Capitels nachforscht, so muss doch die Arbeit als eine durchaus selbstständige bezeichnet werden. Durch knappe, prägnant zeichnende Terminologie, durch genaue Darlegung des erstrebten Zieles der Untersuchung und durch einen unbefangenen Nachweis, wie weit es dem Autor gelungen ist, die Wissenschaft diesem Ziele entgegen zu führen, dürfte diese Arbeit für Nachfolger auf der glücklich betretenen Bahn einen geeigneten Ausgangspunkt zu neuen Forschungen bilden, indem sie zugleich die Richtungen andeutet, in welchen weitere Fortschritte sich vollziehen können. — Die Hoffnung, selbst diese Untersuchungen weiter zu führen, um sie dem inzwischen im ersten Entwurf begonnenen zweiten

Theile seiner Functionentheorie einzufügen, sollte sich ihm nicht erfüllen, weil er am Schlusse des heissen und für ihn mit grossen Anstrengungen verbunden gewesenen Sommers 1872, an einer Hirnhautentzündung erkrankte, die ihn an den Rand des Grabes brachte, und deren Folgen zur äussersten Schonung seiner Kräfte ihn nöthigten.

In den vorangehenden beiden Jahren hatte er neben der geschilderten Thätigkeit für sein akademisches Lehramt seine Kraft in erhöhtem Masse der Vorbereitung einer Geschichte der Mathematik zugewandt. Hankel hatte frühzeitig die Idee gefasst, in dem bei Gelegenheit seiner mathematischen Studien mit historischer Gründlichkeit gesammelten Materiale im Laufe der Jahre den Apparat zur Abfassung einer umfassenden kritischen Geschichte der Mathematik zu gewinnen, glaubte aber die Ausführung der Arbeit selbst einer späteren Periode seines Lebens vorbehalten zu sollen, weil die besten Mannesjahre der Production auf dem rein wissenschaftlichen Gebiete gewidmet sein müssten. Gleichwohl entschloss er sich gern, einer an ihn herangetretenen Aufforderung zur Abfassung eines Abrisses der Geschichte der Mathematik Folge zu geben, indem er in der Herausgabe eines solchen kleineren Werkes ein vorzügliches Mittel erkannte, der für spätere Zeit beabsichtigten umfassenderen Schrift einen höhern Grad von Vollendung zu geben. Daher steckte er sich schon bei diesem kleinen Werke das Ziel, die herkömmliche Auffassung vollkommen selbstständig und mit allen ihm zu Gebote stehenden Mitteln einer strengen Kritik zu unterziehen, und bei der Gründlichkeit und Sorgfalt seiner Vorarbeiten konnte es nicht fehlen, dass er auf dem zwar vielfach, aber oft sehr ungenügend bearbeiteten Felde nicht wenig Neues entdeckte.

Das Werk neigte sich bereits seinem Abschlusse zu, als ihn die erwähnte schwere Krankheit befiel. Wie durch ein Wunder genas er und wurde den Seinen noch einmal zurückgegeben; es zeigte sich aber bald, dass er die frühere Kraft nicht mehr besass und auf angestrengte Arbeit verzichten musste. — Nur mit Unterbrechungen konnte er wieder Vorlesungen halten, und während ihm sonst die historischen Arbeiten fast wie eine Erholung im Vergleich zu dem abstracten mathematischen Forschen erschienen waren, musste er auch diese einstellen und die Vollendung des Werkes von einer vollständigen Wiederherstellung seiner Gesundheit erwarten. Diese Hoffnung aber, an der er bis zuletzt, jedoch mit religiöser Ergebung in den Willen Gottes festhielt, erfüllte sich nicht. Denn am 29. Aug. 1873 machte auf einer Erholungsreise, die er mit seiner Gattin unternommen, zu Schramberg im Schwarzwalde ein Gehirnschlag seinem Leben plötzlich ein Ende.

An seinem frühen Grabe trauert mit seinen Angehörigen und Freunden auch die Wissenschaft. Denn er war ein reichbegabter

Forscher und würde, wenn ihm ein längeres Leben beschieden gewesen wäre, noch durch schöne Früchte seines Fleisses und seines Scharfblicks sich ausgezeichnet haben. Aus seinem Nachlasse soll unter Anderem die Geschichte der Mathematik, soweit sie vollendet ist, und eine Reihe von Vorlesungen über die neuere Geometrie zur Veröffentlichung gelangen. Diese, wie seine früheren Arbeiten zeigen, welch reiches Talent mit diesem jungen Gelehrten zu Grabe getragen worden ist, wie Vieles noch daraus hätte erblühen können, und sichern ihm ein bleibendes und ehrenvolles Andenken.

Ueber die Flächen, deren Gleichungen aus denen ebener Curven durch eine bestimmte Substitution hervorgehen.

Von F. E. Eckardt in Chemnitz.

1. Bedeuten x, y, z die sogenannten Dreieckscoordinaten irgend eines Punktes in einer Ebene, so stellt bekanntlich jede homogene Gleichung m^{ten} Grades zwischen denselben:

$$f(x, y, z) = 0,$$

eine ebene Curve dar. Es mögen nun in dieser Gleichung die Substitutionen

$$x = \alpha\beta + \gamma\delta,$$
$$y = \alpha\gamma + \beta\delta,$$
$$z = \alpha\delta + \beta\gamma$$

ausgeführt werden, wobei jede der Grössen x, y, z, α, β, γ, δ noch mit einer gewissen Constanten multiplicirt oder dividirt sein könnte, welche hier durchgängig der Einfachheit halber gleich der Einheit gesetzt wird. Versteht man nun unter α, β, γ, δ die tetraedrischen Coordinaten eines Punktes im Raume, so stellt die hervorgehende Gleichung eine Fläche $2\,m^{\text{ten}}$ Grades dar. Die Eigenschaften der auf diese Weise enstehenden Flächen sollen im Nachstehenden genauer untersucht werden.

Zunächst enthält jede derartige Fläche die acht Punkte, in welchen sich die drei Flächen

$$\alpha\beta + \gamma\delta = 0,$$
$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0,$$
$$\alpha\delta + \beta\gamma = 0$$

durchschneiden. *Diese sind aber die Ecken zweier Tetraeder; das eine ist das Fundamentaltetraeder selbst, das andere dagegen, dessen Eckencoordinaten den Bedingungen genügen:*

$$\begin{aligned} -\alpha = \quad \beta = \quad \gamma = \quad \delta, \\ \alpha = -\beta = \quad \gamma = \quad \delta, \\ \alpha = \quad \beta = -\gamma = \quad \delta, \\ \alpha = \quad \beta = \quad \gamma = -\delta, \end{aligned}$$

wird von den vier Ebenen

$$\begin{aligned} X &= -\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \\ Y &= \alpha - \beta + \gamma + \delta = 0, \\ Z &= \alpha + \beta - \gamma + \delta = 0, \\ W &= \alpha + \beta + \gamma - \delta = 0 \end{aligned}$$

gebildet. Wir wollen der Einfachheit halber die Ecken des Fundamentaltetraeders mit A_1 $(\beta = \gamma = \delta = 0)$ u. s. w., und diejenigen des zweiten mit B_1 $(Y = Z = W = 0)$ u. s. w. bezeichnen, diejenigen des Fundamentaldreiecks dagegen mit a_1 $(y = z = 0)$ u. s. w. *Die acht Punkte A und B sind dann m-fache Punkte der Fläche.* Dies geht für die ersteren unter Anderem daraus hervor, dass die Gleichung der Fläche keine Coordinate in einer höheren als der m^{ten} Potenz enthält; für die letzteren folgt es daraus, dass dieselbe Gleichung sich nicht ändert, sobald α mit X, β mit Y u. s. w. vertauscht wird, infolge der Identitäten:

$$\alpha\beta + \gamma\delta = \tfrac{1}{4}(XY + ZW) \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung der Curve, in welcher die Fläche einer Tetraederebene, z. B. $\delta = 0$, begegnet, ist:

$$f(\alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \beta\gamma) = 0$$

oder

$$f\left(\frac{1}{\gamma},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\alpha}\right) = 0;$$

sie geht also aus der Gleichung der ursprünglichen Curve hervor, wenn man die Coordinaten mit den reciproken Werthen gewisser Tetraedercoordinaten vertauscht. Aehnliches gilt für die Schnittcurven mit den Ebenen des Tetraeders der B. Dagegen ist die Gleichung des Tangentialkegels im Punkte A_1 identisch mit der gleich Null gesetzten Function, welche in der Gleichung der Fläche in δ^m multiplicirt erscheint, also

$$f(\gamma, \beta, \alpha) = 0.$$

Dass somit die Gleichung jener Schnittcurve und diejenige dieses Tangentialkegels aus einander hervorgehen, wenn man die Coordinaten durch ihre reciproken Werthe ersetzt, hängt mit dem Umstande zusammen, dass sich die Gleichung der Fläche auch dann nicht ändert, wenn α mit $\frac{1}{\alpha}$, β mit $\frac{1}{\beta}$ u. s. w., und auch, wenn α mit $\frac{1}{X}$, β mit $\frac{1}{Y}$ u. s. w. vertauscht wird.

2. *Einer Geraden in der Ebene entspricht nach unserer Transformation eine Fläche zweiten Grades im Raume, welche durch die acht Punkte A und B geht. Einem Punkte der Ebene entspricht der Durchschnitt zweier derartigen Flächen, also im Allgemeinen eine durch die acht Punkte A und B gehende Raumcurve vierten Grades.*

Wenn man daher durch unsere Transformation zwei Flächen $2m^{\text{ten}}$ und $2n^{\text{ten}}$ Grades entstehen lässt, so schneiden sich dieselben in mn Raumcurven vierten Grades, entsprechend den mn Schnittpunkten der zugehörigen ebenen Curven.

Einem Doppelpunkte der ebenen Curve entspricht stets auf der Fläche eine Doppelcurve vierten Grades, also einer Spitze der ersteren eine Rückkehrkante der Fläche.

Bei den beiden diesen § 2. einleitenden Sätzen sind jedoch eine Reihe von Ausnahmen festzustellen. *Einem Fundamentalpunkte in der Ebene, z. B. a_1, entspricht der Durchschnitt der Flächen*

$$\alpha\gamma+\beta\delta=0,$$
$$\alpha\delta+\beta\gamma=0,$$

welcher aus den vier geraden Linien

$$\alpha=0,\quad \beta=0,$$
$$\gamma=0,\quad \delta=0,$$
$$X=0,\quad Y=0,$$
$$Z=0,\quad W=0$$

besteht, also aus zwei einander gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders der Punkte A, und aus zwei jene schneidenden und einander ebenfalls gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders B.

3. *Sechs gerade Linien in der Ebene giebt es, denen im Raume statt der Flächen zweiten Grades Ebenenpaare entsprechen.* Die Gleichungen dieser Linien sind:

$$y\pm z=0,$$
$$z\pm x=0,$$
$$x\pm y=0.$$

Der Linie

$$y+z=0$$

entspricht z. B. das Ebenenpaar

$$\alpha\gamma+\beta\delta+\alpha\delta+\beta\gamma=0$$

oder

$$(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta)=0\,.$$

In jeder der 12 Ebenen dieser Paare liegt je eine Kante der Tetraeder A und B.

Jedem Punkte, welcher in einer der sechs geraden Linien in der Ebene liegt, entspricht eine Raumcurve vierten Grades, welche im zugehörigen Ebenenpaare liegen und daher in zwei Kegelschnitte zerfallen muss. Alle Flächen unserer Entstehungsweise haben daher die Eigenschaft, *dass sie von den 12 Ebenen*

$$\alpha\pm\beta=0\,,$$
$$\alpha\pm\gamma=0 \text{ u. s. w.}$$

in Kegelschnitten durchschnitten werden. Ist dabei eine der sechs geraden Linien der Ebene zufällig eine Tangente der Curve, so berühren die zwei entsprechenden Ebenen die Fläche längs eines Kegelschnittes; ist jene eine Doppeltangente, so berühren die Ebenen längs je zweier Kegelschnitte u. s. w.

So entspricht dem Kegelschnitte

$$\sqrt{m\,(y+z)}+\sqrt{n\,(z+x)}+\sqrt{p\,(x+y)}=0$$

die Fläche vierten Grades

$$\sqrt{m\,(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta)}+\sqrt{n\,(\alpha+\gamma)\,(\beta+\delta)}+\sqrt{p\,(\alpha+\delta)\,(\beta+\gamma)}=0,$$

welche von jeder von sechs Ebenen längs eines Kegelschnittes berührt wird.

4. Die sechs geraden Linien des vorigen § schneiden sich ausser in den Fundamentalpunkten noch zu je dreien in vier Punkten, die wir resp. mit c_0, c_1, c_2, c_3 bezeichnen wollen und deren Coordinaten den Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} x=\;\;\; y=\;\;\; &z,\\ -x=\;\;\; y=\;\;\; &z,\\ x=-y=\;\;\; &z,\\ x=\;\;\; y=-&z. \end{aligned}$$

Diesen vier Punkten entsprechen nun auch keine wirklichen Kegelschnittpaare, sondern je vier gerade Linien, und es entsprechen z. B. dem Punkte c_0 die vier geraden Linien, in welchen die Ebenen

$$\alpha-\beta=0\,;\quad \gamma-\delta=0$$

von den andern

$$\alpha-\gamma=0\,;\quad \beta-\delta=0$$

oder auch von

$$\alpha-\delta=0\,;\quad \beta-\gamma=0$$

durchschnitten werden. Diese vier geraden Linien schneiden sich in einem Punkte C_0:

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta,$$

und jede derselben geht sowohl durch einen der Punkte A, als auch durch einen der Punkte B.

Ebenso entsprechen den andern Punkten c_1, c_2, c_3 je vier gerade Linien, welche durch je einen der Punkte A und B gehen und sich resp. in den Punkten

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta = -\gamma = -\delta,\\ \alpha &= -\beta = \gamma = -\delta,\\ \alpha &= -\beta = -\gamma = \delta,\end{aligned}$$

welche wir C_1, C_2 und C_3 nennen wollen, treffen.

Liegt einer der Punkte c, z. B. c_1, auf einer ebenen Curve, so liegen auf der entsprechenden Fläche stets die vier geraden Linien, welche sich in C_1 schneiden, und da diese nicht in einer Ebene liegen, *so muss der Punkt C_1 ein Doppelpunkt der Fläche sein.* Geht also z. B. ein Kegelschnitt durch die vier Punkte c, in welchem Falle seine Gleichung sein wird

$$mx^2+ny^2+pz^2=0, \text{ wobei } m+n+p=0,$$

so hat seine entsprechende Fläche vierten Grades 12 Doppelpunkte A, B und C und enthält die 16 geraden Linien, welche die Punkte C mit den Punkten A und B verbinden.

5. Wenn eine gerade Linie in der Ebene durch einen der Punkte c geht, so entspricht ihr eine Fläche zweiten Grades durch die vier demselben entsprechenden, in einem Punkte C sich treffenden Geraden, also *ein Kegel, welcher den Punkt C zum Scheitel hat.* Da nun jede Gerade einer ebenen Curve m^{ten} Grades in m Punkten begegnet, so schneidet jeder Kegel, welcher einen der Punkte C zum Scheitel hat und durch die vier geraden Linien geht, welche diesen mit den Punkten A oder B verbinden, unsere Flächen in m Raumcurven vierten Grades.

An eine ebene Curve m^{ten} Grades ohne Doppelpunkt und Spitze lassen sich von einem beliebigen ausserhalb gelegenen Punkte aus $m(m-1)$ Tangenten legen. *Daraus folgt, dass man von jedem Punkte C aus an unsere Fläche $2m^{\text{ten}}$ Grades, sofern dieselbe keine Doppel- oder Rückkehrcurve hat, $m(m-1)$ Kegel zweiten Grades legen kann, welche dieselbe längs einer Raumcurve vierten Grades berühren und ausserdem in $m-2$ derartigen Raumcurven durchschneiden.* Jeder dieser Kegel ist dabei ein doppelter Berührungskegel, da jede Erzeugende desselben die Fläche in den zwei Punkten berührt, in welchen sie der

Raumcurve vierten Grades begegnet. Daher repräsentiren jene $m(m-1)$ Kegel zweiten Grades im Ganzen einen Berührungskegel vom Grade

$$4\,m\,(m-1)\,.$$

Nun ist aber der Grad des Tangentialkegels bei einer Fläche $2\,m^{\text{ter}}$ Ordnung im Allgemeinen

$$2\,m\,(2\,m-1)\,;$$

man wird daher noch einen weiteren Berührungskegel von C aus erwarten können, und zwar einen solchen $2\,m^{\text{ten}}$ Grades.

Die $m(m-1)$ Berührungscurven vierten Grades der $m(m-1)$ Tangentialkegel liegen ferner in einer Fläche $2(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche der ersten Polaren des Punktes c in Bezug auf die ebene Curve entspricht. Da nun die erste Polare des Punktes C in Bezug auf unsere Fläche vom Grade $2\,m-1$ ist, *so muss die Berührungscurve des weiter zu erwartenden Tangentialkegels in einer Fläche vom Grade*

$$2\,m-1-2\,(m-1)\,,$$

d. h. in einer Ebene liegen. Dies geht auch auf andere Weise noch klarer hervor.

Die Gleichung der ersten Polaren eines beliebigen Punktes $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ in Bezug auf unsere Fläche ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1+\gamma_1\delta+\gamma\delta_1)+\frac{\partial f}{\partial y}\,(\alpha_1\gamma+\alpha\gamma_1+\beta_1\delta+\beta\delta_1)+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial z}\,(\alpha_1\delta+\alpha\,\delta_1+\beta_1\gamma+\beta\gamma_1)=0\,,$$

wobei in $\frac{\partial f}{\partial x}$ u. s. w. noch die bekannten Werthe für x, y und z einzuführen sind. Für den Punkt C_0 $(\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=\delta_1)$ z. B. wird nun diese Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\right)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0$$

und die Berührungsebene des weiteren Tangentialkegels ist daher

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\,,$$

d. h. unabhängig von der Function f und somit für alle unsere Flächen dieselbe.

Gleicherweise sind die Berührungsebenen der drei von C_1, C_2 und C_3 aus zu legenden Tangentialkegel:

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta=0\,,$$
$$\alpha-\beta+\gamma-\delta=0\,,$$
$$\alpha-\beta-\gamma+\delta=0\,.$$

Das Tetraeder dieser vier Ebenen hat wieder die Punkte C zu Ecken und man kann daher sagen, dass das Tetraeder der Punkte C in Bezug auf alle unsere Flächen *sich selbst conjugirt ist.*

Noch ist zu erwähnen, dass für alle die unendlich vielen Raumcurven vierten Grades, welche die Punkte A und B enthalten, die vier Punkte C die Scheitel der darüberstehenden Kegel zweiten Grades sind. Daraus ergiebt sich unter Anderem, dass die Kegelschnitte, in welchen nach § 3. unsere Fläche durch zwei zusammengehörige Ebenen, z. B.

$$\alpha+\beta=0, \quad \gamma+\delta=0$$

durchschnitten wird, sich paarweise in doppelt perspectivischer Lage befinden und dass die beiden nicht auf der Schnittlinie jener Ebenen liegenden Punkte C die Scheitel der zugehörigen Sehkegel sind.

7. Geht eine ebene Curve durch einen der Punkte c, so hat, wie schon erwähnt, die entsprechende Fläche den zugehörigen Punkt C zum Doppelpunkt. *Der Tangente an die Curve in jenem Punkte entspricht sodann der Berührungskegel der Fläche im Doppelpunkte.* Derselbe berührt die Fläche längs der vier geraden Linien, welche den Punkt C mit den Punkten A oder B verbinden, und jede Erzeugende desselben hat mit der Fläche im Scheitel vier zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich. Ueberdies schneidet der Berührungskegel die Fläche in $m-2$ Raumcurven vierten Grades.

Wäre c ein Doppelpunkt der ebenen Curve, so wäre der Punkt C ein vierfacher Punkt der Fläche; *der Tangentialkegel desselben zerfällt in zwei Kegel zweiten Grades,* welche den Tangenten des Doppelpunktes entsprechen.

Ist c eine Spitze, so fallen diese beiden Kegel zusammen. Ist allgemein c ein p-facher Punkt der ebenen Curve, so ist der Punkt C ein $2p$-facher Punkt der Fläche, dessen Tangentialkegel in p Kegel zweiten Grades zerfällt. Die vier geraden Linien, welche den Punkt C mit den Fundamentalpunkten verbinden, sind p-fache Linien der Fläche.

8. Einem Eckpunkte des Fundamentaldreiecks in der Ebene entsprechen, wie bereits gezeigt wurde, zwei sich kreuzende Kanten des Tetraeders der Punkte A und zwei sich kreuzende, aber jene schneidende Kanten des Tetraeders der Punkte B. Geht also eine Curve durch einen der Fundamentalpunkte, so enthält die entsprechende Fläche jene vier Kanten, und *ist eine Curve dem Fundamentaldreieck umschrieben, so enthält die Fläche sämmtliche 12 Kanten beider Tetraeder.*

Alsdann entspricht der Tangente der Curve in einem der Eckpunkte eine Fläche zweiten Grades, welche durch je zwei Kanten beider Tetraeder geht und die Fläche in sämmtlichen Punkten dieser Kanten berührt. Besonders bemerkenswerth ist dabei der Fall, in welchem die Tangente der Curve zusammenfällt mit einer der sechs Geraden, denen nach § 3. Ebenenpaare entsprechen. Berührt z. B. die gerade Linie

$$y + z = 0$$

die Curve im Punkte a_1, so berührt die Ebene

$$\alpha + \beta = 0$$

die Fläche längs der Kanten

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \text{ und } Z = 0\,, \quad W = 0\,;$$

ebenso die Ebene

$$\gamma + \delta = 0$$

längs der Kanten

$$\gamma = 0\,, \quad \delta = 0 \text{ und } X = 0\,, \quad Y = 0\,.$$

Der Punkt

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma = -\,\delta$$

hat somit, da er sowohl auf der Kante $\alpha = 0$, $\beta = 0$, als auch auf $X = 0$, $Y = 0$ liegt, zwei verschiedene Tangentialebenen:

$$\alpha + \beta = 0 \text{ und } \gamma + \delta = 0.$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn dieser Punkt ein Doppelpunkt der Fläche ist. Gleiches gilt für den Punkt

$$\alpha = -\,\beta\,, \quad \gamma = 0\,, \quad \delta = 0\,.$$

Wenn also eine der sechs mehrfach erwähnten Geraden die Curve in einem Fundamentalpunkte berührt, so hat die entsprechende Fläche zwei der Punkte, in welchen sich die Kanten der beiden Tetraeder A und B gegenseitig schneiden, zu Doppelpunkten.

Berühren daher die drei geraden Linien

$$y + z = 0\,,$$
$$z + x = 0\,,$$
$$x + y = 0$$

die Curve in den Fundamentalpunkten, so schneidet die Ebene

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

die Fläche in einer Curve, welche die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits zu Doppelpunkten hat.

9. Einem Punkte im Raume entspricht ein einziger Punkt der Ebene, diesem aber entspricht umgekehrt eine Raumcurve vierten Grades, durch welche unzählig viel Flächen zweiten Grades gelegt werden können, und zwar diejenige, welche durch die acht Punkte

A und B geht und jenen Punkt im Raume enthält. Ebenso entspricht einer beliebigen Curve im Raume eine Curve in der Ebene, dieser aber umgekehrt eine Fläche im Raume, und diese ist der geometrische Ort derjenigen Raumcurven vierten Grades, welche durch die acht Punkte A und B, sowie durch einen Punkt der Raumcurve gehen. Der Grad dieser Fläche hängt selbstverständlich ab von dem Grade der Curve im Raume und von der Lage derselben zu den Ecken und Kanten der beiden Tetraeder A und B.

Liegt z. B. diese Leitlinie m^{ten} Grades in einer Fläche $\alpha=0$ des Fundamentaltetraeders, und ist die Gleichung derselben

$$\alpha_1=0\,,\quad f(\beta_1, \gamma_1, \delta_1)=0\,,$$

so ist die Gleichung der erzeugenden Curve vierten Grades

$$(\alpha\beta+\gamma\delta)\,\beta_1=(\alpha\gamma+\beta\delta)\,\gamma_1=(\alpha\delta+\beta\gamma)\,\delta_1\,,$$

woraus folgt:

$$\beta_1:\gamma_1:\delta_1=\frac{1}{\alpha\beta+\gamma\delta}:\frac{1}{\alpha\gamma+\beta\delta}:\frac{1}{\alpha\delta+\beta\gamma}\,,$$

so dass sich die Gleichung der Fläche ergiebt:

$$f\left(\frac{1}{\alpha\beta+\gamma\delta}, \frac{1}{\alpha\gamma+\beta\delta}, \frac{1}{\alpha\delta+\beta\gamma}\right)=0\,.$$

Der Grad der Fläche ist somit unter der gemachten Voraussetzung im Allgemeinen das Vierfache von demjenigen der Leitcurve und die 12 Kanten beider Tetraeder sind m-fache Linien der Fläche. Geht aber die Leitlinie durch einen der Fundamentalpunkte, so vermindert sich der Grad der Fläche sofort um 2. Ist z. B. die Leitlinie eine Gerade

$$\alpha_1=0\,,\quad m\beta_1+n\gamma_1+p\delta_1=0\,,$$

so ist die Gleichung der Fläche

$$\frac{m}{\alpha\beta+\gamma\delta}+\frac{n}{\alpha\gamma+\beta\delta}+\frac{p}{\alpha\delta+\beta\gamma}=0\,.$$

Auf dieser Fläche liegen im Allgemeinen 20 gerade Linien, nämlich die 12 Kanten der Tetraeder A und B, und die acht geraden Linien, welche die acht Flächen beider Tetraeder noch überdies mit der Fläche gemeinsam haben.

Liegt die gerade Linie beliebig im Raume, so ist dagegen die Fläche im Allgemeinen vom achten Grade.

10. Es ist klar, dass man die Betrachtungen der vorigen §§ wesentlich verallgemeinern kann, wenn man für x, y und z überhaupt homogene Functionen der Coordinaten α, β, γ, δ substituirt; es wird alsdann allerdings die Lage der acht Fundamentalpunkte A und B eine weit allgemeinere als bisher, dagegen geht auch dabei der grösste Theil

der gefundenen einfachen Eigenschaften verloren. Diese Sätze würden nur dann mit nur unwesentlichen Aenderungen wiederkehren, wenn die mit unserer früheren verwandte Substitution

$$x = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$$
$$y = (\alpha + \gamma)(\beta + \delta)$$
$$z = (\alpha + \delta)(\beta + \gamma)$$

ausgeführt würde. Es ist bekannt, dass man sowohl diese, als auch die früheren Werthe x, y, z zu Wurzeln der Resolvente einer Gleichung vierten Grades wählen kann, sofern die letztere die Wurzeln α, β, γ, δ hat.

Aber die Betrachtungen des vorigen § lassen sich auch noch in anderer Beziehung wesentlich verallgemeinern, wenn man statt der Raumcurven vierten Grades andere Curven zu Erzeugungslinien der Fläche wählt. Besonders einfach ist der Fall, in welchem die Fläche erzeugt wird durch Raumcurven dritten Grades, welche durch fünf gegebene Punkte gehen. Eine Fläche dieser Art kann auf folgende einfache Weise erhalten werden: Man beziehe einen Kegel auf ein bestimmtes Tetraeder und ersetze hierauf in der Gleichung desselben die Coordinaten durch ihre reciproken Werthe; alsdann entsprechen den Erzeugenden des Kegels Raumcurven dritten Grades, welche durch die vier Eckpunkte des Tetraeders und durch den Punkt gehen, welcher vermöge der angewandten Transformation dem Kegelscheitel entspricht. Die fünf Punkte sind aber nur dann gleich vielfache Punkte der Fläche, wenn der gewählte Kegel ein solcher $3m^{\text{ten}}$ Grades ist, welcher die vier durch die Tetraederecken gehenden Erzeugenden zu m-fachen Linien hat. Die Flächen haben alsdann den Grad $5m$; die fünf Punkte sind $3m$-fache Punkte und ihre 10 Verbindungslinien m-fache Linien der Fläche.

11. Ein besonders bemerkenswerthes Beispiel zu den in dieser Abhandlung betrachteten Flächen bietet die *Kernfläche der Flächen dritten Grades mit vier Doppelpunkten*, welche ich z. B. in einer im fünften Bande dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeit S. 38 etwas näher betrachtet habe. Legt man als Gleichung der Fläche dritten Grades

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 0$$

zu Grunde, so kann die Gleichung ihrer Kernfläche unter der Form

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right)\left(\alpha + \beta + \gamma + \delta\right) = 4,$$

aber auch noch einfacher

$$\frac{1}{\alpha\beta+\gamma\delta}+\frac{1}{\alpha\gamma+\beta\delta}+\frac{1}{\alpha\delta+\beta\gamma}=0$$

geschrieben werden. Die fragliche Fläche ist also diejenige, welche vermöge unserer Transformation dem Kegelschnitte

$$yz+zx+xy=0$$

entspricht. Da dieser Kegelschnitt durch die Fundamentalpunkte geht, so enthält die Fläche die Kanten der beiden Tetraeder A und B, während die Ecken Doppelpunkte der Fläche sind. Da ferner der Kegelschnitt in den Fundamentalpunkten von den Linien

$$y+z=0, \quad z+x=0, \quad x+y=0$$

berührt wird, so berührt jede der sechs Ebenen

$$\alpha+\beta=0,$$
$$\alpha+\gamma=0 \text{ u. s. w.}$$

die Fläche längs je einer Kante beider Tetraeder und die sechs Punkte, in welchen die Ebene

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

den sechs Kanten eines jeden der beiden Tetraeder begegnet, sind Doppelpunkte der Fläche (§ 8.). Diese Ebene schneidet daher die Fläche in einer Curve vierten Grades mit sechs Doppelpunkten, also in den vier Geraden, in welchen sie den Flächen beider Tetraeder begegnet.

Vom Punkte C_0

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta$$

kann man an die Fläche zunächst zwei, allerdings imaginäre Berührungskegel zweiten Grades legen, ausserdem aber noch einen weiteren Kegel vierten Grades, dessen Berührungscurve in der Ebene

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

liegt und somit aus den eben erwähnten vier geraden Linien besteht. Man kann daher längs dieser vier Linien Berührungsebenen an die Fläche legen, welche sich in einem Punkte schneiden.

Für die drei Punkte C_1, C_2, C_3 zerfällt der Kegel vierten Grades nicht; die Berührungsebenen

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta=0 \text{ u. s. w.}$$

schneiden vielmehr aus der Fläche je eine Curve vierten Grades mit zwei Doppelpunkten und es ist hiernach die im Schlusssatze des § 8. der oben citirten Arbeit aufgestellte Behauptung zu berichtigen. Dagegen zerfallen für jeden dieser Punkte C_1, C_2, C_3 die zwei Kegel zweiten Grades in vier Ebenen, welche längs gewisser Tetraederkanten berühren.

Zugleich mag bei dieser Gelegenheit einiger Eigenschaften der fraglichen Fläche gedacht werden, welche sich nicht unmittelbar aus den oben entwickelten allgemeinen Sätzen ergeben.

Legt man in einem Doppelpunkte A und dem entsprechenden Doppelpunkte B (z. B. A_1 und B_1) die Tangentialkegel, so schneiden diese sich gegenseitig in einem Kegelschnitte, welcher zugleich auf der Fläche liegt, und ausserdem in *einem* Kegelschnitt auf der Polarebene von C_0. Die Ebene des ersten Kegelschnittes ist dabei eine der durch den Punkt C_0 gehenden und die Fläche längs einer Geraden berührenden, oben erwähnten Ebenen. Jeder dieser Tangentialkegel berührt überdies die Fläche längs drei geraden Linien.

Die Tangentialkegel in einem der weiteren sechs Doppelpunkte berühren dagegen die Fläche längs vier geraden Linien und durchschneiden sie daher sonst nicht. Zwei dieser Kegel aber, deren Scheitel auf gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders A liegen, durchschneiden sich gegenseitig in zwei Kegelschnitten. Die sechs so sich ergebenden Kegelschnitte liegen paarweise in den Ebenen CC_1C_2, CC_1C_3, CC_2C_3.

Der Tangentialkegel, welchen man ausser dem eigentlichen Berührungskegel des Punktes selbst noch von einem der Doppelpunkte A oder B aus an die Fläche legen kann, zerfällt in die drei Ebenen, welche die Fläche längs der drei in jenem Punkte zusammenlaufenden Tetraederkanten berühren, und in einen Kegel dritten Grades mit einer isolirten Doppelkante. Für den Punkt A_1 z. B. ist die Gleichung des letzteren:

$$(\gamma+\delta)(\delta+\beta)(\beta+\gamma)=8\,\beta\gamma\delta\,.$$

Die Berührungscurve dieses Kegels ist eine ebene und die Gleichung der Berührungsebene ist:

$$3\,\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\,.$$

Für jeden der weiteren sechs Doppelpunkte dagegen zerfällt der Tangentialkegel in:

1) den Berührungskegel des Doppelpunktes selbst;
2) einen längs eines Kegelschnittes berührenden Kegel zweiten Grades;
3) die Berührungsebenen längs der zwei Kanten der Tetraeder A und B, welche sich in dem Doppelpunkte schneiden.

Für den Doppelpunkt

$$\alpha=-\beta\,,\quad \gamma=0\,,\quad \delta=0$$

z. B. ist die Gleichung des Kegels unter 2)

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta)+4\,\gamma\delta=0\,;$$

die Gleichungen der beiden Ebenen unter 3) dagegen sind

$$\alpha+\beta=0\,,\quad \gamma+\delta=0\,.$$

12. Eine andere bemerkenswerthe Fläche vierten Grades entspricht dem Kegelschnitte

$$\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}=0\,.$$

Dieser geht durch die drei Punkte c_1, c_2 und c_3, und die Schnittpunkte der drei Tangenten, die man an die Curve in diesen Punkten legen kann, liegen auf den Linien

$$y-z=0\,,\quad z-x=0\,,\quad x-y=0\,.$$

Die Fläche

$$\frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}+\frac{1}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}+\frac{1}{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}=0$$

hat daher ausser den acht Punkten A und B noch die drei Punkte C_1, C_2, C_3 zu Doppelpunkten und enthält die 12 geraden Linien, welche diese drei Punkte mit den Punkten A und B verbinden (§ 4.). Die Tangentialkegel in je zweien dieser Punkte C schneiden sich in zwei Kegelschnitten und die Ebenen der sechs so sich ergebenden Kegelschnitte schneiden sich sämmtlich im Punkte C_0.

Jede der sechs Ebenen

$$\alpha+\beta=0\,,\quad \alpha+\gamma=0 \text{ u. s. w.}$$

schneidet die Fläche in vier Geraden, jede der sechs Ebenen

$$\alpha-\beta=0\,,\quad \alpha-\gamma=0 \text{ u. s. w.}$$

dagegen in zwei Geraden und einem Kegelschnitt. Die sechs auf diese Weise entstehenden Kegelschnitte sind zu je zweien in doppelt perspectivischer Lage und die Scheitel der sechs Sehkegel liegen in den Punkten C_1, C_2, C_3.

13. Unter den Flächen sechsten Grades ist diejenige hervorzuheben, welche der Curve dritten Grades

$$(y+z)(z+x)(x+y)=8\,xyz$$

entspricht. Diese Curve geht durch die drei Fundamentalpunkte a und hat in diesen die Linien

$$y+z=0\,,\quad z+x=0\,,\quad x+y=0$$

zu Tangenten; ferner hat die Curve den Punkt c_0

$$x=y=z$$

zum isolirten Punkt. Die entsprechende Fläche

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)=8(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)$$

hat daher die acht Punkte A und B zu dreifachen Punkten, den Punkt

C_0 zu einem vierfachen Punkt und die sechs Punkte, in welchen die Ebene

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$$

den sechs Kanten der Tetraeder A oder B begegnet, zu Doppelpunkten. Ferner liegen auf der Fläche die zwölf Kanten beider Tetraeder, und ausserdem sind die vier geraden Linien, welche den Punkt C_0 mit den vier Ecken A oder B verbinden, isolirte Doppellinien der Fläche. Der Tangentialkegel des vierfachen Punktes zerfällt in zwei Kegel zweiten Grades; derjenige eines dreifachen Punktes dagegen schneidet die Fläche in einer ebenen Curve dritten Grades, welche zugleich auf der gegenüberliegenden Tetraederebene liegt. Jede der sechs Ebenen $\alpha+\beta=0$ u. s. w. berührt die Fläche in je einer Kante der Tetraeder A und B und durchschneidet sie überdies in einem Kegelschnitt.

Chemnitz, im Januar 1874.

Ueber eine neue Bedingung für den gewöhnlichen Mittelwerthsatz.

Von PAUL DU BOIS-REYMOND in Tübingen.

Nach dem gewöhnlichen Mittelwerthsatz kann das Integral $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ auf die Form:

$$f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx\,, \quad a \leqq \xi \leqq b\,,$$

gebracht werden, wenn $\varphi(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ ihr Zeichen nicht wechselt. Diese Bedingung kann durch folgende davon gänzlich verschiedene ersetzt werden: Jene Umformung ist gestattet, *wenn* $f(x)$ *im Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *entweder nirgends zunimmt oder nirgends abnimmt, und wenn,* $\int_a^x \varphi(x)\,dx = \Lambda(x)$ *gesetzt, die Function* $\Lambda(x)$ *im Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *ihr Zeichen nicht wechselt und stets* $\leqq \Lambda(b)$ *ist.* Geometrisch bedeutet diese Bedingung Folgendes: Die Curve $y = \Lambda(x)$ darf, indem sie die Punkte $x = a$, $y = \Lambda(a) = 0$ und $x = b$, $y = \Lambda(b)$ verbindet, das von den Geraden:

$$x = a\,, \quad x = b\,, \quad y = 0\,, \quad y = \Lambda(b)$$

eingeschlossene Rechteck nicht verlassen.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus dem zweiten Mittelwerthsatz*):

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi_1}\varphi(x)\,dx + f(b)\int_{\xi_1}^b \varphi(x)\,dx\,, \quad a \leqq \xi_1 \leqq b\,,$$

da die beiden Integrale rechter Hand positiv sind, indem man einen zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Werth vor diese Integrale nimmt.

---

*) Man findet jenen Satz in Borchardt's Journal Bd. 69, S. 65, ferner auch in diesen Annalen Bd. VI, S. 313. Anm. d. Redaction.

Die neue Bedingung ist deshalb bemerkenswerth, weil sie für die Function $\varphi(x)$, der sie ja beliebig viele Zeichenwechsel gestattet, viel weniger einschränkend ist als die alte, wofür sie allerdings der Function $f(x)$ weniger Spielraum gönnt.

Ich benutze diese Gelegenheit, um in meinem letzten Aufsatz *„Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen"* (Seite 241 dieses Bandes) einen störenden Druckfehler zu berichtigen. Auf Seite 254 jenes Aufsatzes muss nämlich die zweite Formel so lauten:

$$\begin{aligned}\operatorname{Lim} \Big\{ \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos \alpha\, d\alpha + \cdots \cos nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha \\ + \sin x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin \alpha\, d\alpha + \cdots \sin nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha \Big\} \\ = \frac{\pi}{2} \big\{ f(x_1+0) + f(x_1-0) \big\} + \big\{ f(x_1+0) - f(x_1-0) \big\} \operatorname{Lim} \int_0^{n(x-x_1)} \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha.\end{aligned}$$

Tübingen, im April 1874.

Ueber die Correspondenzformel.

Von A. Brill in Darmstadt.

Im VI. Bande dieser Annalen (S. 38 ff.) habe ich einen Satz bewiesen, vermöge dessen das bekannte Chasles'sche Correspondenzprincip für Punkte auf einer Geraden ausgedehnt wird auf Punkte einer Curve von allgemeinem Geschlecht. Erscheint an jener Stelle der Satz wesentlich nur als Corollar zu Untersuchungen über Correspondenzen-*paare*, und werden demnach manche an ihn anknüpfende Fragen dort unerörtert gelassen, so wird im vorliegenden Aufsatze beabsichtigt, durch näheres Eingehen auf die Eigenschaften einer einzelnen Correspondenz und ihrer Coincidenzen diese Lücke auszufüllen.

Der a. a. O. gelieferte algebraische Beweis der Correspondenzformel (der Formel für die Anzahl der Coincidenzen einer Correspondenz auf einer algebraischen Curve) wird in (I.) in geometrischer Fassung wiederholt. Die allgemeine Gestalt, welche Cayley jener Formel gegeben hat, indem er ausser einfachen auch mehrfach zu rechnende Punkte der Curve als durch die Correspondenz auf einander bezogen annahm, lässt sich, wie gezeigt wird, aus der vorher bewiesenen besonderen ableiten, ohne dass es nöthig ist, ein Zerfallen der Correspondenz unter Adjunction der Curvengleichung in einzelne Correspondenzen zwischen „einwerthigen" Punkten — was übrigens in vielen Fällen der Anwendung eintritt — vorauszusetzen. Man erreicht dies mit Hülfe eines auf Correspondenzen mit mehrwerthigen Punkten bezüglichen Satzes (§ 9.), welcher die Vertauschung des unabhängig veränderlichen Punktes mit einem der ihm entsprechenden Punkte betrifft.

Das Verhalten der Correspondenzen in Doppel-, Rückkehr- u. s. w. -Punkten der gegebenen Curve, das in (III.) betrachtet wird, veranlasst eine Unterscheidung zwischen „eigentlichen" und „uneigentlichen" Coincidenzen, von denen nur die ersteren bei eindeutiger Transformation der gegebenen Curve nicht verloren gehen können. Eine Reduction der Correspondenzformel wird ebenso nur durch eigentliche Coincidenzen, welche in singuläre Punkte der Curve fallen, hervorgebracht. Mit Hülfe der in § 21. aufgestellten Regeln lässt sich in jedem Falle die

Grösse dieser Reduction bestimmen, wobei sich denn ganz allgemein ergiebt, dass das Vorhandensein von Doppelpunkten nur in Ausnahmefällen eine solche nöthig macht.

I. Correspondenzen mit einwerthigen Punkten.

1. Vermöge einer Correspondenz φ zwischen zwei Punkten x und y (die man sich als Gleichung zwischen den Coordinaten derselben vorzustellen hat) möge jedem Punkte x der Ebene eine Curve (y) L. Ordnung entsprechen, jedem Punkte y eine Curve (x) K. Ordnung. Sei dazu eine Curve f von der m. Ordnung gegeben, so entsprechen wegen φ jedem Punkte y $Km = k$ Punkte x dieser Curve, jedem Punkte x $Lm = l$ Punkte y auf f. Es giebt in der Ebene eine Curve von der Ordnung $K + L$, für welche die Curve (y) durch den Punkt x geht, und umgekehrt. Es giebt also auf f $k + l$ Punkte, für welche einer der correspondirenden Punkte x in y fällt, oder umgekehrt. Wir werden diese Punkte die *Coincidenzpunkte* der Correspondenz φ nennen; die Correspondenz selbst, insofern wir sie in der Folge vorzugsweise in Bezug auf f betrachten, wollen wir durch (k, l) bezeichnen.

2. Gegeben sei nun zwischen den Punkten x und y ausser φ eine andere Correspondenz $\varphi' = (k', l')$. Wandert y auf f, so beschreiben die Punkte x, welche gleichzeitig den Correspondenzen φ und φ' genügen, eine Curve, deren Grad leicht zu ermitteln ist. Wir betrachten eine beliebige Gerade G. Einem Punkte x derselben entsprechen vermöge φ' l' Punkte y auf f, jedem von diesen vermöge φ eine Curve von der Ordnung K, die auf G $l'K$ Punkte x' ausschneiden. Da nun jedem von diesen wiederum $k'L$ Punkte x entsprechen, so ist die Zahl der Coincidenzen von Punkten x mit Punkten x' gleich:

$$l'K + k'L.$$

Daher ist:

$$m(l'K + k'L) = l'k + k'l$$

die Anzahl der Punktepaare x, y auf f, welche den beiden Correspondenzen (k, l) und (k', l') zugleich genügen.

Zeigen die Punkte x und y in jeder der beiden Correspondenzen ein *symmetrisches* Verhalten, ist also $k = l$, $k' = l'$, so ergiebt das angeführte Verfahren nicht nur die Coincidenzen der Punkte x, sondern auch die der entsprechenden Punkte y, und die Anzahl der Paare, welche gleichzeitig den Correspondenzen (k, k), (k', k') genügen, ist gleich der *Hälfte* der oben gefundenen Zahl:

$$= kk'.$$

3. Wir betrachten jetzt eine Correspondenz φ für sich, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Curven (x) und (y) durch die Punkte y

bez. x selbst hindurch gehn, welchen sie entsprechen, und wollen, um gleich die Rücksicht auf die Curve f zu wahren, annehmen, dass einem Punkte y von f eine Curve (x) entspreche, von deren k Schnittpunkten mit f γ in y fallen (z. B. durch Berührung, oder einen vielfachen Punkt u. s. w.), wir wollen kurz sagen: eine Curve (x) mit einem *„γ-werthigen Schnittpunkt in $x = y$"*. Ebenso sollen vermöge derselben Correspondenz von den l Schnittpunkten, welche einem Punkte x entsprechen, δ wieder in x fallen. Alsdann kann man zunächst zeigen, dass immer $\gamma = \delta$ ist. Wir werden eine solche Correspondenz in der Folge durch $(k - \gamma,\ l - \gamma)$ bezeichnen.

Wegen eines geometrischen Beweises dieser Behauptung sei es gestattet, auf Nr. II. zu verweisen; hier möge ein einfacher algebraischer Beweis Platz finden.

Man denke sich mit Hülfe von $f(x) = 0$ eine der 3 homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes x, etwa x_3, eliminirt, so muss in der Eliminationsgleichung der Factor $\frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2}$ γ-mal auftreten. Eliminirt man dann noch y_3, so enthält die resultirende Gleichung diesen Factor $m\gamma$-mal. Aber diese Gleichung kann keine andere sein, als wenn man umgekehrt erst y_3 und dann x_3 eliminirt hätte, wodurch denn jener Factor $m\delta$-mal vorgekommen wäre. Daher hat man $\gamma = \delta$.

4. Es mögen nun wieder zwei Correspondenzen gegeben sein: eine der eben betrachteten Art, $\varphi' = (k' - \gamma', l' - \gamma')$, mit einem γ' werthigen Punkt in $x = y$, und eine $\varphi = (k, l)$, welche durch Zusammenfallen von x mit y im Allgemeinen nicht befriedigt wird. Man suche die Anzahl der Paare von *getrennt* liegenden Punkten x, y auf f, welche gleichzeitig beiden genügen. Von der Anzahl Aller, welche die letztere Bedingung erfüllen:

$$kl' + lk',$$

sind diejenigen Punktepaare abzuzählen, für welche x in y fällt. Dies tritt nun aber nur an denjenigen Stellen von f ein, wo Coincidenzen von φ stattfinden, und zwar an jeder solchen Stelle γ'-fach, weil φ' dann immer einen γ'-fachen Punkt besitzt. Zählt man also:

$$\gamma'(k + l)$$

Paare ab, so bleiben die gesuchten:

$$k(l' - \gamma') + l(k' - \gamma')$$

Paare von getrennt liegenden Punkten.

5. Wir gehn endlich zu dem Falle über, dass 2 Correspondenzen $\varphi = (k - \gamma,\ l - \gamma)$ und $\varphi'\ (k' - \gamma',\ l' - \gamma')$ mit je einem γ- und γ'-werthigen Punkt in $x = y$ gegeben sind. Man denke sich zunächst die eine Correspondenz φ ein wenig deformirt in eine solche $\pi = (k, l)$,

welche in $x = y$ keinen ein- oder mehrwerthigen Punkt mehr besitzt, *dagegen* γ *diesem benachbarte Punkte auf* f. Nun ist die Anzahl der Punktepaare, welche den Correspondenzen π und φ' genügen, nach dem Vorigen:

$$kl' + lk' - \gamma'(k + l).$$

Unter diesen Paaren giebt es zwar keine solche von *zusammenfallenden* Punkten mehr, wohl aber noch solche von nahe benachbarten Punkten x, y, welche zusammenfallen, sobald die Deformation aufhört. Diese sind zu finden.

Lassen wir den Punkt x auf f wandern, so begleiten ihn die γ Punkte y, welche die deformirte Correspondenz π ergiebt, in unmittelbarer Nähe. Rückt aber x in die Nähe eines solchen Punktes C von f, in welchem die Correspondenz φ' ausser einem γ'-fachen Punkt noch eine Coincidenz besitzt, so rückt auch der coincidirende Punkt y in die Nähe von x, fällt in C mit x zusammen und entfernt sich wieder, wenn x sich von C entfernt. Während dessen wird aber dieser Coincidenzpunkt jeden der γ Punkte y, welche x begleiten, einmal passiren, und jeder Durchgang bezeichnet ein Paar von nahe benachbarten Punkten x, y, welche beiden Correspondenzen π und φ' angehören. Jedem Punkte C entsprechen somit γ Paare, und, wenn es P' Coincidenzpunkte der Correspondenz φ' giebt, so sind $\gamma \cdot P'$ Paare abzuziehen. Es bleiben also:

$$(\varphi\varphi') = kl' + lk' - \gamma'(k + l) - \gamma P'$$

Paare von getrennt fallenden Punkten x, y, welche den beiden Correspondenzen φ und φ' gleichzeitig genügen.

6. Nun verfährt man aber unsymmetrisch, indem man die eine Correspondenz φ deformirt. Hätte man statt dessen φ' deformirt, so würde man die Formel:

$$(\varphi\varphi') = k'l + l'k - \gamma(k' + l') - \gamma' P$$

erhalten haben, wo P *die Anzahl der Coincidenzpunkte der Correspondenz* φ *ist*. Da die beiden Werthe $(\varphi\varphi')$ einander gleich sein müssen, so erhält man durch Vergleichung:

$$\frac{P - (k - \gamma) - (l - \gamma)}{\gamma} = \frac{P' - (k' - \gamma') - (l' - \gamma')}{\gamma'}.$$

Dieser Quotient hat für φ dieselbe Form wie für φ' und muss daher von der speciellen Form der Correspondenz unabhängig sein; er kann nur noch von den Constanten der Curve f abhängen. Man findet aus irgend einer speciellen Correspondenz (z. B. der zwischen dem Berührungspunkt einer Tangente und den übrigen Schnittpunkten derselben bestehenden, für welche $P =$ der Anzahl der Wendetangenten von f

ist) den Werth des Quotienten gleich $2p$, wo p das Geschlecht der Curve f ist. Daher hat man die Correspondenzformel:

$$P = (k-\gamma) + (l-\gamma) + 2p\gamma\,;$$

und ferner durch Substitution:

$$(\varphi\varphi') = (k-\gamma)(l'-\gamma') + (k'-\gamma')(l-\gamma) - 2p\gamma\gamma'.$$

7. Setzt man noch:

$$k-\gamma = \varkappa\,;\quad k'-\gamma' = \varkappa'$$
$$l-\gamma = \lambda\,;\quad l'-\gamma' = \lambda',$$

wo dann also $\varkappa$ die Anzahl der vermöge der Correspondenz $\varphi = (\varkappa, \lambda)$ dem Punkte y entsprechenden nicht mit y zusammenfallenden Punkte x ist, λ die Anzahl der dem Punkt x entsprechenden Punkte y, welche nicht mit x vereinigt liegen u. s. w., so ist die *Anzahl der Coincidenzpunkte der Correspondenz* $(\varkappa, \lambda)$:

$$P = \varkappa + \lambda + 2p\gamma\,,$$

wo γ die „Werthigkeit" des Punktes $x = y$ bedeutet. Ferner ist die *Anzahl der den beiden Correspondenzen* $(\varkappa, \lambda)$ *und* $(\varkappa', \lambda')$ *zugleich entsprechenden Punktepaare* x, y:

$$(\varphi\varphi') = \varkappa\lambda' + \lambda\varkappa' - 2p\gamma\gamma'.$$

Ist das Vorkommen der Punkte x und y in jeder der Correspondenzen φ und φ' ein *symmetrisches*, so dass also $\varkappa = \lambda$, $\varkappa' = \lambda'$ ist, so ist, aus ähnlichen Gründen wie oben (§ 2.), die Zahl der gesuchten Paare gleich der *Hälfte* von $(\varphi\varphi')$:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') = \varkappa\varkappa' - p\gamma\gamma'.$$

8. Von den obigen Formeln für P und $(\varphi\varphi')$ steht hinsichtlich der Einfachheit der Darstellung keine hinter der anderen zurück; hinsichtlich der Anwendbarkeit verhält sich die letztere zur ersteren wie der Ausdruck für den Grad der Resultante aus zwei algebraischen Gleichungen zu dem für den Grad der Discriminante einer solchen. Man findet die weitere Discussion der Formel für $(\varphi\varphi')$, sowie eine Ausdehnung derselben auf einen allgemeineren Fall in dem oben citirten Aufsatz im VI. Bande d. Ann. durchgeführt. An dieser Stelle möge die Formel für P, die „*Correspondenzformel*", einer näheren Betrachtung unterzogen und insbesondere (in II.) auf eine solche Form gebracht werden, dass sich der Ausdruck für $(\varphi\varphi')$ als eine Folge derselben darstellen lässt.

II. Correspondenzen mit mehrwerthigen Punkten.

9. Wenn eine Correspondenz zwischen zwei Punkten x und y einer Curve f durch Zusammenfallen von x mit y befriedigt wird, so

ist, wie oben in § 3. gezeigt wurde, diejenige Zahl, welche wir die „Werthigkeit" des Punktes $x = y$ genannt haben, unabhängig davon, ob man den Punkt x oder den Punkt y als den gegebenen, unabhängig veränderlichen betrachtet. Diese Bemerkung lässt sich in folgender Weise verallgemeinern:

Wenn vermöge einer Correspondenz zwischen zwei Punkten x und y einer Curve f unter den einem Punkte x' entsprechenden Punkten y ein i-werthiger Punkt y', d. h. ein solcher Punkt vorkommt, in welchem i einfache Punkte vereinigt liegen, so ist — sofern die Lage des i-werthigen Punktes y' mit der von x' als continuirlich veränderlich vorausgesetzt wird — umgekehrt unter den dem Punkt y' entsprechenden Punkten x der Punkt x' ebenfalls als ein i-werthiger zu rechnen.

10. Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes leicht für den Fall, dass f eine Gerade ist. Denn die einander entsprechenden Parameter x und y der Punkte einer Geraden lassen sich als Coordinaten einer Curve auffassen, welche, wenn einem jeden Punkt x i gleiche Werthe y (ausserdem noch andere Werthe y) entsprechen sollen, eine i-fache Curve als Bestandtheil besitzt. Vermöge dieser Curve entspricht dann umgekehrt jedem Werth von y' das zugehörige x' i-fach.

Dieser Betrachtungsweise kann, wie dies ähnlich Herr Zeuthen that (diese Annalen Bd. III., S. 151), eine allgemeinere Fassung gegeben werden, indem man an Stelle der Coordinaten zwei Geradenbüschel einführt. Wir wollen gleich an den allgemeineren Fall einer beliebigen Curve f anschliessen und ausserhalb derselben zwei beliebig gelegene Punkte A und B annehmen, von deren einem A im Strahl X nach einem Punkte x von f gezogen werden möge. Sucht man die zu x und den übrigen Schnittpunkten von X mit f gehörigen Punkte y und verbindet jeden derselben mit B durch einen Strahl Y, so bilden, wenn x sich bewegt, die Schnittpunkte der Strahlen X, Y eine Curve C, welche als genau dieselbe entstanden wäre, wenn man die zu den Strahlen Y gehörigen Strahlen X aufgesucht und mit diesen geschnitten hätte. Entspricht nun einem Punkte x' von f unter anderen auch ein i-werthiger Punkt y', der seine Lage continuirlich ändert, wenn x' dieselbe ändert, so enthält die Curve C eine i-fache Curve als Bestandtheil, vermöge deren denn auch umgekehrt der Strahl X' dem Strahle Y' i-fach entspricht. Weil nun aber die Lage der Scheitel A, B der Strahlenbüschel beliebig ist, so lässt sich das, was von dem einem Punktepaare x', y' entsprechenden Strahlenpaare $X'Y'$ gilt, auf die Punkte $x'y'$ von f selbst übertragen, welche somit die Eigenschaft besitzen, einander *wechselweise* i-werthig zu entsprechen, q. e. d.

11. Durch die vorstehenden Betrachtungen rechtfertigt es sich, wenn wir in der Folge bisweilen unsymmetrisch verfahren, indem wir

den Punkt y als den unabhängig veränderlichen ansehn. Die so abgeleiteten Eigenschaften einer Correspondenz können nach Obigem keine anderen sein, als man sie erhalten haben würde, wenn man den Punkt x als den unabhängig veränderlichen angesehn hätte. Fällt insbesondere ein i-werthiger Punkt y' mit x' selbst zusammen, so hat man den oben (§ 3.) betrachteten Fall. Der Beweis desselben hätte einer kleinen Modification bedurft, wenn man noch die Punkte A und B als vereinigt gelegen angenommen hätte. Diese Modification, auf welche, mit Bezug auf § 1. der oben erwähnten Abhandlung im VI. Bande dieser Annalen (s. d. Druckfehlerverzeichniss zum VI. Bande), Herr Zeuthen mich aufmerksam gemacht hat, findet man leicht durch geometrische Interpretation der oben in § 3. angestellten algebraischen Betrachtung. Uebrigens lässt sich, wie bereits erwähnt, die besondere Untersuchung dieses Falls durch Annahme getrennter Lage der Punkte A, B vermeiden.

Es möge hier noch hervorgehoben werden, dass der oben (§ 9.) ausgesprochene Satz ohne Weiteres auf den von Herrn Zeuthen a. a. O. untersuchten Fall, wo die einander entsprechenden Punkte x und y auf *verschiedenen* Curven f und F gelegen sind, übertragen werden kann.

12. Hat man nun eine Correspondenz mit mehrwerthigen Punkten $\Phi(xy)$ gegeben, vermöge deren jedem Punkte x der Curve f λ' (nicht in x fallende) i'-werthige Punkte y', λ'' i''-werthige Punkte y'' u. s. w. auf f und endlich ein Γ-werthiger Punkt in x selbst entsprechen, so ist die Gesammtzahl aller einem Punkte x entsprechenden Punkte y gleich zu rechnen:

$$\Gamma + i'\lambda' + i''\lambda'' + \cdots = \Gamma + \Lambda$$

einwerthigen Punkten, von denen Λ nicht in x fallen. Die Gesammtzahl der einem Punkte y entsprechenden Punkte x findet man in folgender Weise. Man bestimme die Zahl $\varkappa'$ derjenigen Lagen des Punktes x, welchem der Punkt y als i'-facher Punkt y' entspricht; dann entsprechen diese, nach dem obigen Satz, dem Punkte y je als i'-werthige Punkte x'. Aehnlich bestimme man die Anzahl der dem Punkte y entsprechenden i''-werthigen Punkte x'' u. s. w. Die Gesammtzahl der einem Punkte y entsprechenden Punkte x ist alsdann gleich zu rechnen:

$$\Gamma + i'\varkappa' + i''\varkappa'' + \cdots = \Gamma + \mathrm{K}$$

einfachen Punkten.

13. Auch die Coincidenzen einer solchen Correspondenz sind verschiedenartig. Rückt nämlich von den einem Punkte x entsprechenden λ' i'-werthigen Punkten y' ein solcher in den Punkt x herein (abgesehen von dem in $y = x$ schon vorhandenen Γ-fachen Punkt), so

ist diese Coincidenz offenbar für i' Coincidenzen einfacher Punkte zu zählen. Giebt es P' solcher Coincidenzen, ferner P'' Coincidenzen von i''-werthigen Punkten y'' mit x u. s. w., so sind die sämmtlichen Coincidenzen äquivalent:

$$P = i'P' + i''P'' + \cdots$$

Coincidenzen einwerthiger Punkte.

Durch die vorstehenden Erörterungen ist die Correspondenz Φ auf eine solche mit einwerthigen Punkten zurückgeführt. Wendet man die für eine solche aufgestellte Correspondenzformel auf sie an, so erhält man die Gleichung:

$$P = \mathsf{K} + \Lambda + 2p\Gamma,$$

oder:

$$i'(P' - \varkappa' - \lambda') + i''(P'' - \varkappa'' - \lambda'') + \cdots = 2p\Gamma.$$

Dies ist aber eben die von Cayley angegebene Formel (Comptes rendus, T. LXII, 1866).

14. Mit Hülfe der in § 12. gemachten Bemerkungen lässt sich umgekehrt der Grad derjenigen Gleichung in den Coordinaten der Punkte x und y, welche die Beziehung auf der Curve f vermittelt, bestimmen. Dies möge an dem Beispiel der durch die Tangenten von einem Punkt x der Curve hergestellten Correspondenz ausgeführt werden.

Die Curve f sei von der m. Ordnung. — Dem Punkte x entsprechen:

1) die $m(m-1)-2$ Berührungspunkte y' der Tangenten des durch x gehenden Büschels (je doppelt zu rechnen);
2) die $(m-3)\{m(m-1)-2\}$ übrigen Schnittpunkte y'' dieser Tangenten;
3) der $[m(m-1)-2]$-fache Punkt in x selbst.

Die Summe aller ist:

$$m\{m(m-1)-2\}$$

einfachen Punkten äquivalent; der Grad der betreffenden Correspondenzgleichung in den Coordinaten von y also gleich:

$$m(m-1)-2.$$

Ferner entsprechen einem Punkte y:

1) sofern derselbe als Berührungspunkt einer Tangente (also ein Punkt y') aufgefasst wird: die $m-2$ übrigen Schnittpunkte x', je 2-fach zu rechnen;
2) sofern derselbe einfacher Schnittpunkt einer Tangente (y'') sein kann: die $(m-3)\{m(m-1)-2\}$ einfachen Schnittpunkte x'' der Tangenten des Büschels durch y; je einfach.
3) ein $[m(m-1)-2]$-facher Punkt in y selbst.

Die Summe ist:

$$m(m-1)(m-2)$$

einfachen Schnittpunkten äquivalent, woraus hervorgeht, dass der Grad der Correspondenzgleichung hinsichtlich der Coordinaten des Punktes y ansteigt auf:

$$(m-1)(m-2).$$

15. Ein in mehrfacher Hinsicht bemerkenswerthes Beispiel einer Correspondenz Φ mit mehrwerthigen Punkten ist diejenige, welche sich aus zwei Correspondenzen: $(\varkappa, \lambda)$ mit einem γ-fachen, und $(\varkappa', \lambda')$, mit einem γ'-fachen Punkt in $x=y$ (denen ein Punktepaar x, y zugleich genügen soll) zusammensetzt, und zu einer Bestimmungsgleichung für $(\varphi\varphi')$ (vgl. § 8.) führt. Vermöge $(\varkappa, \lambda)$ entsprechen nämlich einem Punkte x λ Punkte y, deren jedem wiederum vermöge $(\varkappa', \lambda')$ $\varkappa'$ Punkte, die wir nun als y'' bezeichnen wollen, entsprechen. Jedem von diesen entsprechen rückwärts λ' Punkte (x'), deren jedem wiederum $\varkappa$ Punkte (x'') entsprechen. Alsdann ist $(\varphi\varphi')$ die Anzahl der Coincidenzen von Punkten y'' mit x. Die dem Punkt x entsprechenden Punkte y' sind je γ'-werthige Punkte, während die y'' einwerthig sind. Ist noch P die Anzahl der Coincidenzen der Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$, so erhält man unter Anwendung der erweiterten Correspondenzformel (§ 13.):

$$\gamma'(P-\varkappa-\lambda)+1\cdot((\varphi\varphi')-\varkappa\lambda'-\lambda\varkappa')=2p\cdot 0=0.$$

Dies ist aber die in § 6. auf anderem Wege abgeleitete Formel für $(\varphi\varphi')$.

III. Correspondenzen mit theilweise festen Punkten. Doppel- und Rückkehrpunkte der gegebenen Curve.

16. Mit Rücksicht darauf, dass, wie man soeben gesehn, eine Correspondenz mit mehrwerthigen Punkten als ein besonderer Fall einer solchen mit einwerthigen aufgefasst werden kann, knüpfen wir die folgenden Betrachtungen an die leichter zu übersehende Correspondenz mit einwerthigen Punkten an. Die Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$ mit einem γ-werthigen Punkt in $x=y$ dachten wir uns oben (§ 1.) durch eine Gleichung $\varphi(x, y)=0$ zwischen den Coordinaten der Punkte x und y gegeben. Wenn nun die Curve f keine Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt, und die Curven (x) und (y), von der K. und L. Ordnung, welche die $\varkappa=K\cdot m-\gamma$ einem Punkte y entsprechenden Punkte x, bez. die $\lambda=L\cdot m-\gamma$ einem Punkte x entsprechenden y ausschneidet, alle mit x, bezw. y, beweglich sind, so liegen die P Coincidenzpunkte von $(\varkappa, \lambda)$ auf einer Curve C, deren Gleichung man aus $\varphi=0$ erhalten würde, wenn man darin die Coordinaten von x und y unendlich wenig verschieden annähme. Wir können indess ohne diese algebraische Operation den Grad dieser Curve C der Coincidenzpunkte vermittelst des Ausdrucks für P bestimmen, wenn wir darin die Zahlen $\varkappa$, λ und p durch m, γ, K und L ausdrücken:

$$P = \varkappa + \lambda + 2p\gamma = m\,\{K + L + \gamma\,(m-3)\} = m \cdot \Pi\,,$$

und berücksichtigen, dass diese P Punkte ein vollständiges Schnittpunktsystem auf f bilden müssen. Man erhält somit für den Grad von C die Zahl:

$$\Pi = K + L + \gamma\,(m-3).$$

17. Die Zahl Π bleibt die nämliche, wenn man für f eine Curve mit Doppel- und vielfachen Punkten nimmt, durch welche, ebenso wie durch feste einfache Punkte von f, die Curven (x) und (y) noch beliebig hindurch gehn können. Denn durch Specialisirung der Constanten in den Gleichungen für die Curve f und die Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$ wird der Grad der Curve C nicht geändert. Irgend einem Punkte y der Curve f entsprechen dann ausser den γ in ihn selbst entfallenden Punkten:

a) $\varkappa$ mit y bewegliche Punkte;

b) die in *festliegende* einfache oder mehrfache Punkte A, A', ... von f entfallenden Schnittpunkte der Curven (x) und (y) mit f. — Die Punkte A, A' .... mögen „*Ausnahmepunkte*" von f heissen.

Demgemäss findet nun eine Coincidenz statt in folgenden Fällen:

1) Wenn einer der $\varkappa$ beweglichen einem Punkte y entsprechenden Punkte x (oder auch: einer der λ einem Punkte x entsprechenden Punkte y, vgl. § 10.) diesem Punkt auf *demselben* Curvenzweig unendlich nahe gelegen ist. Dieser Art sind alle Coincidenzen, welche eintreten, wenn f keine Ausnahmepunkte besitzt. Wir wollen dieselben im Gegensatz zu allen anderen, für welche eine jener Eigenschaften nicht vorhanden ist, *eigentliche Coincidenzen nennen.* Für eine gegebene Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$ sei die Anzahl derselben $= P'$.

2) Wenn einer der Ausnahmepunkte A mit y zusammenfällt, d. h. wenn y in einen solchen hereinrückt. — Diese Coincidenzen sind uneigentliche, wenn von den $\varkappa$ beweglichen Punkten x, welche dem in A liegenden Punkte y entsprechen, keiner in A hereinfällt. Tritt dieser Fall indess für irgend einen Ausnahmepunkt A ein, so kann es sich ereignen, dass in diesen *Ausnahmepunkt eigentliche* Coincidenzen zu liegen kommen:

I. Wenn von den $\varkappa$ Punkten x, welche einem auf einen bestimmten Zweige von A angenommenen Punkte y entsprechen, einige auf *denselben* Zweige, auf welchem y liegt, zurückfallen. (Beispiele § 23. unten.)

II. Wenn jener Ausnahmepunkt A ein vielfacher Punkt mit theilweise *zusammenfallenden* Zweigen, z. B. ein Rückkehrpunkt ist. Zwei in einem solchen Punkt von f vereinigte Punkte der Correspondenz sind nicht nur als unendlich benachbart, sondern auch als auf demselben Curvenelemente unendlich benachbart anzusehn, und bilden somit eine eigentliche Coincidenz.

Die unter I. und II. aufgezählten, in Ausnahmepunkte entfallenden eigentlichen Coincidenzen mögen vereinigt und ihre Summe durch ϱ bezeichnet werden. Diese ϱ Coincidenzen sind dann unter der obigen Zahl P' mit inbegriffen. Es möge demnach $P' - \varrho = P$ gesetzt werden.

Endlich möge noch Q die Summe aller *uneigentlichen* Coincidenzen von $(\varkappa, \lambda)$ darstellen.

Aus § 16. folgt dann, dass die Gleichung besteht:

$$P + Q + \varrho = m \cdot \Pi,$$

aus welcher sich die Zahl $P = P' - \varrho$ der *eigentlichen, nicht in Ausnahmepunkte entfallenden Coincidenzen* bestimmen lässt, wenn man Q und ϱ kennt.

Es möge zunächst die Anzahl Q der uneigentlichen Coincidenzen ermittelt werden.

19. In einen einfachen Ausnahmepunkt A von f möge für jede Lage von y eine Anzahl σ der diesem Punkt entsprechenden Schnittpunkte der Curve (x) entfallen; während von den einem Punkte x entsprechenden Punkten τ in A fallen mögen (wo τ und σ auch Null sein können).

Rückt nun der Punkt y in A, so entspricht ihm einmal der Punkt A σ-fach, weiter aber entspricht ihm die ganze Curve f τ-fach, weil er selbst jedem Punkt x dieser Curve τ-fach entspricht, und man hat somit:

$$\sigma + \tau$$

in A entfallende Coincidenzen*).

20. Aehnlich ermittelt man die Anzahl der in einen Doppelpunkt oder einen vielfachen Punkt von f entfallenden Punkte der Curve C. Man nehme zunächst an, dass für eine gegebene Correspondenz die Werthigkeit γ des Punktes $x = y$ Null sei, und dass in einem Doppelpunkt A' von f jede Curve (x) einen σ'-werthigen, jede Curve (y) einen τ'-werthigen Schnittpunkt besitze. Deformirt man nun die Correspondenz ein wenig, so dass die τ' vorher in A' entfallenden Punkte der Curve (y), welche irgend einem Punkte x entsprechen, nicht mehr

*) Diese Coincidenzen gehören nicht in die Kategorie der eigentlichen Coincidenzen, weil sie nicht dadurch entstanden sind, dass einer der $\varkappa$ beweglichen dem Punkte A entsprechenden Punkte x in diesen herein gerückt ist. Für $\tau = 0$ erkennt man dies direct; ist aber τ von Null verschieden, so kann man überhaupt nicht mehr von $\varkappa$ discreten dem Punkt A entsprechenden Punkten x reden, weil die ganze Curve f an deren Stelle getreten ist.

in A' selbst, sondern nur dem Punkte A' nahe benachbart fallen, so entspricht irgend einem von diesen τ' Punkten die ganze Curve f selbst einfach (wie im vorstehenden §), gehtt also y auf dem Weg zum Doppelpunkt durch einen solchen hindurch, so erhält man auf die oben (ibd.) erörterte Weise eine einfache Coincidenz; es ergeben sich so τ' Coincidenzen, zu welchen noch die σ' Coincidenzen kommen, welche eintreten, wenn y den Punkt A' selbst passirt, so dass im Ganzen in A': $\sigma' + \tau'$ Coincidenzen fallen. Geht man nun zu einer Correspondenz über, welche in A' sich ebenso wie die oben besprochene verhält, ausserdem aber in $x = y$ einen γ-werthigen Punkt besitzt, so kommen zu jenen $\sigma' + \tau'$ in A' entfallenden Coincidenzen noch die 2γ weiteren hinzu, welche durch Zusammenfallen je eines Zweiges des Doppelpunktes mit den auf den anderen Zweig entfallenden γ Schnittpunkten eintreten, und man hat im Ganzen:

$$\sigma' + \tau' + 2\gamma$$

in einen Doppelpunkt entfallende (uneigentliche) Coincidenzen*). Man findet auf demselben Wege die Anzahl der einem i-fachen Punkte A'' von f entsprechenden Coincidenzen, wenn σ'', bez. τ'' Schnittpunkte der Curven (x) und (y) in ihn entfallen, gleich:

$$\sigma'' + \tau'' + i\,(i - 1)\,\gamma.$$

21. Haben also vermöge einer Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$ (die übrigens nicht blos einwerthige, sondern auch beliebig vielwerthige Punkte besitzen kann) die Curven (x) und (y) in irgend einem festen i-fachen („Ausnahme"-)Punkte A von f $(i = 1, 2, \cdots)$ bezw. einen σ- und τ-werthigen Schnittpunkt, und ist die Anzahl der beweglichen einwerthigen Punkte, welche einem Punkt y, bez. x entsprechen (mehrwerthige denke man sich in einwerthige zerlegt):

$$\varkappa = m \cdot K - \Sigma\sigma - \gamma\,; \quad \lambda = m \cdot L - \Sigma\tau - \gamma\,,$$

wo das Zeichen Σ die Summe über die *allen* Ausnahmepunkten ent-

*) Die $\sigma' + \tau'$ ersteren Coincidenzen sind uneigentliche aus dem in der vorhergehenden Note angeführten Grunde; die 2γ anderen sind gleichfalls solche, und zwar nicht nur für den Fall, dass A' ein Doppelpunkt mit getrennten Tangenten ist, sondern auch noch, wenn derselbe ein Rückkehrpunkt ist. Man erkennt das Letztere am besten an dem besonderen Fall, wo $\tau' = 0$, σ' aber von Null verschieden ist, für welchen im Allgemeinen keiner von den $\varkappa$ dem Punkte A' entsprechenden Punkten x in denselben hereinfällt, so dass also die eine Bedingung der eigentlichen Coincidenz unerfüllt bleibt. — Wenn für $\sigma' = \tau' = 0$ γ von den $\varkappa$ dem Punkt A entsprechenden Punkten in A zurückfallen, wodurch dann, wenn A ein Rückkehrpunkt ist, γ eigentliche Coincidenzen entstehn, so muss man hiernach annehmen, dass dieselben zu jenen 2γ uneigentlichen Coincidenzen *hinzugetreten* sind, was sich in der That in einzelnen Fällen leicht nachweisen lässt. — Eine Bestätigung der obigen Schlüsse gewährt übrigens die Bemerkung in § 22.

sprechenden Zahlen bedeutet, so ist die Anzahl aller uneigentlichen Coincidenzen nach Vorstehendem:

$$Q = \Sigma\sigma + \Sigma\tau + \gamma \cdot \Sigma i(i-1),$$

wo die letzte Summe Σ sich über alle Ausnahmepunkte von f erstreckt. Substituirt man diesen Werth von Q in die Gleichung des § 18., so erhält man, indem man noch den Ausdruck für Π einsetzt:

$$P = m \cdot \Pi - Q - \varrho = \varkappa + \lambda + 2p\gamma - \varrho,$$

wo:

$$p = \tfrac{1}{2} m (m-3) + 1 - \Sigma \tfrac{1}{2} i (i-1)$$

das Geschlecht der Curve f ist. Man hat ferner für *die Anzahl P' aller eigentlichen* (§ 17.) *Coincidenzen:*

$$P' = \varkappa + \lambda + 2p\gamma,$$

also genau die frühere Correspondenzformel (§ 7.), während P die Anzahl derjenigen eigentlichen Coincidenzen bedeutet, welche nicht in Ausnahmepunkte von f fallen. Um P aus der Correspondenzformel (P') zu erhalten, hat man eine *Reduction* ϱ an derselben anzubringen, welche sich aus den wegen der einzelnen Ausnahmepunkte anzubringenden Reductionen zusammensetzt. Die letztere aber findet man (§ 18.), *indem man die Anzahl derjenigen von den $\varkappa$ einem Ausnahmepunkte A entsprechenden einwerthigen Punkten x bestimmt, welche in A zurückfallen* (und zwar für einen vielfachen Punkt A mit getrennten Zweigen auf *denselben* Zweig, auf welchem y angenommen wurde). Dies ist (für jeden Zweig von A und) für alle Ausnahmepunkte A auszuführen. Die Summe der so erhaltenen Zahlen ist ϱ. — Insbesondere für *Rückkehrpunkte* gilt diese Regel ohne den in Klammern zugefügten Vorbehalt.

An Stelle der Correspondenzformel des § 7. (für P') tritt die des § 13., wenn die Correspondenz ($\varkappa$, λ) durch eine solche mit mehrwerthigen Punkten ersetzt wird. Die Regel für Bestimmung der Reduction ϱ bleibt aber die nämliche auch für diesen Fall.

22. Handelt es sich in den Fällen der Anwendung meist um den Werth des reducirten Ausdrucks P, so lässt sich doch auch dem Ausdruck P' ein nicht unwichtiger geometrischer Sinn unterlegen. Jede Correspondenz behält nämlich offenbar ihre Bedeutung für alle durch eindeutige Transformation aus einander ableitbaren Curven, sowohl was die Zahlen $\varkappa$, λ, γ, als auch was die Gesammtzahl P' der *eigentlichen* Coincidenzen angeht. Denn die Eigenschaft zweier Punkte, auf demselben Curvenelement von f unendlich nahe benachbart zu liegen, ist eine durch eindeutige Transformation unzerstörbare, ob dieses Element nun ein *einfaches* Curvenelement von f ist, oder mit anderen Elementen zu einem vielfachen Punkt von f vereinigt, oder endlich in

einen Rückkehrpunkt von f umgefaltet ist. Man muss also schliessen, dass eine z. B. in einen Rückkehrpunkt A von f entfallende *eigentliche* Coincidenz bei einer eindeutigen Transformation von f, durch welche der Rückkehrpunkt zerstört wird (was immer möglich ist, indem man die Transformationscurven durch A gehn lässt), in eine eigentliche Coincidenz der gewöhnlichen Art auf der transformirten Curve übergeht. Dies war aus anderen Gründen zu erwarten.

23. Wie sich die wegen vorhandener Doppel- oder Rückkehrpunkte der Curve f an der Formel für P' anzubringende Reduction in einzelnen Fällen gestaltet, möge im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden. Die auch sonst bemerkenswerthen Beispiele d) und f) verdanke ich einer Mittheilung meines Collegen Sturm.

a) Die Correspondenz $(m-1, m-1)_1$ *) zwischen je 2 Schnittpunkten x und y einer Curve f (von der Ordnung m und dem Geschlecht p) und einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt B ausserhalb f geht, hat zu Coincidenzpunkten die $2m+2p-2$ Berührungspunkte der Tangenten des Geradenbüschels durch B. Ein Doppelpunkt A, welchen f besitzt, verändert diese Zahl nicht, weil, wenn der Punkt y in A rückt, von den ihm entsprechenden $\varkappa = m-1$ (im Allgemeinen nicht in y fallenden) Punkten x nur einer wieder in den Doppelpunkt A, und zwar auf den anderen Zweig desselben fällt. Dagegen bringt jeder Rückkehrpunkt, aus den (§ 21.) angeführten Gründen, eine Reduction um 1 hervor. Die Zahl der nicht in Ausnahmepunkte von f entfallenden eigentlichen Coincidenzen ist also, wenn f β Rückkehrpunkte besitzt:

$$P = 2m + 2p - 2 - \beta.$$

b) Die Anzahl der von einem Doppelpunkt A aus an die Curve f construirbaren Tangenten ist $2m+2p-8$. Sie berühren in den Coincidenzpunkten einer Correspondenz $(m-3, m-3)_1$ zwischen den Schnittpunkten einer beliebig durch A gelegten Geraden mit f. Diese Zahl erfährt keine Reduction, wenn A in einen Rückkehrpunkt übergeht; denn von den ihm als Punkt y entsprechenden $\varkappa = m-3$ Punkten x (den übrigen Schnittpunkten der Rückkehrtangente in A') fällt keiner in A zurück.

c) Die von Jonquières (Borchardt's Journal Bd. 66) und Cayley (Transact. R. Soc. Vol. 158) aufgestellten Formeln für die Anzahl der eine gegebene Curve f berührenden Curven, welche noch gewissen äusseren Bedingungen unterliegen, stimmen mit den (diese Annalen

*) Hier wie in den folgenden Beispielen möge der Kürze wegen für eine Correspondenz, die (§ 7.) durch die Klammer $(\varkappa, \lambda)$ charakterisirt wird, die Werthigkeit γ des Punktes $x = y$ als unterer Index beigefügt werden: $(\varkappa, \lambda)_\gamma$.

Bd. IV, S. 548, und Bd. VI, S. 46 ff.) von mir aufgestellten Formeln überein, obgleich an letzterer Stelle jene Bedingungen theilweise ersetzt sind durch die, dass die Curven noch durch die Doppelpunkte von f gehn sollen. Es geht daraus hervor, dass Doppelpunkte von f eine besondere Reduction ϱ an jenen Formeln für die Anzahl der Berührungscurven in keinem Falle veranlassen. Rückkehrpunkte bewirken nur dann eine Reduction, wenn die Schaar der Berührungscurven nicht durch sie hindurchgeht. — Man verificirt dies leicht mit Hülfe der oben angegebenen Regeln.

d) Sind 2 ebene Curven A und B eindeutig auf einander bezogen, so dass jedem Punkt von A eine Tangente von B entspricht und umgekehrt, so ist die Anzahl derjenigen Punkte von A, durch welche je die entsprechende Tangente durchgeht, gleich der Anzahl der Coïncidenzen einer Correspondenz $(m, r)_0$ zwischen einem Punkt y von A und den m Schnittpunkten x von A mit der dem y entsprechenden Tangente von B. Diese Zahl ist aber gleich $m+r$, wenn m der Grad von A und r die Classe von B bedeutet. Weder Doppel- noch Rückkehrpunkte sind hierbei von Einfluss. — Hat man die nämliche Beziehung zwischen 2 Raumcurven A und B, *so wird die Classe der abwickelbaren Fläche, welche die durch entsprechende Elemente* (Punkt von A und Tangente von B) *gelegten Ebenen umhüllen, ebenfalls* $=m+r$ *sein*, wenn m und r ihre Bedeutung auch für die Raumcurven behalten. — Denn durch Projection derselben auf eine beliebige Ebene erhält man die vorige Beziehung.

e) Schneiden die Curven eines einfach unendlichen Curvenbüschels B (welches beliebig einfache oder Doppel- und Rückkehrpunkte von f zu Basispunkten besitzen mag) die Curve f in M beweglichen Punkten, so besteht zwischen je zweien dieser Punkte eine Correspondenz $\varphi=(M-1, M-1)_1$. Ist noch ein anderes Büschel B' gegeben, das in M' beweglichen Punkten schneidet und zu einer Correspondenz $\varphi'=(M'-1, M'-1)_1$ Veranlassung giebt, so ist die Anzahl der den Beiden gleichzeitig angehörenden Punktepaare (wegen des symmetrischen Verhaltens beider Correspondenzen, vgl. § 7.):

$$\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') = (M-1)(M'-1) - p\,.$$

Man hätte diese Punkte aber auch im Sinne des § 15. als Coincidenzpunkte einer Correspondenz Φ auffassen können, welche besteht zwischen einem Punkt y von f und: 1) den $M-1$ Punkten x, welche vermöge φ dem y entsprechen; 2) den $(M-1)(M'-1)$ Punkten x', von denen vermöge φ' je $M'-1$ einem jener Punkte x entsprechen. — Man kann diese Auffassung zur Berechnung der Reduction benutzen, welche durch die d Doppel- und β Rückkehrpunkte von f, die nicht Basispunkte der Büschel B und B' sind, veranlasst wird. Lässt man nämlich den Punkt y auf einen Zweig eines Doppelpunktes A von f rücken, so entspricht ihm ausser $M-2$ ausserhalb A gelegenen Punkten x ein Punkt x auf dem anderen Zweig, während einer der diesem entsprechenden $M'-1$ Punkte x' auf den Zweig zurückfällt, auf dem y liegt. Die Coincidenz x' mit y ist demnach eine eigentliche; zu ihr gehört die Coincidenz auf dem anderen Zweig (wegen des eigenthümlichen Verhaltens der gegebenen Correspondenz gruppiren sich die Coincidenzen je zu Paaren, welche aus Gründen der Symmetrie doppelt auftreten), und die Zahl der gesuchten Paare ist:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') - d - \beta = (M-1)(M'-1) - p - d - \beta,$$

wo noch β einfach in Abzug gebracht worden ist, weil Doppel- und Rückkehrpunkte im vorliegenden Falle sich nicht verschieden verhalten.

f) Gegeben sei wie in e) ein einfach unendliches Büschel, das in M beweglichen Punkten, worunter die Punkte x und y sich befinden mögen, die Curve f schneidet. Es soll die Anzahl derjenigen Paare von Schnittpunkten x, y bestimmt werden, welche in Bezug auf einen beliebig gegebenen Kegelschnitt polar gelegen sind. Ein solches Paar muss zugleich den beiden Correspondenzen: $\varphi = (M-1, M-1)_1$ und $\varphi' = (m, m)_0$ (die letztere zwischen einem Punkt y von f und den m Schnittpunkten x der Polaren zu y) genügen. Man erhält so:

$$\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi') = m(M-1)$$

für die Anzahl der gesuchten Paare. Diese Zahl erfährt weder durch Doppel- noch durch Rückkehrpunkte eine Reduction, indem eigentliche Coincidenzen in den Ausnahmepunkten nicht vorhanden sind.

Darmstadt, im Februar 1874.

Ein Beweis des Additionstheorems für die hyperelliptischen Integrale.

Von Ad. Schumann in Berlin.

Der Abel'sche Satz, dass eine Summe von hyperelliptischen Integralen dritter Gattung mit dem Parameter t sich als eine bestimmte logarithmische Function dieses Parameters darstellen lasse, führt umgekehrt auf den Gedanken, aus der Natur der logarithmischen Function ihre Darstellung durch Integrale herzuleiten, in denen das Argument der Function als unabhängiger Parameter der Integrale erscheint. Eine derartige Darstellung liefert im Allgemeinen die Theorie complexer Variabelen, welche eine in einem bestimmten Gebiete einläufige und stetige Function durch ein über die Grenzen jenes Gebietes sich erstreckendes Integral ausdrücken lehrt, welches als Parameter das Argument der Function enthält. Indem ich diesen Ideengang verfolge, hat der Beweis, welchen ich für das Additionstheorem der hyperelliptischen Integrale gebe, jene Theorie zur Grundlage und ist wesentlich aus einer charakteristischen Eigenschaft der logarithmischen Function geschöpft. Sobald die gesuchte Darstellung gewonnen und das Theorem für die dritte Gattung von hyperelliptischen Integralen zum Ausdruck gebracht ist, setzt eine Vergleichung der Coefficienten der beiden Reihen, in welche sich die Function und ihre Darstellung entwickeln lässt, das Theorem für die erste und zweite Gattung unmittelbar in Evidenz. Sucht man, von demselben Gesichtspunkt ausgehend, das Additionstheorem für die allgemeinsten Formen Abel'scher Integrale herzuleiten, so wird man im Wesentlichen auf die Beweisform geführt, welche Clebsch und Gordan in ihrem Werk „Theorie der Abel'schen Functionen" gegeben haben. Gleichwohl, hoffe ich, wird der Beweis, welchen ich vorlege, gerade weil er durch Beschränkung auf die hyperelliptischen Integrale sich so überaus einfach und durchsichtig gestaltet, den Lesern dieses Journals nach Inhalt und Form einiges Interesse bieten.

§ 1.

Es sei $\eta^2 = (z - a_1)(z - a_2) \cdots\cdots (z - a_{2\varrho+2})$ eine ganze rationale Function von geradem Grade; der Fall, in welchem η^2 eine ganze rationale Function von ungeradem Grade ist, wird in der Folge auf jenen zurückgeführt werden. Ferner seien M und N ganze rationale Functionen von z dergestalt, dass die Function $M + N\eta$ für $z = \infty$ von der n^{ten} Ordnung unendlich wird; ausserdem gelte die Beschränkung, dass M und η^2 keine gemeinschaftliche Wurzel haben. Die Werthe von z, welche den beiden Gleichungen

$$\eta^2 = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_{2\varrho+2})$$

und $M + N\eta = 0$ genügen, sind Wurzeln der Gleichung $M^2 - \eta^2 N^2 = 0$. Sollte diese Gleichung gleiche Wurzeln haben, so denke man die Coefficienten in M und N so geändert, dass dieser Fall zunächst vermieden werde. Jede Wurzel z_μ der Gleichung wird entweder den Factor $M + N\eta$ oder $M - N\eta$ zu Null machen, so dass jeder Wurzel z_μ ein Werth η_μ adjungirt ist, je nachdem jener Factor oder dieser verschwindet. Inwieweit von den gemachten Voraussetzungen Abstand genommen werden darf, wird nach erfolgter Darlegung des Theorems klar liegen; vorläufig möge zur Vereinfachung der Darstellung daran festgehalten werden.

Nach diesen Vorbemerkungen beschränke man die Vieldeutigkeit der Function $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M + N\eta}{M - N\eta}$ in folgender Weise. Man nehme einen Punkt o an, von dem aus alle singulären Punkte, sowohl diejenigen, für welche die Function logarithmische, als auch diejenigen, für welche sie algebraische Unstetigkeiten zeigt, nach verschiedenen Richtungen liegen, und setze voraus, dass die singulären Punkte $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+2}$ in der Ordnung mit Indices versehen seien, wie sie in Richtung der wachsenden Winkel einander folgen. Alsdann wähle man für ein Argument z im Bereich von $a_{2\varrho+2}$ einen bestimmten Werth $+\eta$ und denjenigen Logarithmus, welcher, ohne dass z aus dem Bereich dieses Punktes herausgetreten ist, für $a_{2\varrho+2}$ verschwindet; unter dem Bereich des Punktes $a_{2\varrho+2}$ sei aber eine Kreisfläche um $a_{2\varrho+2}$ verstanden, welche sich bis zum nächstgelegenen singulären Punkt ausdehnt. Bei dieser Annahme ist der Punkt $a_{2\varrho+2}$ für jedes Gebiet der z Fläche, welches ausser $a_{2\varrho+2}$ keinen singulären Punkt enthält, seiner Singularität für die Function $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M + N\eta}{M - N\eta}$ entkleidet; denn in hinlänglicher Nähe von $a_{2\varrho+2}$ lässt sich die Function durch die Reihe $2\left\{\frac{N}{M} + \frac{\eta^2}{3}\left(\frac{N}{M}\right)^3 + \frac{\eta^4}{5}\left(\frac{N}{M}\right)^5 + \cdots \text{ in inf.}\right\}$ darstellen, deren Werth bei einem Umlauf des Arguments um $a_{2\varrho+2}$ sich nicht ändert und für $z = a_{2\varrho+2}$ den eindeutigen endlichen Werth $2\,\frac{N(a_{2\varrho+2})}{M(a_{2\varrho+2})}$ annimmt. Jenes Gebiet, in welchem die Function nunmehr eindeutig definirt ist, lässt sich bis zu folgenden Grenzen ausdehnen. Man umgebe jeden der singulären Punkte $a_1 a_2 \cdots\cdots a_{2\varrho+1}$, sowie jede der $2n$ Wurzeln $z_1 z_2 \cdots\cdots z_{2n}$ durch Linien, welche vom Punkte o geradlinig nach dem singulären Punkte ausgehen, diesen in einem kleinen Kreise umschliessen und alsdann geradlinig nach dem Punkte o zurücklaufen. Gestattet man der unabhängigen Variabeln nur solche Wege, welche jene Linien nicht schneiden, so wird bei jedem geschlossenen Wege die Function zu ihrem Anfangswerth zurückkehren; die Function wird also, da der Punkt $z = \infty$ keine Singularität aufweist, in dem ganzen Gebiete T der z-Ebene einläufig und stetig sein, welches ausserhalb jener Linien gelegen ist. Jede einzelne Linie, welche zum Zweck der Ausschliessung eines singulären Punktes verzeichnet ist, möge Schleife des singulären Punktes heissen.

Nun sei z_μ eine Wurzel von $M + N\eta$, und man lasse z auf dem kleinen Kreise, welcher z_μ umschliesst, in Richtung der wachsenden Winkel z_μ umlaufen. Da nach der Voraussetzung z_μ eine einfache Wurzel der Gleichung $M^2 - N^2\eta^2 = 0$ ist, und für z_μ die Functionen M und η nicht gleichzeitig verschwinden, so ist $M + N\eta$ um so mehr proportional mit $(z - z_\mu)$, je näher z an den Punkt z_μ herangeht, während z_μ für $M - N\eta$ keine Wurzel ist. Es wird demnach $\lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ um $2\pi i$ zunehmen und die oben betrachtete Function um $\frac{2\pi i}{\eta}$ wachsen. Wäre z_μ hingegen eine Wurzel von $M - N\eta$ gewesen, so würde die Function um $\frac{2\pi i}{\eta}$ abgenommen haben. So oft daher die Variabele die Schleife einer logarithmischen Unstetigkeit umläuft, nimmt die Function um $\pm \left(\frac{2\pi i}{\eta}\right)$ zu, je nachdem $M + N\eta$ oder $M - N\eta$ für das Argument z_μ zu Null wird.

Wenn man daher die Variabele auf zwei verschiedenen Wegen von dem Punkte $a_{2\varrho+2}$ aus nach dem Beginn des Schleifenkreises um a_1 gelangen lässt, auf einem, welcher geradlinig zu o und von da aus auf den Grenzen des T Gebietes in positiver Winkelrichtung entlang führt, und auf einem anderen, welcher von $a_{2\varrho+2}$ an geradlinig nach o, von da aus aber unmittelbar geradlinig zum Anfangspunkt des Schleifenkreises um a_1 sich fortsetzt, so werden sich die Werthe, welche die Function am Ende beider Wege annimmt, um $\frac{2\pi i}{\eta} q_1$ unterscheiden, wenn q_1 die Differenz zwischen der Anzahl der innerhalb des Winkelblatts $(a_{2\varrho+2}\, o\, a_1)$ gelegenen Wurzeln von $M + N\eta$ und $M - N\eta$ bezeichnet. Würde man daher den Functionswerth am Ende des ersten Weges durch $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta} + \frac{2\pi i}{\eta} p_1$ darstellen, wo der Logarithmus für $z = \lim a_1$ verschwinde, so würde der Functionswerth am Ende des zweiten Weges sich in der Form $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}(p_1-q_1)$ ausdrücken lassen. Die ersten Terme in diesen Functionswerthen ändern sich bei einem Umlauf um a_1 nicht, die zweiten dagegen wechseln ihr Zeichen. Setzt man daher voraus, dass allgemein eine Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$, deren Logarithmus für $z=\lim a_{\varkappa-1}$ verschwindet, auf einem Wege längs der Grenze des T-Gebietes am Beginn des Schleifenkreises von $a_\varkappa$ den Werth $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}p_\varkappa$ annehme, worin der Logarithmus für $z=\lim a_\varkappa$ zu Null wird, so muss die ursprünglich definirte Function, wenn die Variabele von $a_{2\varrho+2}$ aus geradlinig nach o und von da aus auf der Grenze des T-Gebietes in positiver Winkelrichtung nach $a_\varkappa$ läuft, einen Werth annehmen, der sich in der Form $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}(p_\varkappa-p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1)$ darstellen lässt, worin der Logarithmus für $z=\lim a_\varkappa$ verschwindet. Wenn demnach die Variabele die Grenze des T-Gebietes umschritten und von o aus geradlinig nach $a_{2\varrho+2}$ zurückgekehrt ist, so muss, da die Function ihren ursprünglichen Werth wieder annimmt,

$$\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}=\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}(p_{2\varrho+2}-p_{2\varrho+1}+p_{2\varrho}-\cdots-p_1)$$

sein. Die Logarithmen verschwinden beide für $z=\lim a_{2\varrho+2}$; es ist daher $p_{2\varrho+2}-p_{2\varrho+1}+p_{2\varrho}-\cdots-p_1=0$, oder in anderer Form

$$\sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa}\, p_{2\varkappa+1}=\sum_1^{\varrho+1}{}^{\varkappa}\, p_{2\varkappa}\,.$$

Lässt man dagegen die Variabele von $a_{2\varrho+2}$ geradlinig nach o und von da unmittelbar geradlinig zu dem Anfangspunkt des Schleifenkreises von a_1 gehen, dann aber, ohne a_1 zu umschreiten, nach o auf demselben Wege zurücklaufen und von da wieder ohne Rücksicht auf die logarithmischen Schleifen, sogleich auf der Schleife von a_2 bis zum Beginn ihres Kreises den Weg fortsetzen, so wird die Function, wenn die Variabele in analoger Weise von a_2 zu a_3, von a_3 zu a_4 u. s. f. bis zu $a_\varkappa$, ohne je eine Singularität der Function zu umschreiten, ihren Lauf nimmt, bei Beginn des Schleifenkreises von $a_\varkappa$ die Form haben $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}\left\{(p_\varkappa-q_\varkappa)+(p_{\varkappa-1}-q_{\varkappa-1})+\cdots(p_1-q_1)\right\}$. Hierin verschwindet der Logarithmus für $z=\lim a_\varkappa$, während $q_\varkappa$ die Differenz zwischen der Anzahl der in dem Winkelblatt $(a_{\varkappa-1}oa_\varkappa)$ gelegenen Wurzeln von $M+N\eta$ und $M-N\eta$ bezeichnet. Ist die Variabele auf dem so charakterisirten Wege zu dem Ausgangspunkt zurückgekehrt, so muss die Function, da das Argument nie einen singulären Punkt umschritten hat, den Anfangswerth wieder erhalten. Da aber der Endwerth in der Form

$$\frac{1}{\eta} \lg \frac{M + N\eta}{M - N\eta} + \frac{2\pi i}{\eta} \left\{ \sum_1^{2\varrho+2} {}^{\varkappa}\, p_\varkappa - \sum_1^{2\varrho+2} {}^{\varkappa}\, q_\varkappa \right\}$$

sich darstellt und der erste Term mit dem Ausgangswerth der Function übereinstimmt, denn in beiden verschwinden die Logarithmen für $z = \lim a_{2\varrho+2}$, so muss der zweite Term Null sein. Es ist daher $\sum_1^{2\varrho+2} {}^{\varkappa}\, p_\varkappa = \sum_1^{2\varrho+2} {}^{\varkappa}\, q_\varkappa$. Beide Relationen werden für spätere Transformationen herangezogen werden.

§ 2.

Ist t irgend ein Punkt im Gebiete T, so bildet ein kleiner Kreis um t mit der Begrenzung von T zusammen eine neue Begrenzung für eine Fläche, innerhalb welcher die Function $\frac{1}{(z-t)\eta} \lg \frac{M + N\eta}{M - N\eta}$ einläufig und stetig ist. Eine Integration über diese Begrenzung hat den Werth Null. Dabei ist zu bemerken, dass, wenn z die Grenzen des T-Gebietes in positiver Winkelrichtung umläuft, der Grenzkreis um t gleichfalls in positiver Winkelrichtung zu umschreiten ist. Die Ausführung dieser Integration führt zu einer Darstellung der Function $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M + N\eta}{M - N\eta}$, welche gleichzeitig das Additionstheorem für die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung in sich schliesst.

In der That, die Integration längs des kleinen Kreises um t in positiver Winkelrichtung liefert den Werth $\frac{2\pi i}{\eta(t)} \lg \frac{M(t) + N(t)\eta(t)}{M(t) - N(t)\eta(t)}$, wobei $\frac{1}{\eta(t)} \lg \frac{M(t) + N(t)\eta(t)}{M(t) - N(t)\eta(t)}$ denjenigen Werth bedeutet, welchen $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M + N\eta}{M - N\eta}$ annimmt, wenn z von $a_{2\varrho+2}$ aus in dem Gebiete T nach t gelangt, während andererseits die Integration über die Begrenzung des T-Gebietes zu hyperelliptischen Integralen Veranlassung giebt, in denen t als unabhängiger Parameter auftritt. Diese Integration zerfällt in eine Anzahl solcher, welche sich über die Schleifen der logarithmischen Unstetigkeiten z_μ erstrecken, und in eine Reihe solcher, welche sich über die Schleifen der algebraischen Unstetigkeiten $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ ausdehnen.

Ist z_μ eine Wurzel von $M + N\eta$, so wird die Function

$$\frac{1}{(z-t)\eta} \lg \frac{M + N\eta}{M - N\eta}$$

bei einem Umlauf um z_μ um $\frac{2\pi i}{(z-t)\eta}$ zunehmen; daher werden sich bei der Integration von o bis z_μ und von z_μ zurück nach o die Bestandtheile, welche die logarithmische Function enthalten, gegenseitig aufheben, und da das Integral um den unendlich kleinen Kreis, welcher z_μ umgiebt, sich auf Null reducirt, so bleibt als Bestand für die Integration $2\pi i \int\limits_{z_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta}$. Wäre z_μ eine Wurzel von $M - N\eta$ gewesen, so wäre als Ergebniss der Integration $-2\pi i \int\limits_{z_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta}$ hervorgegangen. Es sind daher die Integrationsresultate über die Schleifen, welche $z_1 z_2 \cdots z_{2n}$ umfassen, in der Form zusammenzufassen $2\pi i \sum\limits_{1}^{2n}{}_\mu \int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta}$, wo η_μ denjenigen Werth anzeigt, welcher dem z_μ adjungirt ist.

Die Integration über eine Schleife, welche einen singulären Punkt $a_\varkappa$ umschliesst, zerfällt in ein geradliniges Integral von o bis $a_\varkappa$, in ein zweites, welches über den Schleifenkreis auszuführen ist, und endlich in ein drittes, welches sich von $a_\varkappa$ geradlinig nach o erstreckt. Die Function hat auf dem Wege von o bis $a_\varkappa$ den Werth

$$\frac{1}{(z-t)\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta} + \frac{2\pi i}{(z-t)\eta} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1),$$

sie geht nach einem Umlauf auf dem Schleifenkreise in

$$\frac{1}{(z-t)\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta} - \frac{2\pi i}{(z-t)\eta} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$$

über, es zerstören sich daher bei der Integration diejenigen Terme, welche die logarithmischen Functionen enthalten, und da das Integral um den Punkt $a_\varkappa$ verschwindet, so ist das Resultat der Integration $4\pi i (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) \int\limits_{0}^{a_\varkappa} \frac{dz}{(z-t)\eta}$. Bezeichnet man das Integral $\int\limits_{0}^{a_\varkappa} \frac{dz}{(z-t)(+\eta)}$ mit $A_\varkappa^{(t)}$, so lassen sich die Ergebnisse der Integration über die Schleifen, welche $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ umschliessen, in der Form darstellen $4\pi i \sum\limits_{1}^{2\varrho+1}{}_\varkappa A_\varkappa^{(t)} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$.

Aus den bisherigen Entwickelungen ist mithin folgende Darstellung der Function $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ gewonnen:

$$\text{I.)}\ \frac{1}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)} = -\sum_{1}^{2n}{}_\mu \int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta} - \sum_{1}^{2\varrho+1}{}_\varkappa 2A_\varkappa^{(t)} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1).$$

Diese Darstellung ist gültig für jeden Punkt im Gebiete T. Zugleich schliesst sie in sich das Additionstheorem für die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung, dem im folgenden Paragraphen noch eine andere Form gegeben werden mag.

§ 3.

Die Integrale $\int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta}$, welche in Formel (I.) auftreten, sind geradlinig von z_μ bis o zu erstrecken mit demjenigen η_μ, welches dem z_μ adjungirt ist. Statt dessen lässt sich die Integration von z_μ nach a_1 und von a_1 geradlinig nach o wählen, vorausgesetzt, dass jener ohne eine Ueberschreitung eines Punktes t, oder eines singulären Punktes $a_\varkappa$ in diesen übergeführt werden kann; der Weg von z_μ nach a_1 ist aber stets so zu nehmen möglich, dass diese Voraussetzung erfüllt ist. Es ist daher $\int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta} = \int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{a_1} \frac{dz}{(z-t)\eta} \mp A_1^{(t)}$, je nachdem z_μ eine Wurzel von $M+N\eta$ oder $M-N\eta$ ist. Die Summation in Formel (I.) erstreckt sich über alle Wurzeln sowohl von $M+N\eta$ als von $M-N\eta$; es wird also $-A_1^{(t)}$ so oft bei der Summation auftreten, als der Unterschied zwischen der Anzahl jener Wurzeln von der Anzahl dieser beträgt, das ist $\sum\limits_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa}\, q_\varkappa$-mal. Demnach ist

$$-\sum_1^{2n}{}^{\mu} \int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta} = \sum_1^{2n}{}^{\mu} \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta} + A_1^{(t)} \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} q_\varkappa .$$

Würde man die z-Ebene in Rücksicht auf η als zweiblättrige Riemann'sche Fläche fassen, deren Verzweigungsschnitte geradlinig von den singulären Punkten ins Unendliche auslaufende und in ihrer Richtung durch o bestimmte Strahlen sind, so müsste der Integrationsweg von a_1 bis z_μ stets in demjenigen Blatte verlaufen, welches η_μ anzeigt; im Uebrigen wäre er in Rücksicht auf t der Beschränkung unterworfen, dass er nie den Strahl schneidet, welcher von t aus sich ins Unendliche erstreckt und dessen Richtung durch die von o nach t angegeben sei.

Nunmehr mögen in dem Ausdruck $\sum\limits_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}\, 2\, A_\varkappa^{(t)} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ an Stelle der $A_1^{(t)}, A_2^{(t)} \dots A_{2\varrho+1}^{(t)}$ die geradlinigen Integrale von der Form $\int\limits_{a_\varkappa}^{a_{\varkappa+1}} \frac{dz}{(z-t)(+\eta)} = A_{\varkappa,\varkappa+1}^{(t)}$ eingeführt werden. Unter der Voraussetzung dass t nicht in einem der Dreiecke gelegen ist, welche durch zwei auf einander folgende Punkte $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ und den Punkt o bestimmt sind, gelten folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
-A^{(t)}_{\varkappa-1} + A^{(t)}_{\varkappa} &= A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa}\\
-A^{(t)}_{\varkappa-2} + A^{(t)}_{\varkappa-1} &= A^{(t)}_{\varkappa-2,\varkappa-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
-A^{(t)}_{2} + A^{(t)}_{3} &= A^{(t)}_{2,3}\\
-A^{(t)}_{1} + A^{(t)}_{2} &= A^{(t)}_{1,2}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt $A^{(t)}_{\varkappa} = A^{(t)}_1 + A^{(t)}_{1,2} + A^{(t)}_{2,3} + \cdots A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa}$. Giebt man dem Index $\varkappa$ in dieser Gleichung die Zahlen $1, 2, 3, \cdots 2\varrho+1$ und addirt die dadurch entstehenden $2\varrho+1$ Gleichungen, nachdem jede mit dem zugehörigen Zahlenfactor $(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ multiplicirt ist, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}\, 2A^{(t)}_{\varkappa}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) = {} & 2A^{(t)}_1 \sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)\\
& + \cdots 2A^{(t)}_{\lambda-1,\lambda} \sum_{\lambda}^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)\\
& + 2A^{(t)}_{\lambda,\lambda+1} \sum_{\lambda+1}^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)\\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Der Zahlenfactor $\sum\limits_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ lässt folgende Umformungen zu. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} (p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) = {} & \sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2\varrho}{}^{\varkappa} p_\varkappa + \sum_1^{2\varrho-1}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2\varrho-2}{}^{\varkappa} p_\varkappa\\
& + \cdots\cdots \sum_1^{3}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2}{}^{\varkappa} p_\varkappa + p_1 = \sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1}.
\end{aligned}$$

Nach § 1. war aber $\sum\limits_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1} = \sum\limits_1^{\varrho+1}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa}$; daraus folgt

$$2\sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1} = \sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1} + \sum_1^{\varrho+1}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa} = \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} p_\varkappa.$$

Da nun die zweite Relation in § 1. zeigte, dass $\sum\limits_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} p_\varkappa = \sum\limits_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} q_\varkappa$, so nimmt der Ausdruck $2\,A_1^{(t)} \sum_1^{2\varrho+1} \varkappa\,(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ die Form an $A_1^{(t)} \sum_1^{2\varrho+2} \varkappa\, q_\varkappa$. Bezeichnet man daher den Coefficienten von $2 \cdot A_{\lambda-1,\lambda}^{(t)}$ mit $m_{\lambda-1}$, und benutzt die in diesem Paragraphen gegebenen Umformungen zur Transformation von Formel (I.), so heben sich die $A_1^{(t)}$ heraus, und es ist

$$\text{(II.)}\quad \frac{1}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\,\eta(t)}{M(t)-N(t)\,\eta(t)}$$

$$= \sum_1^{2n} \mu \int_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\,\eta} - 2 \cdot A_{1,2}^{(t)} m_1 - 2 \cdot A_{2,3}^{(t)} m_2 - \cdots 2\,A_{2\varrho-1,2\varrho}^{(t)} m_{2\varrho-1} - 2\,A_{2\varrho,2\varrho+1}^{(t)} m_{2\varrho}$$

Gesetzt, es hätte t in dem Dreieck $(a_{\varkappa-1}\, o\, a_\varkappa)$ gelegen, so wäre in obigem Gleichungssystem an Stelle von $-A_{\varkappa-1}^{(t)} + A_\varkappa^{(t)} = A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)}$ getreten die Relation $-A_{\varkappa-1}^{(t)} + A_\varkappa^{(t)} = A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)} - \frac{2\pi i}{\eta(t)}$, es würde also in obiger Formel $A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)}$ durch $A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)} - \frac{2\pi i}{\eta(t)}$ zu ersetzen sein. Würde man für die Integrationswege die früheren Beschränkungen aufheben, so würde für ein Integral $\int_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\,\eta}$ in die Formel

$$\int_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} + \frac{2\pi i}{\eta(t)} \varkappa + 2\,A_{1,2}^{(t)} n_1 + 2\,A_{2,3}^{(t)} n_2 + \cdots\cdots 2\,A_{2\varrho,2\varrho+1}^{(t)} n_{2\varrho}$$

eintreten, wo die $\varkappa$, n_1, n_2, $\cdots$ $n_{2\varrho}$ Zahlen bedeuten, welche in bekannter Weise durch den gewählten Integrationsweg bestimmt sind. Das Additionstheorem ist mithin für die Integrale dritter Gattung bewiesen. Eine wiederholte Differenziation nach dem Parameter t überträgt es auf Integrale von der Form $\int \frac{dz}{(z-t)^m_\eta}$.

§ 4.

Um das Additionstheorem für die Integrale erster Gattung zu entwickeln, umschliesse man alle singulären Punkte, sowohl die $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ als auch die $z_1 z_2 \cdots z_{2n}$ durch einen Kreis um den Nullpunkt und setze voraus, dass die Integrationswege innerhalb dieses Kreises in der Weise verlaufen, wie Formel (II.) es erfordert. Indem man t ausserhalb dieses Kreises annimmt, ist mod. t stets grösser als mod. z; es lässt sich daher $(z-t)^{-1}$ und somit jeder Term der rechten Seite von Formel (II.)

nach absteigenden Potenzen von t entwickeln. Für $\int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta}$ gilt demnach die Darstellung:

$$\int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta} = -t^{-1} \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{\eta} - t^{-2} \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z\,dz}{\eta} - \cdots\cdots t^{-\nu} \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z^{\nu-1}\,dz}{\eta} - \cdots \text{in inf.},$$

und, wenn man $\int\limits_{a_{\varkappa-1}}^{a_\varkappa} \frac{z^\nu\,dz}{\eta}$ mit $B^{(\nu)}_{\varkappa-1,\varkappa}$ bezeichnet, für $A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa}$ folgende:

$$A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa} = -t^{-1} B^{(0)}_{\varkappa-1,\varkappa} - t^{-2} B^{(1)}_{\varkappa-1,\varkappa} - \cdots\cdots t^{-\nu} B^{(\nu-1)}_{\varkappa-1,\varkappa} - \cdots\cdots \text{in inf.}$$

In der Entwickelung der rechten Seite von Formel (II.) nach absteigenden Potenzen von t ist also der Coefficient von $t^{-\nu}$:

$$-\sum_1^{2n}{}_\mu \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z^{\nu-1}}{\eta} dz + 2B^{(\nu-1)}_{1,2} m_1 + 2B^{(\nu-1)}_{2,3} m_2 + \cdots 2B^{(\nu-1)}_{2\varrho-1,2\varrho} m_{2\varrho-1} + 2B^{(\nu-1)}_{2\varrho,2\varrho+1} m_{2\varrho}.$$

Da nun die Function $\frac{1}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$ auf der linken Seite in Formel (II.) für $t=\infty$ von der $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Ordnung Null wird, so müssen alle Coefficienten von t auf der rechten Seite bis zum Coefficienten von $t^{-\varrho}$ einschliesslich verschwinden, und es ist deshalb jener oben niedergeschriebene Coefficient so lange Null, als $\nu \leqq \varrho$ ist. Es gilt also

$$\text{(III.)} \quad \sum_1^{2n}{}_\mu \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z^\nu dz}{\eta} = 2B^{(\nu)}_{1,2} m_1 + 2B^{(\nu)}_{2,3} m_2 + \cdots 2B^{(\nu)}_{2\varrho-1,2\varrho} m_{2\varrho-1} + 2B^{(\nu)}_{2\varrho,2\varrho+1} m_{2\varrho},$$

wenn dem ν eine der Zahlen $0, 1, 2, \cdots (\varrho-1)$ beigelegt wird. Hebt man nunmehr die Beschränkung für die Integrationswege auf und lässt $m_1 m_2 \cdots m_{2\varrho}$ irgend welche ganze Zahlen bedeuten, so ist in Formel (III.) das Additionstheorem für die ϱ hyperelliptischen Integrale erster Gattung in allgemeiner Form ausgesprochen.

§ 5.

Es bleibt noch übrig, das Additionstheorem für die Integrale zweiter Gattung zum Ausdruck zu bringen. Zu dem Ende entwickele man die Function $\frac{t^{\varrho+1}}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$ nach absteigenden Potenzen von t. Diese Entwickelung ist gültig, so lange t ausserhalb jenes in § 4. bezeichneten Kreises gelegen ist. Sie auszuführen, ersetze man t durch u^{-1}. Durch diese Substitution mag $t^{-(\varrho+1}\eta(t)$ in $\eta(u)$, $t^{-n}M(t)$ in

$\mathsf{M}(u)$ und $t^{-(n-\varrho-1)} N(t)$ in $\mathsf{N}(u)$ übergehen. Alsdann ist

$$\frac{1}{\eta(u)} \lg \frac{\mathsf{M}(u) + \mathsf{N}(u)\,\eta(u)}{\mathsf{M}(u) - \mathsf{N}(u)\,\eta(u)}$$

in der Umgebung von $u = 0$ nach aufsteigenden Potenzen von u entwickelbar. Der Coefficient von u^ν ist gleich

$$\frac{1}{\nu!} \lim_{u=0} \left\{ \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} \frac{1}{\eta(u)} \lg \frac{\mathsf{M}(u) + \mathsf{N}(u)\,\eta(u)}{\mathsf{M}(u) - \mathsf{N}(u)\,\eta(u)} \right\},$$

und dieser ist zugleich der Coefficient von $t^{-\nu}$ in der Entwickelung von $\frac{t^{\varrho+1}}{\eta(t)} \lg \frac{M(t) + N(t)\,\eta(t)}{M(t) - N(t)\,\eta(t)}$, also auch der Coefficient von $t^{-(\nu+\varrho+1)}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{\eta(t)} \lg \frac{M(t) + N(t)\,\eta(t)}{M(t) - N(t)\,\eta(t)}$ nach absteigenden Potenzen von t. Da letztere Reihe identisch gleich mit der in § 4. gegebenen ist, so stimmen die Coefficienten von $t^{-(\nu+\varrho+1)}$ in beiden überein. Es ist daher

$$\text{(IV.)} \quad \sum_{1}^{2n}{}_{\mu} \int_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z^{\varrho+\nu}}{\eta} dz - 2B^{(\varrho+\nu)}_{1,2} m_1 - 2B^{(\varrho+\nu)}_{2,3} m_2 - \cdots 2B^{(\varrho+\nu)}_{2\varrho-1,2\varrho} m_{2\varrho-1} - 2B^{(\varrho+\nu)}_{2\varrho,2\varrho+1} m_{2\varrho}$$
$$= -\frac{1}{\nu!} \lim_{u=0} \left\{ \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} \frac{1}{\eta(u)} \lg \frac{\mathsf{M}(u) + \mathsf{N}(u)\,\eta(u)}{\mathsf{M}(u) - \mathsf{N}(u)\,\eta(u)} \right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält ausser dem Term

$$-\frac{1}{\nu!} \lg \frac{\mathsf{M}(0) + \mathsf{N}(0)}{\mathsf{M}(0) - \mathsf{N}(0)} \lim_{u=0} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} \left(\frac{1}{\eta(u)} \right)$$

rationale Functionen der Coefficienten von M und N, also rationale Functionen der Coefficienten, welche in M und N enthalten sind. Solcher unabhängiger Coefficienten in M und N giebt es $2n - \varrho$; diese lassen sich durch willkührliche Annahme von $2n - \varrho$ Werthepaaren $z_\mu \eta_\mu$ aus den $2n - \varrho$ Gleichungen von der Form $M(z_\mu) + \eta_\mu N(z_\mu) = 0$ bestimmen, sind also algebraische Functionen der z_μ. In Formel (IV.) liegt also das Theorem ausgedrückt, dass eine Anzahl von $2n - \varrho$ Integralen zweiter Gattung mit der unteren Grenze a_1 und willkührlich gewählten oberen Grenzen sich auf ϱ Integrale derselben Gattung zurückführen lassen, zu denen noch eine algebraische Function dieser oberen Grenzen und ein bestimmter Logarithmus von einer algebraischen Function dieser Grenzen hinzutritt. Jene ϱ Integrale haben zu oberen Grenzen die Wurzeln der Gleichung $\frac{M^2 - \eta^2 N^2}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{2n-\varrho})} = 0$.

Die Integrationswege von a_1 bis $(z_\mu \eta_\mu)$ in Formel (IV.) sind keiner weiteren Beschränkung unterworfen, sobald man die $m_1 m_2 \cdots m_{2\varrho}$ irgend welche ganze positive oder negative Zahlen bedeuten lässt.

§ 6.

Die Formeln (I.), (II.), (III.), (IV.) hatten zunächst alle zur Voraussetzung, dass η^2 eine ganze rationale Function von geradem Grade sei; doch bewahren sie auch ihre Gültigkeit, wenn η^2 von ungeradem Grade ist. In der That tritt bei ungeradem Grade von η^2 der Punkt $z = \infty$ an die Stelle von $a_{2\varrho+2}$, welcher bei der Bestimmung von $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ in § 1. seiner Singularität vollständig entkleidet war. Indem man also einem bestimmten Argument z ausserhalb jenes in § 4. bezeichneten Kreises ein bestimmtes $+\eta$ zuordnet und denjenigen Logarithmus wählt, welcher für $z = \infty$ verschwindet, ist die Function in demselben Gebiet wie in § 1. einläufig und stetig; und es gelten daher alle daraus abgeleiteten Schlüsse. Es mag noch bemerkt werden, dass, indem man die Bezeichnungen des § 5. vollkommen beibehält, bei ungeradem Grade von η^2 die Function $\mathsf{\eta}^2(u)$ den Factor u enthält. In diesem Fall ist $\lg \frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}$ in der Umgebung von $u = 0$ nach Potenzen der Function $\frac{\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}{\mathsf{M}(u)}$ zu entwickeln; es gilt demnach für $\frac{1}{\mathsf{\eta}(u)} \lg \frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}$ die Darstellung:

$$2\left\{\frac{\mathsf{N}(u)}{\mathsf{M}(u)} + \frac{\mathsf{\eta}^2(u)\,\mathsf{N}^3(u)}{3\,\mathsf{M}^3(u)} + \frac{\mathsf{\eta}^4(u)\,\mathsf{N}^5(u)}{5\,\mathsf{M}^5(u)} + \cdots \frac{\mathsf{\eta}^{2\varkappa}(u)\,\mathsf{N}^{2\varkappa+1}(u)}{(2\varkappa+1)\,\mathsf{M}^{2\varkappa+1}(u)} + \cdots \text{ in inf.}\right\}.$$

Das Glied $\frac{\mathsf{\eta}^{2\varkappa}(u)\,\mathsf{N}^{2\varkappa+1}(u)}{(2\varkappa+1)\,\mathsf{M}^{2\varkappa+1}(u)}$ ist eine rationale Function von u, welche für $u = 0$ von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung zu Null wird. Bei der Bildung der rechten Seite von Gleichung (IV.) werden also nur die Terme zu berücksichtigen sein bis $\varkappa = \nu$; denn alle Terme, für welche $\varkappa > \nu$, verschwinden nach ν-maliger Differenziation für $u = 0$. Die übrigen Glieder ergeben rationale Functionen der Coefficienten von M und N. Wenn demnach η^2 von ungeradem Grade ist, so tritt an Stelle der logarithmischen Function in Formel (IV.) gleichfalls eine algebraische Function der oberen Grenzen.

Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung*).

Von W. FRAHM in Tübingen.

In Salmon's „Analytic geometry of three dimensions" (second ed. p. 100 and 177) wird eine gewisse kanonische Form für das simultane System dreier Flächen zweiter Ordnung angegeben, um Folgerungen über die Combinanten aus ihr zu ziehen. Da aber die Möglichkeit derselben dort nicht nachgewiesen wird, so konnte man diese um so mehr in Zweifel ziehen, als für die mit den Flächennetzen eng verknüpften Curven vierter Ordnung ähnliche kanonische Formen von den Herren Clebsch und Lüroth als unzulässig nachgewiesen sind. Wirklich ergiebt sich aus den Resultaten des Letzteren, dass jener Zweifel begründet war. Sind nämlich $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ die Gleichungen dreier Flächen zweiter Ordnung, $a_1 \cdots a_5$, $b_1 \cdots b_5$, $c_1 \cdots c_5$, ferner $z_1 \cdots z_5$ Pentaëdercoordinaten, zwischen denen die Relation

$$(1) \qquad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$$

besteht, so lautet Salmon's kanonische Form

$$(2) \qquad \varphi = \sum_1^5 a_i z_i^2 ; \quad \psi = \sum_1^5 b_i z_i^2 ; \quad \chi = \sum_1^5 c_i z_i^2 .$$

---

*) Wenn man symbolisch schreibt $\varphi = a_x^2$, $\psi = b_x^2$, $\chi = c_x^2$, so ergiebt sich aus Herrn Gordan's wichtigem Combinantensatze, dass alle Combinanten des Netzes simultane Invarianten der zwei Formen

$$(abuv)\,(acuv)\,(bcuv)$$

und

$$(abcu)\, a_{x^2} b_{x^2} c_{x^2}$$

sind; man findet dies in evidenter Weise durch Einsicht in Herrn Sturm's schöne Arbeit bestätigt (Borchardt's Journal Bd. 70). Die ganze algebraische Theorie aber ist mit nicht geringen Schwierigkeiten verknüpft, obwohl die nicht veröffentlichten Resultate des Herrn Gundelfinger erlauben, eine Reihe von Sätzen aus den ebenen Kegelschnittnetzen zu übertragen.

Für $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$ als unbestimmte Parameter ergiebt sich hieraus die Gleichung eines Flächennetzes

$$(3) \qquad \lambda\varphi + \mu\psi + \nu\chi = 0 .$$

Den Ort der Kegelspitzen des Netzes (eine Curve sechster Ordnung vom Geschlecht $p = 3$) findet man, indem man die letzte Gleichung nach $z_1 \cdots z_4$ differentiirt in der Form

$$(4) \qquad p_1 z_1 = p_2 z_2 = p_3 z_3 = p_4 z_4 = p_5 z_5 ,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$p_i = a_i \lambda + b_i \mu + c_i \nu .$$

Durch Einsetzen der hieraus bestimmten Verhältnisse der Grössen $z_1 \cdots z_5$ findet man

$$(5) \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} = 0 ,$$

und, indem man λ, μ, ν als Dreieckscoordinaten in einer Ebene ansieht, stellt dies die Gleichung einer Curve vierter Ordnung, der Hesse'schen Abbildung der Kegelspitzencurve dar, welcher das vollständige Fünfseit der Geraden $p_1 \cdot\cdot p_5$ eingeschrieben ist. Nun kann aber im Allgemeinen einer Curve vierter Ordnung kein Fünfseit eingeschrieben werden, es ist vielmehr für Curven, bei denen dies möglich ist, ein System von Berührungscurven dritter Ordnung ausgezeichnet; andererseits kann nach Herrn Hesse jede Curve vierter Ordnung (auf 36 verschiedene Arten) als Abbildung einer Kegelspitzencurve angesehen werden, woraus denn einleuchtet, dass jene kanonische Form nur in speciellen Fällen zulässig ist. Ist aber umgekehrt die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in der Form (5) gegeben, so stellt sich diese sofort als Abbildung der Kegelspitzencurve eines Netzes (3) dar, dessen Gleichung man als eine Summe von 5 Quadraten dargestellt erhält. Aber diese Form ist dann immer auf unendlich viele Arten möglich, denn man beweist den Satz:

> Liegen die 10 Ecken eines vollständigen Pentaëders auf der Curve der Kegelspitzen, so können derselben unendlich viele Pentaeder eingeschrieben werden, deren Kanten also von sämmtlichen dreifachen Sehnen der Curve gebildet werden.

Um diese Pentaëder zu erhalten, construire man die drei dreifachen Sehnen durch einen beliebigen Punkt der Curve und lege durch je zwei derselben eine Ebene, welche ausser den 5 schon in ihr liegenden die Curve noch in einem weiteren Punkte schneidet, so dass man im Ganzen deren $1 + 3 \cdot 2 + 3 = 10$ erhält, welche unter Voraussetzung der im Satze ausgesprochenen Bedingung ein Pentaëder bilden.

Der Satz ist leicht zu beweisen. Denn aus dem Pentaëder $z_1 \cdots z_5$, welches im Raume dem Fünfseit $p_1 \cdots p_5$ entspricht, kann man unendlich viele ableiten; man beachte nur, dass alle Berührungscurven dritter Ordnung, welche in den Ecken eines Vierseits die Fünfseite berühren, demselben System (in dem von Hesse, Crelle's Journ. 49, festgestellten Sinne) angehören, und erkennt, dass die den 6 Ecken eines Vierseits im Raume entsprechenden Punkte immer in einer Ebene liegen müssen, wenn dies einmal eintrat. Es liegen aber die 6 den Ecken des Vierseits $p_1 \cdots p_4$ entsprechenden Punkte in der Ebene z_5, womit die Behauptung des Satzes erhärtet ist.

Aus dem Umstande, dass die Kenntniss der 8 Schnittpunkte von drei Flächen des Netzes hinreicht, um alle Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung zu finden, ergiebt sich noch:

> Nach Auffindung eines Fünfseits erfordert die vollständige Lösung des Problems der Doppeltangenten für die Lüroth'schen Curven nur noch die Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung 8^{ten} Grades.

Ein weiterer Satz über dieses merkwürdige Flächennetz möge noch bewiesen werden:

> Mit Hülfe eines jeden Pentaëders können irgend drei der Flächen des Netzes auf unendlich viele Arten als Polaren eines Flächenpaares dritter Ordnung angesehen werden; die zugehörigen Pole liegen in drei geraden Linien.

In der That kann man die durch die Gleichungen (2) dargestellten Flächen immer ansehen als Polaren einer Fläche dritter Ordnung,

$$0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i^3,$$

denn die Gleichungen der ersten Polaren dreier Punkte $z' z'' z'''$ in Bezug auf dieselbe sind

$$0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i' z_i^2; \quad 0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i'' z_i^2; \quad 0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i''' z_i^2.$$

Sollen diese mit den Flächen φ, ψ, χ zusammenfallen, so müssen die Relationen erfüllt sein,

$$z_i' = \frac{a_i}{\lambda_i}, \quad z_i'' = \frac{b_i}{\lambda_i}, \quad z_i''' = \frac{c_i}{\lambda_i},$$

und man erhält durch Substitution in die Identität $0 = \sum_1^5 z_i$:

$$0 = \sum_1^5 \frac{a_i}{\lambda_i}, \quad 0 = \sum_1^5 \frac{b_i}{\lambda_i}, \quad 0 = \sum_1^5 \frac{c_i}{\lambda_i}.$$

Sind also $\frac{1}{\lambda_i'}$, $\frac{1}{\lambda_i''}$ zwei Werthsysteme, welche diesen Gleichungen genügen, θ ein Parameter, so erhält man $\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i''} + \frac{\theta}{\lambda_i'}$ und

$$z_i' = \frac{(\lambda_i' + \theta\lambda_i'')}{\lambda_i'\lambda_i''}, \quad z_i'' = \frac{b_i(\lambda_i' + \theta\lambda_i'')}{\lambda_i'\lambda_i''}, \quad z_i''' = \frac{c_i(\lambda_i' + \theta\lambda_i'')}{\lambda_i'\lambda_i''},$$

womit der Satz erwiesen ist.

Endlich ergiebt sich:

> Drei Flächen können entweder (im Allgemeinen) gar nicht oder auf zweifach unendlich viele Arten als Polaren einer Fläche dritter Ordnung angesehen werden.

Denn alsdann liegt die Kegelspitzencurve auf der zugehörigen Kernfläche und enthält die 10 Ecken des Pentaëders der Fläche dritter Ordnung, derselben können aber unendlich viele Pentaëder eingeschrieben werden.

Tübingen, 13. März 1874.

Verbesserungen.

S. 74 Z. 10 v. o. lies $a_i x_i d\lambda$ statt $a_i d\lambda$.
S. 86 Z. 11 v. u. lies $4(a_4-a_2)(a_3-a_1)$ statt $2(a_4-a_2)(a_3-a_1)$.
S. 87 Z. 1 v. o. lies $2(Q,Q)\sqrt{\Delta}$ statt $(QQ)\sqrt{\Delta}$.
S. 87 Z. 2 v. o lies „das doppelte Moment" statt „das Moment".
S. 285 Z. 5 v. u. lies „Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ist" statt „Curve ist".
S. 310 Z. 9 v. o. lies ∞^{24} statt ∞^{23}.
S. 310 Z. 13 v. o. lies ∞^{25} statt ∞^{24}.
S. 325 Z. 9 v. o. lies $\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ statt $\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.
S. 326 Z. 2 v. u. lies qQ statt pQ.
S. 355 Z. 11 v. u. lies $2(x^2+y^2+z^2)$ statt $x^2+y^2+z^2$.
S. 358 Z. 15, 16, 17 v. o. lies q^{21} statt q^{14}.
S. 359 Z. 1, 3, 8 v. u. lies q^7 statt q^8.
S. 362 Z. 9 v. o. lies q^7 statt q^8.
S. 363 ist auf den linken Seiten der beiden Formeln (15) überall q^7 statt q^3 zu setzen.
S. 381 Z. 4 v. u. lies PQR statt PPR.
S. 384 Z. 9 v. o. lies 2^{n-1} statt 2.
S. 385 Z. 5 v. u. lies $3h$ statt h

Nachträgliche Verbesserung zu Band VI.

S. 598 Z. 13 v. u. und S. 601 Z. 2 v. o. lies $g(N)$ statt $G(N)$.

Preisaufgaben

der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig.

Aus der Mathematik und Naturwissenschaft.

1. Für das Jahr 1874.

Das Problem der elektrischen Vertheilung auf einem Conductor von gegebener Gestalt ist durch die bisher in Anwendung gebrachten Methoden nur in verhältnissmässig wenigen Fällen zur definitiven Lösung gelangt oder einer solchen zugänglich geworden. Um die genannten Methoden ihres speciellen Charakters zu entkleiden und wo möglich auf ein allgemeineres Niveau zu erheben, scheint es zunächst wünschenswerth, wesentlich neue Fälle in den Kreis der Untersuchungen hereinzuziehen. Demgemäss stellt die Gesellschaft folgende Preisaufgabe:

Auf einem Rotationskörper, dessen Meridian durch die Lemniscate (Cassini'sche Curve)

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=b^4-a^4$$

dargestellt ist, soll die Vertheilung der Elektricität unter dem Einflusse gegebener äusserer Kräfte ermittelt werden.

Die Beantwortung des Specialfalles $a=b$ würde durch die Methode der reciproken Radien (Methode der sphärischen Spiegelung) auf den Fall eines Hyperboloids reducirbar, und für die Erlangung des Preises *unzureichend* sein. Preis 60 Ducaten.

2. Für das Jahr 1875.

Die Frage nach der Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes ist trotz mannigfacher Bemühungen bis jetzt nicht entschieden worden. Die Gesellschaft stellt daher die Aufgabe:

Es ist durch neue Untersuchungen die Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes endgültig festzustellen.

Preis 60 Ducaten.

3. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgültig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte, mit Rücksicht auf die von Laplace (in der Mécanique céleste), von Leverrier (in den Annales de l'Observatoire und den Comptes rendus de l'Académie des sciences), von Hansen (in den Berichten der Kön. Sächs. Gesellsch. der Wiss. vom 15. April 1863) und von Wilhelm

Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Kometen S. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Komet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine *vollständige* Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Kometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Kometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt deshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Kometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

Die Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in *deutscher, lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1874 Prof. Dr. G. Curtius) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesell-

Tafel I. (Bd. VII, S. 410.)

Fig. 1.

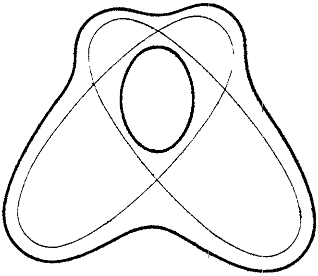


Fig 3

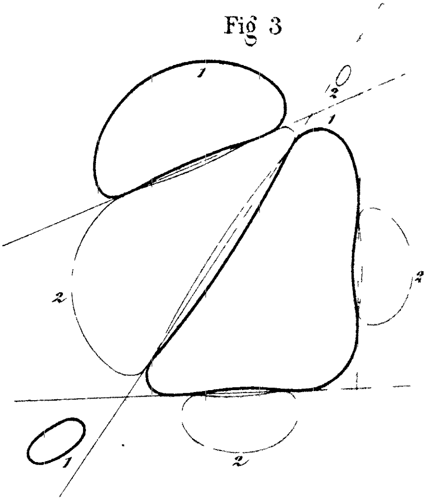
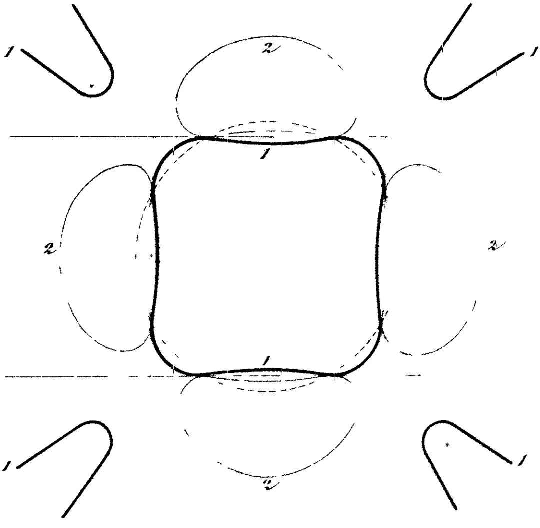


Fig. 2.



Tafel II. (Bd. VII, S. 410.)

Fig. 4.

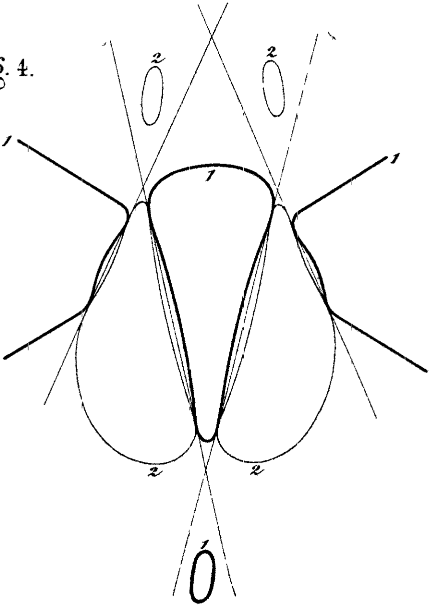


Fig. 5