Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1874
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0007
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0039
LOG Titel: Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die neuere Algebra und die Ausdehnunglehre.

Von Hermann Grassmann in Stettin.

Die neuere Algebra hat durch die vereinten Bemühungen der hervorragendsten Mathematiker gegenwärtig eine Ausbildung erlangt, welche sie fast mit allen Zweigen der Mathematik in die engste Beziehung setzt und auch diese mit ihren Ideen befruchtet. Und in dem Mittelpunkte aller dieser Bestrebungen stand seit einer Reihe von Jahren der seinen zahlreichen Freunden und der gesammten Wissenschaft so früh entrissene Clebsch, der fast nach allen Seiten hin diese Bestrebungen anregte und förderte, und die vereinzelten hier und dort gewonnenen Resultate zu verweben und durch neue und umfassende Gedanken zu beleben und auf neue viel verheissende Bahnen zu lenken verstand. Durch ihn bin auch ich wieder auf das Gebiet der neueren Algebra zurückgeführt und zu dem Versuche angeregt worden, dasselbe mit dem nahe angrenzenden Gebiete der Ausdehnungslehre in näheren Zusammenhang zu setzen. Indem ich die Principien dieser Wissenschaft, wie ich sie in meinen Werken von den Jahren 1844 und 1862 bearbeitet habe, auf die Probleme der Invariantentheorie anwandte, gelangte ich zu einem Satze, der, wie ich glaube, als ein Fundamentalsatz dieser Theorie angesehen werden muss, und den ich seinem wesentlichen Inhalte nach hier sogleich aufstelle.

§ 1.

Fundamentalsatz.

In diesem Satze bedeutet m die Anzahl der Einheiten (in der geraden Linie 2, in der Ebene 3 u. s. w.), aus denen die der Betrachtung unterworfenen extensiven Grössen numerisch abgeleitet werden, k die Anzahl sämmtlicher Zahlcoefficienten, welche in dem zu Grunde liegenden Vereine algebraischer Formen vorkommen und welche sämmtlich als von einander unabhängig betrachtet werden.

Alle Formen (Invarianten, Covarianten, Zwischenformen u. s. w.), *welche einer gegebenen algebraischen Form oder einem Vereine solcher*

Formen entspriessen, lassen sich aus $k - m + 1$ *von einander unabhängigen Stammformen als rationale Functionen ableiten, und zwar als ganze Functionen, wenn man eine gewisse ganze Function* u *dieser Stammformen gleich* 1 *setzt. Man erhält diese Stammformen, indem man in den gegebenen Formen statt der extensiven Variabeln* x m *extensive Variabeln* $x_1, \cdots x_m$ (statt jedes einzelnen Factors eine beliebige derselben) *einführt, von denen eine, etwa* x_1, *mit* x *gleich, und eine andere, etwa* x_m, *durch die übrigen und durch eine der gegebenen Formen in der Art bestimmt ist, dass sie in Bezug auf diese Form Centrum erster Ordnung zu den Polen* $x_1, \cdots x_{m-1}$ *wird und ausserdem* $u = (x_1 x_2 \cdots x_m) = 1$ *ist. Wenn dann eine beliebige dem gegebenen Vereine entsprossene Form* Π *als ganze Function der Stammformen dargestellt werden soll, so gelingt dies unmittelbar, indem man in* Π *statt der Einheiten* $e_1, \cdots e_m$, *von denen die* k *Coefficienten abhängen,* $x_1, \cdots x_m$ *einführt, eine der veränderlichen Zahlen, von denen* x $(= x_1)$ *abhängt* (etwa x_{11}) *gleich* 1 *und die übrigen Null setzt.*

Auch wenn diese invarianten Bildungen Π nur symbolisch gegeben sind, lässt sich die Reduction auf die Stammformen aufs leichteste ausführen.

Dadurch, dass man $u = 1$ setzt, kann die Homogenität aufhören, aber man kann sie stets sofort wieder herbeiführen, wenn man u so oft (statt 1) als Factor hinzufügt, bis die Homogenität erreicht ist.

Ferner gilt dieser Satz nicht nur, wenn die gegebenen Formen einfach-algebraische, sondern auch, wenn sie alle oder einige unter ihnen Connexe oder Complexe, oder aus beiden beliebig zusammengesetzte Formen sind, z. B. Formen, welche in der Ebene von Punkten und Linien (Annalen VI, 203), im Raume von Punkten, Linien (oder Summen derselben) und Ebenen, überhaupt in einem Gebiete m^{ter} Stufe von Grössen erster, zweiter bis $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe abhängen (Annalen VII, 43).

In allen diesen Fällen kann man statt der $k - m + 1$ Stammformen auch beliebige andere, aber von einander unabhängige invariante Bildungen (Invarianten, Covarianten u. s. w.) einführen, welche dem gegebenen Vereine entsprossen sind; aber es hört dann, wenn man statt aller Stammformen die üblichen invarianten Bildungen einführen will, schon bei ternären Formen die Rationalität auf und man muss dann zu einer grösseren Zahl jener Bildungen seine Zuflucht nehmen, wenn man die Rationalität bewahren will.

Diese Bemerkungen werden genügen, um die Bedeutung und die Anwendbarkeit des neuen Fundamentalsatzes vorläufig festzustellen. Für das nähere Verständniss ist es erforderlich, einige Grundbegriffe aus der Ausdehnungslehre aufzunehmen und sie mit der üblichen Symbolik (die ich unverändert beibehalte) in Beziehung zu setzen; doch

beschränke ich mich auf das für den vorliegenden Zweck Unentbehrlichste, indem ich im Uebrigen auf die Paragraphen meiner Ausdehnungslehre von 1844 ($\mathfrak{A}_1$) und auf die Nummern der Bearbeitung derselben von 1862 ($\mathfrak{A}_2$) verweise.

§ 2.

Grundbegriffe der Ausdehnungslehre und ihre Anwendung auf die neuere Algebra.

Den extensiven Grössen, welche die Ausdehnungslehre behandelt, liegt eine Reihe von Grössen zu Grunde, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, d. h. von denen sich keine aus den übrigen numerisch ableiten oder, anders ausgedrückt, keine sich als lineare Function der übrigen mit Zahlcoefficienten darstellen lässt, und die ich, sofern sie als ursprünglich zu Grunde liegend betrachtet werden, *Einheiten* erster Stufe genannt habe. Als solche können z. B. im Raume 4 beliebige Punkte betrachtet werden, die nicht in einer Ebene liegen. Es seien $e_1, \cdots e_m$ diese Einheiten, so nenne ich Grösse erster *Stufe* jede Grösse $x_1 e_1 + \cdots x_m e_m$, wo $x_1, \cdots x_m$ Zahlgrössen sind, und die Gesammtheit dieser Grössen nenne ich ein Gebiet m^{ter} Stufe ($\mathfrak{A}_1$ 13; $\mathfrak{A}_2$ 1 ff.).

Das *Product* zweier Grössen erster Stufe nenne ich ein *combinatorisches*, wenn für dasselbe die Gesetze $(aa) = 0$, $(ab) = -(ba)$ gelten, und nenne diese Producte und die aus ihnen numerisch ableitbaren Grössen Grössen zweiter Stufe. Entsprechend bei 3 und mehr Factoren erster Stufe, bei denen gleichfalls das Product Null wird, wenn zwei Factoren gleich werden, und entgegengesetzten Werth annimmt, wenn man zwei derselben vertauscht. ($\mathfrak{A}_1$ 28, $\mathfrak{A}_2$ 52 ff.)

Man erhält so Grössen erster bis m^{ter} Stufe, während die Zahlen als Grössen nullter Stufe erscheinen. Grössen von höherer als m^{ter} Stufe kann es in einem Gebiete m^{ter} Stufe nicht geben, da das combinatorische Product von $m + 1$ Grössen erster Stufe schon ersichtlich Null wird. Aber auch die Grössen m^{ter} Stufe liefern keine eigenthümlichen neuen Grössen. Denn sie verhalten sich wie blosse Zahlen, indem $(a_1 a_2 \cdots a_m) = (e_1 e_2 \cdots e_m)\,\Delta$ ist, wenn Δ die Determinante der Zahlenreihen bezeichnet, durch welche $a_1, \cdots a_m$ aus $e_1, \cdots e_m$ abgeleitet sind ($\mathfrak{A}_1$ 45, $\mathfrak{A}_2$ 62 ff.). Schon hieraus ist ersichtlich, dass diese Bezeichnung eines combinatorischen Productes von m Factoren mit der der symbolischen Producte in der Invariantentheorie im Wesen übereinstimmt. Um diese Producte (von m Factoren) als wirkliche Zahlen darzustellen, genügt es, das combinatorische Product der m Einheiten erster Stufe $(e_1 e_2 \cdots e_m) = 1$ zu setzen.

Jede Grösse p^{ter} Stufe ist offenbar aus Einheiten p^{ter} Stufe, welche

die Combinationen ohne Wiederholung aus den m Einheiten erster Stufe zur p^{ten} Classe darstellen, numerisch ableitbar. So wie aber die Grössen m^{ter} Stufe vermöge obiger Gleichung $(e_1 e_2 \cdots e_m) = 1$ als Grössen nullter Stufe sich darstellen, so entsprechen sich überhaupt die Grössen p^{ter} und $m - p^{\text{ter}}$ Stufe (immer im Ganzen m Einheiten erster Stufe vorausgesesetzt). Um dies Entsprechen klar hervortreten zu lassen, setze ich einem combinatorischen Producte von Einheiten erster Stufe das combinatorische Product der übrigen Einheiten erster Stufe reciprok und zwar mit der Zeichenbestimmung, dass, wenn an jenes Product dies *reciproke* (ergänzende $\mathfrak{A}_1$ 138, $\mathfrak{A}_2$ 89 ff.) angeschlossen wird, und dadurch beide zu *einem* Producte von m Einheiten verbunden werden, dies gesammte Product gleich $+1$ wird. Dadurch ist dann zu jeder Grösse ihre reciproke, die aus den reciproken Einheiten durch dieselben Zahlen abgeleitet ist, wie jene aus den ihrigen, genau bestimmt. Alle Gesetze der Ausdehnungslehre lassen sich dann unmittelbar auf die reciproken Grössen übertragen. Als Beispiel wähle ich die Grössen in einem Gebiete vierter Stufe im Raume. Hier treten hervor die Grössen erster Stufe als Punkte, die Grössen zweiter Stufe als Linien und Summen von Linien ($\mathfrak{A}_1$ 113, 122; $\mathfrak{A}_2$ 285), die Grössen dritter Stufe als Ebenen; während die Grössen vierter Stufe, da sie Raumtheile darstellen, sich in Zahlen verwandeln, wenn man einen Raumtheil $(e_1 e_2 e_3 e_4) = 1$ setzt. Die Grössen erster Stufe sind aus den 4 Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4, die Grössen dritter Stufe aus den 4 zu jenen reciproken Einheiten r_1, r_2, r_3, r_4, die Grössen zweiter Stufe aus 6 Einheiten, nämlich $(e_2 e_3), (e_3 e_1), (e_1 e_2)$ und den reciproken $(e_1 e_4), (e_2 e_4), (e_3 e_4)$ ableitbar, und ist X aus diesen 6 Einheiten durch die Zahlen $x_1, \cdots x_6$ abgeleitet, so stellt eine Function dieser Zahlen einen von X beschriebenen Complex dar, welcher ein lineärer Complex wird, wenn $(XX) = 0$ ist ($\mathfrak{A}_1$ 124; $\mathfrak{A}_2$ 286 vgl. 393 und vor allem Klein's gedankenreiche Arbeiten im 2^{ten} und 5^{ten} Bande der Annalen).

Für die Invariantentheorie sind von besonderem Interesse die combinatorischen Producte von einer Grösse $(m-1)^{\text{ter}}$ und einer Grösse erster Stufe, welche wieder, da die Gesammtzahl der Factoren erster Stufe, die in ihnen enthalten sind, m beträgt, als Zahlen erscheinen. Ist x eine Grösse erster Stufe $= x_1 e_1 + \cdots x_m e_m$ (wo $x_1, \cdots x_m$ Zahlen sind) und a eine Grösse $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe $= a_1 r_1 + \cdots a_m r_m$, wo $r_1, \cdots r_m$ die zu $e_1, \cdots e_m$ reciproken Einheiten und $a_1 \cdots a_m$ Zahlen sind, so ist nach obigem $(e_i r_i) = 1$, hingegen $(e_i r_k) = 0$, wenn i von k verschieden ist, also

$$(ax) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_m x_m = a_x ,$$

letzteres, wie unten gezeigt wird, nach der üblichen symbolischen Bezeichnung.

Ferner ist für den Begriff der invarianten Bildungen noch der Begriff der *linealen Aenderung* ($\mathfrak{A}_2$ 71—76) von Wichtigkeit. Ich sage nämlich, eine Grösse einer Reihe von Grössen ändere sich lineal, wenn sie in eine andere Grösse übergeht, welche sich von jener nur dadurch unterscheidet, dass zu ihr eine mit einem beliebigen Zahlfactor (μ) versehene andere Grösse der Reihe hinzutritt, also z. B. A sich in $A + \mu B$ verwandelt, wenn A und B beliebige Grössen jener Reihe sind, und ich sage, die Grössenreihe sei lineal geändert, wenn sie beliebigen und beliebig wiederholten linealen Aenderungen der darin enthaltenen Grössen unterworfen ist. Es leuchtet sogleich ein, dass ein combinatorisches Product von Grössen erster Stufe sich nicht ändert, wenn seine Factorenreihe lineal geändert wird; aber ich habe auch ($\mathfrak{A}_2$ 76) gezeigt, dass von 2 gleichen combinatorischen Producten jedes in das andere durch lineale Aenderung seiner Factorenreihe übergeführt werden kann (die Factoren als Grössen erster oder auch $m - 1^{\text{ter}}$ Stufe vorausgesetzt).

Hiernach kann man *alle invarianten Bildungen* (Invarianten, Covarianten u. s. w.) als *solche* definiren, *die bei linealer Aenderung der Einheiten ungeändert bleiben*, eine Definition, die ihrer Einfachheit wegen wohl vor der gewöhnlichen den Vorzug verdient, zumal da sie ohne weiteres auch alle symbolischen Bildungen als invariant nachweist.

Wenn sich nun die Einheiten $e_1, \cdots e_m$ in beliebige aus ihnen numerisch ableitbare Grössen $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_m$ verwandeln, aber so, dass $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m) = (e_1 e_2 \cdots e_m) = 1$ ist, und

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11} e_1 + \cdots a_{1m} e_m \\ &\vdots \\ \varepsilon_m &= a_{m1} e_1 + \cdots a_{mm} e_m \end{aligned}$$

$$x = x_1 e_1 + \cdots x_m e_m = \xi_1 \varepsilon_1 + \cdots \xi_m \varepsilon_m$$

ist, so wird, wie man sogleich durch Einführung der Werthe der ε in die letzte Gleichung sieht,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} \xi_1 + \cdots a_{m1} \xi_m \\ &\vdots \\ x_m &= a_{1m} \xi_1 + \cdots a_{mm} \xi_m , \end{aligned}$$

d. h. die Substitutionen, durch welche die neuen Einheiten aus den alten, und die, durch welche die alten Variabeln aus den neuen hervorgehen, sind zu einander transponirt, und es lassen sich daher die invarianten Eigenschaften ebenso gut auf die Einheiten als auf die veränderlichen Zahlgrössen gründen; die Substitutionsdeterminante ist in beiden Fällen gleich und zwar unter obiger Voraussetzung gleich 1. Die extensive Variable x bleibt dabei dieselbe und kann also als *Covariante erster Stufe* aufgefasst werden.

Schon diese nahe liegende Betrachtungsweise führt vermöge der durch Hermite eingeführten typischen Darstellung unmittelbar zu einem dem obigen Fundamentalsatze entsprechenden Satze, während für die Ableitung des Fundamentalsatzes selbst noch die Idee der Polaren (Centralen) zu Hülfe genommen werden muss.

Ausser der combinatorischen Multiplication ist nun für die neuere Algebra von gleicher Wichtigkeit diejenige Multiplication, welche in ihren Gesetzen vollkommen mit der algebraischen Multiplication der Zahlgrössen übereinstimmt, und welche ich daher, auch wenn die Factoren Grössen höherer Stufen sind, die *algebraische* genannt und auch wie diese bezeichnet habe. Ihr Begriff und die Anwendung desselben auf Functionen findet sich ausführlich entwickelt in *n.* 348—427 der Ausdehnungslehre von 1862 und dem wesentlichen Grundgedanken nach dargelegt auf S. 266 ff. der Ausdehnungslehre von 1844. Ist nämlich $f = f(x_1, x_2, \cdots x_m)$ eine beliebige Function der m veränderlichen Zahlgrössen $x_1, \cdots x_m$, und ist

$$x = x_1 e_1 + \cdots x_m e_m,$$

wo $e_1, \cdots e_m$ Einheiten von erster oder auch höherer Stufe sind, $r_1, \cdots r_m$ die reciproken Einheiten, so ist nach dem Obigen $(e_i r_i) = 1$, hingegen $(e_i r_k) = 0$, wenn i von k verschieden ist; also ist $(x r_1) = x_1$, $(x r_2) = x_2$, u. s. w. also:

$$f(x_1, x_2, \cdots x_m) = f([x r_1], [x r_2], \cdots [x r_m]),$$

also eine Function einer einzigen, aber extensiven Variablen ($\mathfrak{A}_2$ 350). Ist insbesondere f eine homogene Function n^{ten} Grades, so kommt in $f([x r_1], \cdots [x r_m])$ die extensive Variable x in jedem Gliede n-mal als Factor vor.

Entfernt man daher x aus diesen Verbindungen $(x r_i)$, und setzt an die Stelle, wo x gestanden hat, irgend ein Zeichen, welches die dadurch entstandene Lücke darstellt, und setzt nun den so aus

$$f([x r_1], \cdots [x r_m])$$

hervorgehenden Ausdruck $= a$, so wird

$$f = a x^n \quad (\mathfrak{A}_2\ 358).$$

Ich habe diese Lücke Anfangs ($\mathfrak{A}_1$ Seite 266 ff.) durch leer gelassene Klammern, später ($\mathfrak{A}_2$ 353 ff.) durch l bezeichnet; das Bequemste ist, sie durch irgend eine bestimmt gewählte extensive Variable zu bezeichnen, und ich werde dazu allemal x selbst wählen, so dass also $a = a x^n$ ist und $a y^n$ aus $a x^n$ (oder a) dadurch hervorgeht, dass man überall y statt x setzt. Sollen nun zu diesem Ausdrucke $a = a x^n = f([x r_1], \cdots [x r_m])$ verschiedene extensive Factoren, die jedoch mit x von gleicher Stufe sein müssen, und deren Anzahl p nicht grösser als n sein darf, hinzutreten, so hat man (nach $\mathfrak{A}_2$ 353) diese auf alle möglichen Arten

in p der Lücken (also hier statt x) einzuführen, und die Summe der so erhaltenen Ausdrücke durch ihre Anzahl, die hier $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ beträgt, zu dividiren. Nachdem dies festgesetzt ist, ergiebt sich leicht, (A$_2$ 360 ff.), dass für diese hinzutretenden Factoren die Gesetze der gewöhnlichen algebraischen Multiplication gelten, namentlich auch, dass

$$ax^n = a(x_1e_1 + \cdots x_me_m)^n = x_1^n \cdot ae_1^n + \frac{n}{1}x_1^{n-1}x_2ae_1^{n-1}e_2 + \cdots,$$

insbesondere wenn $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ ist

$$ax^2 = x_1^2ae_1^2 + x_2^2ae_2^2 + x_3^2ae_3^2 + 2x_1x_2ae_1e_2 + 2x_1x_3ae_1e_3 + 2x_2x_3ae_2e_3$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3$$

ist, wenn ae_1^2 mit a_{11}, ae_1e_2 mit a_{12} u. s. w. bezeichnet wird, kurz ax^n ist dasselbe, was symbolisch durch a_x^n bezeichnet wird, während $\frac{d^p ax^n}{dx_1^\alpha dx_2^\beta \cdots} = n(n-1)\cdots(n-p+1)ae_1^\alpha e_2^\beta \cdots$ ist. Ist x ein Punkt in der Ebene, so wird $ax^n = 0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung; dann drückt die Gleichung $ax^{n-1}y = 0$ aus, dass (nach der Poncelet'schen Benennung) y harmonisches Centrum (erster Ordnung) zu der Curve $ax^n = 0$ (nach der ursprünglichen Benennung zu den n Durchschnitten der Geraden xy mit dieser Curve) in Bezug auf den Pol x ist; daher habe ich (Theorie der Centralen in Crelle's Journal Band 24 und 25) den Ort von x bei festem y die erste Polare von y und den Ort von y bei festem x die erste *Centrale* von x genannt*), und diese erste Centrale, die ich schlechthin Centrale nenne, spielt in der Invariantentheorie eine schon in dem Fundamentalsatze erkennbare Hauptrolle.

Im Allgemeinen werde ich $ax^{n-p}y^p$, als Function von y betrachtet, die p^{te} Centrale von x und, als Function von x betrachtet, die p^{te} Polare von y in Bezug auf die Function ax^n nennen, so dass also die p^{te} Polare der $n-p^{\text{ten}}$ Centrale identisch ist. Endlich bemerke ich noch, dass auch die Complexe durch eine Function der Form $ax^nx'^{n'}x''^{n''}\cdots$ dargestellt werden können, wo x eine Grösse erster Stufe, x' zweiter, x'' dritter Stufe ist u. s. w.

§ 3.

Symbolik.

Die angestellten Betrachtungen führen uns hinüber zu der symbolischen Bezeichnung, wie sie zuerst von Aronhold (Borch. J. Bd. 55)

*) Vgl. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1872, S. 567 ff. Gelegentlich bemerke ich, dass, was ich dort Wendelinie genannt habe, mit der von Clebsch so genannten Polardeterminante (Borch. Journ. 59. S. 125) zusammenfällt, was mir entgangen war.

in die neuere Algebra eingeführt, und von Clebsch und in Anschluss an ihn von Gordan zu der hohen Stufe von Vollkommenheit gebracht ist, welche sie gegenwärtig zu einer unentbehrlichen oder doch äusserst bequemen Waffe gemacht hat, um neue Gebiete mathematischen Wissens zu erobern. Die Bezeichnungen, die ich im vorhergehenden § angewandt habe, und die sich aus dem Wesen der Ausdehnungsgrössen mit unabweislicher Nothwendigkeit ergaben, und die ich daher kurz die organischen Bezeichnungen nennen will, sollen daher keineswegs jene vortreffliche Symbolik verdrängen oder ersetzen, sondern nur sie ergänzen, indem sie einerseits jener Symbolik stets eine reale, anschauliche Bedeutung unterlegen, andrerseits da eintreten, wo jene nicht ausreicht. Es sei zuerst die reale Bedeutung der symbolischen Producte $(abc\cdots)$ betrachtet, wo a, b, $\cdots$ sich auf die Functionen ax^α, bx^β, u. s. w. beziehen, von denen aber auch mehrere einander gleich sein können. Dann bedeutet $(abc\cdots)$ zunächst die gleichfalls symbolische Determinante $\Sigma \mp a_1 b_2 c_3 \cdots$, und der ganze Ausdruck, sofern er nur solche symbolische Producte enthält, gewinnt erst dadurch eine reale Bedeutung, dass man ihn nach Potenzen der $a_1, a_2, \cdots b_1, b_2 \cdots$ entwickelt und die Potenzen der a zusammenordnet, ebenso die der b u. s. w.; alsdann hat man statt $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots$ zuletzt den Coefficienten $a_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots}$ von ax^n zu setzen. Dieser ist nach dem obigen $ae_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \cdots$; also kann man $(abc\cdots) = \Sigma \mp ae_1 \cdot be_2 \cdot ce_3 \cdots$ setzen, d. h. $(abc\cdots)$ bedeutet, dass man in die zu a, b, c, $\cdots$ gehörigen Functionen die Schaar der Einheiten $e_1, \cdots e_m$ in allen möglichen Folgen (jede Einheit statt *eines* Factors x der Function) eintreten lässt, dem so erhaltenen Product das $+$ oder $-$-Zeichen vorsetzt, je nachdem das combinatorische Product der Einheiten in dieser Folge $+1$ oder -1 ist, und diese Producte addirt; ich will dies so ausdrücken, dass ich sage, man habe dann in $abc\cdots$ die Schaar der Einheiten *harmonisch* eingeführt. Diese Einführung wird dann bei den folgenden symbolischen Producten, die in dem ganzen Ausdrucke als Factoren vorkommen, als schon vollzogen vorausgesetzt, so dass also in jeder Function nur noch die Factoren x übrig bleiben, welche nicht schon früher durch Einheiten verdrängt waren. Kommen ausser jenen symbolischen Producten $(abc\cdots)$ noch die symbolischen Factoren a_x^p u. s. w. vor, so bedeuten diese weiter nichts, als dass die noch übrig gebliebenen x in den betreffenden Functionen ungeändert stehen bleiben sollen; sie können also alle weggelassen werden, nur wenn noch eine zweite Reihe von Veränderlichen (oder mehrere solche), die durch die extensive Grösse y bezeichnet sei, hinzukommt, so sind die Factoren a_y^p u. s. w. nicht mehr zu unterdrücken; aber ihre Bedeutung ist aus dem Vorigen ohne weiteres ersichtlich. Man kann aber die Bedeutung der symbolischen Producte $(abc\cdots)$ noch concreter fassen. Nämlich setzen wir $r_1, r_2 \cdots r_m$ als

die zu $e_1, e_2 \cdots e_m$ reciproken Einheiten und bezeichnen mit $\bar{a}$ die Grösse $a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots a_m r_m$, wo $a_1, \cdots a_m$ die Zahlgrössen sind, welche aus a durch Einführung von $e_1, e_2, \cdots e_m$ statt eines x entstehen, so ergiebt sich $(a\,b\,c \cdots) = (\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \cdots)$, wo das Product rechts als combinatorisches zu fassen und zugleich $a_x = (\bar{a}x)$ ist; die Grössen $\bar{a}$ sind dann als (erste) Centralen von x in Bezug auf die Function ax^n zu fassen, oder in Bezug auf die Function, welche daraus durch Einführung der Einheiten, die durch die früheren symbolischen Producte bedingt war, hervorging.

Diese Andeutungen mögen genügen, um die reale Bedeutung der Symbole festzustellen; es wird die Auffassung dieser Bedeutung überall da von wesentlichem Nutzen sein, wo man gezwungen ist, die symbolische Darstellung zu verlassen.

§ 4.

Theorie binärer Formen.

Es wird hinreichend sein, wenn ich den Fundamentalsatz für binäre Formen erweise und seine Bedeutung für dieselben darlege, indem dadurch schon auf gewisse Weise der Weg vorgezeichnet ist, den man bei Formen, die aus mehr als 2 Einheiten entspringen, einzuschlagen hat. Ich werde dabei der Bequemlichkeit wegen x und y statt der im Fundamentalsatze mit x_1 und x_2 bezeichneten extensiven Grössen einführen und zunächst die Aufgabe stellen, die aus einer binären Form ax^n entspringenden invarianten Bildungen, wenn sie als Functionen der Coefficienten $a_1 = a\,e_1^n$, $a_2 = a\,e_1^{n-1} e_2$, $\cdots a_k = a\,e_2^n$ und der veränderlichen Zahlgrössen x_1 und x_2 gegeben sind, als Functionen der $k-1$ Stammformen darzustellen. Es sei $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Da nun alle jene Bildungen unverändert bleiben, wenn man statt e_1 und e_2 zwei aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, deren combinatorisches Product 1 ist, so kann man x und y dafür einführen mit der vorläufigen Bedingung, dass (xy), was wir mit u bezeichnen wollen, gleich 1 sei. Jede aus den Einheiten numerisch ableitbare Grösse p lässt sich dann auch aus x und y ableiten. Es sei $p = p_1 e_1 + p_2 e_2 = \pi_1 x + \pi_2 y$, so wird nun die invariante Bildung

$$\Pi(a_1, \cdots a_k, p_1, p_2) = \Pi(\varphi_0, \cdots \varphi_n, \pi_1, \pi_2),$$

wo die φ aus den a hervorgehen, indem man x und y statt e_1 und e_2 setzt, nämlich $\varphi_0 = a\,x^n$, $\varphi_1 = a x^{n-1} y$, $\cdots \varphi_n = a\,y^n$. Setzt man nun $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 0$, so wird $p = x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, und es wird

$$\Pi = \Pi(a_1, \cdots a_k, x_1, x_2) = \Pi(\varphi_0, \cdots \varphi_n, 1, 0),$$

oder wenn

$$\Pi(a_1, \cdots a_k, x_1, x_2) = F(a_1, \cdots a_k) \cdot x_1^q + \cdots$$

ist, wo q den Grad der invarianten Bildung bezeichnet, so ist

$$\Pi = F(\varphi_0, \cdots \varphi_n),$$

also als ganze Function der k Formen $\varphi_0 \cdots \varphi_n$ dargestellt. Aber eine dieser Formen, nämlich $\varphi_1 = ax^{n-1}y$ ist Null, wenn y harmonisches Centrum erster Ordnung zu dem Pole x in Bezug auf die durch die Gleichung $ax^n = 0$ dargestellten n Punkte ist, und es ist also dann Π als ganze Function der $k - 1 = n$ Stammformen $\varphi_0, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ dargestellt. Hierbei war $u = (xy)$ vorläufig gleich 1 gesetzt; es ist y durch die Gleichung $ax^{n-1}y = 0$ bedingt, d. h. y ist, abgesehen von einem Zahlfactor gleich ax^{n-1}, d. h. $y \equiv ax^{n-1}$ also,

$$u \equiv ax^{n-1}x \equiv ax^n \equiv a,$$

der ursprünglichen Function. Ist also die erhaltene Gleichung nicht homogen, so macht man sie nun homogen durch Hinzufügung von Factoren a.

Diese Entwickelung stimmt im Resultate, wie auch dem Wesen nach in der Art der typischen Darstellung mit Clebsch Theorie der binären algebraischen Formen S. 321—328 überein (vgl. auch Gundelfinger in Borch. J. Bd. 74); sie gilt auch unmittelbar für (simultane) Bildungen, die einem Vereine binärer Formen entsprossen sind, indem man nur für $a_1, a_2, \cdots a_k$ die sämmtlichen Zahlcoefficienten der Formen dieses Vereines zu setzen hat.

Viel wichtiger als diese Zurückführung der explicite gegebenen Bildungen auf die Stammformen ist die der symbolisch gegebenen, die aber ganz nach denselben Principien erfolgt. Das symbolische Product (ab) ist $= a_{e_1}b_{e_2} - a_{e_2}b_{e_1}$; ersetzt man also wie oben e_1 und e_2 durch y und x (ich habe beide der einfacheren Zeichenbestimmung wegen vertauscht) wo (yx) vorläufig 1 gesetzt wird, so wird nun

$$(ab) = a_y b_x - a_x b_y$$

oder, da, wie oben gezeigt, die Factoren a_x, b_x entbehrlich sind, $= a_y - b_y$, also

$$(ab)^n = (a_y - b_y)^n = a_y^n - \frac{n}{1} a_y^{n-1} b_y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_y^{n-2} b_y^2 - \cdots,$$

oder wenn a und b dieselbe Function darstellen

$$= ay^n - \frac{n}{1} axy^{n-1} \cdot ax^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} ax^2y^{n-2} ax^{n-2}y^2 - \cdots$$

$$(ab)^n = \varphi_0\varphi_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \varphi_2\varphi_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi_3\varphi_{n-3} + \cdots,$$

wenn man, wie oben, y so bestimmt, dass $\varphi_1 = ax^{n-1}y = 0$ wird.

Dies ist der Satz, den Clebsch in seiner Theorie der binären Formen S. 334 als einer schriftlichen Mittheilung Brioschi's entnommen darstellt.

Derselbe lässt sich aber vermöge der von mir angegebenen Me-

thode unmittelbar zu folgendem Satze erweitern, welcher fast alle Beziehungen, die zwischen binären Formen herrschen, zur Evidenz bringt.

Wenn $(ab)^p(ac)^q \cdots$ *eine beliebige symbolische Invariantenbildung* (Invariante oder Covariante) *einer algebraischen Form* $a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots$ *ist, so setze man* $a - b$ *für* (ab), $a - c$ *für* (ac) *u. s. w., entwickele nach Potenzen von* $a, b, c, \cdots$, *schreibe dann* φ_r *statt* a^r, $b^r, \cdots$ *und setze* $\varphi_1 = 0$, *so ist der so hervorgehende Ausdruck gleich* $(ab)^p(ac)^q \cdots$

Man erhält so, abgesehen von dem Factor φ_0, der die ursprüngliche Function darstellt, und erst zuletzt zur Herstellung der Homogenität hinzugefügt zu werden braucht,

$$c_2 = \tfrac{1}{2}(ab)^2 \equiv \varphi_2, \quad c_3 = (ab)^2(ac) \equiv \varphi_3, \quad c_4 = \tfrac{1}{2}(ab)^4 \equiv \varphi_4 + 3\varphi_2^2;$$
$$c_5 = (ab)^4(ac) \equiv \varphi_5 + 4\varphi_2\varphi_3; \quad c_6 = \varphi_6 + 15\varphi_2\varphi_4 + 10\varphi_3^2, \cdots$$

Also

$$\varphi_2 = c_2 \qquad \varphi_5 = c_5 - 4c_2c_3$$
$$\varphi_3 = c_3 \qquad \varphi_6 = c_6 - 15c_2c_4 + 45c_2^3 + 10c_3^2$$
$$\varphi_4 = c_4 - 3c_2^2 \qquad \text{(vgl. Cl. bin. F. 337).}$$

Als Beispiel mögen die von Clebsch mit R und j bezeichneten Bildungen dienen $R = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd) \equiv (a-b)^2(c-d)^2(a-c)(b-d) \equiv (a^2 - 2ab + b^2)(c^2 - 2cd + d^2)(ab - bc - ad + cd)$ oder mit Weglassung der Glieder, die zuletzt nur eine erste Potenz erhalten, und die nach dem Obigen null sind, $-b^3c^3 - a^3d^3 - 2a^2b^2c^2 - 2a^2c^2d^2 - 2a^2b^2d^2 - 2b^2c^2d^2 \equiv -2\varphi_2^3 - 8\varphi_2^3 \equiv -2c_2^3 - 8c_2^3$. Um sie durch Hinzufügung der Factoren $\varphi_0 = f$ (bei Clebsch) homogen zu machen, ist zu bedenken, dass die Functionen φ in jedem Gliede so oft vorkommen müssen, als die Anzahl der symbolischen Elemente beträgt, also in $c_2, c_4, c_6, \cdots$ je zweimal, in $c_3, c_5, c_6, \cdots$ je dreimal, in R viermal, also

$$\tfrac{1}{2}R = -\frac{c_3^2 + 4c_2^3}{f^2}$$

in Uebereinstimmung mit Clebsch S. 337.

Ferner $j = (ab)^2(ac)^2(bc)^2 \equiv (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$, was sich mit Weglassung der Glieder, welche eine erste Potenz enthalten, verwandelt in $6(\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2 - \varphi_2^3) \equiv 6(c_2c_4 - 4c_2^3 - c_3^2)$, also homogen gemacht, da j nur 3 symbolische Elemente enthält

$$\tfrac{1}{6}j = \frac{f^2c_2c_4 - 4c_2^3 - c_3^2}{f^3}$$

in Uebereinstimmung mit Clebsch S. 338.

Wie sich alles dies für ternäre und höhere Formen gestaltet, denke ich späterhin zu zeigen.

Stettin, den 21. Februar 1874.