Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung*).

Von W. Frahm in Tübingen.

In Salmon's „Analytic geometry of three dimensions" (second ed. p. 100 and 177) wird eine gewisse kanonische Form für das simultane System dreier Flächen zweiter Ordnung angegeben, um Folgerungen über die Combinanten aus ihr zu ziehen. Da aber die Möglichkeit derselben dort nicht nachgewiesen wird, so konnte man diese um so mehr in Zweifel ziehen, als für die mit den Flächennetzen eng verknüpften Curven vierter Ordnung ähnliche kanonische Formen von den Herren Clebsch und Lüroth als unzulässig nachgewiesen sind. Wirklich ergiebt sich aus den Resultaten des Letzteren, dass jener Zweifel begründet war. Sind nämlich $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ die Gleichungen dreier Flächen zweiter Ordnung, $a_1 \cdots a_5$, $b_1 \cdots b_5$, $c_1 \cdots c_5$, ferner $z_1 \cdots z_5$ Pentaëdercoordinaten, zwischen denen die Relation

$$(1) \qquad z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$$

besteht, so lautet Salmon's kanonische Form

$$(2) \qquad \varphi = \sum_1^5 a_i z_i^2; \quad \psi = \sum_1^5 b_i z_i^2; \quad \chi = \sum_1^5 c_i z_i^2.$$

---

*) Wenn man symbolisch schreibt $\varphi = a_x^2$, $\psi = b_x^2$, $\chi = c_x^2$, so ergiebt sich aus Herrn Gordan's wichtigem Combinantensatze, dass alle Combinanten des Netzes simultane Invarianten der zwei Formen

$$(abuv)(acuv)(bcuv)$$

und

$$(abcu)\, a_{x^2} b_{x^2} c_{x^2}$$

sind; man findet dies in evidenter Weise durch Einsicht in Herrn Sturm's schöne Arbeit bestätigt (Borchardt's Journal Bd. 70). Die ganze algebraische Theorie aber ist mit nicht geringen Schwierigkeiten verknüpft, obwohl die nicht veröffentlichten Resultate des Herrn Gundelfinger erlauben, eine Reihe von Sätzen aus den ebenen Kegelschnittnetzen zu übertragen.

Für $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$ als unbestimmte Parameter ergiebt sich hieraus die Gleichung eines Flächennetzes

$$\lambda\varphi + \mu\psi + \nu\chi = 0 . \tag{3}$$

Den Ort der Kegelspitzen des Netzes (eine Curve sechster Ordnung vom Geschlecht $p = 3$) findet man, indem man die letzte Gleichung nach $z_1 \cdots z_4$ differentiirt in der Form

$$p_1 z_1 = p_2 z_2 = p_3 z_3 = p_4 z_4 = p_5 z_5 , \tag{4}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$p_i = a_i \lambda + b_i \mu + c_i \nu .$$

Durch Einsetzen der hieraus bestimmten Verhältnisse der Grössen $z_1 \cdots z_5$ findet man

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} = 0 , \tag{5}$$

und, indem man λ, μ, ν als Dreieckscoordinaten in einer Ebene ansieht, stellt dies die Gleichung einer Curve vierter Ordnung, der Hesse'schen Abbildung der Kegelspitzencurve dar, welcher das vollständige Fünfseit der Geraden $p_1 \cdots p_5$ eingeschrieben ist. Nun kann aber im Allgemeinen einer Curve vierter Ordnung kein Fünfseit eingeschrieben werden, es ist vielmehr für Curven, bei denen dies möglich ist, ein System von Berührungscurven dritter Ordnung ausgezeichnet; andererseits kann nach Herrn Hesse jede Curve vierter Ordnung (auf 36 verschiedene Arten) als Abbildung einer Kegelspitzencurve angesehen werden, woraus denn einleuchtet, dass jene kanonische Form nur in speciellen Fällen zulässig ist. Ist aber umgekehrt die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in der Form (5) gegeben, so stellt sich diese sofort als Abbildung der Kegelspitzencurve eines Netzes (3) dar, dessen Gleichung man als eine Summe von 5 Quadraten dargestellt erhält. Aber diese Form ist dann immer auf unendlich viele Arten möglich, denn man beweist den Satz:

> Liegen die 10 Ecken eines vollständigen Pentaëders auf der Curve der Kegelspitzen, so können derselben unendlich viele Pentaeder eingeschrieben werden, deren Kanten also von sämmtlichen dreifachen Sehnen der Curve gebildet werden.

Um diese Pentaëder zu erhalten, construire man die drei dreifachen Sehnen durch einen beliebigen Punkt der Curve und lege durch je zwei derselben eine Ebene, welche ausser den 5 schon in ihr liegenden die Curve noch in einem weiteren Punkte schneidet, so dass man im Ganzen deren $1 + 3 \cdot 2 + 3 = 10$ erhält, welche unter Voraussetzung der im Satze ausgesprochenen Bedingung ein Pentaëder bilden.

Der Satz ist leicht zu beweisen. Denn aus dem Pentaëder $z_1 \cdots z_5$, welches im Raume dem Fünfseit $p_1 \cdots p_5$ entspricht, kann man unendlich viele ableiten; man beachte nur, dass alle Berührungscurven dritter Ordnung, welche in den Ecken eines Vierseits die Fünfseite berühren, demselben System (in dem von Hesse, Crelle's Journ. 49, festgestellten Sinne) angehören, und erkennt, dass die den 6 Ecken eines Vierseits im Raume entsprechenden Punkte immer in einer Ebene liegen müssen, wenn dies einmal eintrat. Es liegen aber die 6 den Ecken des Vierseits $p_1 \cdots p_4$ entsprechenden Punkte in der Ebene z_5, womit die Behauptung des Satzes erhärtet ist.

Aus dem Umstande, dass die Kenntniss der 8 Schnittpunkte von drei Flächen des Netzes hinreicht, um alle Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung zu finden, ergiebt sich noch:

> Nach Auffindung eines Fünfseits erfordert die vollständige Lösung des Problems der Doppeltangenten für die Lüroth'schen Curven nur noch die Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung 8ten Grades.

Ein weiterer Satz über dieses merkwürdige Flächennetz möge noch bewiesen werden:

> Mit Hülfe eines jeden Pentaëders können irgend drei der Flächen des Netzes auf unendlich viele Arten als Polaren eines Flächenpaares dritter Ordnung angesehen werden; die zugehörigen Pole liegen in drei geraden Linien.

In der That kann man die durch die Gleichungen (2) dargestellten Flächen immer ansehen als Polaren einer Fläche dritter Ordnung,

$$0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i^3 ,$$

denn die Gleichungen der ersten Polaren dreier Punkte $z' z'' z'''$ in Bezug auf dieselbe sind

$$0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i' z_i^2 ; \quad 0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i'' z_i^2 ; \quad 0 = \sum_1^5 \lambda_i z_i''' z_i^2 .$$

Sollen diese mit den Flächen φ, ψ, χ zusammenfallen, so müssen die Relationen erfüllt sein,

$$z_i' = \frac{a_i}{\lambda_i}, \quad z_i'' = \frac{b_i}{\lambda_i}, \quad z_i''' = \frac{c_i}{\lambda_i},$$

und man erhält durch Substitution in die Identität $0 = \sum_1^5 z_i$:

$$0 = \sum_1^5 \frac{a_i}{\lambda_i}, \quad 0 = \sum_1^5 \frac{b_i}{\lambda_i}, \quad 0 = \sum_1^5 \frac{c_i}{\lambda_i}.$$

Sind also $\frac{1}{\lambda_i'}$, $\frac{1}{\lambda_i''}$ zwei Werthsysteme, welche diesen Gleichungen genügen, θ ein Parameter, so erhält man $\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i''} + \frac{\theta}{\lambda_i'}$ und

$$z_i' = \frac{(\lambda_i' + \theta \lambda_i'')}{\lambda_i' \lambda_i''}, \quad z_i'' = \frac{b_i (\lambda_i' + \theta \lambda_i'')}{\lambda_i' \lambda_i''}, \quad z_i''' = \frac{c_i (\lambda_i' + \theta \lambda_i'')}{\lambda_i' \lambda_i''},$$

womit der Satz erwiesen ist.

Endlich ergiebt sich:

> Drei Flächen können entweder (im Allgemeinen) gar nicht oder auf zweifach unendlich viele Arten als Polaren einer Fläche dritter Ordnung angesehen werden.

Denn alsdann liegt die Kegelspitzencurve auf der zugehörigen Kernfläche und enthält die 10 Ecken des Pentaëders der Fläche dritter Ordnung, derselben können aber unendlich viele Pentaëder eingeschrieben werden.

Tübingen, 13. März 1874.