Ein Beweis des Additionstheorems für die hyperelliptischen Integrale.

Von Ad. Schumann in Berlin.

Der Abel'sche Satz, dass eine Summe von hyperelliptischen Integralen dritter Gattung mit dem Parameter t sich als eine bestimmte logarithmische Function dieses Parameters darstellen lasse, führt umgekehrt auf den Gedanken, aus der Natur der logarithmischen Function ihre Darstellung durch Integrale herzuleiten, in denen das Argument der Function als unabhängiger Parameter der Integrale erscheint. Eine derartige Darstellung liefert im Allgemeinen die Theorie complexer Variabelen, welche eine in einem bestimmten Gebiete einläufige und stetige Function durch ein über die Grenzen jenes Gebietes sich erstreckendes Integral ausdrücken lehrt, welches als Parameter das Argument der Function enthält. Indem ich diesen Ideengang verfolge, hat der Beweis, welchen ich für das Additionstheorem der hyperelliptischen Integrale gebe, jene Theorie zur Grundlage und ist wesentlich aus einer charakteristischen Eigenschaft der logarithmischen Function geschöpft. Sobald die gesuchte Darstellung gewonnen und das Theorem für die dritte Gattung von hyperelliptischen Integralen zum Ausdruck gebracht ist, setzt eine Vergleichung der Coefficienten der beiden Reihen, in welche sich die Function und ihre Darstellung entwickeln lässt, das Theorem für die erste und zweite Gattung unmittelbar in Evidenz. Sucht man, von demselben Gesichtspunkt ausgehend, das Additionstheorem für die allgemeinsten Formen Abel'scher Integrale herzuleiten, so wird man im Wesentlichen auf die Beweisform geführt, welche Clebsch und Gordan in ihrem Werk „Theorie der Abel'schen Functionen" gegeben haben. Gleichwohl, hoffe ich, wird der Beweis, welchen ich vorlege, gerade weil er durch Beschränkung auf die hyperelliptischen Integrale sich so überaus einfach und durchsichtig gestaltet, den Lesern dieses Journals nach Inhalt und Form einiges Interesse bieten.

§ 1.

Es sei $\eta^2 = (z - a_1)(z - a_2) \cdots\cdots (z - a_{2\varrho+2})$ eine ganze rationale Function von geradem Grade; der Fall, in welchem η^2 eine ganze rationale Function von ungeradem Grade ist, wird in der Folge auf jenen zurückgeführt werden. Ferner seien M und N ganze rationale Functionen von z dergestalt, dass die Function $M+N\eta$ für $z=\infty$ von der n^{ten} Ordnung unendlich wird; ausserdem gelte die Beschränkung, dass M und η^2 keine gemeinschaftliche Wurzel haben. Die Werthe von z, welche den beiden Gleichungen

$$\eta^2=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2\varrho+2})$$

und $M+N\eta=0$ genügen, sind Wurzeln der Gleichung $M^2-\eta^2N^2=0$. Sollte diese Gleichung gleiche Wurzeln haben, so denke man die Coefficienten in M und N so geändert, dass dieser Fall zunächst vermieden werde. Jede Wurzel z_μ der Gleichung wird entweder den Factor $M+N\eta$ oder $M-N\eta$ zu Null machen, so dass jeder Wurzel z_μ ein Werth η_μ adjungirt ist, je nachdem jener Factor oder dieser verschwindet. Inwieweit von den gemachten Voraussetzungen Abstand genommen werden darf, wird nach erfolgter Darlegung des Theorems klar liegen; vorläufig möge zur Vereinfachung der Darstellung daran festgehalten werden.

Nach diesen Vorbemerkungen beschränke man die Vieldeutigkeit der Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ in folgender Weise. Man nehme einen Punkt o an, von dem aus alle singulären Punkte, sowohl diejenigen, für welche die Function logarithmische, als auch diejenigen, für welche sie algebraische Unstetigkeiten zeigt, nach verschiedenen Richtungen liegen, und setze voraus, dass die singulären Punkte $a_1 a_2\cdots\cdots a_{2\varrho+2}$ in der Ordnung mit Indices versehen seien, wie sie in Richtung der wachsenden Winkel einander folgen. Alsdann wähle man für ein Argument z im Bereich von $a_{2\varrho+2}$ einen bestimmten Werth $+\eta$ und denjenigen Logarithmus, welcher, ohne dass z aus dem Bereich dieses Punktes herausgetreten ist, für $a_{2\varrho+2}$ verschwindet; unter dem Bereich des Punktes $a_{2\varrho+2}$ sei aber eine Kreisfläche um $a_{2\varrho+2}$ verstanden, welche sich bis zum nächstgelegenen singulären Punkt ausdehnt. Bei dieser Annahme ist der Punkt $a_{2\varrho+2}$ für jedes Gebiet der z Fläche, welches ausser $a_{2\varrho+2}$ keinen singulären Punkt enthält, seiner Singularität für die Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ entkleidet; denn in hinlänglicher Nähe von $a_{2\varrho+2}$ lässt sich die Function durch die Reihe $2\left\{\frac{N}{M}+\frac{\eta^2}{3}\left(\frac{N}{M}\right)^3+\frac{\eta^4}{5}\left(\frac{N}{M}\right)^5+\cdots\text{ in inf.}\right\}$ darstellen, deren Werth bei einem Umlauf des Arguments um $a_{2\varrho+2}$ sich nicht ändert und für $z=a_{2\varrho+2}$ den eindeutigen endlichen Werth $2\,\frac{N(a_{2\varrho+2})}{M(a_{2\varrho+2})}$ annimmt. Jenes Gebiet, in welchem die Function nunmehr eindeutig definirt ist, lässt sich bis zu folgenden Grenzen ausdehnen. Man umgebe jeden der singulären Punkte $a_1 a_2 \cdots\cdots a_{2\varrho+1}$, sowie jede der $2n$ Wurzeln $z_1 z_2 \cdots\cdots z_{2n}$ durch Linien, welche vom Punkte o geradlinig nach dem singulären Punkte ausgehen, diesen in einem kleinen Kreise umschliessen und alsdann geradlinig nach dem Punkte o zurücklaufen. Gestattet man der unabhängigen Variabeln nur solche Wege, welche jene Linien nicht schneiden, so wird bei jedem geschlossenen Wege die Function zu ihrem Anfangswerth zurückkehren; die Function wird also, da der Punkt $z = \infty$ keine Singularität aufweist, in dem ganzen Gebiete T der z-Ebene einläufig und stetig sein, welches ausserhalb jener Linien gelegen ist. Jede einzelne Linie, welche zum Zweck der Ausschliessung eines singulären Punktes verzeichnet ist, möge Schleife des singulären Punktes heissen.

Nun sei z_μ eine Wurzel von $M + N\eta$, und man lasse z auf dem kleinen Kreise, welcher z_μ umschliesst, in Richtung der wachsenden Winkel z_μ umlaufen. Da nach der Voraussetzung z_μ eine einfache Wurzel der Gleichung $M^2 - N^2\eta^2 = 0$ ist, und für z_μ die Functionen M und η nicht gleichzeitig verschwinden, so ist $M + N\eta$ um so mehr proportional mit $(z - z_\mu)$, je näher z an den Punkt z_μ herangeht, während z_μ für $M - N\eta$ keine Wurzel ist. Es wird demnach $\lg \frac{M + N\eta}{M - N\eta}$ um $2\pi i$ zunehmen und die oben betrachtete Function um $\frac{2\pi i}{\eta}$ wachsen. Wäre z_μ hingegen eine Wurzel von $M - N\eta$ gewesen, so würde die Function um $\frac{2\pi i}{\eta}$ abgenommen haben. So oft daher die Variabele die Schleife einer logarithmischen Unstetigkeit umläuft, nimmt die Function um $\pm\left(\frac{2\pi i}{\eta}\right)$ zu, je nachdem $M + N\eta$ oder $M - N\eta$ für das Argument z_μ zu Null wird.

Wenn man daher die Variabele auf zwei verschiedenen Wegen von dem Punkte $a_{2\varrho+2}$ aus nach dem Beginn des Schleifenkreises um a_1 gelangen lässt, auf einem, welcher geradlinig zu o und von da aus auf den Grenzen des T Gebietes in positiver Winkelrichtung entlang führt, und auf einem anderen, welcher von $a_{2\varrho+2}$ an geradlinig nach o, von da aus aber unmittelbar geradlinig zum Anfangspunkt des Schleifenkreises um a_1 sich fortsetzt, so werden sich die Werthe, welche die Function am Ende beider Wege annimmt, um $\frac{2\pi i}{\eta} q_1$ unterscheiden, wenn q_1 die Differenz zwischen der Anzahl der innerhalb des Winkelblatts $(a_{2\varrho+2}\, o\, a_1)$ gelegenen Wurzeln von $M + N\eta$ und $M - N\eta$ bezeichnet. Würde man daher den Functionswerth am Ende des ersten Weges durch $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M + N\eta}{M - N\eta} + \frac{2\pi i}{\eta} p_1$ darstellen, wo der Logarithmus für $z = \lim a_1$ verschwinde, so würde der Functionswerth am Ende des zweiten Weges sich in der Form $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}(p_1-q_1)$ ausdrücken lassen. Die ersten Terme in diesen Functionswerthen ändern sich bei einem Umlauf um a_1 nicht, die zweiten dagegen wechseln ihr Zeichen. Setzt man daher voraus, dass allgemein eine Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$, deren Logarithmus für $z=\lim a_{\varkappa-1}$ verschwindet, auf einem Wege längs der Grenze des T-Gebietes am Beginn des Schleifenkreises von $a_\varkappa$ den Werth $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}p_\varkappa$ annehme, worin der Logarithmus für $z=\lim a_\varkappa$ zu Null wird, so muss die ursprünglich definirte Function, wenn die Variabele von $a_{2\varrho+2}$ aus geradlinig nach o und von da aus auf der Grenze des T-Gebietes in positiver Winkelrichtung nach $a_\varkappa$ läuft, einen Werth annehmen, der sich in der Form $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}(p_\varkappa-p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1)$ darstellen lässt, worin der Logarithmus für $z=\lim a_\varkappa$ verschwindet. Wenn demnach die Variabele die Grenze des T-Gebietes umschritten und von o aus geradlinig nach $a_{2\varrho+2}$ zurückgekehrt ist, so muss, da die Function ihren ursprünglichen Werth wieder annimmt,

$$\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}=\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}(p_{2\varrho+2}-p_{2\varrho+1}+p_{2\varrho}-\cdots-p_1)$$

sein. Die Logarithmen verschwinden beide für $z=\lim a_{2\varrho+2}$; es ist daher $p_{2\varrho+2}-p_{2\varrho+1}+p_{2\varrho}-\cdots-p_1=0$, oder in anderer Form

$$\sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa}\, p_{2\varkappa+1}=\sum_1^{\varrho+1}{}^{\varkappa}\, p_{2\varkappa}\,.$$

Lässt man dagegen die Variabele von $a_{2\varrho+2}$ geradlinig nach o und von da unmittelbar geradlinig zu dem Anfangspunkt des Schleifenkreises von a_1 gehen, dann aber, ohne a_1 zu umschreiten, nach o auf demselben Wege zurücklaufen und von da wieder ohne Rücksicht auf die logarithmischen Schleifen, sogleich auf der Schleife von a_2 bis zum Beginn ihres Kreises den Weg fortsetzen, so wird die Function, wenn die Variabele in analoger Weise von a_2 zu a_3, von a_3 zu a_4 u. s. f. bis zu $a_\varkappa$, ohne je eine Singularität der Function zu umschreiten, ihren Lauf nimmt, bei Beginn des Schleifenkreises von $a_\varkappa$ die Form haben $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{\eta}\left\{(p_\varkappa-q_\varkappa)+(p_{\varkappa-1}-q_{\varkappa-1})+\cdots(p_1-q_1)\right\}$. Hierin verschwindet der Logarithmus für $z=\lim a_\varkappa$, während $q_\varkappa$ die Differenz zwischen der Anzahl der in dem Winkelblatt $(a_{\varkappa-1}oa_\varkappa)$ gelegenen Wurzeln von $M+N\eta$ und $M-N\eta$ bezeichnet. Ist die Variabele auf dem so charakterisirten Wege zu dem Ausgangspunkt zurückgekehrt, so muss die Function, da das Argument nie einen singulären Punkt umschritten hat, den Anfangswerth wieder erhalten. Da aber der Endwerth in der Form

$$\frac{1}{\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta} + \frac{2\pi i}{\eta} \left\{ \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} q_\varkappa \right\}$$

sich darstellt und der erste Term mit dem Ausgangswerth der Function übereinstimmt, denn in beiden verschwinden die Logarithmen für $z = \lim a_{2\varrho+2}$, so muss der zweite Term Null sein. Es ist daher $\sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} p_\varkappa = \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} q_\varkappa$. Beide Relationen werden für spätere Transformationen herangezogen werden.

§ 2.

Ist t irgend ein Punkt im Gebiete T, so bildet ein kleiner Kreis um t mit der Begrenzung von T zusammen eine neue Begrenzung für eine Fläche, innerhalb welcher die Function $\frac{1}{(z-t)\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ einläufig und stetig ist. Eine Integration über diese Begrenzung hat den Werth Null. Dabei ist zu bemerken, dass, wenn z die Grenzen des T-Gebietes in positiver Winkelrichtung umläuft, der Grenzkreis um t gleichfalls in positiver Winkelrichtung zu umschreiten ist. Die Ausführung dieser Integration führt zu einer Darstellung der Function $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta}$, welche gleichzeitig das Additionstheorem für die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung in sich schliesst.

In der That, die Integration längs des kleinen Kreises um t in positiver Winkelrichtung liefert den Werth $\frac{2\pi i}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$, wobei $\frac{1}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$ denjenigen Werth bedeutet, welchen $\frac{1}{\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ annimmt, wenn z von $a_{2\varrho+2}$ aus in dem Gebiete T nach t gelangt, während andererseits die Integration über die Begrenzung des T-Gebietes zu hyperelliptischen Integralen Veranlassung giebt, in denen t als unabhängiger Parameter auftritt. Diese Integration zerfällt in eine Anzahl solcher, welche sich über die Schleifen der logarithmischen Unstetigkeiten z_μ erstrecken, und in eine Reihe solcher, welche sich über die Schleifen der algebraischen Unstetigkeiten $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ ausdehnen.

Ist z_μ eine Wurzel von $M+N\eta$, so wird die Function

$$\frac{1}{(z-t)\eta} \lg \frac{M+N\eta}{M-N\eta}$$

bei einem Umlauf um z_μ um $\frac{2\pi i}{(z-t)\eta}$ zunehmen; daher werden sich bei der Integration von o bis z_μ und von z_μ zurück nach o die Bestandtheile, welche die logarithmische Function enthalten, gegenseitig aufheben, und da das Integral um den unendlich kleinen Kreis, welcher z_μ umgiebt, sich auf Null reducirt, so bleibt als Bestand für die Integration $2\pi i\int_{z_\mu}^{0}\frac{dz}{(z-t)\eta}$. Wäre z_μ eine Wurzel von $M-N\eta$ gewesen, so wäre als Ergebniss der Integration $-2\pi i\int_{z_\mu}^{0}\frac{dz}{(z-t)\eta}$ hervorgegangen. Es sind daher die Integrationsresultate über die Schleifen, welche $z_1 z_2 \cdots z_{2n}$ umfassen, in der Form zusammenzufassen $2\pi i\sum_{1}^{2n}{}_{\mu}\int_{z_\mu \eta_\mu}^{0}\frac{dz}{(z-t)\eta}$, wo η_μ denjenigen Werth anzeigt, welcher dem z_μ adjungirt ist.

Die Integration über eine Schleife, welche einen singulären Punkt $a_\varkappa$ umschliesst, zerfällt in ein geradliniges Integral von o bis $a_\varkappa$, in ein zweites, welches über den Schleifenkreis auszuführen ist, und endlich in ein drittes, welches sich von $a_\varkappa$ geradlinig nach o erstreckt. Die Function hat auf dem Wege von o bis $a_\varkappa$ den Werth

$$\frac{1}{(z-t)\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}+\frac{2\pi i}{(z-t)\eta}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1),$$

sie geht nach einem Umlauf auf dem Schleifenkreise in

$$\frac{1}{(z-t)\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}-\frac{2\pi i}{(z-t)\eta}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1)$$

über, es zerstören sich daher bei der Integration diejenigen Terme, welche die logarithmischen Functionen enthalten, und da das Integral um den Punkt $a_\varkappa$ verschwindet, so ist das Resultat der Integration $4\pi i(p_\varkappa - p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1)\int_0^{a_\varkappa}\frac{dz}{(z-t)\eta}$. Bezeichnet man das Integral $\int_0^{a_\varkappa}\frac{dz}{(z-t)(+\eta)}$ mit $A_\varkappa^{(t)}$, so lassen sich die Ergebnisse der Integration über die Schleifen, welche $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ umschliessen, in der Form darstellen $4\pi i\sum_{1}^{2\varrho+1}{}_{\varkappa} A_\varkappa^{(t)}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1)$.

Aus den bisherigen Entwickelungen ist mithin folgende Darstellung der Function $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ gewonnen:

$$\text{I.)}\ \frac{1}{\eta(t)}\lg\frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}=-\sum_{1}^{2n}{}_{\mu}\int_{z_\mu\eta_\mu}^{0}\frac{dz}{(z-t)\eta}-\sum_{1}^{2\varrho+1}{}_{\varkappa}2A_\varkappa^{(t)}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1}+p_{\varkappa-2}-\cdots p_1).$$

Diese Darstellung ist gültig für jeden Punkt im Gebiete T. Zugleich schliesst sie in sich das Additionstheorem für die hyperelliptischen Integrale dritter Gattung, dem im folgenden Paragraphen noch eine andere Form gegeben werden mag.

§ 3.

Die Integrale $\int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta}$, welche in Formel (I.) auftreten, sind geradlinig von z_μ bis o zu erstrecken mit demjenigen η_μ, welches dem z_μ adjungirt ist. Statt dessen lässt sich die Integration von z_μ nach a_1 und von a_1 geradlinig nach o wählen, vorausgesetzt, dass jener ohne eine Ueberschreitung eines Punktes t, oder eines singulären Punktes $a_\varkappa$ in diesen übergeführt werden kann; der Weg von z_μ nach a_1 ist aber stets so zu nehmen möglich, dass diese Voraussetzung erfüllt ist. Es ist daher $\int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta} = \int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{a_1} \frac{dz}{(z-t)\eta} \mp A_1^{(t)}$, je nachdem z_μ eine Wurzel von $M+N\eta$ oder $M-N\eta$ ist. Die Summation in Formel (I.) erstreckt sich über alle Wurzeln sowohl von $M+N\eta$ als von $M-N\eta$; es wird also $-A_1^{(t)}$ so oft bei der Summation auftreten, als der Unterschied zwischen der Anzahl jener Wurzeln von der Anzahl dieser beträgt, das ist $\sum\limits_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa}\, q_\varkappa$-mal. Demnach ist

$$-\sum_1^{2n}{}^{\mu} \int\limits_{z_\mu \eta_\mu}^{0} \frac{dz}{(z-t)\eta} = \sum_1^{2n}{}^{\mu} \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta} + A_1^{(t)} \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa}\, q_\varkappa\,.$$

Würde man die z-Ebene in Rücksicht auf η als zweiblättrige Riemann'sche Fläche fassen, deren Verzweigungsschnitte geradlinig von den singulären Punkten ins Unendliche auslaufende und in ihrer Richtung durch o bestimmte Strahlen sind, so müsste der Integrationsweg von a_1 bis z_μ stets in demjenigen Blatte verlaufen, welches η_μ anzeigt; im Uebrigen wäre er in Rücksicht auf t der Beschränkung unterworfen, dass er nie den Strahl schneidet, welcher von t aus sich ins Unendliche erstreckt und dessen Richtung durch die von o nach t angegeben sei.

Nunmehr mögen in dem Ausdruck $\sum\limits_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}\, 2A_\varkappa^{(t)}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ an Stelle der $A_1^{(t)}, A_2^{(t)} \ldots A_{2\varrho+1}^{(t)}$ die geradlinigen Integrale von der Form $\int\limits_{a_\varkappa}^{a_{\varkappa+1}} \frac{dz}{(z-t)(+\eta)} = A_{\varkappa,\varkappa+1}^{(t)}$ eingeführt werden. Unter der Voraussetzung dass t nicht in einem der Dreiecke gelegen ist, welche durch zwei auf einander folgende Punkte $a_1 a_2 \cdots a_{2\varrho+1}$ und den Punkt o bestimmt sind, gelten folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
-A^{(t)}_{\varkappa-1} + A^{(t)}_{\varkappa} &= A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa} \\
-A^{(t)}_{\varkappa-2} + A^{(t)}_{\varkappa-1} &= A^{(t)}_{\varkappa-2,\varkappa-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-A^{(t)}_{2} + A^{(t)}_{3} &= A^{(t)}_{2,3} \\
-A^{(t)}_{1} + A^{(t)}_{2} &= A^{(t)}_{1,2}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt $A^{(t)}_{\varkappa} = A^{(t)}_1 + A^{(t)}_{1,2} + A^{(t)}_{2,3} + \cdots A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa}$. Giebt man dem Index $\varkappa$ in dieser Gleichung die Zahlen $1, 2, 3, \cdots 2\varrho+1$ und addirt die dadurch entstehenden $2\varrho+1$ Gleichungen, nachdem jede mit dem zugehörigen Zahlenfactor $(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ multiplicirt ist, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}\, 2A^{(t)}_{\varkappa}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) = 2A^{(t)}_1 & \sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) \\
+ \cdots 2A^{(t)}_{\lambda-1,\lambda} & \sum_{\lambda}^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) \\
+ 2A^{(t)}_{\lambda,\lambda+1} & \sum_{\lambda+1}^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

Der Zahlenfactor $\sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ lässt folgende Umformungen zu. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1) &= \sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2\varrho}{}^{\varkappa} p_\varkappa + \sum_1^{2\varrho-1}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2\varrho-2}{}^{\varkappa} p_\varkappa \\
&+ \cdots\cdots \sum_1^{3}{}^{\varkappa} p_\varkappa - \sum_1^{2}{}^{\varkappa} p_\varkappa + p_1 = \sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1}.
\end{aligned}$$

Nach § 1. war aber $\sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1} = \sum_1^{\varrho+1}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa}$; daraus folgt

$$2\sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1} = \sum_0^{\varrho}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa+1} + \sum_1^{\varrho+1}{}^{\varkappa} p_{2\varkappa} = \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} p_\varkappa.$$

Da nun die zweite Relation in § 1. zeigte, dass $\sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} p_\varkappa = \sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa} q_\varkappa$, so nimmt der Ausdruck $2\,A_1^{(t)}\sum_1^{2\varrho+1}{}^{\varkappa}\,(p_\varkappa - p_{\varkappa-1} + p_{\varkappa-2} - \cdots p_1)$ die Form an $A_1^{(t)}\sum_1^{2\varrho+2}{}^{\varkappa}\,q_\varkappa$. Bezeichnet man daher den Coefficienten von $2\cdot A_{\lambda-1,\lambda}^{(t)}$ mit $m_{\lambda-1}$, und benutzt die in diesem Paragraphen gegebenen Umformungen zur Transformation von Formel (I.), so heben sich die $A_1^{(t)}$ heraus, und es ist

$$\text{(II.)}\quad \frac{1}{\eta(t)}\lg\frac{M(t)+N(t)\,\eta(t)}{M(t)-N(t)\,\eta(t)}$$
$$=\sum_1^{2n}{}^{\mu}\int_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}\frac{dz}{(z-t)\,\eta}-2\cdot A_{1,2}^{(t)}m_1-2\cdot A_{2,3}^{(t)}m_2-\cdots 2\,A_{2\varrho-1,2\varrho}^{(t)}m_{2\varrho-1}-2\,A_{2\varrho,2\varrho+1}^{(t)}m_{2\varrho}$$

Gesetzt, es hätte t in dem Dreieck $(a_{\varkappa-1}\,0\,a_\varkappa)$ gelegen, so wäre in obigem Gleichungssystem an Stelle von $-A_{\varkappa-1}^{(t)}+A_\varkappa^{(t)}=A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)}$ getreten die Relation $-A_{\varkappa-1}^{(t)}+A_\varkappa^{(t)}=A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)}-\frac{2\pi i}{\eta(t)}$, es würde also in obiger Formel $A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)}$ durch $A_{\varkappa-1,\varkappa}^{(t)}-\frac{2\pi i}{\eta(t)}$ zu ersetzen sein. Würde man für die Integrationswege die früheren Beschränkungen aufheben, so würde für ein Integral $\int_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}\frac{dz}{(z-t)\,\eta}$ in die Formel

$$\int_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}+\frac{2\pi i}{\eta(t)}\varkappa+2\,A_{1,2}^{(t)}n_1+2\,A_{2,3}^{(t)}n_2+\cdots\cdots 2\,A_{2\varrho,2\varrho+1}^{(t)}n_{2\varrho}$$

eintreten, wo die $\varkappa$, n_1, n_2, $\cdots\cdot$ $n_{2\varrho}$ Zahlen bedeuten, welche in bekannter Weise durch den gewählten Integrationsweg bestimmt sind. Das Additionstheorem ist mithin für die Integrale dritter Gattung bewiesen. Eine wiederholte Differenziation nach dem Parameter t überträgt es auf Integrale von der Form $\int\frac{dz}{(z-t)^m_\eta}$.

§ 4.

Um das Additionstheorem für die Integrale erster Gattung zu entwickeln, umschliesse man alle singulären Punkte, sowohl die $a_1 a_2\cdots a_{2\varrho+1}$ als auch die $z_1 z_2\cdots z_{2n}$ durch einen Kreis um den Nullpunkt und setze voraus, dass die Integrationswege innerhalb dieses Kreises in der Weise verlaufen, wie Formel (II.) es erfordert. Indem man t ausserhalb dieses Kreises annimmt, ist mod. t stets grösser als mod. z; es lässt sich daher $(z-t)^{-1}$ und somit jeder Term der rechten Seite von Formel (II.)

nach absteigenden Potenzen von t entwickeln. Für $\int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta}$ gilt demnach die Darstellung:

$$\int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{(z-t)\eta} = -t^{-1} \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{dz}{\eta} - t^{-2} \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z\,dz}{\eta} - \cdots\cdots\, t^{-\nu} \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z^{\nu-1}\,dz}{\eta} - \cdots \text{ in inf.},$$

und, wenn man $\int\limits_{a_{\varkappa-1}}^{a_\varkappa} \frac{z^\nu\,dz}{\eta}$ mit $B^{(\nu)}_{\varkappa-1,\varkappa}$ bezeichnet, für $A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa}$ folgende:

$$A^{(t)}_{\varkappa-1,\varkappa} = -t^{-1} B^{(0)}_{\varkappa-1,\varkappa} - t^{-2} B^{(1)}_{\varkappa-1,\varkappa} - \cdots\cdots\, t^{-\nu} B^{(\nu-1)}_{\varkappa-1,\varkappa} - \cdots\cdots \text{ in inf.}$$

In der Entwickelung der rechten Seite von Formel (II.) nach absteigenden Potenzen von t ist also der Coefficient von $t^{-\nu}$:

$$-\sum_1^{2n}{}_\mu \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z^{\nu-1}}{\eta}\,dz + 2B^{(\nu-1)}_{1,2} m_1 + 2B^{(\nu-1)}_{2,3} m_2 + \cdots 2B^{(\nu-1)}_{2\varrho-1,2\varrho} m_{2\varrho-1} + 2B^{(\nu-1)}_{2\varrho,2\varrho+1} m_{2\varrho}.$$

Da nun die Function $\frac{1}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$ auf der linken Seite in Formel (II.) für $t=\infty$ von der $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Ordnung Null wird, so müssen alle Coefficienten von t auf der rechten Seite bis zum Coefficienten von $t^{-\varrho}$ einschliesslich verschwinden, und es ist deshalb jener oben niedergeschriebene Coefficient so lange Null, als $\nu \leqq \varrho$ ist. Es gilt also

$$\text{(III.)} \quad \sum_1^{2n}{}_\mu \int\limits_{a_1}^{z_\mu \eta_\mu} \frac{z^\nu dz}{\eta} = 2B^{(\nu)}_{1,2} m_1 + 2B^{(\nu)}_{2,3} m_2 + \cdots 2B^{(\nu)}_{2\varrho-1,2\varrho} m_{2\varrho-1} + 2B^{(\nu)}_{2\varrho,2\varrho+1} m_{2\varrho},$$

wenn dem ν eine der Zahlen $0, 1, 2, \cdots (\varrho-1)$ beigelegt wird. Hebt man nunmehr die Beschränkung für die Integrationswege auf und lässt $m_1 m_2 \cdots m_{2\varrho}$ irgend welche ganze Zahlen bedeuten, so ist in Formel (III.) das Additionstheorem für die ϱ hyperelliptischen Integrale erster Gattung in allgemeiner Form ausgesprochen.

§ 5.

Es bleibt noch übrig, das Additionstheorem für die Integrale zweiter Gattung zum Ausdruck zu bringen. Zu dem Ende entwickele man die Function $\frac{t^{\varrho+1}}{\eta(t)} \lg \frac{M(t)+N(t)\eta(t)}{M(t)-N(t)\eta(t)}$ nach absteigenden Potenzen von t. Diese Entwickelung ist gültig, so lange t ausserhalb jenes in § 4. bezeichneten Kreises gelegen ist. Sie auszuführen, ersetze man t durch u^{-1}. Durch diese Substitution mag $t^{-(\varrho+1}\eta(t)$ in $\eta(u)$, $t^{-n}M(t)$ in

$\mathsf{M}(u)$ und $t^{-(n-\varrho-1)}N(t)$ in $\mathsf{N}(u)$ übergehen. Alsdann ist

$$\frac{1}{\eta(u)}\lg\frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}$$

in der Umgebung von $u=0$ nach aufsteigenden Potenzen von u entwickelbar. Der Coefficient von u^ν ist gleich

$$\frac{1}{\nu!}\lim_{u=0}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}\frac{1}{\eta(u)}\lg\frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}\right\},$$

und dieser ist zugleich der Coefficient von $t^{-\nu}$ in der Entwickelung von $\frac{t^{\varrho+1}}{\eta(t)}\lg\frac{M(t)+N(t)\,\eta(t)}{M(t)-N(t)\,\eta(t)}$, also auch der Coefficient von $t^{-(\nu+\varrho+1)}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{\eta(t)}\lg\frac{M(t)+N(t)\,\eta(t)}{M(t)-N(t)\,\eta(t)}$ nach absteigenden Potenzen von t. Da letztere Reihe identisch gleich mit der in § 4. gegebenen ist, so stimmen die Coefficienten von $t^{-(\nu+\varrho+1)}$ in beiden überein. Es ist daher

$$\text{(IV.)}\quad \sum_1^{2n}{}_\mu\int_{a_1}^{z_\mu\eta_\mu}\frac{z^{\varrho+\nu}}{\eta}dz-2B_{1,2}^{(\varrho+\nu)}m_1-2B_{2,3}^{(\varrho+\nu)}m_2-\cdots 2B_{2\varrho-1,2\varrho}^{(\varrho+\nu)}m_{2\varrho-1}-2B_{2\varrho,2\varrho+1}^{(\varrho+\nu)}m_{2\varrho}$$
$$=-\frac{1}{\nu!}\lim_{u=0}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}\frac{1}{\eta(u)}\lg\frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\eta(u)}\right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält ausser dem Term

$$-\frac{1}{\nu!}\lg\frac{\mathsf{M}(0)+\mathsf{N}(0)}{\mathsf{M}(0)-\mathsf{N}(0)}\lim_{u=0}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}\left(\frac{1}{\eta(u)}\right)$$

rationale Functionen der Coefficienten von M und N, also rationale Functionen der Coefficienten, welche in M und N enthalten sind. Solcher unabhängiger Coefficienten in M und N giebt es $2n-\varrho$; diese lassen sich durch willkührliche Annahme von $2n-\varrho$ Werthepaaren $z_\mu\eta_\mu$ aus den $2n-\varrho$ Gleichungen von der Form $M(z_\mu)+\eta_\mu N(z_\mu)=0$ bestimmen, sind also algebraische Functionen der z_μ. In Formel (IV.) liegt also das Theorem ausgedrückt, dass eine Anzahl von $2n-\varrho$ Integralen zweiter Gattung mit der unteren Grenze a_1 und willkührlich gewählten oberen Grenzen sich auf ϱ Integrale derselben Gattung zurückführen lassen, zu denen noch eine algebraische Function dieser oberen Grenzen und ein bestimmter Logarithmus von einer algebraischen Function dieser Grenzen hinzutritt. Jene ϱ Integrale haben zu oberen Grenzen die Wurzeln der Gleichung $\frac{M^2-\eta^2N^2}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{2n-\varrho})}=0$.

Die Integrationswege von a_1 bis $(z_\mu\eta_\mu)$ in Formel (IV.) sind keiner weiteren Beschränkung unterworfen, sobald man die $m_1 m_2\cdots m_{2\varrho}$ irgend welche ganze positive oder negative Zahlen bedeuten lässt.

§ 6.

Die Formeln (I.), (II.), (III.), (IV.) hatten zunächst alle zur Voraussetzung, dass η^2 eine ganze rationale Function von geradem Grade sei; doch bewahren sie auch ihre Gültigkeit, wenn η^2 von ungeradem Grade ist. In der That tritt bei ungeradem Grade von η^2 der Punkt $z = \infty$ an die Stelle von $a_{2\varrho+2}$, welcher bei der Bestimmung von $\frac{1}{\eta}\lg\frac{M+N\eta}{M-N\eta}$ in § 1. seiner Singularität vollständig entkleidet war. Indem man also einem bestimmten Argument z ausserhalb jenes in § 4. bezeichneten Kreises ein bestimmtes $+\eta$ zuordnet und denjenigen Logarithmus wählt, welcher für $z = \infty$ verschwindet, ist die Function in demselben Gebiet wie in § 1. einläufig und stetig; und es gelten daher alle daraus abgeleiteten Schlüsse. Es mag noch bemerkt werden, dass, indem man die Bezeichnungen des § 5. vollkommen beibehält, bei ungeradem Grade von η^2 die Function $\mathsf{\eta}^2(u)$ den Factor u enthält. In diesem Fall ist $\lg\frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}$ in der Umgebung von $u=0$ nach Potenzen der Function $\frac{\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}{\mathsf{M}(u)}$ zu entwickeln; es gilt demnach für $\frac{1}{\mathsf{\eta}(u)}\lg\frac{\mathsf{M}(u)+\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}{\mathsf{M}(u)-\mathsf{N}(u)\,\mathsf{\eta}(u)}$ die Darstellung:

$$2\left\{\frac{\mathsf{N}(u)}{\mathsf{M}(u)}+\frac{\mathsf{\eta}^2(u)\,\mathsf{N}^3(u)}{3\,\mathsf{M}^3(u)}+\frac{\mathsf{\eta}^4(u)\,\mathsf{N}^5(u)}{5\,\mathsf{M}^5(u)}+\cdots\frac{\mathsf{\eta}^{2\varkappa}(u)\,\mathsf{N}^{2\varkappa+1}(u)}{(2\varkappa+1)\,\mathsf{M}^{2\varkappa+1}(u)}+\cdots\text{ in inf.}\right\}.$$

Das Glied $\frac{\mathsf{\eta}^{2\varkappa}(u)\,\mathsf{N}^{2\varkappa+1}(u)}{(2\varkappa+1)\,\mathsf{M}^{2\varkappa+1}(u)}$ ist eine rationale Function von u, welche für $u = 0$ von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung zu Null wird. Bei der Bildung der rechten Seite von Gleichung (IV.) werden also nur die Terme zu berücksichtigen sein bis $\varkappa = \nu$; denn alle Terme, für welche $\varkappa > \nu$, verschwinden nach ν-maliger Differenziation für $u = 0$. Die übrigen Glieder ergeben rationale Functionen der Coefficienten von M und N. Wenn demnach η^2 von ungeradem Grade ist, so tritt an Stelle der logarithmischen Function in Formel (IV.) gleichfalls eine algebraische Function der oberen Grenzen.