

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1874

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0007

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0007

LOG Id: LOG_0046

LOG Titel: Ueber die Correspondenzformel

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber die Correspondenzformel,

Von A. BRILL in DARMSTADT.

Im VI. Bande dieser Annalen (S. 38 ff.) habe ich einen Satz bewiesen, vermöge dessen das bekannte Chasles'sche Correspondenzprincip für Punkte auf einer Geraden ausgedehnt wird auf Punkte einer Curve von allgemeinem Geschlecht. Erscheint an jener Stelle der Satz wesentlich nur als Corollar zu Untersuchungen über Correspondenzpaare, und werden demnach manche an ihn anknüpfende Fragen dort unerörtert gelassen, so wird im vorliegenden Aufsätze beabsichtigt, durch näheres Eingehen auf die Eigenschaften einer einzelnen Correspondenz und ihrer Coincidenzen diese Lücke auszufüllen.

Der a. a. O. gelieferte algebraische Beweis der Correspondenzformel (der Formel für die Anzahl der Coincidenzen einer Correspondenz auf einer algebraischen Curve) wird in (I.) in geometrischer Fassung wiederholt. Die allgemeine Gestalt, welche Cayley jener Formel gegeben hat, indem er ausser einfachen auch mehrfach zu rechnende Punkte der Curve als durch die Correspondenz auf einander bezogen annahm, lässt sich, wie gezeigt wird, aus der vorher bewiesenen besonderen ableiten, ohne dass es nöthig ist, ein Zerfallen der Correspondenz unter Adjunction der Curvengleichung in einzelne Correspondenzen zwischen „einwerthigen“ Punkten — was übrigens in vielen Fällen der Anwendung eintritt — vorauszusetzen. Man erreicht dies mit Hülfe eines auf Correspondenzen mit mehrwerthigen Punkten bezüglichen Satzes (§ 9.), welcher die Vertauschung des unabhängigen veränderlichen Punktes mit einem der ihm entsprechenden Punkte betrifft.

Das Verhalten der Correspondenzen in Doppel-, Rückkehr- u. s. w. -Punkten der gegebenen Curve, das in (III.) betrachtet wird, veranlasst eine Unterscheidung zwischen „eigentlichen“ und „uneigentlichen“ Coincidenzen, von denen nur die ersteren bei eindeutiger Transformation der gegebenen Curve nicht verloren gehen können. Eine Reduction der Correspondenzformel wird ebenso nur durch eigentliche Coincidenzen, welche in singuläre Punkte der Curve fallen, hervorgebracht. Mit Hülfe der in § 21. aufgestellten Regeln lässt sich in jedem Falle die

Grösse dieser Reduction bestimmen, wobei sich denn ganz allgemein ergibt, dass das Vorhandensein von Doppelpunkten nur in Ausnahmefällen eine solche nöthig macht.

I. Correspondenzen mit einwerthigen Punkten.

1. Vermöge einer Correspondenz φ zwischen zwei Punkten x und y (die man sich als Gleichung zwischen den Coordinaten derselben vorzustellen hat) möge jedem Punkte x der Ebene eine Curve (y) L . Ordnung entsprechen, jedem Punkte y eine Curve (x) K . Ordnung. Sei dazu eine Curve f von der m . Ordnung gegeben, so entsprechen wegen φ jedem Punkte y $Km = k$ Punkte x dieser Curve, jedem Punkte x $Lm = l$ Punkte y auf f . Es giebt in der Ebene eine Curve von der Ordnung $K + L$, für welche die Curve (y) durch den Punkt x geht, und umgekehrt. Es giebt also auf f $k + l$ Punkte, für welche einer der correspondirenden Punkte x in y fällt, oder umgekehrt. Wir werden diese Punkte die *Coincidenzpunkte* der Correspondenz φ nennen; die Correspondenz selbst, insofern wir sie in der Folge vorzugsweise in Bezug auf f betrachten, wollen wir durch (k, l) bezeichnen.

2. Gegeben sei nun zwischen den Punkten x und y ausser φ eine andere Correspondenz $\varphi' = (k', l')$. Wandert y auf f , so beschreiben die Punkte x , welche gleichzeitig den Correspondenzen φ und φ' genügen, eine Curve, deren Grad leicht zu ermitteln ist. Wir betrachten eine beliebige Gerade G . Einem Punkte x derselben entsprechen vermöge φ' l' Punkte y auf f ; jedem von diesen vermöge φ eine Curve von der Ordnung K , die auf G $l'K$ Punkte x' ausschneiden. Da nun jedem von diesen wiederum $k'L$ Punkte x entsprechen, so ist die Zahl der Coincidenzen von Punkten x mit Punkten x' gleich:

$$l'K + k'L.$$

Daher ist:

$$m(l'K + k'L) = l'k + k'l$$

die Anzahl der Punktepaare x, y auf f , welche den beiden Correspondenzen (k, l) und (k', l') zugleich genügen.

Zeigen die Punkte x und y in jeder der beiden Correspondenzen ein *symmetrisches* Verhalten, ist also $k = l$, $k' = l'$, so ergibt das angeführte Verfahren nicht nur die Coincidenzen der Punkte x , sondern auch die der entsprechenden Punkte y , und die Anzahl der Paare, welche gleichzeitig den Correspondenzen (k, k) , (k', k') genügen, ist gleich der *Hälfte* der oben gefundenen Zahl:

$$= kk'.$$

3. Wir betrachten jetzt eine Correspondenz φ für sich, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Curven (x) und (y) durch die Punkte y

bez. x selbst hindurch gehn, welchen sie entsprechen, und wollen, um gleich die Rücksicht auf die Curve f zu wahren, annehmen, dass einem Punkte y von f eine Curve (x) entspreche, von deren k Schnittpunkten mit f γ in y fallen (z. B. durch Berührung, oder einen vielfachen Punkt u. s. w.), wir wollen kurz sagen: eine Curve (x) mit einem „ γ -werthigen Schnittpunkt in $x = y$ “. Ebenso sollen vermöge derselben Correspondenz von den l Schnittpunkten, welche einem Punkte x entsprechen, δ wieder in x fallen. Alsdann kann man zunächst zeigen, dass immer $\gamma = \delta$ ist. Wir werden eine solche Correspondenz in der Folge durch $(k - \gamma, l - \gamma)$ bezeichnen.

Wegen eines geometrischen Beweises dieser Behauptung sei es gestattet, auf Nr. II. zu verweisen; hier möge ein einfacher algebraischer Beweis Platz finden.

Man denke sich mit Hülfe von $f(x) = 0$ eine der 3 homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes x , etwa x_3 , eliminirt, so muss in der Eliminationsgleichung der Factor $\frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2}$ γ -mal auftreten. Eliminirt man dann noch y_3 , so enthält die resultirende Gleichung diesen Factor $m\gamma$ -mal. Aber diese Gleichung kann keine andere sein, als wenn man umgekehrt erst y_3 und dann x_3 eliminirt hätte, wodurch denn jener Factor $m\delta$ -mal vorgekommen wäre. Daher hat man $\gamma = \delta$.

4. Es mögen nun wieder zwei Correspondenzen gegeben sein: eine der eben betrachteten Art, $\varphi' = (k' - \gamma', l' - \gamma')$, mit einem γ' -werthigen Punkt in $x = y$, und eine $\varphi = (k, l)$, welche durch Zusammenfallen von x mit y im Allgemeinen nicht befriedigt wird. Man suche die Anzahl der Paare von *getrennt* liegenden Punkten x, y auf f , welche gleichzeitig beiden genügen. Von der Anzahl Aller, welche die letztere Bedingung erfüllen:

$$kl' + lk',$$

sind diejenigen Punktepaare abzuzählen, für welche x in y fällt. Dies tritt nun aber nur an denjenigen Stellen von f ein, wo Coincidenzen von φ stattfinden, und zwar an jeder solchen Stelle γ' -fach, weil φ' dann immer einen γ' -fachen Punkt besitzt. Zählt man also:

$$\gamma'(k + l)$$

Paare ab, so bleiben die gesuchten:

$$k(l' - \gamma') + l(k' - \gamma')$$

Paare von *getrennt* liegenden Punkten.

5. Wir gehn endlich zu dem Falle über, dass 2 Correspondenzen $\varphi = (k - \gamma, l - \gamma)$ und $\varphi' = (k' - \gamma', l' - \gamma')$ mit je einem γ - und γ' -werthigen Punkt in $x = y$ gegeben sind. Man denke sich zunächst die eine Correspondenz φ ein wenig deformirt in eine solche $\pi = (k, l)$,

welche in $x = y$ keinen ein- oder mehrwerthigen Punkt mehr besitzt, dagegen γ diesem benachbarte Punkte auf f . Nun ist die Anzahl der Punktepaare, welche den Correspondenzen π und φ' genügen, nach dem Vorigen:

$$kl' + lk' - \gamma'(k + l).$$

Unter diesen Paaren giebt es zwar keine solche von *zusammenfallenden* Punkten mehr, wohl aber noch solche von nahe benachbarten Punkten x, y , welche zusammenfallen, sobald die Deformation aufhört. Diese sind zu finden.

Lassen wir den Punkt x auf f wandern, so begleiten ihn die γ Punkte y , welche die deformirte Correspondenz π ergiebt, in unmittelbarer Nähe. Rückt aber x in die Nähe eines solchen Punktes C von f , in welchem die Correspondenz φ' ausser einem γ' -fachen Punkt noch eine Coincidenz besitzt, so rückt auch der coincidirende Punkt y in die Nähe von x , fällt in C mit x zusammen und entfernt sich wieder, wenn x sich von C entfernt. Während dessen wird aber dieser Coincidenzpunkt jeden der γ Punkte y , welche x begleiten, einmal passiren, und jeder Durchgang bezeichnet ein Paar von nahe benachbarten Punkten x, y , welche beiden Correspondenzen π und φ' angehören. Jedem Punkte C entsprechen somit γ Paare, und, wenn es P' Coincidenzpunkte der Correspondenz φ' giebt, so sind $\gamma \cdot P'$ Paare abzuziehen. Es bleiben also:

$$(\varphi\varphi') = kl' + lk' - \gamma'(k + l) - \gamma P'$$

Paare von getrennt fallenden Punkten x, y , welche den beiden Correspondenzen φ und φ' gleichzeitig genügen.

6. Nun verfährt man aber unsymmetrisch, indem man die eine Correspondenz φ deformirt. Hätte man statt dessen φ' deformirt, so würde man die Formel:

$$(\varphi\varphi') = k'l + l'k - \gamma(k' + l') - \gamma'P$$

erhalten haben, wo P die Anzahl der Coincidenzpunkte der Correspondenz φ ist. Da die beiden Werthe $(\varphi\varphi')$ einander gleich sein müssen, so erhält man durch Vergleichung:

$$\frac{P - (k - \gamma) - (l - \gamma)}{\gamma} = \frac{P' - (k' - \gamma') - (l' - \gamma')}{\gamma'}.$$

Dieser Quotient hat für φ dieselbe Form wie für φ' und muss daher von der speciellen Form der Correspondenz unabhängig sein; er kann nur noch von den Constanten der Curve f abhängen. Man findet aus irgend einer speciellen Correspondenz (z. B. der zwischen dem Berührungspunkt einer Tangente und den übrigen Schnittpunkten derselben bestehenden, für welche $P =$ der Anzahl der Wendetangenten von f

ist) den Werth des Quotienten gleich $2p$, wo p das Geschlecht der Curve f ist. Daher hat man die Correspondenzformel:

$$P = (k - \gamma) + (l - \gamma) + 2p\gamma;$$

und ferner durch Substitution:

$$(\varphi\varphi') = (k - \gamma)(l' - \gamma') + (k' - \gamma')(l - \gamma) - 2p\gamma\gamma'.$$

7. Setzt man noch:

$$\begin{aligned} k - \gamma &= \kappa; & k' - \gamma' &= \kappa' \\ l - \gamma &= \lambda; & l' - \gamma' &= \lambda', \end{aligned}$$

wo dann also κ die Anzahl der vermöge der Correspondenz $\varphi = (\kappa, \lambda)$ dem Punkte y entsprechenden nicht mit y zusammenfallenden Punkte x ist, λ die Anzahl der dem Punkt x entsprechenden Punkte y , welche nicht mit x vereinigt liegen u. s. w., so ist die *Anzahl der Coincidenzpunkte der Correspondenz* (κ, λ) :

$$P = \kappa + \lambda + 2p\gamma,$$

wo γ die „Werthigkeit“ des Punktes $x = y$ bedeutet. Ferner ist die *Anzahl der den beiden Correspondenzen* (κ, λ) und (κ', λ') *zugleich entsprechenden Punktepaare* x, y :

$$(\varphi\varphi') = \kappa\lambda' + \lambda\kappa' - 2p\gamma\gamma'.$$

Ist das Vorkommen der Punkte x und y in jeder der Correspondenzen φ und φ' ein *symmetrisches*, so dass also $\kappa = \lambda$, $\kappa' = \lambda'$ ist, so ist, aus ähnlichen Gründen wie oben (§ 2.), die Zahl der gesuchten Paare gleich der *Hälfte* von $(\varphi\varphi')$:

$$\frac{1}{2}(\varphi\varphi') = \kappa\kappa' - p\gamma\gamma'.$$

8. Von den obigen Formeln für P und $(\varphi\varphi')$ steht hinsichtlich der Einfachheit der Darstellung keine hinter der anderen zurück; hinsichtlich der Anwendbarkeit verhält sich die letztere zur ersteren wie der Ausdruck für den Grad der Resultante aus zwei algebraischen Gleichungen zu dem für den Grad der Discriminante einer solchen. Man findet die weitere Discussion der Formel für $(\varphi\varphi')$, sowie eine Ausdehnung derselben auf einen allgemeineren Fall in dem oben citirten Aufsatz im VI. Bande d. Ann. durchgeführt. An dieser Stelle möge die Formel für P , die „*Correspondenzformel*“, einer näheren Betrachtung unterzogen und insbesondere (in II.) auf eine solche Form gebracht werden, dass sich der Ausdruck für $(\varphi\varphi')$ als eine Folge derselben darstellen lässt.

II. Correspondenzen mit mehrwerthigen Punkten.

9. Wenn eine Correspondenz zwischen zwei Punkten x und y einer Curve f durch Zusammenfallen von x mit y befriedigt wird, so

ist, wie oben in § 3. gezeigt wurde, diejenige Zahl, welche wir die „Werthigkeit“ des Punktes $x = y$ genannt haben, unabhängig davon, ob man den Punkt x oder den Punkt y als den gegebenen, unabhängig veränderlichen betrachtet. Diese Bemerkung lässt sich in folgender Weise verallgemeinern:

Wenn vermöge einer Correspondenz zwischen zwei Punkten x und y einer Curve f unter den einem Punkte x' entsprechenden Punkten y ein i -werthiger Punkt y' , d. h. ein solcher Punkt vorkommt, in welchem i einfache Punkte vereinigt liegen, so ist — sofern die Lage des i -werthigen Punktes y' mit der von x' als continuirlich veränderlich vorausgesetzt wird — umgekehrt unter den dem Punkt y' entsprechenden Punkten x der Punkt x' ebenfalls als ein i -werthiger zu rechnen.

10. Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes leicht für den Fall, dass f eine Gerade ist. Denn die einander entsprechenden Parameter x und y der Punkte einer Geraden lassen sich als Coordinaten einer Curve auffassen, welche, wenn einem jeden Punkt x i gleiche Werthe y (ausserdem noch andere Werthe y) entsprechen sollen, eine i -fache Curve als Bestandtheil besitzt. Vermöge dieser Curve entspricht dann umgekehrt jedem Werth von y' das zugehörige x' i -fach.

Dieser Betrachtungsweise kann, wie dies ähnlich Herr Zeuthen that (diese Annalen Bd. III., S. 151), eine allgemeinere Fassung gegeben werden, indem man an Stelle der Coordinaten zwei Geradenbüschel einführt. Wir wollen gleich an den allgemeineren Fall einer beliebigen Curve f anschliessen und ausserhalb derselben zwei beliebige gelegene Punkte A und B annehmen, von deren einem A im Strahl X nach einem Punkte x von f gezogen werden möge. Sucht man die zu x und den übrigen Schnittpunkten von X mit f gehörigen Punkte y und verbindet jeden derselben mit B durch einen Strahl Y , so bilden, wenn x sich bewegt, die Schnittpunkte der Strahlen X, Y eine Curve C , welche als genau dieselbe entstanden wäre, wenn man die zu den Strahlen Y gehörigen Strahlen X aufgesucht und mit diesen geschnitten hätte. Entspricht nun einem Punkte x' von f unter anderen auch ein i -werthiger Punkt y' , der seine Lage continuirlich ändert, wenn x' dieselbe ändert, so enthält die Curve C eine i -fache Curve als Bestandtheil, vermöge deren denn auch umgekehrt der Strahl X' dem Strahle Y' i -fach entspricht. Weil nun aber die Lage der Scheitel A, B der Strahlenbüschel beliebig ist, so lässt sich das, was von dem einem Punktepaare x', y' entsprechenden Strahlenpaare $X' Y'$ gilt, auf die Punkte $x' y'$ von f selbst übertragen, welche somit die Eigenschaft besitzen, einander *wechselseitig* i -werthig zu entsprechen, q. e. d.

11. Durch die vorstehenden Betrachtungen rechtfertigt es sich, wenn wir in der Folge bisweilen unsymmetrisch verfahren, indem wir

den Punkt y als den unabhängig veränderlichen ansehen. Die so abgeleiteten Eigenschaften einer Correspondenz können nach Obigem keine anderen sein, als man sie erhalten haben würde, wenn man den Punkt x als den unabhängig veränderlichen angesehen hätte. Fällt insbesondere ein i -werthiger Punkt y' mit x' selbst zusammen, so hat man den oben (§ 3.) betrachteten Fall. Der Beweis desselben hätte einer kleinen Modification bedurft, wenn man noch die Punkte A und B als vereinigt gelegen angenommen hätte. Diese Modification, auf welche, mit Bezug auf § 1. der oben erwähnten Abhandlung im VI. Bande dieser Annalen (s. d. Druckfehlerverzeichniss zum VI. Bande), Herr Zeuthen mich aufmerksam gemacht hat, findet man leicht durch geometrische Interpretation der oben in § 3. angestellten algebraischen Betrachtung. Uebrigens lässt sich, wie bereits erwähnt, die besondere Untersuchung dieses Falls durch Annahme getrennter Lage der Punkte A, B vermeiden.

Es möge hier noch hervorgehoben werden, dass der oben (§ 9.) ausgesprochene Satz ohne Weiteres auf den von Herrn Zeuthen a. a. O. untersuchten Fall, wo die einander entsprechenden Punkte x und y auf *verschiedenen* Curven f und F gelegen sind, übertragen werden kann.

12. Hat man nun eine Correspondenz mit mehrwerthigen Punkten $\Phi(xy)$ gegeben, vermöge deren jedem Punkte x der Curve f λ' (nicht in x fallende) i' -werthige Punkte y' , λ'' i'' -werthige Punkte y'' u. s. w. auf f und endlich ein Γ -werthiger Punkt in x selbst entsprechen, so ist die Gesamtzahl aller einem Punkte x entsprechenden Punkte y gleich zu rechnen:

$$\Gamma + i' \lambda' + i'' \lambda'' + \dots = \Gamma + \Lambda$$

einwerthigen Punkten, von denen Λ nicht in x fallen. Die Gesamtzahl der einem Punkte y entsprechenden Punkte x findet man in folgender Weise. Man bestimme die Zahl κ' derjenigen Lagen des Punktes x , welchem der Punkt y als i' -facher Punkt y' entspricht; dann entsprechen diese, nach dem obigen Satz, dem Punkte y je als i' -werthige Punkte x' . Aehnlich bestimme man die Anzahl der dem Punkte y entsprechenden i'' -werthigen Punkte x'' u. s. w. Die Gesamtzahl der einem Punkte y entsprechenden Punkte x ist alsdann gleich zu rechnen:

$$\Gamma + i' \kappa' + i'' \kappa'' + \dots = \Gamma + K$$

einfachen Punkten.

13. Auch die Coincidenzen einer solchen Correspondenz sind verschiedenartig. Rückt nämlich von den einem Punkte x entsprechenden λ' i' -werthigen Punkten y' ein solcher in den Punkt x herein (abgesehen von dem in $y = x$ schon vorhandenen Γ -fachen Punkt), so

ist diese Coincidenz offenbar für i' Coincidenzen einfacher Punkte zu zählen. Giebt es P' solcher Coincidenzen, ferner P'' Coincidenzen von i'' -werthigen Punkten y'' mit x u. s. w., so sind die sämmtlichen Coincidenzen äquivalent:

$$P = i' P' + i'' P'' + \dots$$

Coincidenzen einwerthiger Punkte.

Durch die vorstehenden Erörterungen ist die Correspondenz Φ auf eine solche mit einwerthigen Punkten zurückgeführt. Wendet man die für eine solche aufgestellte Correspondenzformel auf sie an, so erhält man die Gleichung:

$$P = K + \Lambda + 2 p \Gamma,$$

oder:

$$i' (P' - \kappa' - \lambda') + i'' (P'' - \kappa'' - \lambda'') + \dots = 2 p \Gamma.$$

Dies ist aber eben die von Cayley angegebene Formel (Comptes rendus, T. LXII, 1866).

14. Mit Hülfe der in § 12. gemachten Bemerkungen lässt sich umgekehrt der Grad derjenigen Gleichung in den Coordinaten der Punkte x und y , welche die Beziehung auf der Curve f vermittelt, bestimmen. Dies möge an dem Beispiel der durch die Tangenten von einem Punkt x der Curve hergestellten Correspondenz ausgeführt werden.

Die Curve f sei von der m . Ordnung. — Dem Punkte x entsprechen:

- 1) die $m(m-1) - 2$ Berührungspunkte y' der Tangenten des durch x gehenden Büschels (je doppelt zu rechnen);
- 2) die $(m-3) \{m(m-1) - 2\}$ übrigen Schnittpunkte y'' dieser Tangenten;
- 3) der $[m(m-1) - 2]$ -fache Punkt in x selbst.

Die Summe aller ist:

$$m \{m(m-1) - 2\}$$

einfachen Punkten äquivalent; der Grad der betreffenden Correspondenzgleichung in den Coordinaten von y also gleich:

$$m(m-1) - 2.$$

Ferner entsprechen einem Punkte y :

- 1) sofern derselbe als Berührungspunkt einer Tangente (also ein Punkt y') aufgefasst wird: die $m-2$ übrigen Schnittpunkte x' , je 2-fach zu rechnen;
- 2) sofern derselbe einfacher Schnittpunkt einer Tangente (y'') sein kann: die $(m-3) \{m(m-1) - 2\}$ einfachen Schnittpunkte x'' der Tangenten des Büschels durch y ; je einfach.
- 3) ein $[m(m-1) - 2]$ -facher Punkt in y selbst.

Die Summe ist:

$$m(m-1)(m-2)$$

einfachen Schnittpunkten äquivalent, woraus hervorgeht, dass der Grad der Correspondenzgleichung hinsichtlich der Coordinaten des Punktes y ansteigt auf:

$$(m - 1)(m - 2).$$

15. Ein in mehrfacher Hinsicht bemerkenswerthes Beispiel einer Correspondenz Φ mit mehrwerthigen Punkten ist diejenige, welche sich aus zwei Correspondenzen: (κ, λ) mit einem γ -fachen, und (κ', λ') , mit einem γ' -fachen Punkt in $x = y$ (denen ein Punktepaar x, y zugleich genügen soll) zusammensetzt, und zu einer Bestimmungsgleichung für $(\varphi\varphi')$ (vgl. § 8.) führt. Vermöge (κ, λ) entsprechen nämlich einem Punkte x λ Punkte y , deren jedem wiederum vermöge (κ', λ') κ' Punkte, die wir nun als y'' bezeichnen wollen, entsprechen. Jedem von diesen entsprechen rückwärts λ' Punkte (x') , deren jedem wiederum κ Punkte (x'') entsprechen. Alsdann ist $(\varphi\varphi')$ die Anzahl der Coincidenzen von Punkten y'' mit x . Die dem Punkt x entsprechenden Punkte y' sind je γ' -werthige Punkte, während die y'' einwerthig sind. Ist noch P die Anzahl der Coincidenzen der Correspondenz (κ, λ) , so erhält man unter Anwendung der erweiterten Correspondenzformel (§ 13.):

$$\gamma'(P - \kappa - \lambda) + 1 \cdot ((\varphi\varphi') - \kappa\lambda' - \lambda\kappa') = 2p \cdot 0 = 0.$$

Dies ist aber die in § 6. auf anderem Wege abgeleitete Formel für $(\varphi\varphi')$.

III. Correspondenzen mit theilweise festen Punkten. Doppel- und Rückkehrpunkte der gegebenen Curve.

16. Mit Rücksicht darauf, dass, wie man soeben gesehen, eine Correspondenz mit mehrwerthigen Punkten als ein besonderer Fall einer solchen mit einwerthigen aufgefasst werden kann, knüpfen wir die folgenden Betrachtungen an die leichter zu übersehende Correspondenz mit einwerthigen Punkten an. Die Correspondenz (κ, λ) mit einem γ -werthigen Punkt in $x = y$ dachten wir uns oben (§ 1.) durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ zwischen den Coordinaten der Punkte x und y gegeben. Wenn nun die Curve f keine Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt, und die Curven (x) und (y) , von der K . und L . Ordnung, welche die $\kappa = K \cdot m - \gamma$ einem Punkte y entsprechenden Punkte x , bez. die $\lambda = L \cdot m - \gamma$ einem Punkte x entsprechenden y ausschneidet, alle mit x , bezw. y , beweglich sind, so liegen die P Coincidenzpunkte von (κ, λ) auf einer Curve C , deren Gleichung man aus $\varphi = 0$ erhalten würde, wenn man darin die Coordinaten von x und y unendlich wenig verschieden annähme. Wir können indess ohne diese algebraische Operation den Grad dieser Curve C der Coincidenzpunkte vermittelst des Ausdrucks für P bestimmen, wenn wir darin die Zahlen κ, λ und p durch m, γ, K und L ausdrücken:

$$P = \kappa + \lambda + 2p\gamma = m \{K + L + \gamma(m - 3)\} = m \cdot \Pi,$$

und berücksichtigen, dass diese P Punkte ein vollständiges Schnittpunktsystem auf f bilden müssen. Man erhält somit für den Grad von C die Zahl:

$$\Pi = K + L + \gamma(m - 3).$$

17. Die Zahl Π bleibt die nämliche, wenn man für f eine Curve mit Doppel- und vielfachen Punkten nimmt, durch welche, ebenso wie durch feste einfache Punkte von f , die Curven (x) und (y) noch beliebig hindurch gehn können. Denn durch Specialisirung der Constanten in den Gleichungen für die Curve f und die Correspondenz (κ, λ) wird der Grad der Curve C nicht geändert. Irgend einem Punkte y der Curve f entsprechen dann ausser den γ in ihn selbst entfallenden Punkten:

- a) κ mit y bewegliche Punkte;
- b) die in *festliegende* einfache oder mehrfache Punkte $A, A', \dots$ von f entfallenden Schnittpunkte der Curven (x) und (y) mit f . — Die Punkte $A, A' \dots$ mögen „*Ausnahmepunkte*“ von f heissen.

Demgemäss findet nun eine Coincidenz statt in folgenden Fällen:

1) Wenn einer der κ beweglichen einem Punkte y entsprechenden Punkte x (oder auch: einer der λ einem Punkte x entsprechenden Punkte y , vgl. § 10.) diesem Punkt auf *demselben* Curvenzweig unendlich nahe gelegen ist. Dieser Art sind alle Coincidenzen, welche eintreten, wenn f keine Ausnahmepunkte besitzt. Wir wollen dieselben im Gegensatz zu allen anderen, für welche eine jener Eigenschaften nicht vorhanden ist, *eigentliche Coincidenzen* nennen. Für eine gegebene Correspondenz (κ, λ) sei die Anzahl derselben $= P'$.

2) Wenn einer der Ausnahmepunkte A mit y zusammenfällt, d. h. wenn y in einen solchen hereinrückt. — Diese Coincidenzen sind uneigentliche, wenn von den κ beweglichen Punkten x , welche dem in A liegenden Punkte y entsprechen, keiner in A hereinfällt. Tritt dieser Fall indess für irgend einen Ausnahmepunkt A ein, so kann es sich ereignen, dass in diesen *Ausnahmepunkt eigentliche* Coincidenzen zu liegen kommen:

I. Wenn von den κ Punkten x , welche einem auf einen bestimmten Zweige von A angenommenen Punkte y entsprechen, einige auf *demselben* Zweige, auf welchem y liegt, zurückfallen. (Beispiele § 23. unten.)

II. Wenn jener Ausnahmepunkt A ein vielfacher Punkt mit theilweise *zusammenfallenden* Zweigen, z. B. ein Rückkehrpunkt ist. Zwei in einem solchen Punkt von f vereinigte Punkte der Correspondenz sind nicht nur als unendlich benachbart, sondern auch als auf dem-

selben Curvenelemente unendlich benachbart anzusehn, und bilden somit eine eigentliche Coincidenz.

Die unter I. und II. aufgezählten, in Ausnahmepunkte entfallenden eigentlichen Coincidenzen mögen vereinigt und ihre Summe durch ϱ bezeichnet werden. Diese ϱ Coincidenzen sind dann unter der obigen Zahl P' mit inbegriffen. Es möge demnach $P' - \varrho = P$ gesetzt werden.

Endlich möge noch Q die Summe aller *uneigentlichen* Coincidenzen von (κ, λ) darstellen.

Aus § 16. folgt dann, dass die Gleichung besteht:

$$P + Q + \varrho = m \cdot \Pi,$$

aus welcher sich die Zahl $P = P' - \varrho$ der *eigentlichen, nicht in Ausnahmepunkte entfallenden Coincidenzen* bestimmen lässt, wenn man Q und ϱ kennt.

Es möge zunächst die Anzahl Q der uneigentlichen Coincidenzen ermittelt werden.

19. In einen einfachen Ausnahmepunkt A von f möge für jede Lage von y eine Anzahl σ der diesem Punkt entsprechenden Schnittpunkte der Curve (x) entfallen; während von den einem Punkte x entsprechenden Punkten τ in A fallen mögen (wo τ und σ auch Null sein können).

Rückt nun der Punkt y in A , so entspricht ihm einmal der Punkt A σ -fach, weiter aber entspricht ihm die ganze Curve f τ -fach, weil er selbst jedem Punkt x dieser Curve τ -fach entspricht, und man hat somit:

$$\sigma + \tau$$

in A entfallende Coincidenzen*).

20. Aehnlich ermittelt man die Anzahl der in einen Doppelpunkt oder einen vielfachen Punkt von f entfallenden Punkte der Curve C . Man nehme zunächst an, dass für eine gegebene Correspondenz die Werthigkeit γ des Punktes $x = y$ Null sei, und dass in einem Doppelpunkt A' von f jede Curve (x) einen σ' -werthigen, jede Curve (y) einen τ' -werthigen Schnittpunkt besitze. Deformirt man nun die Correspondenz ein wenig, so dass die τ' vorher in A' entfallenden Punkte der Curve (y) , welche irgend einem Punkte x entsprechen, nicht mehr

*) Diese Coincidenzen gehören nicht in die Kategorie der eigentlichen Coincidenzen, weil sie nicht dadurch entstanden sind, dass einer der κ beweglichen dem Punkte A entsprechenden Punkte x in diesen herein gerückt ist. Für $\tau = 0$ erkennt man dies direct; ist aber τ von Null verschieden, so kann man überhaupt nicht mehr von κ discreten dem Punkt A entsprechenden Punkten x reden, weil die ganze Curve f an deren Stelle getreten ist.

in A' selbst, sondern nur dem Punkte A' nahe benachbart fallen, so entspricht irgend einem von diesen τ' Punkten die ganze Curve f selbst einfach (wie im vorstehenden §), geht also y auf dem Weg zum Doppelpunkt durch einen solchen hindurch, so erhält man auf die oben (ibd.) erörterte Weise eine einfache Coincidenz; es ergeben sich so τ' Coincidenzen, zu welchen noch die σ' Coincidenzen kommen, welche eintreten, wenn y den Punkt A' selbst passirt, so dass im Ganzen in A' : $\sigma' + \tau'$ Coincidenzen fallen. Geht man nun zu einer Correspondenz über, welche in A' sich ebenso wie die oben besprochene verhält, ausserdem aber in $x = y$ einen γ -werthigen Punkt besitzt, so kommen zu jenen $\sigma' + \tau'$ in A' entfallenden Coincidenzen noch die 2γ weiteren hinzu, welche durch Zusammenfallen je eines Zweiges des Doppelpunktes mit den auf den anderen Zweig entfallenden γ Schnittpunkten eintreten, und man hat im Ganzen:

$$\sigma' + \tau' + 2\gamma$$

in einen Doppelpunkt entfallende (uneigentliche) Coincidenzen*). Man findet auf demselben Wege die Anzahl der einem i -fachen Punkte A'' von f entsprechenden Coincidenzen, wenn σ'' , bez. τ'' Schnittpunkte der Curven (x) und (y) in ihn entfallen, gleich:

$$\sigma'' + \tau'' + i(i-1)\gamma.$$

21. Haben also vermöge einer Correspondenz (κ, λ) (die übrigens nicht bloß einwerthige, sondern auch beliebig vielwerthige Punkte besitzen kann) die Curven (x) und (y) in irgend einem festen i -fachen („Ausnahme“-)Punkte A von f ($i = 1, 2, \dots$) bezw. einen σ - und τ -werthigen Schnittpunkt, und ist die Anzahl der beweglichen einwerthigen Punkte, welche einem Punkt y , bez. x entsprechen (mehrwerthige denke man sich in einwerthige zerlegt):

$$\kappa = m \cdot K - \Sigma \sigma - \gamma; \quad \lambda = m \cdot L - \Sigma \tau - \gamma,$$

wo das Zeichen Σ die Summe über die *allen* Ausnahmepunkten ent-

*) Die $\sigma' + \tau'$ ersteren Coincidenzen sind uneigentliche aus dem in der vorhergehenden Note angeführten Grunde; die 2γ anderen sind gleichfalls solche, und zwar nicht nur für den Fall, dass A' ein Doppelpunkt mit getrennten Tangenten ist, sondern auch noch, wenn derselbe ein Rückkehrpunkt ist. Man erkennt das Letztere am besten an dem besonderen Fall, wo $\tau' = 0$, σ' aber von Null verschieden ist, für welchen im Allgemeinen keiner von den κ dem Punkte A' entsprechenden Punkten x in denselben hereinfällt, so dass also die eine Bedingung der eigentlichen Coincidenz unerfüllt bleibt. — Wenn für $\sigma' = \tau' = 0$ γ von den κ dem Punkt A entsprechenden Punkten in A zurückfallen, wodurch dann, wenn A ein Rückkehrpunkt ist, γ eigentliche Coincidenzen entstehen, so muss man hiernach annehmen, dass dieselben zu jenen 2γ uneigentlichen Coincidenzen *hinzuge treten* sind, was sich in der That in einzelnen Fällen leicht nachweisen lässt. — Eine Bestätigung der obigen Schlüsse gewährt übrigens die Bemerkung in § 22.

sprechenden Zahlen bedeutet, so ist die Anzahl aller uneigentlichen Coincidenzen nach Vorstehendem:

$$Q = \Sigma \sigma + \Sigma \tau + \gamma \cdot \Sigma i(i-1),$$

wo die letzte Summe Σ sich über alle Ausnahmepunkte von f erstreckt. Substituirt man diesen Werth von Q in die Gleichung des § 18., so erhält man, indem man noch den Ausdruck für Π einsetzt:

$$P = m \cdot \Pi - Q - \varrho = \kappa + \lambda + 2p\gamma - \varrho,$$

wo:

$$p = \frac{1}{2} m(m-3) + 1 - \Sigma \frac{1}{2} i(i-1),$$

das Geschlecht der Curve f ist. Man hat ferner für die Anzahl P' aller eigentlichen (§ 17.) Coincidenzen:

$$P' = \kappa + \lambda + 2p\gamma,$$

also genau die frühere Correspondenzformel (§ 7.), während P die Anzahl derjenigen eigentlichen Coincidenzen bedeutet, welche nicht in Ausnahmepunkte von f fallen. Um P aus der Correspondenzformel (P') zu erhalten, hat man eine *Reduction* ϱ an derselben anzubringen, welche sich aus den wegen der einzelnen Ausnahmepunkte anzubringenden Reductionen zusammensetzt. Die letztere aber findet man (§ 18.), indem man die Anzahl derjenigen von den κ einem Ausnahmepunkte A entsprechenden einwerthigen Punkten x bestimmt, welche in A zurückfallen (und zwar für einen vielfachen Punkt A mit getrennten Zweigen auf denselben Zweig, auf welchem y angenommen wurde). Dies ist (für jeden Zweig von A und) für alle Ausnahmepunkte A auszuführen. Die Summe der so erhaltenen Zahlen ist ϱ . — Insbesondere für Rückkehrpunkte gilt diese Regel ohne den in Klammern zugefügten Vorbehalt.

An Stelle der Correspondenzformel des § 7. (für P') tritt die des § 13., wenn die Correspondenz (κ, λ) durch eine solche mit mehrwerthigen Punkten ersetzt wird. Die Regel für Bestimmung der Reduction ϱ bleibt aber die nämliche auch für diesen Fall. *

22. Handelt es sich in den Fällen der Anwendung meist um den Werth des reducirten Ausdrucks P , so lässt sich doch auch dem Ausdruck P' ein nicht unwichtiger geometrischer Sinn unterlegen. Jede Correspondenz behält nämlich offenbar ihre Bedeutung für alle durch eindeutige Transformation aus einander ableitbaren Curven, sowohl was die Zahlen κ, λ, γ , als auch was die Gesamtzahl P' der eigentlichen Coincidenzen angeht. Denn die Eigenschaft zweier Punkte, auf demselben Curvenelement von f unendlich nahe benachbart zu liegen, ist eine durch eindeutige Transformation unzerstörbare, ob dieses Element nun ein einfaches Curvenelement von f ist, oder mit anderen Elementen zu einem vielfachen Punkt von f vereinigt, oder endlich in

einen Rückkehrpunkt von f umgefaltet ist. Man muss also schliessen, dass eine z. B. in einen Rückkehrpunkt A von f entfallende *eigentliche* Coincidenz bei einer eindeutigen Transformation von f , durch welche der Rückkehrpunkt zerstört wird (was immer möglich ist, indem man die Transformationscurven durch A gehn lässt), in eine eigentliche Coincidenz der gewöhnlichen Art auf der transformirten Curve übergeht. Dies war aus anderen Gründen zu erwarten.

23. Wie sich die wegen vorhandener Doppel- oder Rückkehrpunkte der Curve f an der Formel für P' anzubringende Reduction in einzelnen Fällen gestaltet, möge im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden. Die auch sonst bemerkenswerthen Beispiele d) und f) verdanke ich einer Mittheilung meines Collegen Sturm.

a) Die Correspondenz $(m-1, m-1)_1^*$ zwischen je 2 Schnittpunkten x und y einer Curve f (von der Ordnung m und dem Geschlecht p) und einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt B ausserhalb f geht, hat zu Coincidenzpunkten die $2m + 2p - 2$ Berührungspunkte der Tangenten des Geradenbüschels durch B . Ein Doppelpunkt A , welchen f besitzt, verändert diese Zahl nicht, weil, wenn der Punkt y in A rückt, von den ihm entsprechenden $x = m - 1$ (im Allgemeinen nicht in y fallenden) Punkten x nur einer wieder in den Doppelpunkt A , und zwar auf den anderen Zweig desselben fällt. Dagegen bringt jeder Rückkehrpunkt, aus den (§ 21.) angeführten Gründen, eine Reduction um 1 hervor. Die Zahl der nicht in Ausnahmepunkte von f entfallenden eigentlichen Coincidenzen ist also, wenn f β Rückkehrpunkte besitzt:

$$P = 2m + 2p - 2 - \beta.$$

b) Die Anzahl der von einem Doppelpunkt A aus an die Curve f construirbaren Tangenten ist $2m + 2p - 8$. Sie berühren in den Coincidenzpunkten einer Correspondenz $(m-3, m-3)_1$ zwischen den Schnittpunkten einer beliebig durch A gelegten Geraden mit f . Diese Zahl erfährt keine Reduction, wenn A in einen Rückkehrpunkt übergeht; denn von den ihm als Punkt y entsprechenden $x = m - 3$ Punkten x (den übrigen Schnittpunkten der Rückkehrtangente in A') fällt keiner in A zurück.

c) Die von Jonquières (Borchardt's Journal Bd. 66) und Cayley (Transact. R. Soc. Vol. 158) aufgestellten Formeln für die Anzahl der eine gegebene Curve f berührenden Curven, welche noch gewissen äusseren Bedingungen unterliegen, stimmen mit den (diese Annalen

*) Hier wie in den folgenden Beispielen möge der Kürze wegen für eine Correspondenz, die (§ 7.) durch die Klammer (x, λ) charakterisirt wird, die Werthigkeit γ des Punktes $x = y$ als unterer Index beigefügt werden: $(x, \lambda)_\gamma$.

Bd. IV, S. 548, und Bd. VI, S. 46 ff.) von mir aufgestellten Formeln überein, obgleich an letzterer Stelle jene Bedingungen theilweise ersetzt sind durch die, dass die Curven noch durch die Doppelpunkte von f gehen sollen. Es geht daraus hervor, dass Doppelpunkte von f eine besondere Reduction φ an jenen Formeln für die Anzahl der Berührungscurven in keinem Falle veranlassen. Rückkehrpunkte bewirken nur dann eine Reduction, wenn die Schaar der Berührungscurven nicht durch sie hindurchgeht. — Man verificirt dies leicht mit Hülfe der oben angegebenen Regeln.

d) Sind 2 ebene Curven A und B eindeutig auf einander bezogen, so dass jedem Punkt von A eine Tangente von B entspricht und umgekehrt, so ist die Anzahl derjenigen Punkte von A , durch welche je die entsprechende Tangente durchgeht, gleich der Anzahl der Coincidenzen einer Correspondenz $(m, r)_0$ zwischen einem Punkt y von A und den m Schnittpunkten x von A mit der dem y entsprechenden Tangente von B . Diese Zahl ist aber gleich $m+r$, wenn m der Grad von A und r die Classe von B bedeutet. Weder Doppel- noch Rückkehrpunkte sind hierbei von Einfluss. — Hat man die nämliche Beziehung zwischen 2 Raumcurven A und B , so wird die Classe der abwickelbaren Fläche, welche die durch entsprechende Elemente (Punkt von A und Tangente von B) gelegten Ebenen umhüllen, ebenfalls $=m+r$ sein, wenn m und r ihre Bedeutung auch für die Raumcurven behalten. — Denn durch Projection derselben auf eine beliebige Ebene erhält man die vorige Beziehung.

e) Schneiden die Curven eines einfach unendlichen Curvenbüschels B (welches beliebig einfache oder Doppel- und Rückkehrpunkte von f zu Basispunkten besitzen mag) die Curve f in M beweglichen Punkten, so besteht zwischen je zweien dieser Punkte eine Correspondenz $\varphi = (M-1, M-1)_1$. Ist noch ein anderes Büschel B' gegeben, das in M' beweglichen Punkten schneidet und zu einer Correspondenz $\varphi' = (M'-1, M'-1)_1$ Veranlassung giebt, so ist die Anzahl der den Beiden gleichzeitig angehörenden Punktpaare (wegen des symmetrischen Verhaltens beider Correspondenzen, vgl. § 7.):

$$\frac{1}{2} (\varphi \varphi') = (M-1)(M'-1) - p.$$

Man hätte diese Punkte aber auch im Sinne des § 15. als Coincidenzpunkte einer Correspondenz Φ auffassen können, welche besteht zwischen einem Punkt y von f und: 1) den $M-1$ Punkten x , welche vermöge φ dem y entsprechen; 2) den $(M-1)(M'-1)$ Punkten x' , von denen vermöge φ' je $M'-1$ einem jener Punkte x entsprechen. — Man kann diese Auffassung zur Berechnung der Reduction benutzen, welche durch die α Doppel- und β Rückkehrpunkte von f , die nicht Basispunkte der Büschel B und B' sind, veranlasst wird. Lässt man

nämlich den Punkt y auf einen Zweig eines Doppelpunktes A von f rücken, so entspricht ihm ausser $M-2$ ausserhalb A gelegenen Punkten x ein Punkt x auf dem anderen Zweig, während einer der diesem entsprechenden $M'-1$ Punkte x' auf den Zweig zurückfällt, auf dem y liegt. Die Coincidenz x' mit y ist demnach eine eigentliche; zu ihr gehört die Coincidenz auf dem anderen Zweig (wegen des eigenthümlichen Verhaltens der gegebenen Correspondenz gruppiren sich die Coincidenzen je zu Paaren, welche aus Gründen der Symmetrie doppelt auftreten), und die Zahl der gesuchten Paare ist:

$$\frac{1}{2}(\varphi\varphi') - d - \beta = (M-1)(M'-1) - p - d - \beta,$$

wo noch β einfach in Abzug gebracht worden ist, weil Doppel- und Rückkehrpunkte im vorliegenden Falle sich nicht verschieden verhalten.

f) Gegeben sei wie in e) ein einfach unendliches Büschel, das in M beweglichen Punkten, worunter die Punkte x und y sich befinden mögen, die Curve f schneidet. Es soll die Anzahl derjenigen Paare von Schnittpunkten x, y bestimmt werden, welche in Bezug auf einen beliebig gegebenen Kegelschnitt polar gelegen sind. Ein solches Paar muss zugleich den beiden Correspondenzen: $\varphi = (M-1, M-1)_1$ und $\varphi' = (m, m)_0$ (die letztere zwischen einem Punkt y von f und den m Schnittpunkten x der Polaren zu y) genügen. Man erhält so:

$$\frac{1}{2}(\varphi\varphi') = m(M-1)$$

für die Anzahl der gesuchten Paare. Diese Zahl erfährt weder durch Doppel- noch durch Rückkehrpunkte eine Reduction, indem eigentliche Coincidenzen in den Ausnahmepunkten nicht vorhanden sind.

Darmstadt, im Februar 1874.