Bemerkung über die Abbildung einer gewissen Fläche vierter Ordnung.

Von W. Frahm in Tübingen.

Ein interessantes Beispiel einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden liefert die Complexfläche vierter Ordnung und Classe, deren Herr Klein in einer Note (diese Ann. Bd. II) erwähnt hat. Einen andern bemerkenswerthen Fall bietet diese Fläche dar, wenn sie nur vier Knotenpunkte enthält, welche nicht in einer Ebene liegen. Dann sind auf derselben noch 36 Kegelschnitte und nur vier Paare gerader Linien vorhanden, aber ausser der Abbildung von Clebsch findet eine andere statt, bei der die Abbildungsfunctionen von der fünften Ordnung sind, bei der acht einfache, ein doppelter und ein dreifacher Fundamentalpunkt vorhanden sind, und welche vermittelt wird durch einen willkührlichen Kegelschnitt der Schaar nebst einem Büschel von Raumcurven dritter Ordnung auf der Fläche. Auf diese Abbildung wird man sofort geführt, indem man die Gleichung dieser Fläche aufsucht.

Drei Flächen zweiter Ordnung, welche die Doppelgerade und die vier Knotenpunkte enthalten, haben weitere Punkte nicht gemein. Zwei derselben, etwa φ, ψ, schneiden sich ausser in der Doppelgeraden α noch in einer Raumcurve dritter Ordnung C_3, welche α in zwei Punkten begegnet. Letztere Curve hat also 12 Punkte mit der Fläche (F_4) gemein, die beiden zuletzt erwähnten und die vier Knotenpunkte, welche aber alle doppelt zu rechnen sind. Jede Fläche $\varphi + \mu\psi$ enthält C_3 und schneidet offenbar noch eine weitere C_3' aus F_4 aus, welche ebenfalls die vier Knotenpunkte enthalten muss. Den Factor μ kann man (auf eine Weise) so bestimmen, dass C_3' durch einen beliebigen Punkt von F_4 geht. Lässt man nun diesen Punkt unendlich nahe an die Curve C_3 heranrücken, so fallen beim Uebergange zur Grenze beide Curven zusammen, oder $\varphi + \mu\psi \equiv \Phi$ berührt die Fläche F_4 längs einer Raumcurve dritter Ordnung; es muss also möglich sein, die Gleichung

$F_4 = 0$ mit Hülfe von $\Phi = 0$ in die Form eines vollständigen Quadrats zu bringen, oder es wird*)

$$F_4 = \Psi^2 - \Phi\Phi_0 .$$

Ist daher die Doppelgerade der Schnitt der Ebenen $p = 0$, $q = 0$, so enthalten die Flächen zweiter Ordnung Φ_0, Φ, Ψ alle die Gerade $p = 0$, $q = 0$ und es wird schliesslich F_4 von der Form

$$(1) \qquad F_4 = (pa + qa')(pb + qb') - (pc + qc')^2 ,$$

wo $p, q, a, a', b, b', c, c'$ lineare Functionen der Coordinaten $x_1 \cdots x_4$ sind.

Die Flächen zweiter Ordnung, welche längs der erwähnten Curven dritter Ordnung berühren, bilden die Schaar

$$(pa + qa') + 2\mu(pc + qc') + \mu^2(pb + qb') = 0 ,$$

wo μ einen veränderlichen Parameter bedeuten soll.

Auch die Regelfläche:

$$\Delta_4\Delta_4 \equiv 4(ab - c'^2)(a'b' - c'^2) - (ab' + a'b - 2cc'^2) = 0$$

berührt offenbar die Fläche F_4 und man beweist leicht, dass sie von den vier Ebenen durch je drei der Knotenpunkte längs eines Kegelschnitts berührt wird. Uebrigens ist die Classe unserer Fläche $= 8$.

Indem wir jetzt zur Abbildung der Fläche übergehen, nehmen wir als Fundamentaltetraeder der Coordinatenbestimmung dasjenige der vier Knotenpunkte und als Gleichungen der Doppelgeraden:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 ,$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 0 .$$

Die allgemeinste Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, welche diese und die Knotenpunkte enthält, ist dann:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)(a_1p_1x_1+\cdots+a_4p_4x_4)-(p_1x_1+\cdot\cdot+p_4x_4)(a_1x_1+\cdot\cdot a_4x_4)$$
$$= \Sigma\Sigma\, x_ix_k(a_i - a_k)(p_i - p_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$
$$= \begin{vmatrix} x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 1 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \binom{a}{p} = 0 .$$

*) Sind u, v, w quadratische Ausdrücke in $x_1, x_2 \cdot\cdot x_4$, so kann offenbar jede Gleichung, welche in u, v, w homogen und quadratisch ist, in die Form gebracht werden: $\Psi^2 - \Phi\Phi_0 = 0$, wie man sofort sieht, indem man zunächst u, v, w

Mithin wird die Gleichung unserer Fläche F_4,

$$(2)\qquad \binom{a}{p}\binom{b}{p}-\binom{c}{p}^2=0\,,$$

welche sich ohne Weiteres in folgende drei zerlegen lässt

$$(2^a)\qquad \begin{cases} \Sigma\, p_i x_i + \lambda\, \Sigma\, x_i = 0\,, \\ \Sigma\, a_i p_i x_i + \lambda\, \Sigma\, a_i x_i + \mu(\Sigma c_i p_i x_i + \lambda\, \Sigma c_i x_i) = 0\,, \\ \Sigma\, c_i p_i x_i + \lambda\, \Sigma\, c_i x_i + \mu(\Sigma b_i p_i x_i + \lambda\, \Sigma b_i x_i) = 0\,, \end{cases}$$

oder:

$$\begin{aligned} &\Sigma\, x_i\,(p_i+\lambda)=0\,,\\ &\Sigma\, x_i\,(p_i+\lambda)\,(a_i+\mu\, c_i)=0\,,\\ &\Sigma\, x_i\,(p_i+\lambda)\,(c_i+\mu\, b_i)=0\,, \end{aligned}$$

Die Auflösung ergiebt

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = (p_2+\lambda)\,(p_3+\lambda)\,(p_4+\lambda)\,A_1\,, \\ \varrho x_2 = (p_1+\lambda)\,(p_3+\lambda)\,(p_4+\lambda)\,A_2\,, \\ \varrho x_3 = (p_1+\lambda)\,(p_2+\lambda)\,(p_4+\lambda)\,A_3\,, \\ \varrho x_4 = (p_1+\lambda)\,(p_2+\lambda)\,(p_3+\lambda)\,A_4\,, \end{cases}$$

wo die A die aus dem System

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1+\mu c_1 & a_2+\mu c_2 & a_3+\mu c_3 & a_4+\mu c_4 \\ c_1+\mu b_1 & c_2+\mu b_2 & c_3+\mu b_3 & c_4+\mu b_4 \end{Vmatrix}$$

mit Auslassung von je einer Vertikalreihe gebildeten Determinanten bedeuten. Diese Form zeigt, indem man $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$ für λ, μ setzt, sofort das Vorhandensein eines dreifachen Fundamentalpunktes ($\lambda=0$, $\nu=0$) und einer doppelten ($\mu=0$, $\nu=0$), sowie acht einfacher, welche auf vier Geraden durch den dreifachen Fundamentalpunkt liegen. Diesen vier Geraden entsprechen auf der Fläche die vier Knotenpunkte, jedem Punkte einer solchen eine durch den entsprechenden Knotenpunkt gehende Richtung. Ebenso entspricht der Geraden $\nu=0$ auf der Fläche ein einzelner fester Punkt.

Die Gleichungen (2^a) beweisen, dass die Abbildung vermittelt wird durch die Schaar der oben erwähnten Raumcurven dritter Ordnung und einen Ebenenbüschel durch die Doppelgerade, dessen Ebenen jede Curve noch in einem Punkte schneiden.

Dem doppelten Fundamentalpunkte entspricht ein Kegelschnitt der durch die Ebenen des Büschels bestimmten Schaar, dem dreifachen

als Dreieckscoordinaten in der Ebene annimmt. (Cayley, Quarterly Journal Bd. X und XI.)

eine rationale Raumcurve von der mehrfach erwähnten Art, und der Punkt der Fläche, welcher der Geraden $\nu = 0$ entspricht, ist eben der beiden gemeinsame Punkt.

Die Geraden eines Paares liegen auf der Fläche in einer Ebene, welche durch die Doppelgerade und einen der vier Knotenpunkte geht, sie bilden sich ab als zwei einfache Fundamentalpunkte, welche mit dem dreifachen in einer Geraden liegen. Ausser den durch die 4×2 einfachen Fundamentalpunkte abgebildeten vier Paaren giebt es keine Geraden auf der Fläche. Acht Kegelschnitte liegen in den vier Ebenen des Tetraeders der Knotenpunkte; je zwei zusammengehörige werden abgebildet durch drei Gerade, welche den dreifachen Fundamentalpunkt mit sechs einfachen verbinden, und durch das Geradenpaar, welches das übrigbleibende Paar einfacher Fundamentalpunkte mit dem doppelten verbindet. Achtundzwanzig weitere Kegelschnitte liegen auf der Fläche, von denen je zwei sich zu einem ebenen Schnitte ergänzen. Ein solches Paar wird abgebildet durch zwei Kegelschnitte, deren jeder drei einfache Fundamentalpunkte, sowie den doppelten und den dreifachen enthält. Die Kegelschnittschaar wird abgebildet durch einen Strahlbüschel, dessen Centrum der dreifache Fundamentalpunkt ist. Die Discussion der übrigen Curven auf der Fläche möge übergangen werden. Die niedrigste Abbildung erhält man aus der erwähnten, indem man mittelst Cremona'scher Transformationen die Abbildungsfunctionen auf den vierten Grad reducirt. Als Transformationscurven werden Kegelschnitte angewendet, welche durch den doppelten, den dreifachen, und einen beliebigen der einfachen Fundamentalpunkte gehen.

Abbildung der Doppelgeraden. Ein Ebenenbüschel durch die Doppelgerade hat die Gleichung:

$$\Sigma p_i x_i + \theta \, \Sigma x_i = 0 .$$

Setzt man die Werthe von x_i in λ, μ, ν ein, so zerfällt das Resultat in den Factor: $\theta\lambda - \nu$ und in den anderen:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ (\nu p_1 + \lambda)(a_1 + \mu c_1) & (\nu p_2 + \lambda)(a_2 + \mu c_2) & (\nu p_3 + \lambda)(a_3 + \mu c_3) & (\nu p_4 + \lambda)(a_4 + \mu c_4) \\ (\nu p_1 + \lambda)(\nu a_1 + \mu c_1) & (\nu p_2 + \lambda)(\nu a_2 + \mu c_2) & (\nu p_3 + \lambda)(\nu a_3 + \mu c_3) & (\nu p_4 + \lambda)(\nu a_4 + \mu c_4) \end{vmatrix}$$

und dieser, gleich Null gesetzt, stellt die Abbildung der Doppelgeraden dar. Sie ist also eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten im doppelten und im dreifachen Fundamentalpunkte, welche durch die anderen acht Fundamentalpunkte je einmal hindurchgeht.

Mit Hülfe eines Kegelschnittbüschels kann man leicht beliebig viele solche Punktepaare der Abbildung auffinden, welche die einzelnen

Punkte der Doppelgeraden abbilden. Führt man die von der Abbildungscurve herrührenden elliptischen Integrale erster Gattung mit gehörig bestimmten unteren Grenzen ein, so hat man, wenn $b_1 \dots b_8$ die Integrale für die einfachen b, b' beziehungsweise die Summen der beiden Integrale, welche den beiden Doppelpunkten zugehören und u, v die Integrale eines Punktepaares sind, die Gleichung

$$u + v + 3\,b + 2\,b' + b_1 + \cdots + b_8 = 5\,c\,,$$

weil das Paar u, v auf der Abbildung unendlich vieler ebener Schnitte liegt; aber

$$b_1 + b_2 + b = c\,; \qquad b_3 + b_4 + b = c\,;$$
$$b_5 + b_6 + b = c\,; \qquad b_7 + b_8 + b = c\,,$$

daher

$$b_1 + \cdot\cdot + b_8 = 4\,c - 4\,b\,,$$
$$u + v + 2\,b' - b = c\,,$$

ausserdem auch:

$$b + b' = c\,.$$

Bestimmt man nun irgend zwei Punkte mit den Argumenten u', v', welche der Gleichung

$$u' + v' = 2\,b' - b\,,$$

genügen, so ist:

$$u + v + u' + v' + b + b' = 2\,c\,.$$

Die letzte Gleichung aber sagt aus, dass u, v mit den Punkten u', v' und den Doppelpunkten auf einem Kegelschnitte liegen, alle Punktepaare sind mithin bestimmt durch den Schnitt der Abbildung mit dem Büschel der Kegelschnitte durch zwei Punkte u', v' und die Doppelpunkte.

Elmshorn, 18. Juli 1873.