

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1874

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0007

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0045

LOG Titel: Ueber eine neue Bedingung für den gewöhnlichen Mittelwerthsatz

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber eine neue Bedingung für den gewöhnlichen Mittelwerthsatz.

Von PAUL DU BOIS-REYMOND in Tübingen.

Nach dem gewöhnlichen Mittelwerthsatz kann das Integral

$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx$ auf die Form:

$$f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx, \quad a \leq \xi \leq b,$$

gebracht werden, wenn $\varphi(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ ihr Zeichen nicht wechselt. Diese Bedingung kann durch folgende davon gänzlich verschiedene ersetzt werden: Jene Umformung ist gestattet, wenn $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ entweder nirgends zunimmt oder nirgends ab-

nimmt, und wenn, $\int_a^x \varphi(x) dx = \Lambda(x)$ gesetzt, die Function $\Lambda(x)$ im

Intervall $a \leq x \leq b$ ihr Zeichen nicht wechselt und stets $\leq \Lambda(b)$ ist.

Geometrisch bedeutet diese Bedingung Folgendes: Die Curve $y = \Lambda(x)$ darf, indem sie die Punkte $x = a, y = \Lambda(a) = 0$ und $x = b, y = \Lambda(b)$ verbindet, das von den Geraden:

$$x = a, \quad x = b, \quad y = 0, \quad y = \Lambda(b)$$

eingeschlossene Rechteck nicht verlassen.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem zweiten Mittelwerthsatz*):

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(a) \int_a^{\xi_1} \varphi(x) dx + f(b) \int_{\xi_1}^b \varphi(x) dx, \quad a \leq \xi_1 \leq b,$$

da die beiden Integrale rechter Hand positiv sind, indem man einen zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Werth vor diese Integrale nimmt.

*) Man findet jenen Satz in Borchardt's Journal Bd. 69, S. 65, ferner auch in diesen Annalen Bd. VI, S. 313. Anm. d. Redaction.

Die neue Bedingung ist deshalb bemerkenswerth, weil sie für die Function $\varphi(x)$, der sie ja beliebig viele Zeichenwechsel gestattet, viel weniger einschränkend ist als die alte, wofür sie allerdings der Function $f(x)$ weniger Spielraum gönnt.

Ich benutze diese Gelegenheit, um in meinem letzten Aufsatz „*Ueber die sprungweisen Werthveränderungen analytischer Functionen*“ (Seite 241 dieses Bandes) einen störenden Druckfehler zu berichtigen. Auf Seite 254 jenes Aufsatzes muss nämlich die zweite Formel so lauten:

$$\begin{aligned} & \text{Lim} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) d\alpha + \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \dots \cos nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \sin x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin \alpha d\alpha + \dots \sin nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \right\} \\ & = \frac{\pi}{2} \{ f(x_1+0) + f(x_1-0) \} + \{ f(x_1+0) - f(x_1-0) \} \text{Lim} \int_0^{\frac{n(x-x_1)}{\alpha}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Tübingen, im April 1874.