Ueber eine neue Bedingung für den gewöhnlichen Mittelwerthsatz.

Von Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Nach dem gewöhnlichen Mittelwerthsatz kann das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ auf die Form:

$$f(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx\,, \quad a \leqq \xi \leqq b\,,$$

gebracht werden, wenn $\varphi(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ ihr Zeichen nicht wechselt. Diese Bedingung kann durch folgende davon gänzlich verschiedene ersetzt werden: Jene Umformung ist gestattet, *wenn* $f(x)$ *im Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *entweder nirgends zunimmt oder nirgends abnimmt, und wenn,* $\int\limits_a^x \varphi(x)\,dx = \Lambda(x)$ *gesetzt, die Function* $\Lambda(x)$ *im Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *ihr Zeichen nicht wechselt und stets* $\leqq \Lambda(b)$ *ist.* Geometrisch bedeutet diese Bedingung Folgendes: Die Curve $y = \Lambda(x)$ darf, indem sie die Punkte $x = a$, $y = \Lambda(a) = 0$ und $x = b$, $y = \Lambda(b)$ verbindet, das von den Geraden:

$$x = a\,, \quad x = b\,, \quad y = 0\,, \quad y = \Lambda(b)$$

eingeschlossene Rechteck nicht verlassen.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus dem zweiten Mittelwerthsatz*):

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^{\xi_1}\varphi(x)\,dx + f(b)\int\limits_{\xi_1}^b \varphi(x)\,dx\,, \quad a \leqq \xi_1 \leqq b\,,$$

da die beiden Integrale rechter Hand positiv sind, indem man einen zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Werth vor diese Integrale nimmt.

---

*) Man findet jenen Satz in Borchardt's Journal Bd. 69, S. 65, ferner auch in diesen Annalen Bd. VI, S. 313. Anm. d. Redaction.

Die neue Bedingung ist deshalb bemerkenswerth, weil sie für die Function $\varphi(x)$, der sie ja beliebig viele Zeichenwechsel gestattet, viel weniger einschränkend ist als die alte, wofür sie allerdings der Function $f(x)$ weniger Spielraum gönnt.

Ich benutze diese Gelegenheit, um in meinem letzten Aufsatz „*Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen*“ (Seite 241 dieses Bandes) einen störenden Druckfehler zu berichtigen. Auf Seite 254 jenes Aufsatzes muss nämlich die zweite Formel so lauten:

$$\begin{aligned}\mathrm{Lim}\Big\{\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \cos x\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha + \cdots \cos nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha \\ + \sin x\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha + \cdots \sin nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\Big\}\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2}\{f(x_1+0)+f(x_1-0)\} + \{f(x_1+0)-f(x_1-0)\}\,\mathrm{Lim}\int_0^{n(x-x_1)} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Tübingen, im April 1874.