Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen.

Von Felix Klein in Erlangen.

Bei der Untersuchung der algebraischen Functionen y einer Veränderlichen x pflegt man sich zweier verschiedener anschauungsmässiger Hülfsmittel zu bedienen. Man repräsentirt nämlich entweder y und x gleichmässig als Coordinaten eines Punktes der Ebene, wo dann die reellen Werthe derselben allein in Evidenz treten und das Bild der algebraischen Function die algebraische Curve wird — oder man breitet die complexen Werthe der einen Variabeln x über eine Ebene aus und bezeichnet das Functionsverhältniss zwischen y und x durch die über der Ebene construirte Riemann'sche Fläche. Es muss in vielen Beziehungen wünschenswerth sein, zwischen den beiden Anschauungsbildern einen Uebergang zu besitzen. Ich darf mit Bezug hierauf nur das Eine hervorheben, dass nämlich ein solcher Uebergang vom rein geometrischen Standpunkte aus geradezu gefordert werden muss, wenn die Sätze, welche sich auf die Zahl und Periodicität der längs einer algebraischen Curve erstreckten Integrale beziehen, zu einem unmittelbaren Verständnisse gebracht werden sollen.

Ein solcher Uebergang ist nun in einfachster Weise herzustellen. Er schliesst sich an die Auffassung einer Curve als des Umhüllungsgebildes ihrer Tangenten*) an; er setzt ferner in einem gewissen Masse diejenigen Erörterungen über den Zusammenhang der Flächen voraus, welche in dem vorstehenden Aufsatze entwickelt wurden.

Man gehe von der Bemerkung aus, dass man jeder Tangente einer algebraischen Curve, mag die Tangente reell oder imaginär sein, im Allgemeinen *einen* reellen Punkt zuordnen kann. Ist nämlich die Tangente reell, so wähle man als entsprechenden Punkt ihren Berührungspunkt; ist die Tangente imaginär, so wähle man den einen reellen Punkt, den sie überhaupt besitzt. Diese beiden Festsetzungen, deren eigentlicher Sinn übrigens aus den weiter unten angeführten Beispie-

*) Wollte man die dualistisch entgegenstehenden Ueberlegungen anstellen, so würde die Anschaulichkeit des Resultats, auf die ich eben Gewicht legen möchte, verloren gehen.

len völlig deutlich werden soll, stimmen insofern mit einander, als die auf reelle Tangenten bezügliche aus der anderen durch Grenzübergang hervorgeht. Denn der reelle Punkt einer imaginären Tangente ist ihr Durchschnittspunkt mit der conjugirten Tangente, und, wenn diese beiden Linien in eine reelle zusammenfallen, so wird aus ihrem Durchschnittspunkte eben der Berührungspunkt.

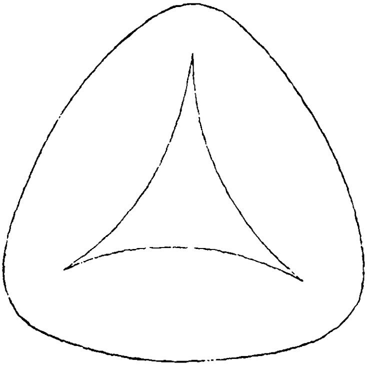
Diese Festsetzungen werden bei etwaigen mehrfach berührenden reellen Tangenten ungenügend. Wir wollen nur den Fall reeller Doppel- oder Wende-Tangenten ins Auge fassen. Hat die Doppeltangente reelle Berührungspunkte, so werden wir ihr eben diese beiden Punkte zuordnen; ist sie aber isolirt, so mag ihr die Gesammtheit der ihr angehörigen reellen Punkte entsprechend gesetzt sein. Ebenso sollen einer Wendetangente alle auf ihr gelegenen reellen Punkte zugeordnet werden. Es wird noch aus den weiteren Ausführungen hervorgehen, dass diese Festsetzungen mit den voraufgeschickten nicht nur verträglich sind, sondern sich aus ihnen in naturgemässer Weise ergeben.

Die zweifach unendlich vielen reellen Punkte, welche man, diesen Festsetzungen zufolge, der Gesammtheit der reellen und imaginären Tangenten der Curve zuordnet, werden eine geschlossene Fläche bilden, welche die verschiedenen Theile der Ebene mit einer Anzahl von Blättern überdeckt, die jedesmal gleich ist der Anzahl der imaginären Tangenten, welche man von einem Punkte des betreffenden Theiles der Ebene an die Curve legen kann (und die also immer gerade ist). *Diese Fläche ist dann ein vollständiges Bild der durch die Curve definirten algebraischen Function.* Sie ist auf die gewöhnliche Riemann'sche Fläche, wie man sie für diese Function construiren könnte, im Allgemeinen eindeutig bezogen. Eine Ausnahme tritt nur für diejenigen Werthsysteme ein, welche den reellen, isolirten Doppeltangenten und den reellen Wendetangenten der Curve entsprechen. Denn während dieselben auf der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche durch je zwei Punkte vorgestellt werden (welche im Falle der Wendetangenten consecutiv sind), entsprechen ihnen bei unserer Fläche ganze gerade Linien, die der Fläche, wie man findet, bez. als Doppel- und Rückkehrkanten angehören: die beiden Flächen sind also in der Art auf einander bezogen, dass auf der einen eine Reihe von Fundamentalpunkten auftritt. Um also von dem Zusammenhange unserer Fläche auf den Zusammenhang der entsprechenden Riemann'schen Fläche schliessen zu können, wird man den Satz benöthigen, der im vorstehenden Aufsatze gegen Ende aufgestellt und bewiesen wurde.

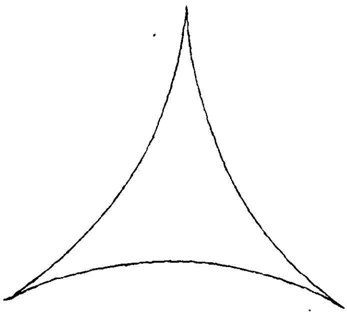
Doch betrachten wir eine Reihe von Beispielen. Sei zunächst ein Kegelschnitt gegeben, der als Ellipse vorausgesetzt sein mag. Die reellen Punkte, welche den imaginären Tangenten der Ellipse entsprechen, erfüllen das Innere der Ellipse doppelt, *unsere Fläche hat* *also in diesem Falle die Gestalt eines elliptischen Doppelblattes*, oder, wenn man will, eines flachen Ellipsoids. Ein Ellipsoid ist aber eine nullfach zusammenhängende Fläche*); deshalb giebt es beim Kegelschnitte kein längs der Curve erstrecktes überall endliches Integral.

Nehmen wir ferner eine Curve dritter Classe. Auch sie kann, was für die Anschauung bequem ist, als völlig im Endlichen gelegen vorausgesetzt werden, und besteht dann entweder aus zwei geschlossenen Zweigen oder nur aus einem, wie dies in den beistehenden, übrigens nur schematischen Zeichnungen dargestellt ist.

I.



II.



Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Sowohl von jedem Punkte ausserhalb des Ovals als von jedem Punkte innerhalb des mit drei Spitzen versehenen Curvenzugs kann man drei reelle Tangenten an die Curve legen; die reellen Punkte, welche imaginären Tangenten der Curve entsprechen, erfüllen daher den Raum zwischen den beiden Curvenzügen doppelt, *unsere Fläche ist eine Art Ringfläche*. Sie ist also in der That zweifach zusammenhängend, wie es für eine Curve mit dem Geschlechte 1 sein muss, oder umgekehrt, *es liegt darin der Beweis, dass die Curve dem Geschlechte 1 angehört*. Es ist leicht, die Werthe, welche das eine auf die Curve bezügliche überall endliche Integral für die einzelnen Punkte der Fläche annimmt, ihrer allgemeinen Vertheilung nach anzugeben. Zu dem Zwecke sei es gestattet, von *Meridianen* der Ringfläche und von *Breitencurven* derselben zu sprechen; die beiden Züge, aus denen die Curve dritter Classe besteht, werden selbst zu den Breitencurven gehören. Die beiden Perioden, welche das auf die Curve bezügliche überall endliche Integral besitzt, entstehen dadurch, dass man dem zwischen bestimmten Grenzen ge-

*) Wegen dieser Art der Zählung vgl. den vorstehenden Aufsatz.

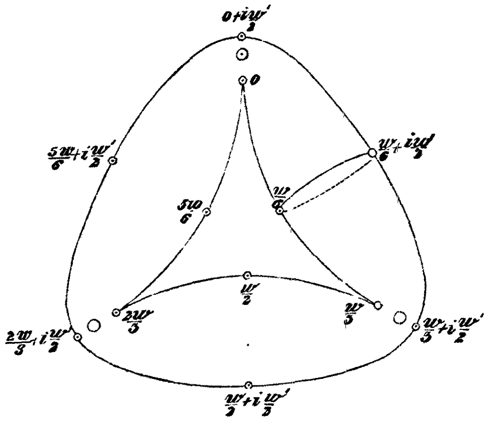
führten Integrationswege beliebig Meridiancurven und Breitencurven zufügen kann. (Diese und die folgenden Behauptungen, welche sich aus den bekannten Sätzen über die Integrale auf Riemann'schen Flächen ohne Weiteres ergeben, sollen hier ohne Beweis angeführt sein.) Die erstere dieser Perioden sei imaginär genommen, gleich iw', die zweite reell, gleich w. Als untere Grenze werde dasjenige Werthsystem gewählt, welches durch die in der Zeichnung vertical gestellte reelle Rückkehrtangente bezeichnet ist, und dem auf unserer Fläche der obere von den drei reellen Rückkehrpunkten entspricht. Das bis zu irgend einem anderen Punkte hingeleitete Integral werde, unter Trennung des reellen und imaginären Theiles, $u + iv$ genannt, wo also u nur bis auf Multipla von w, v bis auf Multipla von w' bestimmt ist. Dann hat man als Bedingung dafür, dass drei Tangenten der Curve dritter Classe, welche den Integralwerthen

$$u_1 + iv_1\,, \quad u_2 + iv_2\,, \quad u_3 + iv_3$$

entsprechen, sich in einem Punkte schneiden, die Relationen*):

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &\equiv 0 \;(\text{mod. } w\,) \\ v_1 + v_2 + v_3 &\equiv 0 \;(\text{mod. } w')\,. \end{aligned}$$

In Folge dessen ergiebt sich eine Vertheilung der Werthe von $u + iv$ über unsere Fläche, wie sie auf der beigesetzten Zeichnung veranschaulicht ist.



Längs des Zuges mit drei Spitzen sind die reellen Zahlen von 0 bis w in der Weise vertheilt, dass die drei Spitzen die Argumente 0,

---

*) Vgl. Clebsch in Borchardt's Journal t. 63, p. 105. Es sind dort nur nicht, wie im Texte, der reelle und imaginäre Theil getrennt, überdies ist die untere Grenze des Integrals beliebig gelassen.

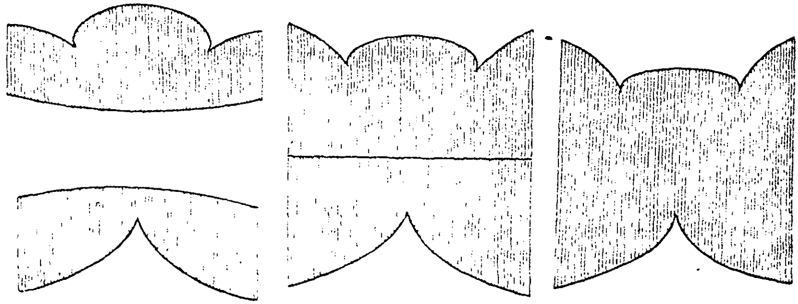
$\frac{1}{3} w$, $\frac{2}{3} w$ bekommen. Die Punkte einer Meridiancurve, welche durch eine Tangente dieses Curvenzuges auf der Fläche bezeichnet ist, besitzen alle dasselbe u, längs der Curve ändert sich nur das v von 0 anfangend bis w'. Für die Punkte des umschliessenden Ovals hat v gleichmässig den Werth $\frac{w'}{2}$. An den drei Stellen etwa, die durch kleine Kreise bezeichnet sind, befinden sich diejenigen Punkt, welche die 6 paarweise conjugirt imaginären Rückkehrtangenten der Curve repräsentiren; ihre Argumente sind bezüglich $0 \pm \frac{iw'}{3}$, $\frac{w}{3} \pm \frac{iw'}{3}$, $\frac{2w}{3} \pm \frac{iw'}{3}$.

Für die Curven dritter Classe ohne Oval gestalten sich diese Verhältnisse im Allgemeinen ähnlich. Der ganze Raum ausserhalb des mit drei Spitzen versehenen Curvenzuges wird bei ihnen doppelt von den Punkten überdeckt, die imaginären Tangenten entsprechen. *Die zugehörige Fläche erstreckt sich also ähnlich ins Unendliche, wie ein einschaliges Hyperboloid.* Der Zusammenhang der Fläche ist nach wie vor gleich 2 (vgl. den vorstehenden Aufsatz), die Curve hat das Geschlecht 1.

Es ist nun besonders interessant, zu sehen, wie sich die zugehörige Fläche modificirt, wie im Zusammenhange damit das Geschlecht der algebraischen Function auf Null herabsinkt, wenn man der Curve eine Doppeltangente oder Wendetangente ertheilt. Die Doppeltangente kann isolirt oder mit reellen Berührungspunkten vorausgesetzt werden. Beidemal bildet die zugehörige Curve einen Uebergang zwischen den beiden vorstehend unterschiedenen Arten ohne Doppeltangente. Die Curve mit Wendetangente endlich stellt sich wieder als Uebergangsform zwischen die beiden Curven mit Doppeltangente.

Um nämlich zunächst eine Curve mit isolirter Doppeltangente zu erhalten, kann man das Oval der ersten Figur nach allen Richtungen

I. II. III.

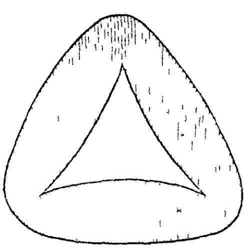


gleichmässig unbegrenzt wachsen lassen. Dann geht es schliesslich, indem es zur isolirten Doppeltangente wird, in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade über; setzt man den Aenderungsprocess noch weiter fort, so wird es imaginär und man hat die allgemeine Curve ohne Oval. Doch besser lassen sich diese Verhältnisse übersehen, wenn man die betreffenden Figuren so durch eine Collineation umgestaltet, dass die fragliche Doppeltangente ins Endliche fällt. Die Curven haben dann die in der Zeichnung dargestellte Gestalt; die von der zugehörigen Fläche überdeckten Partieen der Ebene sind schraffirt.

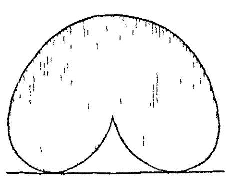
Im Falle II hat die Fläche eine Doppelgerade bekommen (oder richtiger eine Selbstberührungsgerade), sie ist nach wie vor zweifach zusammenhängend. Aber die zugehörige Riemann'sche Fläche ist nur noch nullfach zusammenhängend. Denn sie trägt zwei Fundamentalpunkte, denen diese Doppelgerade entspricht, und also ist ihr Zusammenhang, nach den Auseinandersetzungen des vorstehenden Aufsatzes, um Zwei kleiner als der Zusammenhang der von uns construirten Fläche.

Doch nehmen wir die Doppeltangente nicht isolirt. Dann kann sich der Uebergang in der folgenden Weise gestalten, die aus den nebenstehenden Figuren wohl verständlich ist:

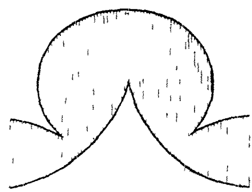
I.



II.



III.



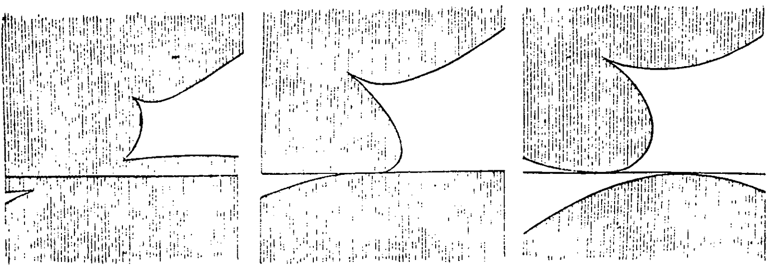
Dabei ist es nun völlig deutlich, dass die in Figur I und III zweifach zusammenhängende Fläche im Falle II nullfach zusammenhängend geworden ist.

Den Fall der Curve dritter Classe mit Wendetangente endlich mag man in der Art als Zwischenfall zwischen den zweierlei Curven mit Doppeltangente betrachten, wie die Zeichnung auf der folgenden Seite veranschaulicht.

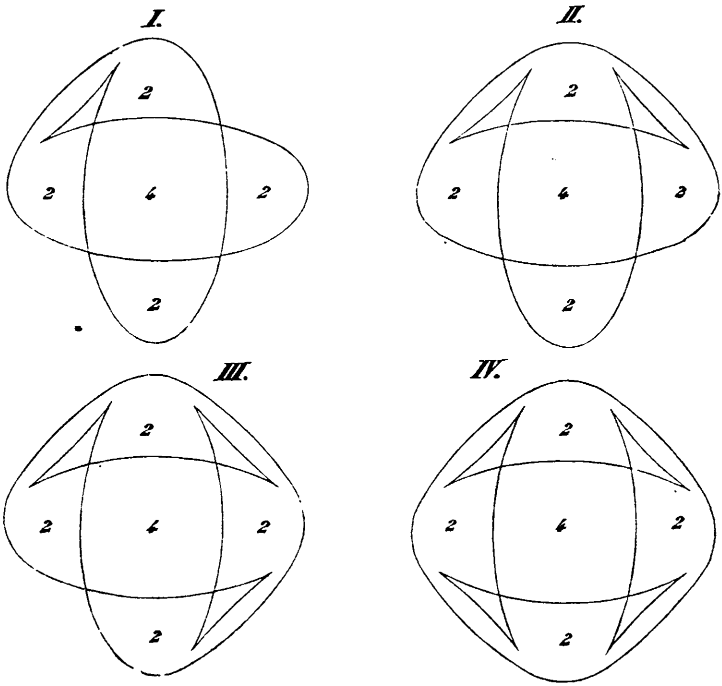
Es mag dadurch insbesondere deutlich werden, warum man eine Wendetangente als Rückkehrtangente unserer Fläche aufzufassen hat. Denn sie entsteht in Figur II aus der Doppelkante von Figur I. Es würde in gewissem Sinne consequenter sein, die Doppeltangente in Figur III als isolirte Curve unserer Fläche beizubehalten, statt sie durch ihre beiden Berührungspunkte zu ersetzen; man müsste dann nur die

Festsetzung hinzufügen, dass eine solche isolirte Curve für den Zusammenhang der Riemann'schen Fläche nicht in Betracht kommt, wodurch das Resultat dasselbe bleibt.

I. II. III.



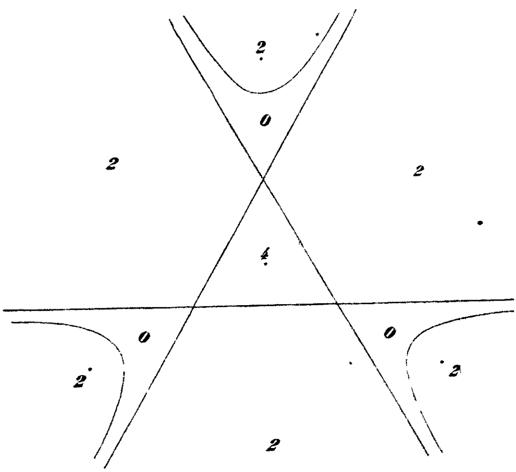
Von Curven *vierter* Classe will ich nur einige Beispiele angeben, welche sich der Anschauung besonders leicht darbieten. Eine solche Curve werde zunächst als in zwei Kegelschnitte zerfallen vorausgesetzt; man nehme für diese Kegelschnitte zwei Ellipsen mit vier gemeinsamen Punkten. Die auf sie bezügliche Fläche besteht dann aus



zwei Ellipsoiden, welche sich zum Theil überlagern, aber keinen Punkt mit einander gemein haben, womit eben dem Umstande, dass man es mit einer reducibeln Curve vierter Classe zu thun hat, Ausdruck gegeben wird und geradezu diese Reducibilität bewiesen ist. Man construire nun die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen und und wende auf dieselben (auf eine oder mehrere) den soeben bei den Curven dritter Classe bereits gebrauchten Auflösungsprocess an. Ich will hier nur diejenigen Zeichnungen hinsetzen, welche man erhält, wenn man die im Endlichen gelegenen Theile der bez. gemeinsamen Tangenten in reelle Curvenzweige spaltet. Die beigesetzten Zahlen beziehen sich auf die Zahl der Blätter, mit der die Fläche die verschiedenen Theile der Ebene überdeckt; die nicht bezeichneten Theile der Ebene sind nullfach überdeckt, insbesondere also die kleinen, mit zwei Spitzen versehenen Dreiecke im Innern der bez. Zeichnungen

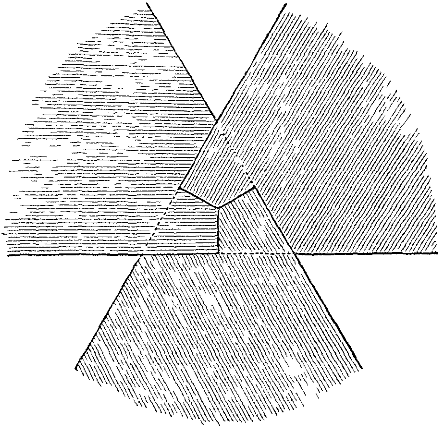
Die so hergestellten Flächen sind in der That bez. 0-, 2-, 4-, 6-fach zusammenhängend, wie sie es sein müssen, da sie sich auf Curven vierter Classe mit 3, 2, 1, 0 Doppeltangenten beziehen, die also $p = 0, 1, 2, 3$ ergeben.

Die bisher betrachteten Flächen zeichnen sich durch ihre grosse Uebersichtlichkeit, durch das Fehlen jeder Verzweigung aus. Eine solche wird aber im Allgemeinen vorhanden sein, und ich darf mit Bezug hierauf als ein Beispiel das Folgende anführen. Es sei eine Curve dritter Ordnung mit isolirtem Doppelpunkte gegeben; als Classencurve aufgefasst ist sie vom vierten Grade und dadurch singulär,



dass sie drei reelle Wendetangenten besitzt. Eine solche Curve werde in der Art gezeichnet, dass ihre Wendetangenten zugleich ihre Asymptoten sind, wo dann der isolirte Punkt in dem Innern des von den drei Asymptoten gebildeten Dreiecks liegen wird.

Es sind der Figur bereits die Zahlen zugesetzt, welche angeben, wie viele imaginäre Tangenten von den Punkten der verschiedenen Theile der Ebene an die Curve gehen. Das Innere des Asymptotendreiecks wird, wie man sieht, viermal von der Fläche überdeckt, während es die angrenzenden Partieen der Ebene nur zweimal oder nullmal sind. Dies wird möglich, indem man der Fläche eine von dem isolirten Doppelpunkte ausgehende Verzweigung ertheilt, wie sie etwa, in symmetrischer Weise, durch die beigesetzte Zeichnung veranschaulicht ist.



Erlangen, im Februar 1874.