Die Form und Zahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen der Transformationen der ultraelliptischen Functionen für beliebige Transformationsgrade.

Von E. Dorn in Breslau.

Hermite basirt seine Untersuchungen über die Transformation der ultraelliptischen Functionen (Hermite, Théorie de la transformation des fonctions Abéliennes. Paris 1855.) auf die Behandlung des Systemes der 16 ganzzahligen Transformationscoefficienten:

$$(1) \qquad \left\{\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}\right\},$$

zwischen denen die Gleichungen bestehen:

$$(2) \quad \begin{cases} a_0\, d_1 + b_0\, c_1 - c_0\, b_1 - d_0\, a_1 = 0, \\ a_0\, d_2 + b_0\, c_2 - c_0\, b_2 - d_0\, a_2 = 0, \\ a_0\, d_3 + b_0\, c_3 - c_0\, b_3 - d_0\, a_3 = a_1\, d_2 + b_1\, c_2 - c_1\, b_2 - d_1\, a_2 = k, \\ a_1\, d_3 + b_1\, c_3 - c_1\, b_3 - d_1\, a_3 = 0, \\ a_2\, d_3 + b_2\, c_3 - c_2\, b_3 - d_2\, a_3 = 0. \end{cases}$$

Es gelten sodann folgende Sätze:

Die Determinante des Systemes (1) ist ein vollständiges Quadrat, nämlich k^2. (Hermite pag. 3, 1°.)

Die Gleichungen (2) sind gleichbedeutend mit:

$$(3) \quad \begin{cases} a_0\, b_3 + a_1\, b_2 - a_2\, b_1 - a_3\, b_0 = 0, \\ a_0\, c_3 + a_1\, c_2 - a_2\, c_1 - a_3\, c_0 = 0, \\ a_0\, d_3 + a_1\, d_2 - a_2\, d_1 - a_3\, d_0 = k, \\ b_0\, c_3 + b_1\, c_2 - b_2\, c_1 - b_3\, c_0 = k, \\ b_0\, d_3 + b_1\, d_2 - b_2\, d_1 - b_3\, d_0 = 0, \\ c_0\, d_3 + c_1\, d_2 - c_2\, d_1 - c_3\, d_0 = 0. \end{cases}$$

(Hermite pag. 7.)

Sind zwei Systeme $a_0 \cdots$, $\alpha_0 \cdots$ den Gleichungen (2) unterworfen, so erhält man durch Zusammensetzung derselben ein neues System $A_0 \ldots$, für welches dieselben ebenfalls gelten, und zwar ist, wenn man die k entsprechende Grösse für das System $\alpha_0 \cdots \varkappa$, für das System $A_0 \cdots K$ nennt:

$$K = k\varkappa.$$

(Hermite, pag. 3, 4.)

Hermite theilt diese Sätze ohne den Beweis mit, der in der That leicht zu führen ist.

Wenn $\varkappa = 1$, nennt Hermite die Systeme $a_0 \cdots$ und $A_0 \cdots$ äquivalent.

Ist k eine Primzahl, so sind, wie Hermite ebenfalls ohne Beweis angiebt, die nicht äquivalenten Systeme repräsentirt durch folgende vier Grundformen:

$$\text{I.} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix}, \quad \text{II.} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix}, \quad \text{III.} \begin{Bmatrix} k & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \text{IV.} \begin{Bmatrix} k & 0 & i & i' \\ 0 & k & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

worin i, i', i'' sämmtliche Werthe $0, 1 \cdots k-1$ annehmen können. Es giebt also $1 + k + k^2 + k^3$ Klassen der Transformationen. (Hermite, pag. 4, 3^0, 4^0.)

Ich stelle mir die Aufgabe, die Form und Zahl der Repräsentanten der nicht äquivalenten Transformationen für beliebige k zu ermitteln.

Ich hatte ursprünglich die Aufgabe so gelöst, dass ich direct den Repräsentanten aufsuchte, mit welchem die vorgelegte Transformation äquivalent ist. Indessen verlangt diese Behandlungsweise ziemlich complicirte Untersuchungen über die Möglichkeit simultaner Lösungen gewisser Congruenzen, und ich habe es einfacher gefunden, durch successive Anwendung mehrerer lineärer Transformationen auf den Repräsentanten zu gelangen. Auf die Brauchbarkeit des successiven Verfahrens war ich bei der Behandlung einer andern Transformationsaufgabe von Hrn. Prof. Richelot aufmerksam gemacht.

Die Operation der Zusammensetzung zweier Systeme werde durch ein zwischengesetztes $\times$ bezeichnet. Ich suche nun zunächst zu machen:

$$(4) \qquad \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & b_1' & b_2' & b_3' \\ 0 & c_1' & c_2' & c_3' \\ 0 & d_1' & d_2' & d_3' \end{Bmatrix},$$

worin die $a_0 \cdots$ die Gleichungen (2) und (3) erfüllen, und die $\alpha_0 \cdots$ entsprechende Gleichungen, in denen nur k durch 1 zu ersetzen ist.

Das Verschwinden der drei letzten Coefficienten in der ersten Colonne ergiebt die Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} 0 = b_0\,\alpha_0 + b_1\,\beta_0 + b_2\,\gamma_0 + b_3\,\delta_0\,, \\ 0 = c_0\,\alpha_0 + c_1\,\beta_0 + c_2\,\gamma_0 + c_3\,\delta_0\,, \\ 0 = d_0\,\alpha_0 + d_1\,\beta_0 + d_2\,\gamma_0 + d_3\,\delta_0\,. \end{cases}$$

Mit Benutzung der Gleichungen (2) erhält man hieraus:

$$(6)\qquad \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 : \delta_0 = d_3 : d_2 : -d_1 : -d_0\,.$$

Da die Determinante des Systems $\alpha_0 \cdots$ 1 ist, dürfen α_0, β_0, γ_0, δ_0 keinen gemeinsamen Factor besitzen und sind demnach durch (6) vollkommen bestimmt.

Man suche nun irgend ein Werthsystem α_3, β_3, γ_3, δ_3, welches der Gleichung genügt:

$$(7)\qquad \alpha_0\delta_3 + \beta_0\gamma_3 - \gamma_0\beta_3 - \delta_0\alpha_3 = 1\,,$$

und bestimme die Grössen α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2 aus folgenden Gleichungen (welche (3) entsprechen):

$$(8)\qquad \begin{cases} \text{a)}\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \alpha_3\beta_0 - \alpha_0\beta_3 = \nu_1\,, \\ \text{b)}\ \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 = \alpha_3\gamma_0 - \alpha_0\gamma_3 = \nu_2\,, \\ \text{c)}\ \alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1 = 1 + \alpha_3\delta_0 - \alpha_0\delta_3 = \frac{1-\nu_3}{2}\,, \\ \text{d)}\ \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = 1 + \beta_3\gamma_0 - \beta_0\gamma_3 = \frac{1+\nu_3}{2}\,, \\ \text{e)}\ \beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1 = \beta_3\delta_0 - \beta_0\delta_3 = \nu_4\,, \\ \text{f)}\ \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 = \gamma_3\delta_0 - \gamma_0\delta_3 = \nu_5\,. \end{cases}$$

Dass übrigens, wenn man die rechte Seite von c) $\frac{1-\nu_3}{2}$ gesetzt hat, die von d) $\frac{1+\nu_3}{2}$ ist, geht aus (7) hervor.

Ich beweise jetzt, dass die Gleichungen (8) a) $\cdots$ f) in ganzen Zahlen auflösbar sind.

Zunächst nehme ich δ_1 und δ_2 so an, dass sie den grössten gemeinsamen Factor χ von ν_5, ν_4, $\frac{1-\nu_3}{2}$ enthalten, sonst aber weiter keinen besitzen. Enthielte nämlich δ_1 oder δ_2 einen Theiler von χ nicht, so folgte aus den leicht beweisbaren Relationen:

$$\beta_1\nu_5 - \gamma_1\nu_4 + \delta_1\,\frac{1+\nu_3}{2} = 0$$

$$\beta_2\nu_5 - \gamma_2\nu_4 + \delta_2\,\frac{1+\nu_3}{2} = 0$$

dass derselbe in $\frac{1+\nu_3}{2}$ enthalten sein müsste. $\frac{1+\nu_3}{2}$ und $\frac{1-\nu_3}{2}$, deren Summe $= 1$ ist, können aber keinen gemeinsamen Factor besitzen.

Die Gleichungen c) e) f) werden jetzt ganzzahlig aufgelöst. Sind irgend welche Lösungen derselben:

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2;\quad \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2;\quad \mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,$$

so sind sämmtliche Lösungen enthalten in:

$$\mathfrak{A}_1 + m_1 \frac{\delta_1}{\chi},\quad \mathfrak{A}_2 + m_1 \frac{\delta_2}{\chi};$$
$$\mathfrak{B}_1 + m_2 \frac{\delta_1}{\chi},\quad \mathfrak{B}_2 + m_2 \frac{\delta_2}{\chi};$$
$$\mathfrak{C}_1 + m_3 \frac{\delta_1}{\chi},\quad \mathfrak{C}_2 + m_3 \frac{\delta_2}{\chi},$$

wo m_1, m_2, m_3 vorläufig beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Indem man hiemit in a) hineingeht, folgt:

$$\left(\mathfrak{A}_1 + m_1 \frac{\delta_1}{\chi}\right)\left(\mathfrak{B}_2 + m_2 \frac{\delta_2}{\chi}\right) - \left(\mathfrak{A}_2 + m_1 \frac{\delta_2}{\chi}\right)\left(\mathfrak{B}_1 + m_2 \frac{\delta_1}{\chi}\right) = \nu_1,$$

oder:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1 + m_1\left(\mathfrak{B}_2 \frac{\delta_1}{\chi} - \mathfrak{B}_1 \frac{\delta_2}{\chi}\right) + m_2\left(\mathfrak{A}_1 \frac{\delta_2}{\chi} - \mathfrak{A}_2 \frac{\delta_1}{\chi}\right) = \nu_1,$$

oder endlich:

$$-m_1 \frac{\nu_4}{\chi} + m_2 \frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_1 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1), \tag{9}$$

und ebenso aus b):

$$-m_1 \frac{\nu_5}{\chi} + m_3 \frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1). \tag{10}$$

Damit die Gleichung (9) lösbar ist, muss ein etwaiger gemeinsamer Factor von $\frac{\nu_4}{\chi}$ und $\frac{1-\nu_3}{2\chi}$, welcher $= \omega$ sei, auch in der rechten Seite enthalten sein.

Wie man sich durch Substitution der Werthe von $\nu_1 \cdots \nu_5$ leicht überzeugt, ist:

$$\frac{1+\nu_3}{2} \cdot \frac{1-\nu_3}{2} = \nu_2\nu_4 - \nu_1\nu_5, \tag{11}$$

folglich:

$$\frac{1+\nu_3}{2}\,\frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 \frac{\nu_4}{\chi} - \nu_1 \frac{\nu_5}{\chi},$$

und es muss der $\frac{\nu_4}{\chi}$ und $\frac{1-\nu_3}{2\chi}$ noch gemeinsame Factor auch in $\nu_1 \frac{\nu_5}{\chi}$ enthalten sein, also in ν_1, weil eben $\frac{\nu_4}{\chi}$, $\frac{\nu_5}{\chi}$, $\frac{1-\nu_3}{2\chi}$ keinen gemeinsamen Factor mehr besitzen sollen.

Ferner ist nach c) und e):

$$\mathfrak{A}_1 \frac{\delta_2}{\chi} - \mathfrak{A}_2 \frac{\delta_1}{\chi} = \frac{1-\nu_3}{2\chi},$$
$$\mathfrak{B}_1 \frac{\delta_2}{\chi} - \mathfrak{B}_2 \frac{\delta_1}{\chi} = \frac{\nu_4}{\chi}.$$

Der den rechten Seiten gemeinsame Factor ω muss auch in der Determinante $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ enthalten sein, da sonst $\frac{\delta_1}{\chi}$ und $\frac{\delta_2}{\chi}$ noch einen gemeinsamen Factor besässen.

Der Nachweis für die Lösbarkeit von (10) ist ebenso mit Benutzung von c) und f) zu führen.

Wenn irgend eine ganzzahlige Lösung von (9) $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ ist, so sind die sämmtlichen Lösungen:

$$m_1 = \mathfrak{m}_1 + p\,\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}, \quad m_2 = \mathfrak{m}_2 + p\,\frac{\nu_4}{\chi\omega},$$

wo p eine vorläufig beliebige ganze Zahl ist.

Geht man mit dem Werthe von m_1 in (10) hinein, so erhält man:

$$-\left(\mathfrak{m}_1 + p\,\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}\right)\frac{\nu_5}{\chi} + m_3\,\frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1),$$

oder:

$$(12)\quad -p\,\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}\cdot\frac{\nu_5}{\chi} + m_3\,\frac{1-\nu_3}{2\chi} = \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{m}_1\,\frac{\nu_5}{\chi}.$$

Damit diese Gleichung nach m_3 und p ganzzahlig lösbar sei, muss die rechte Seite den Factor $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$ enthalten.

Zum Nachweise hievon setze ich in die rechte Seite von (12) aus (9) ein:

$$\mathfrak{m}_1 = \frac{-\nu_1 + (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1) + \mathfrak{m}_2\,\frac{1-\nu_3}{2\chi}}{\left(\frac{\nu_4}{\chi}\right)},$$

und finde:

$$(13)\quad \begin{cases} \nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) - \frac{\nu_5}{\nu_4}\left\{\nu_1 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1) - \mathfrak{m}_2\,\frac{1-\nu_3}{2\chi}\right\} \\ = \frac{1}{\nu_4}\left\{\nu_2\nu_4 - \nu_1\nu_5 - \nu_4(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) + \nu_5(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1) + \mathfrak{m}_2\,\frac{1-\nu_3}{2\chi}\,\nu_5\right\}. \end{cases}$$

Der Divisor ν_4 thut hier nichts zur Sache, weil er zu $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$ relativ prim ist.

Das letzte Glied der Klammer in (13) enthält augenscheinlich $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$; die beiden ersten ebenfalls nach (11), und es handelt sich nur noch um:

$$\nu_4(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) - \nu_5(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1).$$

Setzt man für $\nu_4 : \mathfrak{B}_1\delta_2 - \mathfrak{B}_2\delta_1$, für $\nu_5 : \mathfrak{C}_1\delta_2 - \mathfrak{C}_2\delta_1$ so erhält man:

$$(\mathfrak{A}_1\delta_2 - \mathfrak{A}_2\delta_1)(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1) = \frac{1-\nu_3}{2\chi}(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1),$$

woraus ersichtlich ist, dass auch hierin $\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}$ enthalten ist.

Schreibt man die Gleichung (12):

$$m_3\omega - p\,\frac{\nu_5}{\chi} = \frac{1}{\left(\frac{1-\nu_3}{2\chi\omega}\right)}\left\{\nu_2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1) + \mathfrak{m}_1\,\frac{\nu_5}{\chi}\right\},$$

so zeigt sich, dass sie in der That immer ganzzahlige Auflösungen zulässt, weil ω und $\frac{\nu_5}{\chi}$ relativ prim sind.

Die Gleichungen a) b) c) e) f) sind nun erfüllt; und d) ist auch befriedigt, da sie eine Folge der übrigen ist, wie man mit Hülfe von (11) leicht einsieht.

Daraus, dass die Coefficienten $a_0' \cdots$ die Gleichungen (2) befriedigen, folgt noch, dass auch $d_1' = 0$, $d_2' = 0$ werden.

Jetzt suche ich mit Hülfe einer zweiten lineären Transformation zu machen:

$$(14)\qquad \left\{\begin{matrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & b_1' & b_2' & b_3' \\ 0 & c_1' & c_2' & c_3' \\ 0 & 0 & 0 & d_3' \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} \alpha_0' & \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ 0 & \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ 0 & \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a_0'' & a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ 0 & b_1'' & b_2'' & b_3'' \\ 0 & 0 & c_2'' & c_3'' \\ 0 & 0 & 0 & d_3'' \end{matrix}\right\}.$$

Bei der Zusammensetzung der Systeme ergiebt sich sofort, dass hiezu noch die Gleichung zu erfüllen ist:

$$(15)\qquad c_1'\beta_1' + c_2'\gamma_1' = 0\,,$$

also:

$$(16)\qquad \beta_1' : \gamma_1' = c_2' : -c_1'\,.$$

Den Gleichungen (2) entsprechen hier folgende:

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_0'\delta_3' = 1\,, \\ &\beta_1'\gamma_2' - \gamma_1'\beta_2' = 1\,, \\ &\alpha_1'\delta_3' + \beta_1'\gamma_3' - \gamma_1'\beta_3' = 0\,, \\ &\alpha_2'\delta_3' + \beta_2'\gamma_3' - \gamma_2'\beta_3' = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Hienach hat man $\alpha_0' = \delta_3' = 1$ zu setzen, ferner β_1' und γ_1' der Proportion (16) gemäss ohne gemeinsamen Factor anzunehmen. β_2' und γ_2' sind dann aus der zweiten Gleichung (17) zu bestimmen, welche ∞ viele Auflösungen zulässt. Endlich hat man noch zu machen:

$$\alpha_1' = -(\beta_1'\gamma_3' - \gamma_1'\beta_3')\,,$$
$$\alpha_2' = -(\beta_2'\gamma_3' - \gamma_2'\beta_3')\,,$$

wobei es übrigens freisteht, β_3' und $\gamma_3' = 0$ zu setzen, so dass auch α_1' und α_2' verschwinden.

Schliesslich setze ich die Transformation $a_0'' \cdots$ noch einmal mit einer lineären zusammen:

$$(18)\quad \begin{Bmatrix} a_0'' & a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ 0 & b_1'' & b_2'' & b_3'' \\ 0 & 0 & c_2'' & c_3'' \\ 0 & 0 & 0 & d_3'' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0'' & \alpha_1'' & \alpha_2'' & \alpha_3'' \\ 0 & \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \\ 0 & 0 & \gamma_2'' & \gamma_3'' \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 0 & C_2 & C_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 \end{Bmatrix}.$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0''\alpha_0'', & A_1 &= a_0''\alpha_1'' + a_1''\beta_1'', & A_2 &= a_0''\alpha_2'' + a_1''\beta_2'' + a_2''\gamma_2'', \\ & & B_1 &= b_1''\beta_1'', & B_2 &= b_1''\beta_2'' + b_2''\gamma_2'', \\ & & & & C_2 &= c_2''\gamma_2'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= a_0''\alpha_3'' + a_1''\beta_3'' + a_2''\gamma_3'' + a_3''\delta_3'', \\ B_3 &= b_1''\beta_3'' + b_2''\gamma_3'' + b_3''\delta_3'', \\ C_3 &= c_2''\gamma_3'' + c_3''\delta_3'', \\ D_3 &= d_3''\delta_3''. \end{aligned}$$

Die Coefficienten a_0'' und d_3'' können, da ihr Product $= k$, entweder beide $+$ oder beide $-$ sein, folglich kann man α_0'' und δ_3'', deren Product $= 1$, immer so wählen, dass A_0 und D_3 positiv werden. Ebenso kann man auch die beiden andern Diagonalcoefficienten positiv machen durch geeignete Annahme von β_1'' und γ_2''.

Zwischen den Grössen $\alpha_0'' \cdots$ bestehen noch folgende Relationen (cf. (3)):

$$\alpha_0''\gamma_3'' + \alpha_1''\gamma_2'' = 0,$$
$$\alpha_0''\beta_3'' + \alpha_1''\beta_2'' - \alpha_2''\beta_1'' = 0,$$

so dass man nur noch über α_1'', β_2'', α_2'' (und α_3'') verfügen kann, wodurch γ_3'' und β_3'' bestimmt sind.

Man kann nun durch geeignete Wahl von:

$$(19)\quad \begin{cases} \alpha_1'' \text{ erreichen, dass } 0 \leqq A_1 < A_0, \\ \beta_2'' \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 0 \leqq B_2 < B_1, \\ \alpha_2'' \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 0 \leqq A_2 < A_0, \\ \alpha_3'' \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 0 \leqq A_3 < A_0 \text{ wird.} \end{cases}$$

B_3 und C_3 sind hiedurch schon bestimmt. Sie genügen den Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{cases} A_0 C_3 + A_1 C_2 = 0, \\ A_0 B_3 + A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0. \end{cases}$$

Es ist also:

$$C_3 = -\frac{A_1 C_2}{A_0}$$

und, weil A_0, A_1, C_2 nicht negativ, mit Berücksichtigung von (19):

$$0 \geqq C_3 > -C_2.$$

Ferner ist:

$$B_3 = -\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_0}.$$

Da nun beide Glieder des Zählers an sich positiv sind, so folgt wegen (19), dass der absolute Werth von $B_3 < B_1$. Uebrigens kann B_3 positiv wie negativ sein.

Die Transformation $a_0 \cdots$ *ist also mit einer andern* $A_0 \cdots$ *äquivalent, bei der die Coefficienten unter der Diagonale 0, die Diagonalcoefficienten positiv, ferner jeder der noch übrigen Coefficienten absolut kleiner als der Diagonalcoefficient derselben Zeile und* $A_1, A_2, A_3, B \geqq 0$ *sind. Ausserdem befriedigen die Coefficienten die Gleichungen* (20) *und* $A_0 D_3 = B_1 C_2 = k$.

Man überzeugt sich ferner leicht, dass keine zwei Transformationen der eben angegebenen Form unter einander äquivalent sein können, ohne identisch zu sein.

Man kann sie daher als Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen wählen.

Eine nähere Betrachtung zeigt indessen, dass die Coefficienten der Repräsentanten innerhalb der so eben angegebenen Grenzen nicht vollkommen willkührlich sind.

Um daher die Form der Repräsentanten genauer festzustellen und später die Zahl der zu einem gegebenen Transformationsgrade gehörigen zu bestimmen, untersuche ich, welche Systeme*):

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{array} \right\}$$

mit den Gleichungen vereinbar sind:

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_0 d_3 = k, \\ b_1 c_2 = k, \\ a_0 c_3 + a_1 c_2 = 0, \\ a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \end{array} \right.$$

wo a_0, b_1, c_2, d_3 positiv, die übrigen Coefficienten absolut kleiner als die Diagonalcoefficienten derselben Zeile und $a_1, a_2, a_3, b_2 \geqq 0$ sind.

Jedenfalls ist:

$$a_0 = t_0,$$
$$a_1 = t_1,$$

wo t_0 und t_1 Factoren von k sind, und:

---

*) Der Bequemlichkeit wegen ist die Bezeichnung geändert.

$$d_3 = t_3 = \frac{k}{t_0},$$
$$c_2 = t_2 = \frac{k}{t_1}.$$

Der grösste gemeinsame Factor von t_0 und t_1 sei σ_{01} und:

$$t_0 = \sigma_{01}\sigma_{02},$$
$$t_1 = \sigma_{01}\sigma_{13}.$$

σ_{02} und σ_{13} sind relativ prim.

Da $t_0 t_3 = t_1 t_2$, so ist:

$$\sigma_{01}\sigma_{02}t_3 = \sigma_{01}\sigma_{13}t_2.$$

Ich nenne $\frac{t_3}{\sigma_{13}} = \frac{t_2}{\sigma_{02}} : \sigma_{23}$, sodass also:

$$t_2 = \sigma_{02}\sigma_{23},$$
$$t_3 = \sigma_{13}\sigma_{23},$$

und σ_{23} der grösste gemeinsame Factor von t_2 und t_3 ist.

Der grösste gemeinsame Factor von σ_{01} und σ_{23} sei f, und:

$$\sigma_{01} = f\sigma_{01}'$$
$$\sigma_{23} = f\sigma_{23}',$$

so ist in Folge der vorhergehenden Definitionen f *der grösste gemeinsame Factor von* t_0, t_1, t_2, t_3.

Die dritte Gleichung (22) wird nun:

$$f\sigma_{01}'\sigma_{02}c_3 + a_1 f\sigma_{23}'\sigma_{02} = 0,$$

oder:

$$\sigma_{01}'c_3 + \sigma_{23}'a_1 = 0,$$

und:

$$a_1 = a_1'\sigma_{01}',$$
$$c_3 = -a_1'\sigma_{23}'.$$

Weil $a_1 < t_0$ sein sollte, ist $a_1' < \frac{t_0}{\sigma_{01}'} = f\sigma_{02}$ und besitzt auch $f\sigma_{02}$ Werthe.

Die letzte Gleichung (22) geht über in:

$$f\sigma_{01}'\sigma_{02}b_3 + a_1'\sigma_{01}'b_2 - a_2 f\sigma_{01}'\sigma_{13} = 0,$$

oder:

$$\sigma_{02}b_3 + \frac{a_1'b_2}{f} - a_2\sigma_{13} = 0.$$

Dies ergiebt zunächst die Bedingung:

(23) $$\frac{a_1'b_2}{f} \text{ eine ganze Zahl},$$

(24) $$a_2\sigma_{13} - \frac{a_1'b_2}{f} \equiv 0 \pmod{\sigma_{02}},$$

und liefert sodann:

$$b_3 = \frac{1}{\sigma_{02}}\left(a_2\sigma_{13} - \frac{a_1'b_2}{f}\right).$$

Der grösste gemeinsame Factor von a_1' und f sei φ und:

$$f = \varphi \psi ,$$

so folgt aus (23):

$$b_2 = b_2' \psi .$$

Da nun $b_2 < t_1$, so besitzt b_2' für *ein einmal angenommenes* a_1': $\frac{t_1}{\psi} = \sigma_{01}' \varphi \sigma_{13}$ Werthe.

Weil σ_{02} und σ_{13} relativ prim sind, so folgt für ein bestimmtes a_1' und b_2 aus (24) a_2 bis auf Vielfache von σ_{02}. Da nun $a_2 < t_0$, so kann:

$$a_2 = a_2' + m\sigma_{02} , \qquad (a_2' < \sigma_{02})$$

$\frac{t_0}{\sigma_{02}} = \sigma_{01}$ Werthe annehmen.

$a_3 < t_0$ ist weiter keiner Beschränkung unterworfen, und hat also t_0 Werthe.

Bei fest angenommenen t_0 und t_1 giebt es für ein bestimmtes a_1':

$$\sigma_{01}' \varphi \sigma_{13} \cdot \sigma_{01} \cdot t_0 = \sigma_{01}' t_0 t_1 \varphi$$

Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen, und für alle a_1':

$$\sigma_{01}' t_0 t_1 \sum_{\varrho=0}^{\varrho = f\sigma_{02} - 1} \varphi_\varrho ,$$

wo φ_ϱ den grössten gemeinsamen Factor von f und ϱ bedeutet.

Es wird sich also zunächst um die Ausführung der so definirten Summe handeln. Die möglichen Werthe von $\varrho(a_1')$ sind unter der Form darstellbar:

$$\varrho = xf + y ,$$

wo:

$$x = 0,\ 1 \cdots (\sigma_{02} - 1) ,$$
$$y = 0,\ 1 \cdots (f - 1) .$$

Der grösste gemeinsame Factor von f und ϱ ist daher auch der grösste gemeinsame Factor von f und y, daher ist obige Summe:

$$\sigma_{02} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=f-1} \varphi_\varrho .$$

Man hat also die Summe der grössten Factoren zu nehmen, welche f mit $0, 1, 2 \cdots f-1$ gemein hat (wobei 1 auch mitzurechnen ist).

Es sei nun:

$$f = a^\alpha b^\beta \cdots n^\nu ,$$

wo $a, b \cdots n$ Primzahlen bedeuten.

Ich bilde die Summe, indem ich untersuche, welchen Beitrag jeder Factor von f zu derselben liefert.

$a^\alpha b^\beta \cdots n^\nu$ ist enthalten in 0 und liefert den Beitrag $a^\alpha b^\beta \cdots n^\nu$.

Der Factor $\varphi = a^{\alpha - \varkappa} b^\beta \cdots n^\nu$ ist enthalten in:

$$1 \cdot \varphi,\ 2 \cdot \varphi \cdots (a^\varkappa - 1) \cdot \varphi .$$

Indessen ist φ nur dann der *grösste* gemeinsame Factor dieser Grössen mit f, wenn die Coefficienten nicht Vielfache von a sind. Es sind also fortzulassen:

$$1 \cdot a \cdot \varphi, \quad 2 \cdot a \cdot \varphi, \quad \cdots (a^{\varkappa-1} - 1)\, a \cdot \varphi.$$

Die Zahl der noch übrig bleibenden Grössen beträgt:

$$(a^{\varkappa} - 1) - (a^{\varkappa-1} - 1) = a^{\varkappa-1}(a-1).$$

Jede derselben liefert zur Summe den Beitrag $a^{\alpha-\varkappa} b^{\beta} \cdots n^{\nu}$, folglich alle zusammen:

$$(a-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta} \cdots n^{\nu}.$$

Da nun $\varkappa = 1, 2 \cdots \alpha$ sein kann, so ist der Beitrag sämmtlicher Factoren der Form $a^{\alpha-\varkappa} b^{\beta} \cdots n^{\nu}$:

$$\alpha (a-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta} \cdots n^{\nu} = f \frac{\alpha(a-1)}{a}.$$

Ebenso liefern die Grössen $a^{\alpha} b^{\beta-\lambda} c^{\gamma} \cdots n^{\nu}$ den Beitrag:

$$\beta (b-1)\, a^{\alpha} b^{\beta-1} c^{\gamma} \cdots n^{\nu} = f \frac{\beta(b-1)}{b} \quad \text{etc.}$$

Der Factor $a^{\alpha-\varkappa} b^{\beta-\lambda} c^{\gamma} \cdots n^{\nu}$ ist enthalten in $(a^{\varkappa} b^{\lambda} - 1)$ Grössen aus der Reihe $1, 2 \cdots f-1$. Von diesen sind aber fortzulassen diejenigen, welche eine höhere Potenz von a enthalten, also $(a^{\varkappa-1} b^{\lambda} - 1)$ Grössen, sowie die eine höhere Potenz von b enthaltenden, welche an Zahl sind: $(a^{\varkappa} b^{\lambda-1} - 1)$. Jetzt sind aber zweimal fortgelassen, folglich wieder hinzuzuzählen die $(a^{\varkappa-1} b^{\lambda-1} - 1)$ Grössen, welche sowohl durch höhere Potenzen von a, wie auch durch höhere Potenzen von b theilbar sind. Die Zahl der wirklich in Betracht kommenden Grössen ist also:

$$(a^{\varkappa} b^{\lambda} - 1) - (a^{\varkappa-1} b^{\lambda} - 1) - (a^{\varkappa} b^{\lambda-1} - 1) + (a^{\varkappa-1} b^{\lambda-1} - 1) =$$
$$= a^{\varkappa-1} b^{\lambda-1} (a-1)(b-1),$$

und der Beitrag zur Summe:

$$(a-1)(b-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma} \cdots n^{\nu} = f \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b}.$$

Da nun aber $\varkappa$ und λ die Werthe $1, 2 \cdots \alpha$ resp. $1, 2 \cdots \beta$ besitzen dürfen, so giebt es $\alpha\beta$ Factoren von f, welche obige Form haben und zur Summe:

$$f \frac{\alpha(a-1)}{a} \cdot \frac{\beta(b-1)}{b}$$

beitragen.

Man übersieht schon, wie dies Verfahren sich weiter fortsetzen lässt. Die ganze Summe wird hienach:

$$
\begin{aligned}
f\Big\{1 &+ \frac{\alpha(a-1)}{a} + \frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b} + \frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}\frac{\gamma(c-1)}{c} \\
&+ \frac{\beta(b-1)}{b} + \frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\gamma(c-1)}{c} + \frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}\frac{\delta(d-1)}{d} \\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&+ \frac{\nu(n-1)}{n} + \frac{\mu(m-1)}{m}\frac{\nu(n-1)}{n} + \frac{\lambda(l-1)}{l}\frac{\mu(m-1)}{m}\frac{\nu(n-1)}{n} + \cdots + \frac{\alpha(a-1)}{a}\frac{\beta(b-1)}{b}\cdots\frac{\nu(n-1)}{n}\Big\} \\
= f\Big(1 &+ \frac{\alpha(a-1)}{a}\Big)\Big(1 + \frac{\beta(b-1)}{b}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{\nu(n-1)}{n}\Big).
\end{aligned}
$$

Die Anzahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen ist somit für dasselbe t_0 und t_1:

$$
(25) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\sigma_{01}'\sigma_{02} f t_0\, t_1 \Big(1 + \frac{\alpha(a-1)}{a}\Big)\Big(1 + \frac{\beta(b-1)}{b}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{\nu(n-1)}{n}\Big) \\
&\qquad = t_0^2 t_1 \Big(1 + \frac{\alpha(a-1)}{a}\Big)\Big(1 + \frac{\beta(b-1)}{b}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{\nu(n-1)}{n}\Big).
\end{aligned}
\right.
$$

Wenn k *keine quadratischen Factoren enthält*, wird $f = 1$, denn f, welches in t_0, t_1, t_2, t_3 als Factor enthalten sein sollte, müsste für $k = t_0 t_3$ einen Factor f^2 zur Folge haben. Die Exponenten $\alpha, \beta \cdot\cdot \nu$ werden 0 und die Anzahl der Repräsentanten für ein bestimmtes t_0 und t_1 reducirt sich auf:

$$t_0^2\, t_1,$$

also die Zahl der sämmtlichen zum Transformationsgrade k gehörigen Repräsentanten:

$$\Sigma\, t_0^2\, t_1,$$

wo für t_0 und t_1 sämmtliche Factoren von k zu setzen sind. Weil es freisteht, bei jedem t_0 t_1 seine sämmtlichen Werthe durchlaufen zu lassen, kann obige Summe geschrieben werden:

$$\Sigma t_0^2\, \Sigma t_1.$$

Wenn nun:

$$k = p_1 p_2 \cdots p_n,$$

wo die p Primzahlen bedeuten, so ist:

$$
\begin{aligned}
\Sigma t_1 &= 1 + (p_1 + p_2 + \cdot\cdot p_n) + (p_1 p_2 + p_1 p_3 + \cdots p_{n-1} p_n) \\
&\quad + (p_1 p_2 p_3 + \cdots\ ) + \cdots\cdot + p_1 p_2 \cdots p_n \\
&= (1 + p_1)(1 + p_2)\cdot\cdot(1 + p_n), \\
\Sigma t_0^2 &= 1 + (p_1^2 + p_2^2 + \cdots p_n^2) + (p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + \cdot\cdot p_{n-1}^2 p_n^2) \\
&\quad + (p_1^2 p_2^2 p_3^2 + \cdots\ ) + \cdots\cdot + p_1^2 p_2^2 \cdots p_n^2 \\
&= (1 + p_1^2)(1 + p_2^2)\cdots(1 + p_n^2),
\end{aligned}
$$

und die Anzahl der Repräsentanten:

$$\prod_{k=1}^{k=n}(1+p_k+p_k^2+p_k^3),$$

welche Formel das Resultat von Hermite für einen primzahligen Transformationsgrad in sich schliesst.

Ich wende mich jetzt dazu für *beliebige* k die Gesammtzahl der Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen zu ermitteln.

Ich habe dazu:

$$\Sigma t_0^2 t_1 \left(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\right)\left(1+\frac{\beta(b-1)}{b}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\right) \tag{26}$$

auszudehnen über alle t_0 und t_1, welche Factoren von k sind, und es sind $\alpha, \beta \cdots \nu$ dadurch für jedes Werthepaar t_0, t_1 definirt, dass der grösste gemeinsame Factor von t_0, t_1, t_2, t_3 ist:

$$f = a^\alpha b^\beta \cdots n^\nu.$$

Die in k enthaltenen Primfactoren $a, b \cdots n$ können darin zu geraden und zu ungeraden Potenzen erhoben vorkommen. Es sei daher:

$$k = a^{2\alpha'} \cdots d^{2\delta'} \cdot e^{2\varepsilon'+1} \cdots n^{2\nu'+1}.$$

Bei der Bildung der Summe (26) verfahre ich so, dass ich sie zuerst ausdehne über alle Werthsysteme von t_0 und t_1, welche dasselbe f ergeben, und nachher f die sämmtlichen möglichen Werthe ertheile.

Für dasselbe f bleibt der letzte Factor in (26) constant, also habe ich nur:

$$\Sigma t_0^2 t_1$$

für die zu demselben f gehörigen t_0 und t_1 zu nehmen.

Wenn:

$$\left\{\begin{aligned} t_0 &= a^{\alpha_0} \cdots d^{\delta_0} \cdot e^{\varepsilon_0} \cdots n^{\nu_0}, \\ t_1 &= a^{\alpha_1} \cdots d^{\delta_1} \cdot e^{\varepsilon_1} \cdots n^{\nu_1}, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

so wird:

$$\Sigma t_0^2 t_1 = \Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} \cdots d^{2\delta_0+\delta_1} \cdot e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1} \cdots n^{2\nu_0+\nu_1}, \tag{28}$$

oder, da die α_0 und α_1 ihre sämmtlichen Werthe durchlaufen können, während die übrigen Exponenten constant bleiben, etc.:

$$\Sigma t_0^2 t_1 = \Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} \cdots \Sigma d^{2\delta_0+\delta_1} \cdot \Sigma e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1} \cdots \Sigma n^{2\nu_0+\nu_1}. \tag{28a}$$

Ich schreite jetzt zur Bestimmung von $\Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1}$ und $\Sigma e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1}$, welche eine gesonderte Behandlung erfordern.

Da:

$$t_3 = \frac{k}{t_0} = a^{2\alpha'-\alpha_0} \dots d^{2\delta'-\delta_0} \cdot e^{2\varepsilon'+1-\varepsilon_0} \dots n^{2\nu'+1-\nu_0},$$

$$t_2 = \frac{k}{t_1} = a^{2\alpha'-\alpha_1} \dots d^{2\delta'-\delta_1} \cdot e^{2\varepsilon'+1-\varepsilon_1} \dots n^{2\nu'+1-\nu_1},$$

so sind für α_0 und α_1 alle diejenigen Combinationen zu nehmen, welche als grössten gemeinsamen Factor von

$$a^{\alpha_0}, \quad a^{\alpha_1}, \quad a^{2\alpha'-\alpha_1}, \quad a^{2\alpha'-\alpha_0}$$

a^α ergeben.

Wenn nun nicht gerade $\alpha = \alpha'$, so sind diese Werthsysteme:

$$\begin{array}{llll}
1)\ \alpha_0 = \alpha, & \alpha_1 = \alpha + \lambda, & & \\
2)\ \alpha_0 = 2\alpha' - \alpha, & \alpha_1 = \alpha + \lambda, & & \lambda = 0, 1, 2 \cdots 2(\alpha' - \alpha), \\
3)\ \alpha_0 = \alpha + \mu, & \alpha_1 = \alpha, & & \\
3)\ \alpha_0 = \alpha + \mu, & \alpha_1 = 2\alpha' - \alpha, & & \mu = 1, 2 \cdots 2(\alpha' - \alpha) - 1.
\end{array}$$

Ist $\alpha = \alpha'$, so giebt es nur einen möglichen Fall:

$$\alpha_0 = \alpha', \quad \alpha_1 = \alpha'.$$

Hienach ist:

$$\Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} = (a^{3\alpha} + a^{4\alpha'-\alpha}) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2(\alpha'-\alpha)} a^\lambda + (a^{3\alpha} + a^{2\alpha'+\alpha}) \sum_{\mu=1}^{\mu=2(\alpha'-\alpha)-1} a^{2\mu},$$

oder nach Ausführung der Summen und einigen Reductionen:

$$\Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} = \mathfrak{S}a, \alpha = \frac{a^{3\alpha}}{a^2-1} \left\{ (a^{6(\alpha'-\alpha)} - 1)(1 + a + a^2) - a^{4(\alpha'-\alpha)+1} + a^{2(\alpha'-\alpha)+1} \right\}. \tag{29}$$

Wenn $\alpha = \alpha'$, so ist:

$$\Sigma a^{2\alpha_0+\alpha_1} = \mathfrak{S}a, \alpha' = a^{3\alpha'}. \tag{30}$$

Ganz analog sind den ε_0 und ε_1 solche Werthsysteme beizulegen, dass:

$$e^{\varepsilon_0}, \quad e^{\varepsilon_1}, \quad e^{2\varepsilon'+1-\varepsilon_1}, \quad e^{2\varepsilon'+1-\varepsilon_0}$$

den grössten gemeinsamen Factor e^ε besitzen, also:

$$\begin{array}{llll}
1)\ \varepsilon_0 = \varepsilon, & \varepsilon_1 = \varepsilon + \lambda, & & \\
2)\ \varepsilon_0 = 2\varepsilon' + 1 - \varepsilon, & \varepsilon_1 = \varepsilon + \lambda, & & \lambda = 0, 1, \cdots 2(\varepsilon' - \varepsilon) + 1, \\
3)\ \varepsilon_0 = \varepsilon + \mu, & \varepsilon_1 = \varepsilon, & & \\
4)\ \varepsilon_0 = \varepsilon + \mu, & \varepsilon_1 = 2\varepsilon' + 1 - \varepsilon, & & \mu = 1, 2, \cdots 2(\varepsilon' - \varepsilon),
\end{array}$$

und man findet:

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma e^{2\varepsilon_0+\varepsilon_1} = \mathfrak{U}_{e,\varepsilon} &= (e^{3\varepsilon} + e^{4\varepsilon'-\varepsilon+2}) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2(\varepsilon'-\varepsilon)+1} e^\lambda + (e^{3\varepsilon} + e^{2\varepsilon'+\varepsilon+1}) \sum_{\mu=1}^{\mu=2(\varepsilon'-\varepsilon)} e^{2\mu} \\ &= \frac{e^{3\varepsilon}}{e^2-1} \left\{ (e^{6(\varepsilon'-\varepsilon)+3} - 1)(1 + e + e^2) - e^{4(\varepsilon'-\varepsilon)+3} + e^{2(\varepsilon'-\varepsilon)+2} \right\}. \end{aligned} \right. \tag{31}$$

Der Fall $\varepsilon = \varepsilon'$ ordnet sich hier der allgemeinen Formel unter.

Die Zahl der Repräsentanten, bei denen $f = a^\alpha \cdot \cdots \cdot d^\delta \cdot e^\varepsilon \cdot \cdot n^\nu$ ist also:

$$(32)\quad \mathfrak{G}_{a,\alpha}\Big(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\Big)\cdots\mathfrak{G}_{d,\delta}\Big(1+\frac{\delta(d-1)}{d}\Big)\cdot\mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\Big(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\Big)\cdots\mathfrak{U}_{n,\nu}\Big(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\Big).$$

Jetzt hat man noch hievon die Summe zu nehmen für sämmtliche f, d. h. $\alpha \cdot\cdot \delta$, $\varepsilon \cdot\cdot \nu$ die Werthe $0, 1 \cdot\cdot \alpha'$; $\cdots 0, 1 \cdot\cdot \delta'$; $0, 1 \cdot\cdot \varepsilon'$; $\cdots 0, 1 \cdots \nu'$ beizulegen.

Da nun wieder α seine sämmtlichen Werthe für jedes System der $\beta \cdots \nu$ durchlaufen kann, so erhält man die Gesammtzahl der Repräsentanten:

$$(33)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'}\mathfrak{G}_{a,\alpha}\Big(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\Big)\cdots\sum_{\delta=0}^{\delta=\delta'}\mathfrak{G}_{d,\delta}\Big(1+\frac{\delta(d-1)}{d}\Big)\cdot\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'}\mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\Big(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\Big)\cdots$$
$$\cdots\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu'}\mathfrak{U}_{n,\nu}\Big(1+\frac{\nu(n-1)}{n}\Big).$$

Nach (29) und (30) wird nun:

$$(34)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'}\mathfrak{G}_{a,\alpha}\Big(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\Big)=$$
$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'-1}\Big(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\Big)\frac{a^{3\alpha}}{a^2-1}\Big\{(a^{6(\alpha'-\alpha)}-1)(1+a+a^2)-a^{4(\alpha'-\alpha)+1}+a^{2(\alpha'-\alpha)+1}\Big\}$$
$$+\Big(1+\frac{\alpha'(a-1)}{a}\Big)a^{3\alpha'}.$$

Die einzelnen Summen, auf deren Bildung es ankommt, haben die Form:

$$(35)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'-1}a^{\varrho\alpha}=\frac{a^{\varrho\alpha'}-1}{a^\varrho-1},$$

$$(36)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'-1}\alpha\, a^{\varrho\alpha}=\frac{(\alpha'-1)a^{\varrho\alpha'}}{a^\varrho-1}-\frac{a^{\varrho\alpha'}-a^\varrho}{(a^\varrho-1)^2}.$$

Führt man die Summation aus und reducirt, so findet man schliesslich:

$$(37)\quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha'}\mathfrak{G}\,a,\alpha\,\Big(1+\frac{\alpha(a-1)}{a}\Big)=G\,a,\alpha'=$$
$$a^{3\alpha'}+\frac{1}{a-1}\Big\{\frac{a^{3\alpha'}-1}{a^3-1}\,(a^{3\alpha'+2}(a^2+1)-1)-\frac{a^{\alpha'}-1}{a-1}\,a^{3\alpha'+1}\Big\}.$$

Analog wird:

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'}\mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\Big(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\Big)=$$
$$\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'}\Big(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\Big)\frac{e^{3\varepsilon}}{e^2-1}\Big\{(e^{6(\varepsilon'-\varepsilon)+3}-1)(1+e+e^2)-e^{4(\varepsilon'-\varepsilon)+3}+e^{2(\varepsilon'-\varepsilon)+2}\Big\},$$

und nach Ausführung der Summationen und einigen Reductionen:

$$(38) \quad \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon'} \mathfrak{U}_{e,\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon(e-1)}{e}\right) = U_{e,\varepsilon'} =$$

$$e^{3\varepsilon'}(1+e+e^2+e^3)+\frac{1}{e-1}\left\{\frac{e^{3\varepsilon'}-1}{e^3-1}(e^{3\varepsilon'+5}(e^2+1)-1)-\frac{e^{\varepsilon'}-1}{e-1}e^{3\varepsilon'+3}\right\}.$$

Die Anzahl der nicht äquivalenten Klassen, welche zum Transformationsgrade:

$$k = a^{2\alpha'} \cdots d^{2\delta'} \cdot e^{2\varepsilon'+1} \cdots n^{2\nu'+1}$$

gehören, ist also:

$$G_{a,\alpha'} \cdots G_{d,\delta'} \cdot U_{e,\varepsilon'} \cdots U_{n,\nu'},$$

worin G und U durch (37) *und* (38) *definirt sind.*