Ueber Normalen an algebraische Flächen.

Von Rud. Sturm in Darmstadt.

In meinem Aufsatze Bd. VI S. 241 dieser Annalen habe ich die Wahrscheinlichkeit des Satzes ausgesprochen, dass *die Zahl der Normalen aus einem Punkte an eine Fläche stets gleich der Summe* $n + r + m$ *ist, wenn* n *die Ordnung,* r *der Rang (Grad des Tangenten-Complexes) und* m *die Classe der Fläche ist**). Ich will in Folgendem einen Beweis dieses Satzes mittheilen und dann noch einige andere Untersuchungen anknüpfen, unter anderm *Ordnung und Classe der Fläche der Krümmungscentren* angeben.

1. Nennen wir l *die fragliche Zahl,* so ist ersichtlich der Grad n' derjenigen geradlinigen Fläche N, welche von den einer beliebigen Geraden g begegnenden Normalen der Fläche $F = (n, r, m)$ erzeugt wird, gleich $l + r$, denn in einer Ebene liegen im Allgemeinen r Normalen von F und die Gerade g ist eine l-fache Leitgerade von N.

Die Torse, welche der F längs eines ebenen Schnitts C umschrieben ist, ist bekanntlich r^{ter} Classe, folglich die Polarcurve ihres unendlich fernen Schnitts in Bezug auf C_∞^2 von der Ordnung r; dieselbe ist eindeutig auf C bezogen, demnach erzeugen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, d. h. die Flächennormalen längs C nach Chasles (C. R. Bd. 62) eine Fläche (Normalie) vom Grade $n + r$; da also $n + r$ von diesen Normalen von der Geraden g getroffen werden, so *ist die Curve* B *der Fusspunkte derjenigen Normalen von* F, *welche* g *treffen, von der Ordnung* $v = n + r$, indem auf jedem ebenen Schnitte von F v Fusspunkte liegen. B begegnet der g in den n Punkten $S = (F, g)$ und jede Ebene durch g enthält ausserdem r Fusspunkte, weil so viele Normalen.

*) Ich habe nachträglich bemerkt, dass schon Salmon im Jahre 1847 (Cambridge and Dublin Math. Journ. Bd. III, S. 47) diesen Satz gefunden, jedoch nur für den Fall, dass der Punkt unendlich fern ist, bewiesen und auf die endlichen Punkte übertragen hat (vgl. Nr. 2.).

Der Kegel, der der Fläche F aus einem beliebigen Punkte umschrieben ist, ist m^{ter} Classe, seine Berührungscurve r^{ter} Ordnung, mithin die Fläche der Normalen von F längs dieser Curve vom Grade $r+m$, woraus wiederum hervorgeht, dass *die Torse T der Tangentenebenen von F, deren Normalen die g treffen und welche also in den Punkten von B berühren, von der Classe $\mu_1 = r + m$ ist.* Daher ist die Polarcurve ihres unendlich fernen Schnitts in Bezug auf C_∞^2, welche eindeutig auf B bezogen ist, von der Ordnung $r+m$; und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, also *die Normalen, welche g treffen, erzeugen eine Fläche N vom Grade $n' = n + r + r + m$* $= n + 2r + m$; da diese Grösse andererseits gleich $l + r$ ist, so ergiebt sich

$$l = n + r + m,$$

wie zu beweisen war.

2. Durch den unendlich fernen Punkt von g — sowie überhaupt durch jeden unendlich fernen Punkt — gehen m endliche Normalen, welche den auf g senkrechten Berührungsebenen zugehören, und $n+r$ in E_∞ gelegene, nämlich die von jenem Punkte an die unendlich ferne Curve C_∞ von F gehenden; denn alle (in E_∞ gelegenen) Normalen dieser Curve sind, wie bekannt, Flächennormalen.

Der Schnitt von N mit E_∞ besteht aus diesen $n+r$ Normalen und der oben genannten Polarcurve der unendlich fernen Curve der Torse T.

3. *Die Anzahl h der Normalen von F, welche zwei Gerade treffen, ist $n' = n + 2r + m$*; mithin begegnen sich die zwei Geraden zugehörigen Curven B in $n + 2r + m$ Punkten. Schneiden sich die beiden Geraden, so sind $n + r + m$ von diesen Punkten die Fusspunkte der aus dem Schnittpunkte gefällten Normalen, die r übrigen gehören den r Normalen in der Ebene der beiden Geraden an.

4. Suchen wir die Classe ϱ der Curve B, d. i. die Ordnung ihrer Tangentenfläche. Bei den Flächen 2. Ordnung kann B nur 4. Ordnung 8. Classe sein, da sie sich offenbar gegen beide Schaaren gleichartig verhalten muss und ein Doppel- oder Cuspidalpunkt nicht möglich ist.

Es sei α die Zahl der Osculanten (Wendetangenten) von F, welche in einer beliebigen Ebene liegen, σ dagegen die der Osculanten, welche durch einen beliebigen Punkt gehen (beide Zahlen bekanntlich dualistisch zu einander). Die Ordnung der Torse, welche der Fläche F längs eines ebenen Schnitts C umschrieben ist, ist $n+\alpha$, denn der Schnitt dieser Torse mit der Ebene von C besteht aus C und deren α Osculanten.

Das dualistische Resultat hiervon ist: Die Classe der Berührungscurve des der Fläche aus einem Punkte O umschriebenen Kegels ist $m + \sigma$; von den Tangenten dieser Curve, welche z. B. einer durch O

gehenden Geraden begegnen, liegen m in den durch diese Gerade an die Fläche geführten Berührungsebenen, die übrigen sind die σ Osculanten, welche von O ausgehen. Bemerken wir weiter: jede Tangente der Curve C und die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der längs C umschriebenen Torse sind conjugirte Tangenten, und ebenso jede Tangente, die durch O geht, und die Tangente der Berührungscurve des aus O der Fläche umschriebenen Kegels in dem Berührungspunkte jener sind conjugirte Tangenten.

Dreht man nun eine Ebene um eine Gerade g und construirt längs jeden Schnittes mit F die umschriebene Torse, so lautet die Frage: „wie viele dieser Torsen gehen durch einen Punkt O?“ mit andern Worten: „wie viele Tangenten von F gehen durch O, deren conjugirte die Gerade g treffen?“ oder „welches ist die Classe der Berührungscurve des aus O umschriebenen Kegels?“.

Man sieht also, dass $m + \sigma$ der genannten Torsen durch einen Punkt gehen.

5. Sei nun g die Leitgerade unserer Normalenfläche N; l_∞ die allen zu g normalen Ebenen gemeinsame Gerade, T_∞ ein Punkt derselben; π die Ebene durch g, welche auf der Richtung nach P_∞ normal ist. Die längs des Schnitts derselben der Fläche umschriebene Torse trifft l_∞ in $n + \alpha$ Punkten P'_∞; umgekehrt durch jeden Punkt P'_∞ auf l_∞ gehen $m + \sigma$ der den Ebenen durch g zugehörigen Torsen; also giebt jeder P'_∞ $m + \sigma$ Punkte P_∞. Die Zahl der Coincidenzen ist demnach $n + m + \alpha + \sigma$. Durch jeden dieser Punkte gehen zwei unendlich nahe Berührungsebenen von F, deren Berührungspunkte sich auf derjenigen Ebene π befinden, welche zur Richtung nach dem Coincidenzpunkte normal ist, d. h. durch g gehen $n + m + \alpha + \sigma$ Ebenen, welche zwei unendlich nahe Normalen enthalten.

Da nun die Fläche der Krümmungscentren von F bekanntlich von allen den Ebenen eingehüllt wird, in denen zwei von den r Flächennormalen unendlich nahe sind, so hat sich das Resultat ergeben:

Die Fläche der Krümmungscentren von F ist von der Classe $m'' = n + m + \alpha + \sigma$.

6. Die Ebenen durch g mit zwei unendlich nahen Normalen liefern weiter ebenso viele Tangenten der Curve B, welche die Gerade g treffen; dazu kommen noch die $2n$ Tangenten von B, welche von den n Punkten S herrühren; daraus folgt, dass *die Classe ϱ der Curve B gleich $3n + m + \alpha + \sigma$ ist.* Wir erkennen ferner, dass wir in den durch g gehenden Ebenen mit zwei unendlich nahen Normalen zugleich diejenigen Torsallinien von N erhalten, deren Spitzen*) nicht auf g liegen; es sind deren also $q = n + m + \alpha + \sigma$.

*) Hinsichtlich dieser Benennungen sehe man meinen am Anfang genannten Aufsatz Nr. 20.

Weil ferner die Fläche N und die Curve B eindeutig auf einander bezogen sind, so besteht, *wenn r' der Rang von N ist,* folgende Relation:

$$2(n'-1)-r'=2(\nu-1)-\varrho,$$

also

$$r'=2(n'-\nu)+\varrho=3n+2r+3m+\alpha+\sigma.$$

Mithin besitzt die Fläche N ausser der l-fachen Leitgeraden g noch eine Doppelcurve D von der Ordnung

$$\delta=\frac{r}{2}(2n+3r+2m)-\tfrac{3}{2}(n+r+m)-\tfrac{1}{2}(\alpha+\sigma).$$

Auf ihr liegen die Spitzen der oben erwähnten q Torsallinien; jede Ebene durch g trifft sie in den $\frac{1}{2}r(r-1)$ Schnittpunkten ihrer r Normalen; folglich begegnet D der Geraden g in

$$d=r(n+r+m)-\tfrac{1}{2}(3n+2r+3m)-\tfrac{1}{2}(\alpha+\sigma)$$

Punkten. In diesen Punkten von g begegnen sich zwei endlich verschiedene Normalen, deren Ebene durch g geht, während sonst von den $\frac{1}{2}l(l-1)$ Ebenen, welche durch je zwei der l von einem Punkte auf g ausgehenden Normalen gebildet werden, keine durch g geht.

7. An der eben citirten Stelle meines Aufsatzes habe ich gezeigt, dass die Gesammtzahl der Torsallinien einer Regelfläche von dem Grade n' und dem Range r' gleich $2(r'-n')$ ist. Mithin hat die Fläche N im Ganzen $4(n+m)+2(\alpha+\sigma)$ Torsallinien, folglich bleiben nach Abzug der q oben erhaltenen noch übrig $3(n+m)+\alpha+\sigma$ Torsallinien, welche ihre Spitze auf g — also in deren Cuspidalpunkten — haben. Dies sind Normalen der Fläche, welche von einer unendlich nahen und zwar auf g getroffen werden, ohne dass die Ebene beider durch g geht.

Diese Begegnungspunkte sind aber ersichtlich die auf g gelegenen Punkte der Fläche der Krümmungscentren; mithin *ist die Ordnung n'' der Fläche der Krümmungscentren gleich* $3(n+m)+\alpha+\sigma$ *).

Nach einer brieflichen Bemerkung des Herrn Schubert ist also $n''=(3n+\alpha)+(3m+\sigma)$ gleich der Summe der Ordnungen der Evoluten zweier ebenen Schnitte, welche beziehlich in die gegebene Fläche und in deren Reciprocalfläche gemacht sind.

Die Fläche der Krümmungscentren ist die Brennfläche des Systems der Normalen, welches von der Ordnung $n+r+m$ und der Classe r ist; folglich muss**)

---

*) Durch Abzählung im Unendlichen hat, wie ich neuerdings (April 1874) gesehen habe, Herr Samuel Roberts dies Resultat schon im vorigen Jahre gefunden (Proceedings of the London Mathematical Society, 13. März 1873).

**) Klein, in S. Lie's Aufsatz Göttinger Nachr. 1870, Nr. 4.

$$n'' - m'' = 2\,(n + r + m - r)$$
$$= 2\,(n + m)$$

sein, wie auch auf der Stelle ersichtlich ist.

8. Es sei g' irgend eine andere Gerade; durch jeden Punkt von g gehen $n + r + m$ Normalen; ihre Fusspunkte erzeugen mit g' ebenso viele Ebenen; die Normalie längs des Schnitts jeder dieser Ebenen ist $(n + r)^{\text{ten}}$ Grades und trifft g noch mit $n + r - 1$ Normalen.

Also jedem Punkte auf g entsprechen so $(n + r + m)\,(n + r - 1)$ andere Punkte und umgekehrt; von den $2\,(n + r + m)\,(n + r - 1)$ Coincidenzpunkten sind die einen — der Zahl nach v — so beschaffen, dass von jedem zwei endlich verschiedene Normalen ausgehen, deren Fusspunkts-Verbindungsgerade die g' trifft, und diese Punkte sind doppelt zu rechnen, weil bei jedem derselben zwei von den $n + r + m$ Ebenen und damit zwei von den $n + r + m$ entsprechenden Gruppen von je $n + r - 1$ Punkten identisch sind, also jeder dieser Punkte sich gleich mit zwei seiner entsprechenden Punkte vereinigt hat; die andern sind solche Punkte, von deren Normalen eine und die unendlich nahe vom Nachbarpunkte auf g so beschaffen sind, dass ihre Fusspunkts-Verbindungsgerade, also eine Tangente von B, die Gerade g' trifft. Die Zahl der letzteren ist demnach ϱ. Folglich ist

$$2\,v + \varrho = 2\,(n + r + m)\,(n + r - 1)\,,$$

demnach

$$v = (n + r + m)\,(n + r) - \tfrac{1}{2}\,(5\,n + 2\,r + 3\,m) - \tfrac{1}{2}\,(\alpha + \sigma).$$

Fällt man also aus jedem Punkte von g die l Normalen an F, verbindet deren Fusspunkte unter einander, so erhält man durch diese Verbindungsgeraden eine Fläche vom Grade v. Die Curve B ist auf derselben offenbar $(n + r + m - 1)$-fach; folglich wird die Fläche von der Geraden g ausserhalb der n Punkte S noch in $v - n(n + r + m - 1)$ Punkten getroffen; das sind die d Begegnungspunkte der Doppelcurve D von N mit g.

Da die Formeln für l, n', r', m'', n'', d, δ in Bezug auf n und m einerseits und α und σ andererseits symmetrisch sind, so *haben diese Grössen für zwei polare Flächen denselben Werth.*

9. Die in den meisten Formeln auftretende Summe $\alpha + \sigma$ lässt sich nicht als lineare Function von n, r, m darstellen. Bei den allgemeinen Flächen n^{ter} Ordnung ist $\alpha + \sigma = m + 2\,r - 3\,n$; dies stimmt aber, wie ich mich bei mehreren früher von mir untersuchten Flächen mit Doppelcurven*) überzeugt habe, bei denselben nicht, vielmehr ist, wie sich bis jetzt empirisch gezeigt hat, die rechte Seite kleiner als die linke und zwar um die doppelte Zahl der auf der Dop-

*) Math. Ann. Bd. IV, S. 249.

pelcurve befindlichen Cuspidalpunkte. Auch ist die Ungleichheit a priori ersichtlich, da die Summe $\alpha + \sigma$ durch polare Transformation in sich selber übergeht, während dies bei $m + 2r - 3n$ ja nicht der Fall ist. Also muss jene Summe in den Formeln bleiben.

Für eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung verwandeln sich die Formeln, weil $r = n(n-1)$, $m = n(n-1)^2$, $\alpha = 3n(n-2)$, $\sigma = n(n-1)(n-2)$, also $\alpha + \sigma = n(n+2)(n-2) = n(n^2-4)$ ist, in folgende:

$$l = n(n^2 - n + 1), \quad \nu = n^2, \quad \mu_1 = n^2(n-1), \quad n' = h = n^3,$$
$$\varrho = 2n^2(n-1), \quad r' = 4n^2(n-1), \quad m'' = 2n(n^2 - n - 1),$$
$$\delta = \tfrac{1}{2} n (2n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 2n + 1), \quad d = n^2(n^3 - 2n^2 + 1),$$
$$n'' = 2n(n-1)(2n+1), \quad v = n(n-1)(n^3 - n + 1)\ ^{*)}.$$

Die Formeln für l, n', r', m'', d, δ, n'' gelten wegen ihrer Symmetrie mit Vertauschung von n in m *für eine allgemeine Fläche m^{ter} Classe,* weil ebenso $r = m(m-1)$, $n = m(m-1)^2$, $\alpha = m(m-1)(m-2)$, $\sigma = 3m(m-2)$ ist.

Bei einer windschiefen Regelfläche ist $m = n$, $\sigma = \alpha$, also $l = 2n + r$ **), $\nu = \mu_1 = n + r$, $n' = h = 2(n+r)$, $\varrho = 2(2n+\alpha)$, $r' = 2(3n + r + \alpha)$, $m'' = 2(n+\alpha)$, $n'' = 2(3n+\alpha)$.

10. Der Schnitt der Fläche der Krümmungscentren (n''^{ter} Ordnung) durch E_∞ ***) besteht aus 3 Theilen. Der eine ist, weil alle Normalen von C_∞ Flächennormalen sind, die Evolute dieser Curve (n^{ter} Ordnung, r^{ter} Classe), welche bekanntlich von der Classe $n + r$ und der Ordnung $3n + \alpha$ ist; dieselbe enthält die auf diesen unendlich fernen Normalen befindlichen Krümmungscentra, insofern C_∞ deren

---

*) Der Werth für l findet sich zuerst angegeben von Terquem Journ. v. Liouville sér. I, t. V, p. 175; geometrische Beweise haben noch gegeben F. August, Journ. f. Math. Bd. 68, S. 245, und Mannheim, Comptes rendus 1870, erste Hälfte, p. 1025; F. August hat auch den Werth von ν ermittelt und zugleich gefunden, dass (bei einer allgemeinen Fläche) die Curve B die Grundcurve eines Büschels von Flächen n^{ter} Ordnung ist; Mannheim hat noch den Werth für n' oder h hinzugefügt und Darboux, Comptes rendus 1870 erste Hälfte p. 1328, die Werthe für ϱ, m'', n''; die zwei letzteren sind gleichzeitig von dem der Wissenschaft als Opfer des Krieges so früh entrissenen L. Marcks gefunden: Math Ann. Bd. V, S. 29. Mit der Darboux'schen Note, von welcher ich erst nach Vollendung meiner Untersuchungen Kenntniss erhielt, werden sich in meinem Aufsatze mancherlei übereinstimmende Schlüsse finden; immerhin aber hoffe ich, auch ausser der wesentlichen Verallgemeinerung, doch einiges Neue zu bieten.

**) Vgl. meinen Aufsatz, Math. Annalen Bd. VI, S. 254.

***) Vgl. Marcks a. a. O., wo die Untersuchung für den Fall der allgemeinen Flächen n^{ter} Ordnung mit zum Theil ähnlichen Schlüssen gemacht wird, nur dass dort aus der Ordnung des unendlichfernen Schnitts erst auf die der Fläche geschlossen wird, in ähnlicher Weise wie es bei Salmon in Bezug auf die Zahl l geschieht.

Hauptnormalschnitt ist. Der zweite Theil wird von den zweiten Krümmungscentren derselben Normalen gebildet, welche zu den endlichen Hauptnormalschnitten der Punkte von C_∞ gehören.

Die Ordnung dieser Curve kann auf folgende Weise ermittelt werden: man denke sich einen von dem unendlich fernen Schnitt unendlich wenig verschiedenen ebenen Schnitt; von demselben kann angenommen werden, dass er auf den zweiten Krümmungslinien, welche durch die Punkte von C_∞ gehen, je die unendlich nahen Punkte enthält. Die Normalie längs desselben ist vom Grade $n+r$; n Erzeugende von ihr liegen in E_∞, welche ihre Fusspunkte in den beiden Schnitten gemeinsamen Punkten haben; der übrige Schnitt dieser Normalie mit E_∞, eine Curve r^{ter} Ordnung, ist der gesuchte zweite Theil. Diese Curve r^{ter} Ordnung ist übrigens der Curve C_∞ in Bezug auf C_∞^2 polar. Der dritte Theil endlich enthält die unendlich fernen Krümmungscentren der Punkte der parabolischen Curve; es ist leicht einzusehen, dass diese dritte Curve die Polarcurve (in Bezug auf C_∞^2) des unendlich fernen Schnitts der Torse der stationären Berührungsebenen (spinode torse) ist, welche ja längs der parabolischen (Wende-) Curve berührt. Ist also die Classe dieser Torse ι, so ist dies die Ordnung der dritten Curve; es ist bekannt, dass $\iota = 3(m-r)+\sigma$. Damit nun die Ordnung $n'' = 3(n+m)+\alpha+\sigma$ der Fläche der Krümmungscentren gleich der Summe der Ordnungen $3n+\alpha$, r und $3(m-r)+\sigma$ sei, muss die mittelste Curve dreifach gezählt werden; sie ist mithin Rückkehrcurve*) und zeigt sich so die Cuspidalität, die bekanntlich immer bei Normalenproblemen im Unendlichen auftritt. Interessant ist, wie die beiden Summanden von $\alpha+\sigma$ sich hier bez. auf den ersten und dritten Bestandtheil vertheilen.

11. *Die Gerade g, welche wir als Leitgerade für Normalen von F aufgefasst haben, sei nun selbst eine Normale.* Ein ebener Schnitt, der nicht durch den Fusspunkt von g geht, zeigt, dass die Fusspunktscurve B der die g treffenden Normalen nach wie vor $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung ist; geht aber der ebene Schnitt durch den Fusspunkt P von g, so gehört g zur Normalie dieses Schnittes, welche $(n+r)^{\text{ten}}$ Grades ist, und wird, wie bekannt, von $n+r-2$ andern Erzeugenden derselben getroffen. Dies beweist, dass ein solcher ebener Schnitt der Curve B ausserhalb P nur $(n+r-2)$-mal begegnet, dass also *P ein Doppelpunkt auf B ist, und die Normale g von zwei unendlich nahen Normalen getroffen wird.* In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass die

*) Vgl. Steiner, Journ. f. Math. Bd. 49, S. 349 u. 340. Auf ähnliche Weise wie oben können auch die Rückkehrkegelschnitte der Fläche der Krümmungscentren einer F^2 in den Hauptdiametralebenen ermittelt werden, welche Clebsch, Journ. f. Math. Bd. 62, S. 64 ff., gefunden hat.

längs B umschriebene Torse T noch $(r+m)^{\text{ter}}$ Classe ist, die Berührungsebene τ von F in P zur doppelten Berührungsebene hat. Die Polarcurve (in Bezug auf C^2_∞) des unendlich fernen Schnitts von T, welche also einen Doppelpunkt hat, ist wie oben eindeutig auf die Curve B bezogen und zwar so, dass sich die beiden Doppelpunkte entsprechen. *Das Erzeugniss N der sich auf die Normale g stützenden andern Normalen ist also, wie oben, vom Grade $n+2r+m$*; g aber ist nun sowohl Leitgerade als auch Erzeugende, und unendlich nahe an ihr sind zwei andere Erzeugende, so dass *N längs g von zwei Ebenen „torsal" berührt wird. In jedem Punkte von g wird N von $n+r+m+1$ Berührungsebenen berührt, von denen zwei die beiden „torsalen" sind, die andern von den $n+r+m-1$ Erzeugenden herrühren, die durch den Punkt gehen.* Mithin liegt g auf N $(n+r+m+1)$-fach: als Leitgerade $(n+r+m-1)$-fach, als Erzeugende doppelt; in jeder Ebene durch g liegen $r-1$ Erzeugende. Bei F^2 ist also N vom 8. Grade und g auf ihr 7-fach, was freilich von der Angabe des Herrn Geiser abweicht*).

Dass die beiden Richtungen, in denen die Fusspunkte der Nachbarnormalen liegen, welche g schneiden, also die Tangenten der durch P gehenden Krümmungslinien, zu einander normal sind, ist leicht in folgender Weise zu ersehen: Sei P_1 einer dieser Fusspunkte, g_1 seine Normale, so steht die Ebene (g, g_1) auf der Schnittlinie der beiden Berührungsebenen τ und τ_1 in P und P_1 senkrecht, mithin auf der conjugirten Tangente von PP_1; also die Tangente einer Krümmungslinie steht stets auf ihrer conjugirten senkrecht. Da es nun durch jeden Punkt zwei Krümmungslinien und im Allgemeinen in der Involution der conjugirten Tangenten nur ein Paar zu einander rechtwinkliger conjugirten giebt, so erhellt, dass *die Krümmungslinien-Tangenten diese zu einander rechtwinkligen conjugirten Tangenten sind.* Umgekehrt ist leicht darzuthun, dass, wenn PP_1 und PP_2 die beiden rechtwinkligen conjugirten Tangenten in P sind, dann die Normale in P von denen in P_1 und P_2 getroffen werden muss**).

---

*) Sulle normali all' ellissoide, Annali di Matematica Ser. II, t. I, p. 327.

**) Ueberhaupt scheint diese Definition der Krümmungslinien, dass jede ihrer Tangenten zu ihrer conjugirten senkrecht ist, diejenige zu sein, von der aus wohl am besten auf rein geometrischem Wege dieses Gebiet zu bearbeiten ist. Aus ihr ergeben sich z. B. die bekannten Sätze, dass zwei auf einander folgende Berührungsebenen einer der Fläche längs einer Krümmungslinie umschriebenen Torse gegen die zugehörige Osculationsebene der Krümmungslinie gleiche Neigung haben (also wenn die Krümmungslinie eben ist, alle Ebenen der Torse gegen die Ebene der Krümmungslinie, Joachimsthal's Satz), ferner dass, wenn eine Linie für zwei Flächen Krümmungslinie ist, dieselben sich in ihr unter constantem Winkel durchschneiden, und dessen Umkehrungssatz auf rein geometrischem Wege in sehr einfacher Weise.

Die Erzeugenden der Torse T, in denen sie von τ berührt wird, sind in Folge dessen, weil sie zu den Tangenten von B im Doppelpunkte, also den Krümmungslinien-Tangenten conjugirt sind, mit ihnen identisch.

12. *Ein Nabel- oder Kreispunkt ist ein Punkt, bei welchem die Involution der conjugirten Tangenten aus lauter Paaren zu einander rechtwinkliger Strahlen besteht. Die (imaginären) Osculanten* — auf F^2 die durch den Punkt gehenden Geraden — *begegnen also* C_∞^2, *und die Normale des Nabelpunktes wird von allen Nachbarnormalen getroffen. Sei g nun eine solche Nabelpunkts-Normale*; die Curve B der Fusspunkte der sie treffenden (im Allgemeinen endlich von ihr verschiedenen) Normalen ist noch von der Ordnung $n + r$; jeder ebene Schnitt, der durch den Nabelpunkt P gelegt ist, zeigt, dass B mit ihm ausserhalb P nur $n + r - 3$ Punkte gemein hat; denn die Normale von P ist auf der Normalie dieses Schnittes, wie er auch sonst gelegt sei, Torsallinie, trifft demnach nur $n + r - 3$ endlich entfernte Erzeugenden der Normalie. Also *ist der Nabelpunkt auf der Curve B, die seiner Normale zugehört, ein dreifacher Punkt, d. h. drei Richtungen gehen von ihm aus, in denen auch noch die zweite Normale der des Kreispunktes begegnet*)*.

Die längs B umschriebene Torse T hat ebenfalls noch die Classe $r + m$; die Berührungsebene des Nabelpunktes berührt sie dreifach. *Die Fläche N der (im Allgemeinen endlich von g verschiedenen) Normalen, welche die Normale g des Kreispunktes treffen, hat*, wie im allgemeinen Falle, *den Grad $n + 2r + m$; sie hat die g zur $(n + r + m - 1)$-fachen Leitgeraden*, weil von jedem ihrer Punkte $n + r + m - 1$ Normalen ausgehen, was auch so viele Berührungsebenen giebt; ausserdem ist g noch dreifache Erzeugende von N, und dem entsprechen 3 *Ebenen, welche* — von g mit den 3 oben genannten unendlich nahen Normalen gebildet — *längs g, also torsal berühren*; in jeder Ebene durch g liegen — ausser g und der unendlich nahen — noch $r - 2$ Normalen, woraus sich ebenfalls die $(n + r + m + 2)$-fachheit der g auf N ergiebt.

13. Bei *den Flächen* 2. *Grades* gestaltet sich dies durch Degenerationen folgendermassen: Es ist von vornherein ersichtlich, dass, weil die Osculanten eines Nabelpunktes stets imaginär sein müssen, nur bei den Flächen mit imaginären (punktirten) Geraden reelle Nabelpunkte vorhanden sind; Nabelpunkte sind überhaupt bei einer Fläche 2. Grades die Berührungspunkte der 12 Tangentialebenen, welche durch die 6 Seiten des durch C_∞^2 und C_∞, die unendlich ferne Curve von F^2,

*) Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raumes (erste Aufl.), II, S. 46.

constituirten Vierecks an F^2 gehen; von diesen 6 Seiten sind nur zwei Gegenseiten reell, und da dieselben F^2 jedenfalls in imaginären Punkten treffen, so sind die 4 von ihnen ausgehenden Berührungsebenen nur bei den Flächen mit imaginären Geraden reell. Die 4 durch zwei Gegenseiten gehenden Tangentialebenen gehen stets durch den unendlich fernen Punkt einer Axe der Fläche, also liegen die 4 ihnen entstammenden Nabelpunkte auf derselben Haupt(diametral)ebene; folglich gilt dies auch für die vier reellen Nabelpunkte einer Fläche mit imaginären Geraden.

Da ein Nabelpunkt (P) stets auf einer Hauptebene liegt, so fällt seine Normale (g) in diese Ebene; die Normalen des Hauptschnitts sind nun sämmtlich Flächennormalen; also löst sich von der einer Nabelpunkts-Normale zugehörigen Curve B (4. Ordnung) der ganze Hauptschnitt, von der zugehörigen Torse T (4. Classe) der längs desselben umschriebene Cylinder und von der Normalenfläche N (8. Grades) die Evolute des Hauptschnitts (als ebene Curve 4. Classe, als Linienfläche 4. Grades) ab. Der übrig bleibende Theil von B bez. von T besteht aus den beiden durch den Nabelpunkt gehenden Flächengeraden g' und l', bez. deren Ebenenbüscheln; denn weil diese Geraden die C^2_∞ treffen und die Verbindungslinie dieser Begegnungspunkte G'_∞ und L'_∞, also die unendlich ferne Gerade der Berührungsebene des Nabelpunkts, dem unendlich fernen Punkte G_∞ der Normale g in Bezug auf C^2_∞ polar ist, also $G_\infty G'_\infty$ und $G_\infty L'_\infty$ den C^2_∞ tangiren, so fallen die Normalen sämmtlicher Punkte von g' bez. l' in die Ebene (g, g'), bez. (g, l'), treffen also g und umhüllen in jeder dieser Ebenen eine die g berührende (stets imaginäre) Parabel, in welche demnach das Paraboloid, das sonst von den Normalen längs einer Geraden der Fläche erzeugt wird, ausgeartet ist. Diese Parabel wird auch von g' bez. l' tangirt, also sind 24 Geraden der Fläche Normalen, nämlich die durch die Nabelpunkte gehenden; die zugehörige Tangentialebene ist die durch die Gerade und die Normale des Nabelpunkts bestimmte. Die beiden Parabeln vervollständigen die Evolute zur vollen Fläche 8. Grades; die Normale g, die Evolute und beide Parabeln berührend, zeigt sich als dreifache Erzeugende; der dreifache Punkt auf B und die dreifache Berührungsebene von T kommt dadurch zu Stande, dass P und seine Berührungsebene τ zu jedem der drei Bestandtheile von B bez. T gehört. In jeder Ebene durch g liegt im Allgemeinen ausser g und der unendlich nahen keine Normale mehr, weil $r-2$ hier gleich 0 ist; die 6 Normalen aber, welche ein Punkt von g immerhin liefern muss, sind g, die drei weitern Tangenten der Evolute und je die andere Tangente der Parabeln in (g, g') und (g, l').

Es liefert nun zwar jeder Nabelpunkt zwei Parabelebenen, es ergeben sich aber nicht 24 Parabelebenen, sondern nur 8, nämlich jede der 4 Tangenten des Kreises C^2_∞ in seinen Begegnungspunkten mit C_∞ bestimmt mit den beiden Geraden von F^2, die durch ihren Berührungspunkt gehen, zwei derartige Parabelebenen, so dass 8 mal je drei Normalen von Nabelpunkten, die nicht derselben Hauptebene angehören, in derselben Ebene liegen. Die drei Nabelpunkte befinden sich auf derselben Geraden von F^2 und sind also deren Durchgangspunkte durch die Hauptebenen. Es ergeben sich auf diese Weise die singulären Ebenen des Normalensystems einer F^2, welches 6. Ordnung und 2. Classe ist; nämlich 4 mit Curven 4. Classe (E_∞ und die Hauptebenen) und 8 mit Curven 2. Classe, welche Ebenen also vierfache, bez. doppelte Berührungsebenen der Fläche der Krümmungscentren sind*).

14. Da die Flächen höherer Ordnung im Allgemeinen nicht Ebenen besitzen, welche den Hauptebenen der Flächen F^2 entsprechen, und da auch die für die Nabelpunkte einer F^2 eben entwickelten Eigenschaften wesentlich auf dem Umstande beruhen, dass die Osculanten ganz der Fläche angehören, so *lässt sich über singuläre Ebenen der Normalensysteme der Flächen höherer Ordnung nur die eine allgemeine Eigenschaft angeben, dass die E_∞ stets eine solche mit einer Curve $(n+r)^{ter}$ Classe ist* (Nr. 10).

Hingegen muss natürlich für die (windschiefen) *geradlinigen Flächen* überhaupt etwas Aehnliches sich aussagen lassen wie für die F^2. *Reelle Nabelpunkte kann eine solche Fläche,* weil ihre Osculanten stets reell sind, *nicht haben.* Es ist aber wieder ersichtlich, dass die *Normalen längs jeder der $2n$ (imaginären) Erzeugenden, welche C^2_∞ treffen**), sich sämmtlich in der durch diese Erzeugende gelegten und C^2_∞ berührenden Ebene befinden und dort eine Parabel einhüllen, welche auch die Erzeugende berührt, so dass diese auch eine Normale ist und auf der genannten Ebene, obgleich in derselben gelegen, senkrecht steht.*

Jede dieser Erzeugenden g_i' geht durch eine Reihe (imaginärer) Nabelpunkte, deren Zahl gleich der nicht auf g_i' gelegenen Schnittpunkte von C^2_∞ mit der Fläche der zweiten Osculanten der Punkte von g_i' ist; diese zweiten Osculanten erzeugen aber die andere Schaar des Hyperboloids, welches mit der Regelfläche die betrachtete und zwei unendlich nahe Erzeugende gemein hat; also *liegen auf jeder der $2n$ Erzeugenden 3 Nabelpunkte,* und da auf andern Erzeugenden keine sich befinden, so *enthält jede Regelfläche n^{ten} Grades $6n$ (imaginäre) Nabelpunkte.*

---

*) Vgl. den Aufsatz von Clebsch über das Normalenproblem (Borchardt's Journ. Bd. 62) und Herrn Kummer's Abhandlung über Strahlensysteme 1. und 2. Ordnung § 11. (Abh. der Berliner Acad. von 1866).

**) Vgl. Darboux a. a. O.

Das einer Regelfläche zugehörige Normalensystem $(2n + r)^{ter}$ *Ordnung und* r^{ter} *Classe*, welches bekanntlich aus einer einfach unendlichen Schaar gleichseitiger hyperbolischer Paraboloide besteht, *enthält also eine singuläre Ebene* (E_∞) *mit einer Curve* $(n+r)^{ter}$ *Classe und* $2n$ *(imaginäre) singuläre Ebenen mit Curven zweiter Classe (Parabeln)* *). Diese Parabeln gehören zur Schaar der Paraboloide.

Weil jedes der Normalenparaboloide von der Geraden g, welche zur Leitgeraden einer Normalenfläche N gewählt ist, zweimal getroffen wird, so begegnet die der g zugehörige Curve B jeder Erzeugenden zweimal und zwei Ebenen der Torse T gehen durch jede Erzeugende.

15. *Wird eine Erzeugende* g' *selbst zur Leitgeraden einer Normalenfläche genommen*, so löst sich von B die Erzeugende g' selbst ab; es bleibt als eigentliche Curve B' der im Allgemeinen nicht auf g' gelegenen Fusspunkte von die g' treffenden Normalen eine Curve $(n + r - 1)^{ter}$ Ordnung, welche jeder andern Erzeugenden zweimal, der g' aber in n Punkten begegnet, weil es in jeder Ebene durch g' $r - 1$ Normalen giebt, deren Fusspunkte nicht auf g' liegen; $n - 2$ dieser Punkte sind die Fusspunkte der Normalen auf den Doppelebenen durch g, deren jede eine der $n - 2$ die g' treffenden Erzeugenden enthält.

Von der T sondert sich das Ebenenbüschel durch g' ab und es bleibt eine Torse T' $(n + r - 1)^{ter}$ Classe, für die das Dualistische wie für B' gilt; endlich von N löst sich das Normalenparaboloid längs g' ab und es bleibt eine Fläche N' vom Grade $2(n + r - 1)$, welche die g' zur $(2n + r - 1)$-fachen Leitgeraden hat.

Darmstadt, den 12. October 1873.

Nachtrag.

1. Herr von Jonquières hat Comptes rendus Bd. 58 S. 570 *die Anzahl der Flächen eines Systems* (μ, ν, ϱ) *angegeben, welche eine allgemeine Fläche* F n^{ter} *Ordnung berühren*, nämlich

(1) $$N = n\left[\mu (n-1)^2 + \nu (n-1) + \varrho\right]$$

und daraus schon in einer andern Abhandlung Comptes rendus Bd. 61 S. 442, freilich nur durch das Princip der Continuität, die Folgerung gezogen, dass wenn die Fläche F nicht allgemein ist, sondern von der Ordnung n, dem Range r und der Classe m ist (nach meiner Be-

---

*) Wegen der zwei Schaaren subsumiren sich die F^2 nicht hierunter.

zeichnungsweise), die Zahl der sie berührenden Flächen im Systeme (μ, ν, ϱ) ist:

(2) $$N = \mu m + \nu r + \varrho n\,.$$

Herr Zeuthen hat in den Nouv. Ann. für 1868 S. 390 einen Beweis der Formel (1) für den Fall gegeben, dass das System aus Flächen 2. Grades besteht, und mit Hülfe derselben die bekannte Zahl der Normalen aus einem Punkte an eine allgemeine Fläche von neuem gefunden.

Dieser Beweis lässt sich ohne irgend welche wesentliche Aenderung auch für die allgemeinere Formel (2) (wie Herr Zeuthen gewiss selbst bemerkt hat) benutzen, und ich will ihn in dieser Verallgemeinerung hier reproduciren.

Sei nach der Chasles'schen Benennung

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho$$

der Modul für die Bedingung Z, d. h. in einem Systeme (μ, ν, ϱ) von Flächen 2. Ordnung gebe es $\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\varrho$ Flächen, welche der neunten Bedingung Z genügen, so hat Herr Zeuthen an der genannten Stelle folgende Formeln ermittelt:

$$\begin{aligned}
\psi\,(6\,p,\ \ P, Z) &= 10\,\gamma,\\
\psi\,(\ p,\ 6\,P, Z) &= 10\,\alpha,\\
\varphi\,(4\,p,\ 3\,P, Z) &= \ 8\,\alpha + 16\,\beta,\\
\chi\,(3\,p,\ 4\,P, Z) &= 16\,\beta + \ 8\,\alpha,
\end{aligned}$$

worin φ, χ, ψ die Anzahl der Kegel, der Kegelschnitte und der Oberflächen, die aus zwei Ebenen mit in zwei Punkten begrenzter Schnittlinie bestehen, in dem betreffenden Systeme sind; dabei ist freilich jeder solche Kegel, bez. Kegelschnitt achtfach gerechnet, weil sein Scheitel sich in 3 gegebenen Ebenen befindet, bez. seine Ebene durch 3 gegebene Punkte geht, wie dies Herr Zeuthen vorher auseinander gesetzt hat.

Wenn nun Z die Bedingung ist, dass die Fläche $F = (n, r, m)$ berührt werde, so findet sich zunächst leicht:

$$\psi\,(6\,p, P, F) = 10\,n\,,$$

weil es durch 6 Punkte 10 Ebenenpaare giebt, von denen jedes n-fach zu rechnen ist, indem der eine Grenzpunkt seiner Schnittgeraden deren Begegnungspunkt mit der Ebene, der andere je einer der n Schnittpunkte mit F ist; das Dualitätsprincip giebt:

$$\psi\,(p, 6\,P, F) = 10\,m.$$

Da sich ferner (in einer Ebene) wie bekannt stets $n + 2r$ Kegelschnitte befinden, welche eine Curve n^{ter} Ordnung und r^{ter} Classe, wie

z. B. den Schnitt der Ebene mit der Fläche F, und 4 Gerade berühren, so ist

$$\chi(3p, 4P, F) = 8(n + 2r)$$

und dualistisch

$$\varphi(4p, 3P, F) = 8(m + 2r).$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den obigen giebt für die Berührung mit F

$$\alpha = m, \quad \beta = r, \quad \gamma = n.$$

Also *befinden sich in einem Systeme* (μ, ν, ϱ) *von Flächen zweiten Grades stets* $m\mu + r\nu + n\varrho$ *Flächen, welche eine Fläche* (n, r, m) *berühren.*

2. Daraus ergiebt sich:

1) weil ein System concentrischer Kugeln alle drei Charakteristiken gleich 1 hat, so *ist die Anzahl der Normalen aus einem Punkte an eine Fläche* (n, r, m) *gleich* $n + r + m$;

2) es ist früher (Math. Ann. Bd. VI, S. 248) von mir gefunden worden, dass die Classe der Fusspunktsfläche einer Fläche gleich der Zahl der Rotationsparaboloide ist, welche denselben zwei Kegeln eingeschrieben sind und die Fläche F tangiren. In einem Systeme von Flächen zweiten Grades, die denselben zwei Kegeln eingeschrieben sind, befindet sich ein Ebenenpaar, bestehend aus den beiden gemeinsamen Berührungsebenen der Kegel, dessen Schnittgerade in den Scheiteln der Kegel begrenzt ist. Daher ist die Charakteristik μ dieses Systems nur 2; $\nu = 2$, $\varrho = 1$. Also ist die Zahl der Flächen eines solchen Systems, welche F berühren, mithin *die Classe der Fusspunktsfläche von* F

$$2m + 2r + n,$$

wie von mir a. a. O. S. 249 vermuthungsweise ausgesprochen ist.

3. Die gefundene Formel

$$N = m\mu + r\nu + n\varrho$$

überträgt sich unmittelbar auf *die Curven und abwickelbaren Flächen.* Haben wir eine Curve von der Ordnung n' und der Classe r' *) (Zahl der eine Gerade treffenden Tangenten) und fassen sie als Fläche (n, r, m) auf, so ist $n = 0$, $r = n'$, $m = r'$; also

$$N = \mu r' + \nu n';$$

und fasst man eine abwickelbare Fläche von der Ordnung r' und der Classe m' als Fläche (n, r, m) auf, so ist $n = \nu'$, $r = m'$, $m = 0$, also

*) Ich muss hier nothwendig von meiner in der Abh. von Bd. VI gebrauchten Bezeichnungsweise abgehen.

$$N = \nu m' + \varrho r';$$

beides in Uebereinstimmung mit den von Herrn Zeuthen Nouv. Ann. 1868 S. 392 gefundenen Zahlen.

4. Es giebt drei einfach unendliche Systeme von Flächen 2. Ordnung, für die je zwei Charakteristiken 0, die dritte 1 ist; nämlich eine Punktreihe, ein ebener Strahlbüschel, ein Ebenenbüschel, deren Elemente involutorisch gepaart sind; die Charakteristiken sind bez. $\mu = \nu = 0$, $\varrho = 1$; $\mu = \varrho = 0$, $\nu = 1$; $\mu = 1$, $\nu = \varrho = 0$ und eine Fläche $F = (n, r, m)$ wird ersichtlich bez. von n, r, m Flächen jeder dieser Systeme tangirt, was mit der obigen Formel übereinstimmt.

5. In gleicher Weise lassen sich auch zwei andere von Herrn Zeuthen a. a. O. S. 392—397 gefundene Resultate in die allgemeinere Form umsetzen.

Ist noch $\varkappa$ die Ordnung der Cuspidalcurve der Fläche F und ι die Classe der Torse der stationären Berührungsebenen, so ergiebt sich für *die Zahl der Flächen 2. Ordnung, welche 7 Bedingungen $Z_1 \cdots Z_7$ genügen und die Fläche F doppelt berühren,*

$$N = \tfrac{1}{2} A m (m-1) + \tfrac{1}{2} B r (r-1) + \tfrac{1}{2} C n (n-1)$$
$$+ D [r(n-2) - \tfrac{1}{4}(r + 3\varkappa)] + E n m + F[r(m-2) - \tfrac{1}{4}(r + 3\iota)],$$

worin die Zahlen $A, B, C, \ldots, F$) allein von den 7 Bedingungen $Z_1 \cdots Z_7$ abhängen.*

6. Wenn α, σ die Zahlen der Wendetangenten von F bez. in einer Ebene und durch einen Punkt sind, so findet sich in derselben Weise für *die Zahl der Flächen 2. Ordnung, die den 7 Bedingungen $Z_1 \cdots Z_7$ genügen und F stationär berühren,*

$$N_1 = \tfrac{1}{2} D (3n + \alpha) + \tfrac{1}{2} F (3m + \sigma),$$

worin auch $3r + \varkappa$ für $3n + \alpha$ und $3r + \iota$ für $3m + \sigma$ treten kann.

7. Aus dem letzteren Resultate ergiebt sich nun durch dieselben Schlüsse, wie sie Herr Zeuthen macht, dass *die Ordnung der Fläche der Krümmungsmittelpunkte für F ist:*

$$n'' = (3n + \alpha) + (3m + \sigma),$$

wie in der vorangehenden Abhandlung auf anderem Wege gefunden worden ist, oder auch

$$n'' = 6r + \varkappa + \iota.$$

8. Die Ermittelung der Formeln für N und N_1 in Nr. 5. und 6. geschah mit Hülfe der Formeln (4a) und (11a) in dem Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit (Kopenhagen 1865) des Herrn

---

*) Eine Verwechselung der beiden F ist wohl nicht möglich.

Zeuthen (der in den Nouv. Ann. 1866 in französischer Uebersetzung erschienen ist); in diesen Formeln sind die Plücker'schen Relationen benutzt; da dieselben für in Büschel zerfallende ebene Curven und Kegel nicht mehr gelten, so sind die Formeln für N und N_1 auf die Curven und Torsen nicht in der Weise von Nr. 3. zu übertragen.

9. *Die Grössen A, B, C, D, E, F, welche allein von den 7 Bedingungen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_7$ abhängen*, lassen sich auf einem etwas umständlichen, aber sonst nicht schweren Wege ganz nach der Anleitung des Herrn Zeuthen *als die 6 Charakteristiken des durch die 7 Bedingungen bestimmten doppelt unendlichen Systems von Flächen 2. Grades nachweisen, nämlich:*

$$A = N(7Z, 2p), \quad B = N(7Z, 2l), \quad C = N(7Z, 2P),$$
$$D = N(7Z, l, P), \quad E = N(7Z, p, P), \quad F = N(7Z, p, l);$$

etwas Aehnliches gilt *bei dem 6 Bedingungen unterworfenen dreifach unendlichen Systeme,* das nachher von Herrn Zeuthen betrachtet wird; *die 10 Grössen $A, B, C, \cdots, K$ sind dessen Charakteristiken, nämlich:*

$$A = N(6Z, 3p), \quad B = N(6Z, 3l), \quad C = N(6Z, 3P),$$
$$D = N(6Z, 2p, l), \quad E = N(6Z, 2p, P), \quad F = N(6Z, p, 2l),$$
$$G = N(6Z, 2l, P), \quad H = N(6Z, p, 2P), \quad J = N(6Z, l, 2P),$$
$$K = N(6Z, p, l, P).$$

Es ist wohl kaum einem Zweifel unterworfen, dass dies so weiter fortgeht; so dass *das von Chasles für ein einfach unendliches System ausgesprochene Gesetz sich einem allgemeineren subsumirt.*

Darmstadt, den 28. December 1873.