

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1874

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0007

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0038

LOG Titel: Nachtrag zu dem ?zweiten Aufsätze über Nicht-Euklidische Geometrie" (diese Annalen Bd. VI., S. 112 ff.)

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Nachtrag zu dem „zweiten Aufsätze über Nicht-Euklidische Geometrie“ (diese Annalen Bd. VI., S. 112 ff.).

VON FELIX KLEIN IN ERLANGEN.

In dem in der Ueberschrift genannten Aufsätze behandelte ich neben anderen Fragen, zu denen die neueren Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie Anlass geben, insbesondere auch die, ob v. Staudt's nur auf die Betrachtung sogenannter Lagenverhältnisse gegründeter Aufbau der projectivischen Geometrie vom Parallelenaxiome unabhängig gemacht werden könne. Ich hatte dabei Gelegenheit (vergl. daselbst § 5. des zweiten Theiles) eine (auch sonst bemerkte) Lücke in v. Staudt's Betrachtungen zur Sprache zu bringen, die freilich keine nähere Beziehung zu der Frage nach dem Einflusse des Parallelenaxioms besitzt. Es handelt sich nämlich um den Nachweis, dass eine projectivische Beziehung zweier Grundgebilde erster Stufe vollkommen festgelegt ist, sowie man drei Paare entsprechender Elemente kennt. Nach der bei v. Staudt eingeführten Definition der projectivischen Beziehung sind die unbegrenzt vielen Elemente, welche man auf den beiden Grundgebilden, bez. aus den drei gegebenen durch wiederholte Construction des vierten harmonischen Elementes ableiten kann, ohne Weiteres als entsprechend gesetzt. Von Staudt unternimmt es daher zu zeigen, dass diese unendlich vielen Elemente das Grundgebilde völlig überdecken und ihr Entsprechen deshalb das Entsprechen aller Elemente nach sich zieht. Dies Verfahren implicirt bereits eine Voraussetzung, die im Folgenden (§ 3.) noch weiter gekennzeichnet werden soll, nämlich die: dass es gestattet sei, aus dem Verhalten der jedenfalls discreten Reihe der harmonischen Elemente auf das Verhalten des ganzen continuirlichen Gebietes zu schliessen, dem sie angehören. Aber die Lücke in v. Staudt's Beweisgang, von der in meinem Aufsätze gehandelt wurde, betrifft den ersten Theil des von ihm eingeschlagenen Weges. Um zu zeigen, dass die harmonischen Elemente das Grundgebilde völlig überdecken, d. h. dass in jedem gegebenen Segmente des Grundgebildes Elemente liegen, welche man, von drei beliebig gegebenen Elementen ausgehend, durch fortgesetzte

Construction des vierten harmonischen Elementes wirklich erreichen kann, macht v. Staudt einfach darauf aufmerksam, dass die Reihe der harmonischen Elemente nicht plötzlich abbrechen kann. Aber es ist dadurch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass diese Reihe, obgleich unbegrenzt, doch in gewisse Segmente des Grundgebildes nicht eindringt, und der Beweis, der zu erbringen war, ist also noch unvollständig.

Dem gegenüber glaubte ich in dem genannten „zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie“*) ausdrücklich folgende zwei Voraussetzungen einführen zu sollen, die freilich dort, wo überhaupt die ganze Frage mehr beiläufig berührt wird, nicht mit der Bestimmtheit bezeichnet und auseinandergehalten sind, wie es hier geschehen soll. Ich verlangte zunächst:

Wenn auf einem Gebilde erster Stufe eine unendliche Reihe von Elementen gegeben ist, die in ein Segment des Gebildes nicht eindringt, so soll es gestattet sein, von einem Grenzelemente, dem die Reihe zustrebt, als einem völlig bestimmten Elemente zu sprechen.

Sodann aber insonderheit mit Bezug auf die Reihe der harmonischen Elemente:

*Sollten in der Reihe der harmonischen Elemente solche Grenzelemente auftreten**), so dürfen sie der Reihe zugezählt werden.*

Dass man unter Annahme dieser Voraussetzungen durch geeignete Fortsetzung der Reihe der harmonischen Elemente in jedes Segment hineingelangen kann, beweist man genau so, wie v. Staudt die Unmöglichkeit eines plötzlichen Abbrechens der Reihe zeigt. Es genügt nämlich, daran zu erinnern, dass das zu drei getrennten Elementen harmonische vierte Element mit keinem der drei Elemente zusammenfällt, und, je nach der Anordnung, die man den drei Elementen ertheilen mag, einem jeden der drei Segmente angehört, in welche das Grundgebilde durch die drei Elemente getheilt wird.

Aber andererseits ist auch die oben bezeichnete zweite Frage bereits erledigt, die sich darauf bezieht, ob man aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente auf das Entsprechen der übrigen Elemente

*) In ganz ähnlicher Weise berührte ich diese Frage bereits in einer Mittheilung an die Göttinger Societät, vgl. Göttinger Nachrichten, 1871, S. 290.

**) Ob solche Elemente wirklich auftreten oder nicht, hängt von der Art und Weise ab, vermöge deren man die harmonischen Elemente fortsetzt, was auf sehr mannigfache Weise geschehen kann, weil immer drei beliebige Elemente unter den schon construirten zur weiteren Construction verwandt werden können. Im Texte soll nicht gezeigt werden, dass solche Elemente überhaupt nicht auftreten, wenn man die Reihe der harmonischen Elemente in bestimmter Weise unendlich fortsetzt, sondern nur, dass sie jedesmal wieder überschritten werden können, wenn man die Art der Fortsetzung ändert, und dass sie also für die Gesamtheit der harmonischen Elemente keine Grenze constituiren.

schliessen kann. Man wird nämlich auf Grund unserer ersten Voraussetzung jedes Element als Grenzelement einer unendlichen Reihe harmonischer Elemente auffassen können*), und, gemäss der zweiten Voraussetzung, demjenigen Elemente entsprechend setzen, welches auf dem anderen Grundgebilde durch den nämlichen Grenzprocess definiert wird.

Nach Veröffentlichung meines Aufsatzes erhielt ich eben mit Bezug auf diese Ueberlegungen Zuschriften von den Herren G. Cantor, Lüroth und Zeuthen, und ich verdanke es hauptsächlich der Correspondenz mit diesen Herren, wenn ich in der gegenwärtigen Mittheilung in der Lage bin, den Gegenstand, um den es sich handelt, sehr viel deutlicher zu bezeichnen, als ich es damals gethan hatte. Insbesondere haben mir die Herren Lüroth und Zeuthen unabhängig von einander einen Beweis mitgetheilt, vermöge dessen es gelingt, auch ohne Einführung der zweiten oben genannten Voraussetzung zu beweisen, dass man mit der Reihe der harmonischen Elemente in jedes Segment des Grundgebildes eindringen kann. Es benutzt dieser Beweis den (oben schon in einer Note hervorgehobenen) Umstand, dass die Reihe der harmonischen Elemente, weil immer drei beliebige der bereits construirten zur Construction verwandt werden dürfen, in sehr mannigfacher Weise fortgesetzt werden kann. Ich werde weiter unten (§ 2.) diesen Beweis, durch dessen Mittheilung der gegenwärtige Nachtrag zu meinem früheren Aufsatze wesentlich veranlasst ist, in Herrn Zeuthen's Darstellung**) geben. Durch ihn wird also die zweite oben aufgestellte Voraussetzung zunächst überflüssig; sie tritt erst wieder ein, wenn es sich darum handelt, aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente auf das Entsprechen aller Elemente zu schliessen. Sie kann dann, worauf mich besonders Hr. Lüroth aufmerksam gemacht hat, durch verschiedene äquivalente ersetzt werden. Der dritte Paragraph des Folgenden mag diesen Betrachtungen gewidmet sein. Ich wende mich zunächst dazu, die erste oben eingeführte Voraussetzung noch näher zu bezeichnen und ihren Zusammenhang mit ähnlichen Voraussetzungen, die in der gewöhnlichen (metrischen) Geometrie nöthig sind, darzulegen.

*) Dies sollte eigentlich explicite bewiesen werden. Ich glaube die betreffenden Ueberlegungen hier aber um so mehr unterdrücken zu können, als das Operiren mit Würfeln, wie zu diesem Zwecke systematisch würde untersucht werden müssen, von Hrn. Lüroth neuerdings eine gründliche Darstellung erfahren hat (Göttinger Nachrichten Nov. 1873).

**) Hr. Lüroth hatte bei seinen Ueberlegungen im Wesentlichen dieselben Momente benutzt.

§ 1.

Von der Stetigkeit der Gebilde in der projectivischen Geometrie.

Was man in der gewöhnlichen Geometrie meint, wenn man sagt, irgend ein Gebilde erster Stufe, also etwa eine Punktreihe, sei *stetig*, ist neuerdings von verschiedenen Seiten her mit besonderer Schärfe auseinander gesetzt worden*). Man legt durch die Forderung der Stetigkeit dem betreffenden Gebilde eben dieselbe Eigenschaft bei, die durch unsere erste Voraussetzung (welche sich in ganz ähnlicher Form in den Schriften von G. Cantor und Dedekind findet**) formulirt ist. Der Unterschied ist nur der, dass wir diese Voraussetzung ausdrücklich auch in die projectivische Geometrie einführen. Wir können also auch folgendermassen sagen:

Die in der gewöhnlichen Geometrie vorausgesetzte Stetigkeit der Gebilde erster Stufe soll auch in der projectivischen Geometrie zu Grunde gelegt werden.

Es bringt das mit sich oder ist geradezu gleichbedeutend damit, dass in der projectivischen Geometrie, wie in der gewöhnlichen, das analytische Gegenbild eines Gebildes erster Stufe die einfach unendliche Zahlenreihe ist. Auch in der projectivischen Geometrie können also Segmente eines Gebildes erster Stufe *gemessen* werden, nur dass nicht, wie in der gewöhnlichen Geometrie, eine Massbestimmung vor allen anderen als besonders naturgemäss³ auszeichnet wird.

In dem letzteren Umstande liegt scheinbar eine gewisse Schwierigkeit hinsichtlich der Einführung der Zahlen in die projectivische Geometrie, insofern man nämlich von vornherein nur dann von zwei Segmenten sagen kann: das eine sei kleiner als das andere, wenn das eine ganz in dem anderen enthalten ist. Aber bei der Feststellung des Grenzbegriffs kommen eben nur solche Segmente in Vergleich, die in dieser Relation stehen, dass das eine ein Stück des anderen ist.

Eine entsprechende Voraussetzung der Stetigkeit, wie sie nunmehr für Gebilde erster Stufe eingeführt wurde, wird in der gewöhnlichen wie in der projectivischen Geometrie zu machen sein, wenn es sich um Gebilde höherer Stufe handelt. Doch braucht das hier wohl nicht näher entwickelt zu werden. Auch braucht hier nicht auf die Frage eingegangen zu werden, ob und wie weit wir zu diesen Vor-

*) Vgl. Heine, die Elemente der Functionenlehre, Borchardt's Journal Bd. 74; G. Cantor, über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen Bd. V; sowie besonders Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig 1872).

**) Ich bin kurz vor dem Erscheinen dieser Schriften von Hrn. Weierstrass auf diese Voraussetzung als eine in der gewöhnlichen Geometrie nothwendige aufmerksam gemacht worden.

aussetzungen*) axiomatischen Charakters durch unsere räumliche Anschauung gezwungen sind.

§ 2.

Der Lüroth-Zeuthen'sche Beweis.

Ich erlaube mir weiterhin den Lüroth-Zeuthen'schen Beweis mit Zeuthen's Worten wiederzugeben, und bemerke hinsichtlich der beigeetzten Zeichnungen nur, dass dieselben allein die Aufeinanderfolge der in Betracht kommenden Punkte veranschaulichen sollen. Es kommt in der That beim Beweise nur auf diese Aufeinanderfolge an, womit eine Verallgemeinerung angedeutet sein mag, die man diesen Betrachtungen zu Theil werden lassen kann. Hr. Zeuthen schreibt:

„Si AB harm. CD , c'est à dire, si A et B divisent harmoniquement CD ,

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

A et B restant fixes, C et D ne pourront se mouvoir que dans des sens inverses entre eux; mais si A et C restent fixes, B et D ne pourront se mouvoir que dans le même sens. Il s'agit de démontrer qu'il n'existe pas dans une série fondamentale complète**) des segments ou des angles où l'on ne puisse entrer par des constructions successives du quatrième point harmonique, les trois premiers éléments étant donnés.“

„Considérons comme v. Staudt une droite complète (dont les deux bouts sont liés l'un à l'autre par un point à l'infini) et désignons par AB , CD les segments qui se trouvent à droite (par exemple) du premier point A , C . . . , sans demander s'ils contiennent le point à l'infini ou non. Essayons d'attribuer à la droite un segment FG , qui ne contienne aucun point du système déterminé par les constructions successives du quatrième point harmonique, et supposons qu'on ait donné à ce segment l'extension la plus grande possible***). Alors, si F n'est pas lui-même un point du système, tout segment extérieur à FG et limité par F , quelque petit qu'il soit, contiendra des points du système, et de même pour le point G .

$$\frac{A}{B} = \frac{F}{H} = \frac{D}{L} = \frac{G}{K} = \frac{C}{J}$$

*) Hr. Cantor und Dedekind bezeichnen das Postulat der Stetigkeit der Gebilde erster Stufe auch ausdrücklich als ein *Axiom*.

**) „unbegrenztes Grundgebilde erster Stufe“, vgl. diese Annalen Bd. VI, S. 137.

***). Damit dies in allen Fällen möglich sei, wird man die in § 1. besprochene Voraussetzung der Stetigkeit vorausschicken müssen.

Soit A un point quelconque du système et soient H et J les points satisfaisant aux conditions

$$(1) \quad AH \text{ harm. } FG,$$

$$(2) \quad AG \text{ harm. } FJ.$$

En désignant par B un nouveau point du système placé sur le segment AF convenablement près de F , on peut obtenir que le point K déterminé par

$$(3) \quad AH \text{ harm. } BK$$

se trouve sur le segment GJ si près de G que le segment KJ contient un point du système. (Car au cas contraire on pourrait, en laissant A et H rester fixes, rapprocher K de G jusqu'à ce que non seulement K a passé un point du système, mais aussi B , qui se meut dans le sens inverse, a gagné de nouveau un point du système.) Désignons par C un point du système qui se trouve sur KJ . Alors, comme le point L déterminé par

$$(4) \quad AL \text{ harm. } BJ$$

se trouve sur le segment HG (voir (3) et (2)), le point D déterminé par

$$(5) \quad AD \text{ harm. } BC,$$

se trouvant sur le segment HL (voir (3) et (4)), se trouve aussi sur le segment FG . Or A, B, C étant des points du système, D en est aussi un. Donc etc. . . . —“

„Si F est un point du système on peut y placer le point B , et si en même temps G appartient au système (supposition de v. Staudt), on peut y placer le point C .“

§ 3.

Von der Stetigkeit der projectivischen Zuordnung.

Wenn es sich um eine systematische Darstellung der Grundlagen der projectivischen Geometrie handelt, wird man an die Voraussetzung des § 1. zunächst den Lüroth-Zeuthen'schen Beweis anschliessen und erst dann die in der Einleitung an zweiter Stelle eingeführte Voraussetzung folgen lassen. Dieselbe ist übrigens auch dadurch mit der ersteren ungleichwerthig, dass sie keinen axiomatischen Charakter besitzt, vielmehr als ein Zusatz zu *Staudt's Definition* der Projectivität aufgefasst werden muss.

Dass ein solcher Zusatz in der That nothwendig ist, dass man also aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente noch nicht auf das Entsprechen aller Elemente schliessen darf, mag man sich an der folgenden, analog gebildeten Aufgabe überlegen, bei der, entsprechend ihrer rein analytischen Fassung, eine Beurtheilung leichter scheint:

Eine Function sei für alle rationalen Werthe ihres Argumentes gegeben, für die irrationalen aber nicht, welche Werthe wird sie für die letzteren annehmen? Man kann diese Frage nicht nur nicht beantworten, wenn nichts Weiteres über die Function bekannt ist, sondern man kann nicht einmal behaupten, dass die Function für irrationale Werthe des Arguments existirt.

Die Forderung, wie sie durch unsere zweite Voraussetzung ausgesprochen worden ist, kann prägnanter als die Forderung der *Stetigkeit* der projectivischen *Beziehung* bezeichnet werden. Sie verlangt, dass einem Elemente, das in einer kleinsten Strecke zwischen zwei Elementen liegt, deren entsprechende Elemente bekannt sind, ein Element zugeordnet sein soll, das eben zwischen diesen letzteren liegt. Mit Beziehung auf die Staudt'sche Terminologie und unter besonderer Beachtung der projectivischen Beziehung kann man daher auch so sagen: *Vier Elementen des einen Gebildes, die in einem Sinne liegen, sollen vier Elemente des anderen entsprechen, die ebenfalls in einem Sinne liegen.*

Bei Gebilden mit mehr Dimensionen wird man bei Definition der projectivischen Beziehung in ganz entsprechender Weise die Stetigkeit dieser Beziehung zu verlangen haben, wie es hier für Gebilde erster Stufe geschah. Andererseits sei auch ausdrücklich hervorgehoben, dass in allen Fällen, in denen die projectivische Beziehung durch einmalige oder wiederholte Projection gewonnen wird, diese Stetigkeit der Beziehung von vornherein gegeben ist.

Erlangen, im Januar 1874.