Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1874
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0007
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0037
LOG Titel: Der Feuerbach'sche Satz von den Berührungskreisen des ebenen Dreiecks
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Der Feuerbach'sche Satz von den Berührungskreisen des ebenen Dreiecks.

Von H. Schröter zu Breslau.

Der schöne Satz der Elementargeometrie:

Die vier Kreise, welche die Seiten eines geradlinigen Dreiecks berühren, werden selbst von ein und demselben Kreise berührt, welcher durch die Mitten der Dreiecksseiten geht,

wurde von Feuerbach*) aus den berechneten Werthen der Radien und Mittelpunktsabstände jener beim Dreieck auftretenden Kreise geschlossen; Steiner erwähnt ihn an zwei Orten**), ohne ihn zu beweisen. Die in neuerer Zeit gegebenen Beweise des Satzes***) gehen meist aus algebraisch-trigonometrischen Rechnungen hervor, deren Complication zur Einfachheit des Resultates in Widerspruch steht. Auch der in den Baltzer'schen Elementen mitgetheilte geometrische Beweis von Casey stützt sich auf algebraische Umformungen und entbehrt trotz seiner scheinbaren Kürze wesentlich der Anschaulichkeit. Ein synthetischer Beweis ist kürzlich von Hrn. Lappe†) gegeben worden, der aus den Gesetzen der Kreisberührung hervorgeht. Trotz seiner Einfachheit lässt er doch die eigentliche Natur der vollständigen hiebei in Betracht kommenden Figur nicht in dem Maasse hervortreten, dass der Feuerbach'sche Satz als eine natürliche Folge der Eigenschaften der Figur erschiene, indem z. B. die Berührungspunkte jener Kreise nicht zum Vorschein kommen. Einer solchen Forderung entspricht mehr die von Hrn. C. W. Baur††) ohne Beweis gegebene Construction der gemeinschaftlichen Tangenten jener sich berührenden Kreise; aber ein von Hrn. Schubert†††) hinzugefügter Beweis der-

---

*) K. W. Feuerbach: Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, Nürnberg 1822, S. 38.

**) Annales de mathématiques p. J. D. Gergonne t. XIX. p. 86 und: „Die geometrischen Constructionen etc. von J. Steiner, Berlin 1833, S. 55.

***) Vgl. Baltzer's Elemente der Mathematik Bd. II., S. 92 und S. 312.

†) Borchardt's Journal Bd. 71, S. 387.

††) Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys. Jahrgang XII., S. 354.

†††) Dieselbe Zeitschrift, Jahrg. XVI., S. 83.

selben erfordert wiederum einen unverhältnissmässigen Aufwand von Rechnung.

Einen aus einer allgemeineren Auffassung des Satzes hervorgehenden Beweis im Zusammenhange mit der Erweiterung derjenigen Eigenschaften des Dreiecks, welche sich auf die sogenannten merkwürdigen Punkte desselben beziehen, habe ich an einem andern Orte*) gegeben; doch ist derselbe nicht ganz elementarer Natur; er setzt vielmehr die Kenntniss der Theorie der Kegelschnitte voraus.

Der in den folgenden Blättern enthaltene Beweis unterwirft die vollständige Figur der vier Berührungskreise eines Dreiecks einer näheren Untersuchung, wobei einige bisher nicht bemerkte Eigenschaften derselben zum Vorschein kommen und führt den Feuerbach'schen Satz auf den Satz von Ptolemäus zurück, jene bekannte Eigenschaft des Kreisvierecks oder Bedingung dafür, dass vier Punkte auf einem Kreise liegen. Insofern diese algebraischer Natur ist, ist es allerdings auch unser Beweis des Feuerbach'schen Satzes. Alle übrigen Lagen- und Grössen-Verhältnisse ergeben sich aber in ungezwungener Weise aus unmittelbarer Anschauung der Figur und führen mit einer gewissen naturgemässen Nothwendigkeit zu dem Feuerbach'schen Satze. Eine weitere Betrachtung der interessanten Figur eröffnet dem Liebhaber elementar-geometrischer Forschung ein empfehlenswerthes Feld für dieselbe und verspricht noch manches neue Resultat.

---

1. Einem ebenen Dreieck ABC, dessen Seiten

$$BC = a \quad CA = b \quad AB = c$$

bezeichnet werden (siehe die Figur**)) lassen sich vier Kreise $m m_1 m_2 m_3$ einschreiben, welche die Dreiecksseiten berühren; der eine m liegt innerhalb des Dreiecks, die drei andern $m_1 m_2 m_3$ ausserhalb desselben und jeder der letzteren berührt nur eine Dreiecksseite zwischen den Ecken, die beiden andern in ihren Verlängerungen, nämlich:

m_1	berührt	die	Seite	a	zwischen	den	Ecken	des	Dreiecks	
m_2	"	"	"	b	"	"	"	"	"	
m_3	"	"	"	c	"	"	"	"	"	.

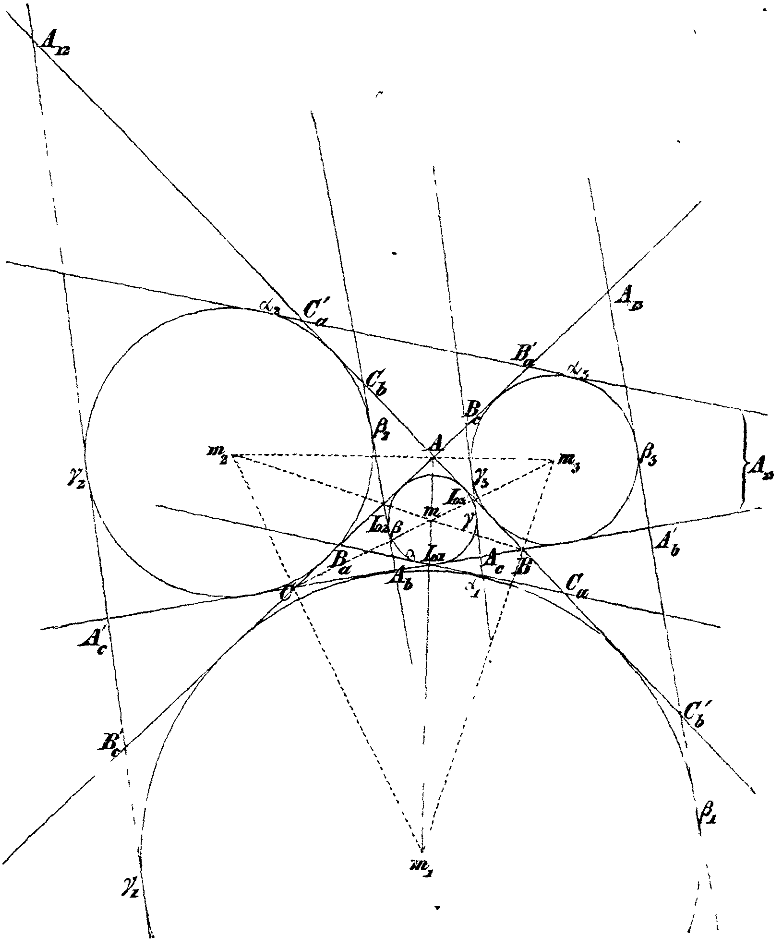
Fassen wir die vollständige Figur dieser vier Kreise $m m_1 m_2 m_3$ in's Auge, so lassen sich dieselben in 6 Paare je zweier ordnen; jedes

---

*) Borchardt's Journal Bd. 68. S. 208.

**) Die Figur enthält nicht alle im Texte eingeführten Buchstaben; die fehlenden sind absichtlich weggelassen, um die Auffassung der Figur zu erleichtern und können ohne Mühe vom Leser hinzugedacht werden.

Paar hat die drei Seiten des Dreiecks zu drei gemeinschaftlichen Tangenten, mithin noch eine *vierte* gemeinschaftliche Tangente. Diese 6 vierten gemeinschaftlichen Tangenten treten dreimal als äussere, dreimal als innere auf und laufen dreimal paarweise (je eine äussere



mit einer inneren) parallel. Denn die vier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise bilden allemal ein symmetrisches Vierseit mit paarweise gleichen Seiten; nun sind die Dreiecksseiten b und c

äussere gem. Tang. für das Kreispaar m und m_1

innere „ „ „ „ „ m_2 „ m_3.

Die dritte Dreiecksseite a dagegen ist

innere gem. Tang. für das Kreispaar m und m_1
äussere „ „ „ „ „ m_2 „ m_3,

folglich schneidet die vierte (innere) gemeinschaftliche Tangente für das Kreispaar m und m_1 die Stücke b und c auf den Dreiecksseiten AC und AB verwechselt ab und ebenso die vierte (äussere) gemeinschaftliche Tangente des Kreispaares m_2 und m_3 nach entgegengesetzter Richtung hin; folglich läuft die letztere mit der ersteren parallel; es laufen also parallel:

vierte (innere) gem. Tang. d. Kreispaars:		vierte (äussere) gem. Tang. d. Kreispaars:
$m\,m_1$	und	$m_2\,m_3$
$m\,m_2$	„	$m_3\,m_1$
$m\,m_3$	„	$m_1\,m_2$.

Es ist auch leicht zu sehen, *welchen* drei Richtungen diese drei Tangentenpaare parallel laufen; denkt man sich die Höhen in dem Dreieck ABC gezogen und merkt die Fusspunkte derselben, so sind die Abschnitte auf zwei in einer Ecke zusammenstossenden Dreiecksseiten von dieser Ecke bis zu den Höhenfusspunkten hin verwechselt den Seiten proportional gerade so, wie die von jenen zwei parallelen Tangenten gebildeten Abschnitte verwechselt die Seiten selbst sind; folglich laufen die obigen drei Tangentenpaare parallel den Seiten des Höhenfusspunkts-Dreiecks und wir haben folgenden Satz:

Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei noch eine vierte gemeinschaftliche Tangente, welche dreimal als äussere, dreimal als innere gemeinschaftliche Tangente auftritt; diese 6 Geraden laufen dreimal paarweise parallel mit den Seiten desjenigen Dreiecks, welches von den Höhenfusspunkten des ursprünglichen gebildet wird und zwar sind jedesmal eine äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente parallel.

2. Von nicht geringerem Interesse, als die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Kreise unseres Kreisquadrupels sind die *Berührungspunkte* derselben; diese zerfallen in zwei Gruppen: 1) die Berührungspunkte der Kreise mit den ursprünglichen Dreiecksseiten (und deren Verlängerungen); 2) die Berührungspunkte der neuen 6 vierten gemeinschaftlichen Tangenten; zu jeder der beiden Gruppen gehören 12 Punkte und diese zweimal 12 Punkte ordnen sich zu Paaren in folgender Art:

Die Dreiecksseite BC oder a werde berührt von den vier Kreisen

$$m\,m_1\,m_2\,m_3$$

beziehungsweise in den Punkten

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3;$$

die Dreiecksseite CA oder b beziehungsweise in den Punkten

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3\,;$$

die Dreiecksseite AB oder c beziehungsweise in den Punkten

$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_2\,{}^{*)}.$$

---

*) Diese 12 Berührungspunkte bieten auch an sich eigenthümliche Lagenverhältnisse dar, welche wir, da sie zu dem eigentlichen Zweck, den wir im Auge haben, nicht nothwendig erörtert zu werden brauchen, nur kurz angeben wollen. Diese 12 Berührungspunkte bilden vier den Berührungskreisen einbeschriebene Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_3\,, \end{array}$$

deren Seiten einander durchschneiden in 54 Punkten, welche sich in gewisse Gruppen vertheilen:

Die vier Geraden:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3$$

bilden ein Rechteck, dessen Seiten parallel laufen den beiden Halbirungslinien des Winkels C und dessen Ecken einerseits auf einem Kreise liegen, welcher AB zum Durchmesser hat und anderseits auf den beiden Paaren von Halbirungsstrahlen der Dreieckswinkel A und B.

In ganz gleicher Weise bilden die vier Geraden:

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2 \quad \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3$$

ein zweites Rechteck und

$$\mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2 \quad \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3$$

ein drittes Rechteck, dessen Ecken in gleicher Weise, wie oben angegeben, gelegen sind.

Die 12 Ecken dieser drei Rechtecke erscheinen in anderer Weise gepaart als Grenzpunkte (Nullkreise) *der sechs Kreisschaaren, welche durch je zwei der vier Berührungskreise bestimmt werden.* (Zwei Kreise haben bekanntlich ein gemeinschaftliches Tripel conjugirter Punkte, von denen einer immer im Unendlichen, die beiden andern auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte liegen und diejenigen beiden ausgezeichneten Punkte sind, welche Grenzpunkte oder Nullkreise heissen und durch welche alle die beiden gegebenen rechtwinklig schneidenden Kreise hindurchgehen.) Da sich die vier Kreise $m m_1 m_2 m_3$ in sechs Paare ordnen lassen und jedes Paar zwei Grenzpunkte liefert, so erhalten wir 12 solcher Punkte, welche die Ecken der obigen drei Rechtecke sind.

Rechnen wir noch die 6 unendlich-entfernten Schnittpunkte der Seiten dieser Rechtecke hinzu, so haben wir in dieser ersten Gruppe 18 Punkte von den im Ganzen oben angegebenen 54 Punkten.

Eine zweite Gruppe bilden die folgenden zwölf Schnittpunkte, welche in vier Quadrupel zerfallen.

Die vier Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1) \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1) \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3) \quad (\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3)$$

liegen auf der durch A gehenden Höhe des Dreiecks ABC. Die vier Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2) \quad (\mathfrak{b}\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2) \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_3) \quad (\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1)$$

liegen auf der durch B gehenden Höhe des Dreiecks ABC und endlich liegen die vier Schnittpunkte:

Die beiden Kreise m und m_1 haben nun zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten, welche in den Punkten $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1$ und eine innere gemeinschaftliche Tangente, welche in den Punkten $\mathfrak{a}\;\mathfrak{a}_1$ berührt; die vierte innere gemeinschaftliche Tangente wird daher den Kreis m in einem Punkte α und den Kreis m_1 in einem Punkte α_1 berühren, so dass $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{a}_1$ und α_1 symmetrisch liegende Punkte sind. Die 12 Berührungspunkte der 6 neuen gemeinschaftlichen Tangenten ordnen sich in solcher Art für

die Kreispaare	Berührungspunkte
$m\;m_1$	$\alpha\;\alpha_1$
$m\;m_2$	$\beta\;\beta_2$
$m\;m_3$	$\gamma\;\gamma_3$
$m_2\;m_3$	$\alpha_2\;\alpha_3$
$m_3\;m_1$	$\beta_3\;\beta_1$
$m_1\;m_2$	$\gamma_1\;\gamma_2$

und zu jedem deutschen Berührungspunkte wird ein bestimmter (symmetrisch liegender) griechischer mit gleichem Index, d. h. auf demselben Kreise zugehören.

Hiernach haben wir auf dem

Kreise	m	drei neue	Berührungspunkte	$\alpha\;\beta\;\gamma$
„	m_1	„ „	„	$\alpha_1\;\beta_1\;\gamma_1$
„	m_2	„ „	„	$\alpha_2\;\beta_2\;\gamma_2$
„	m_3	„ „	„	$\alpha_3\;\beta_3\;\gamma_3$

oder in jedem der vier Kreise ein neues Dreieck, gebildet von diesen Berührungspunkten. Die Lage dieser vier neuen Dreiecke zu dem ursprünglichen Dreieck ABC ist eine sehr einfache; sie sind nämlich sämmtlich mit demselben *ähnlich und ähnlich-liegend.*

In der That die Dreiecksseiten AB und AC sind gleichartige gemeinschaftliche Tangentenpaare (d. h. beide äussere oder beide innere) nur für zwei Kreispaare, nämlich für

$$m\,m_1 \text{ und } m_2\,m_3.$$

Dagegen für die übrigen vier Kreispaare ungleichartige gemeinschaftliche Tangentenpaare und ein solches ungleichartiges Tangentenpaar bildet allemal dieselben Winkel miteinander, wie die beiden übrig-

---

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{a},\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{b}_3)\quad (\mathfrak{c}\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3)\quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_2)\quad (\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2)$$

auf der durch C gehenden Höhe des Dreiecks ABC.

Die übrigen 24 Durchschnittspunkte, welche noch von den oben angegebenen 54 Punkten übrig bleiben, scheinen kein so einfaches Gesetz hinsichtlich ihrer Lage erkennen zu lassen.

bleibenden gemeinschaftlichen Tangenten, die natürlich auch ungleichartig sind; folglich bildet die dritte Dreiecksseite BC mit den vier Tangenten:

$$\begin{array}{l} \beta \; \beta_2 \\ \gamma \; \gamma_3 \\ \beta_3 \cdot \beta_1 \\ \gamma_1 \; \gamma_2, \end{array}$$

von denen je zwei einander parallel sind, gleiche Winkel (A). Da aber am Kreise m die Tangente BC gleiche Winkel bildet mit den Tangenten in β und γ, so läuft $\beta\gamma$ parallel BC und der Berührungspunkt $\mathfrak{a}$ ist die Mitte des Bogens $\beta\gamma$; ebenso läuft $\gamma\alpha$ parallel CA u. s. f. $\beta_1\gamma_1$, $\beta_2\gamma_2$, $\beta_3\gamma_3$ parallel BC etc.

Wir haben also folgenden Satz:

Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei noch eine vierte gemeinschaftliche Tangente, welche in je zwei Punkten die Kreise berührt; von den dadurch erhaltenen 12 Berührungspunkten liegen auf jedem der vier Kreise drei und bilden je ein Dreieck, welches mit dem ursprünglichen ähnlich und ähnlichliegend ist.

Ferner haben wir die Lage der deutschen Berührungspunkte zu den griechischen als eine solche erkannt, dass auf dem Kreise m

$$\begin{array}{llllllll} \mathfrak{a} & \text{gleich} & \text{weit} & \text{absteht} & \text{von} & \beta & \text{und} & \gamma \\ \mathfrak{b} & ,, & ,, & ,, & ,, & \gamma & ,, & \alpha \\ \mathfrak{c} & ,, & ,, & ,, & ,, & \alpha & ,, & \beta \end{array}$$

und ebenso auf den drei übrigen Kreisen, z. B. auf dem Kreise m_1

$\mathfrak{a}_1$ gleich weit ab von β_1 und γ_1 u. s. f.

In Bezug auf die perspectivisch-ähnliche Lage der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ mit dem ursprünglichen Dreieck ABC bemerken wir noch (was aus der Lage der Kreise $m m_1 m_2 m_3$ zum Dreieck ABC folgt), dass die Dreieckspaare:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 & \text{und} & ABC \\ \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2 & ,, & ABC \\ \alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3 & ,, & ABC \end{array}$$

in directer Lage, dagegen

$$\alpha\,\beta\,\gamma \quad \text{und} \quad ABC$$

in inverser Lage ähnlich-liegend sich befinden; fassen wir dagegen die Mitten der Seiten des ursprünglichen Dreiecks auf:

$$\begin{array}{lllll} A_1 & \text{die} & \text{Mitte} & \text{von} & BC \\ B_1 & ,, & ,, & ,, & CA \\ C_1 & ,, & ,, & ,, & AB \end{array}$$

so bilden $A_1 B_1 C_1$ ein neues, ebenfalls dem ursprünglichen ähnliches und ähnlich-liegendes Dreieck, aber in inverser Lage; daher werden umgekehrt die Dreieckspaare:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 & \text{und} & A_1\,B_1\,C_1 \\ \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2 & ,, & A_1\,B_1\,C_1 \\ \alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3 & ,, & A_1\,B_1\,C_1 \end{array}$$

in inverser Lage, dagegen

$$\alpha\,\beta\,\gamma \quad \text{und} \quad A_1\,B_1\,C_1$$

in directer Lage ähnlich-liegend sich befinden. Wir wollen die perspectivischen Centra dieser letzteren Dreieckspaare durch $T\,T_1\,T_2\,T_3$ bezeichnen, d. h.

$$\begin{array}{llll} \alpha\ A_1 & \beta\ B_1 & \gamma\ C_1 & \text{treffen sich in } T \\ \alpha_1\,A_1 & \beta_1\,B_1 & \gamma_1\,C_1 & \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad T_1 \\ \alpha_2\,A_1 & \beta_2\,B_1 & \gamma_2\,C_1 & \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad T_2 \\ \alpha_3\,A_1 & \beta_3\,B_1 & \gamma_3\,C_1 & \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad T_3 \end{array}$$

und wir werden später (5) die nahe Beziehung erkennen, in welcher diese vier Punkte $T\,T_1\,T_2\,T_3$ zum Feuerbach'schen Satze stehen.

3. Untersuchen wir jetzt die Lage, welche die 6 neuen vierten gemeinschaftlichen Tangenten zu den drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks einnehmen. Hiezu müssen wir die *Schnittpunkte* jener Geraden mit diesen in zweckmässiger Weise bezeichnen. Von den $6 \cdot 3 = 18$ Schnittpunkten, in welchen die 6 neuen Geraden von den drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks getroffen werden, sondern sich sofort 6 ab, welche Aehnlichkeitspunkte der 6 Kreispaare sind, während die übrigen 12 Schnittpunkte nicht Aehnlichkeitspunkte sind. Die Lage der ersteren 6 Aehnlichkeitspunkte ist folgende: Sie zerfallen in drei äussere und drei innere:

$$\begin{array}{lllll} A_{23} & \text{äusserer} & \text{Aehnlichkeitspunkt} & \text{des Kreispaars} & m_2\,m_3 \\ A_{31} & ,, & ,, & ,, \quad ,, & m_3\,m_1 \\ A_{12} & ,, & ,, & ,, \quad ,, & m_1\,m_2 \\ J_{01} & \text{innerer} & \text{Aehnlichkeitspunkt} & \text{des Kreispaars} & m\ m_1 \\ J_{02} & ,, & ,, & ,, \quad ,, & m\ m_2 \\ J_{03} & ,, & ,, & ,, \quad ,, & m\ m_3\,. \end{array}$$

Nun liegen nach bekannten Sätzen der Kreistheorie:

$$\begin{array}{ll} A_{12}\,A_{13}\,A_{23} & \text{in einer Geraden} \\ J_{01}\,J_{02}\,A_{12} & ,, \quad ,, \quad ,, \\ J_{02}\,J_{03}\,A_{23} & ,, \quad ,, \quad ,, \\ J_{03}\,J_{01}\,A_{31} & ,, \quad ,, \quad ,, \end{array}$$

folglich lässt sich der Satz aussprechen:

Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei eine Dreiecksecke zum Aehnlichkeitspunkt, also ausserdem noch einen zweiten Aehnlichkeitspunkt. Diese 6 neuen Aehnlichkeitspunkte zerfallen in drei äussere und drei innere und liegen zu je dreien auf vier geraden Linien, indem einmal die drei äusseren und dreimal ein äusserer mit zwei inneren Aehnlichkeitspunkten auf je einer Geraden liegt.

Es bleiben uns die übrigen 12 Schnittpunkte zu betrachten; diese erscheinen paarweise mit einer Dreiecksecke zusammengenommen als die Ecken von 6 neuen Dreiecken, welche mit dem ursprünglichen congruent sind und jedesmal eine Ecke und die in derselben zusammenstossenden zwei Seiten gemeinschaftlich haben, aber verwechselt und nach beiderlei entgegengesetzten Richtungen hin abgetragen. Die Dreiecksseite BC wird nun von den 6 vierten gemeinschaftlichen Tangenten in 6 Punkten getroffen, von denen zwei (J_{01} und A_{23}) als Aehnlichkeitspunkte bereits abgesondert sind; diese bilden ein Paar, indem überhaupt die sechs Schnittpunkte in drei Paare zerfallen nach den drei Paaren von Parallelen, in welche die sechs vierten gemeinschaftlichen Tangenten zerfallen; das eine Paar besteht also aus zwei Aehnlichkeitspunkten; die beiden übrigen Paare von Punkten, in welchen BC getroffen wird, erhalten wir durch die

die vierte (innere) gem. Tang. des Kreispaars $m\,m_2$	und	die vierte (äussere) gem. Tang. des Kreispaars $m_1\,m_3$

wir bezeichnen diese Schnittpunkte beziehlich durch

$$A_b \text{ und } A_b'$$

und zweitens durch

die vierte (innere) gem. Tang. des Kreispaars $m\,m_3$	und	die vierte (äussere) gem. Tang. des Kreispaars $m_1\,m_2$;

wir bezeichnen diese Schnittpunkte beziehlich durch

$$A_c \text{ und } A_c',$$

so dass wir also auf der Geraden BC die vier Schnittpunkte:

$$A_b A_b' A_c A_c'$$

haben, wobei die ungestrichenen auf eine innere, die gestrichenen auf eine äussere vierte gemeinschaftliche Tangente sich beziehen.

In gleicher Weise haben wir auf der Geraden CA die vier Schnittpunkte:

$$B_c B_c' B_a B_a'$$

und auf der Geraden AB die vier Schnittpunkte:

$$C_a C_a' C_b C_b' .$$

Diese zwölf Punkte gruppiren sich nun in folgender Weise zu den oben genannten 6 einander congruenten Dreiecken:

$$ABC$$

$$AB_a C_a \qquad A_b BC_b \qquad A_c B_c C$$

$$AB_a' C_a' \qquad A_b' BC_b' \qquad A_c' B_c' C.$$

Aus der Lage dieser Dreiecke zu einander erkennen wir unmittelbar, wie sich die Abstände der neuen Punkte von einander durch die Dreiecksseiten abc ausdrücken, nämlich:

$$\begin{aligned} a+b+c &= A_b' A_c' = B_c' B_a' = C_a' C_b' \\ a+b-c &= A_b A_c' = B_c' B_a = C_a C_b \\ a+c-b &= A_b' A_c = B_c B_a = C_a C_b' \\ b+c-a &= A_b A_c = B_c B_a' = C_a' C_b\,. \end{aligned}$$

Die Mitten dieser 12 Strecken sind die 12 deutschen Berührungspunkte (2)*).

4. Die oben betrachteten 6 Aehnlichkeitspunkte

$$A_{12}\, A_{23}\, A_{31}\, J_{01}\, J_{02}\, J_{03}\,,$$

welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, sind nichts anderes, als die Schnittpunkte der drei Paare von Halbirungsstrahlen der Winkel und Nebenwinkel des ursprünglichen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten desselben; da sich bekanntlich die Abschnitte auf den Seiten, welche durch die Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks gebildet werden, verhalten wie die anliegenden Seiten selbst,

*) In gleicher Weise wie die gemeinschaftlichen Tangenten können wir auch die *Potenzlinien* der sechs Kreispaare unseres Quadrupels von Berührungskreisen aufsuchen und erkennen dann ein theilweise schon von Hrn. J. Lappe (a. a. O.) bemerktes Resultat, welches aber für den Feuerbach'schen Satz hier nicht verwerthet wird:

Die vier Mittelpunkte $mm_1m_2m_3$ bilden ein besonderes vollständiges Viereck, welches man passend ein *gleichseitig-hyperbolisches Viereck* nennen kann, nämlich eine solche Gruppe von vier Punkten, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist und welche bekanntlich die Grundpunkte eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln bilden. Das Diagonaldreieck dieses vollständigen Vierecks ist das ursprüngliche Dreieck ABC.

Die sechs Potenzlinien der Kreispaare unseres Quadrupels von Berührungskreisen schneiden sich zu je dreien in vier Punkten (Potenzpunkten), welche ebenfalls ein gleichseitig-hyperbolisches vollständiges Viereck bilden. Das Diagonaldreieck desselben wird gebildet von den Mitten $A_1B_1C_1$ *der Seiten des ursprünglichen Dreiecks.*

Die beiden, einerseits von den Mittelpunkten $mm_1m_2m_3$ *und andererseits von den Potenzpunkten gebildeten gleichseitig-hyperbolischen Vierecke sind ähnlich und ähnlich-liegend; sie haben den Schwerpunkt des Dreiecks* ABC *zu ihrem perspectivischen Centrum, befinden sich in inverse-ähnlicher Lage und verhalten sich in ihren linearen Dimensionen* $= 1 : 2$.

so folgen unmittelbar die Werthe der Abstände unserer Aehnlichkeitspunkte von den Ecken des Dreiecks.

Nehmen wir das Dreieck allgemein als ein ungleichseitiges an und bezeichnen die Seiten nach der Grösse, so dass

$$a > b > c$$

ist, so ergeben sich folgende Werthe:

$$A\,J_{03} = \frac{bc}{a+b}\,; \quad B\,J_{01} = \frac{ca}{b+c}\,; \quad C\,J_{02} = \frac{ab}{c+a}$$

$$B\,J_{03} = \frac{ac}{a+b}\,; \quad C\,J_{01} = \frac{ba}{b+c}\,; \quad A\,J_{02} = \frac{cb}{c+a}$$

$$A\,A_{12} = \frac{bc}{a-b}\,; \quad B\,A_{23} = \frac{ca}{b-c}\,; \quad C\,A_{13} = \frac{ab}{a-c}$$

$$B\,A_{12} = \frac{ac}{a-b}\,; \quad C\,A_{23} = \frac{ba}{b-c}\,; \quad A\,A_{13} = \frac{cb}{a-c}\,.$$

Es liegen nun die drei Punkte

$$J_{01} \quad J_{02} \quad A_{12}$$

in einer Geraden und es verhalten sich

$$\frac{C\,J_{01}}{C\,J_{02}} = \frac{a+c}{b+c} = \frac{C\,A_b'}{C\,B_a'}\,,$$

folglich wird die Verbindungslinie $A_b'\,B_a'$ mit dieser Aehnlichkeitslinie $J_{01}J_{02}$ parallel laufen; ebenso verhalten sich

$$\frac{B\,J_{01}}{B\,A_{12}} = \frac{a-b}{b+c} = \frac{B\,A_c}{B\,C_a'}\,,$$

folglich ist auch die Verbindungslinie $A_c\,C_a'$ mit derselben Aehnlichkeitslinie $J_{01}\,A_{12}$ parallel, und endlich verhalten sich

$$\frac{A\,J_{02}}{A\,A_{12}} = \frac{a-b}{a+c} = \frac{A\,B_c}{A\,C_b}\,,$$

folglich läuft auch die dritte Verbindungslinie $B_c\,C_b'$ mit der Aehnlichkeitslinie $J_{02}\,A_{12}$ parallel; also laufen die drei Verbindungslinien

(1) $\qquad A_b'\,B_a' \qquad A_c\,C_a' \qquad B_c\,C_b'$

mit einander und mit der Aehnlichkeitslinie

$$J_{01}\,J_{02}\,A_{12}$$

parallel; in ganz derselben Weise erkennen wir, dass die Verbindungslinien

(2) $\qquad B_c'\,C_b' \qquad B_a\,A_b' \qquad C_a\,A_c'$

mit der Aehnlichkeitslinie

$$J_{02}\,J_{03}\,A_{23}$$

und die Linien

(3) $\qquad C_a'\,A_c' \qquad C_b\,B_c' \qquad A_b\,B_a'$

mit der Aehnlichkeitslinie

$$J_{03}\,J_{01}\,A_{31}$$

endlich die Linien

(4) $A_b B_a$ $A_c C_a$ $B_c C_b$

mit der Aehnlichkeitslinie

$$A_{12} A_{13} A_{23}$$

parallel laufen; demgemäss lässt sich folgender Satz aussprechen:

Die zwölf Schnittpunkte:

$$A_b A_b' \; A_c A_c' \; B_c B_c' \; B_a B_a' \; C_a C_a' \; C_b C_b'$$

liegen viermal paarweise auf je drei Parallelstrahlen, welche selbst zu den Seiten desjenigen vollständigen Vierseits parallel laufen, dessen Ecken die sechs Aehnlichkeitspunkte

$$A_{12} A_{23} A_{31} J_{01} J_{02} J_{03}$$

sind.

Sehr einfacher Art ist auch das Verhältniss, in welchem die Längen dieser je drei parallelen Strecken zu einander stehen; da nämlich BB_a' und CC_a' parallel laufen und sich wie $c:b$ verhalten, da ferner BA_b' und CA_c gleich gerichtet sind und ebenfalls sich wie $c:b$ verhalten, so ist nicht nur $B_a' A_b'$ mit $C_a' A_c$ parallel, sondern sie verhalten sich auch wie $c:b$; dasselbe Raisonnement gilt für alle übrigen Paare unserer parallelen Strecken und wir erhalten daher folgende Verhältnisse:

$$\begin{aligned}
B_c' C_b' : C_a A_c' : A_b' B_a &= a : b : c \\
B_c' C_b : C_a' A_c' : A_b B_a' &= a : b : c \\
B_c C_b' : C_a' A_c : A_b' B_a' &= a : b : c \\
B_c C_b' : C_a A_c : A_b B_a &= a : b : c,
\end{aligned}$$

d. h.: *Bei jedem der vier Tripel von je drei parallelen Strecken zwischen den obigen zwölf Schnittpunkten verhalten sich die Längen solcher drei parallelen Strecken zu einander wie die Seiten des ursprünglichen Dreiecks.*

5. Fassen wir eines von diesen vier Tripeln je dreier paralleler Strecken näher ins Auge, z. B.

$$B_c' C_b' \quad C_a A_c' \quad A_b' B_a,$$

und bemerken, dass der Berührungspunkt $\mathfrak{c}_1$ die Mitte ist zwischen den Punkten C_b' und C_a (3), so wird eine durch $\mathfrak{c}_1$ zu der Richtung der drei Parallelen gezogene neue Parallele auch die Strecke $A_c' B_c'$ halbiren müssen. Aus der symmetrischen Lage der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise m_1 und m_2 geht aber hervor, dass diese neue Parallele gleich ist und symmetrisch liegt mit der Verbindungslinie des Berührungspunktes γ_1 und des Mittelpunktes C_1 der Dreiecksseite AB; folglich haben wir die Verhältnisse:

$$\frac{\gamma_1 C_1}{B_c' C_b'} = \frac{a+b}{2a} \text{ und ebenso } \frac{\beta_1 B_1}{B_c' C_b'} = \frac{a+c}{2a},$$

oder auch

$$\frac{\gamma_1 C_1}{C_a A_c'} = \frac{a+b}{2b} \text{ und ebenso } \frac{\alpha_1 A_1}{C_a A_c'} = \frac{b-c}{2b}.$$

Hieraus ergeben sich also die Verhältnisse:

(1) $$\alpha_1 A_1 : \beta_1 B_1 : \gamma_1 C_1 = (b-c) : (c+a) : (a+b)$$

und in ganz gleicher Weise die folgenden:

(2) $$\alpha_2 A_1 : \beta_2 B_1 : \gamma_2 C_1 = (b+c) : (a-c) : (a+b),$$

(3) $$\alpha_3 A_1 : \beta_3 B_1 : \gamma_3 C_1 = (b+c) : (c+a) : (a-b)$$

und endlich:

(4) $$\alpha A_1 : \beta B_1 : \gamma C_1 = (b-c) : (a-c) : (a-b).$$

Diese einfachen metrischen Verhältnisse beziehen sich auf die Lage des Mittendreiecks $A_1 B_1 C_1$ und der vier Dreiecke:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha & \beta & \gamma, \end{array}$$

von welchen wir oben (2) gesehen, dass sie sämmtlich mit $A_1 B_1 C_1$ ähnlich und ähnlich-liegend sind; da also die Dreiecke $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $A_1 B_1 C_1$ ähnlich und ähnlich-liegend sind, mithin die Verbindungsstrahlen

$$\alpha_1 A_1 \quad \beta_1 B_1 \quad \gamma_1 C_1$$

sich in einem Punkte T_1 treffen, dem perspectivischen Centrum der beiden ähnlichen Figuren, so stehen auch die Strahlen

$$\alpha_1 A_1 \quad \beta_1 B_1 \quad \gamma_1 C_1$$

in demselben Verhältnisse zu einander, wie die Strahlen

$$T_1 A_1 \quad T_1 B_1 \quad T_1 C_1,$$

also verhalten sich auch

$$T_1 A_1 : T_1 B_1 : T_1 C_1 = (b-c) : (c+a) : (a+b);$$

die Seiten des Mittendreiecks $A_1 B_1 C_1$ verhalten sich aber zu einander

$$B_1 C_1 : C_1 A_1 : A_1 B_1 = a : b : c$$

und bilden mit den vorigen drei Strahlen zusammen die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks $A_1 B_1 C_1 T_1$; wegen der vorhin ermittelten Verhältnisse hat aber die Identität:

$$a(b-c) + c(a+b) = b(a+c)$$

zur Folge

$$A_1 T_1 \cdot B_1 C_1 + C_1 T_1 \cdot A_1 B_1 = B_1 T_1 \cdot A_1 C_1$$

und dies sagt nach dem Satze von Ptolemäus aus, dass die vier Punkte $A_1 B_1 C_1 T_1$ auf einem Kreise liegen; aus gleichem Grunde liegen auch die vier Punkte $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 T_1$ auf einem Kreise (m_1); der Punkt

T_1 ist nun ein Aehnlichkeitspunkt der beiden den Dreiecken $A_1 B_1 C_1$ und $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ umschriebenen Kreise, weil die Dreiecke ähnlich und ähnlich-liegend sind; wenn aber ein Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise auf diesen beiden Kreisen selbst liegt, so müssen sie sich offenbar in demselben berühren.

Der um das Mittendreieck $A_1 B_1 C_1$ gelegte Kreis M_1 berührt also den Kreis m_1 im Punkte T_1, und in gleicher Weise folgt aus den Identitäten:

$$\begin{aligned} c(a+b) + b(a-c) &= a(b+c) \\ b(a+c) + c(a-b) &= a(b+c) \\ a(b-c) + c(a-b) &= b(a-c), \end{aligned}$$

dass der Kreis M_1 auch die drei andern Berührungskreise $m_2\, m_3$ und m in den Punkten $T_2\, T_3$ und T berührt, und aus der oben (2) hervorgehobenen inversen oder directen Aehnlichkeitslage der Dreiecke $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ und $\alpha \beta \gamma$ zum Dreieck $A_1 B_1 C_1$ folgt, dass die Kreise

$$\left.\begin{array}{llllll} M_1 & \text{und} & m_1 & \text{in} & T_1 \\ M_1 & ,, & m_2 & ,, & T_2 \\ M_1 & ,, & m_3 & ,, & T_3 \end{array}\right\}$$

sich ausschliessend berühren,

$$M_1 \text{ aber } m \text{ in } T$$

einschliessend berührt.

Dies ist der Feuerbach'sche Satz, dessen Herleitung nun auch die Construction der Berührungspunkte und die geometrische Bedeutung derselben hervortreten lässt.

Breslau, den 14. Januar 1874.