Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen.

Von Dr. Martin Krause in Breslau.

Ausser den Modulargleichungen ergiebt die Theorie der elliptischen Functionen noch mehrere andere Gleichungen, welche von ähnlicher Wichtigkeit für Algebra und Zahlentheorie sind. Zu ihnen gehören die Gleichungen zwischen dem Producte des transformirten Moduls in dessen complementären und dem Producte des ursprünglichen in dessen complementären. Joubert*) hat zuerst auf diese Gleichungen aufmerksam gemacht, indem er die beiden Haupteigenschaften derselben angiebt — die eine derselben rührt von Hermite her — und die Formen für die einfachsten Transformationsgrade wirklich aufstellt. Später sind von Hermite**) und Joubert***) die zu den Transformationen dritten resp. fünften Grades gehörenden Gleichungen zur Auflösung der Gleichungen vierten resp. fünften Grades benutzt worden, endlich hat Königsberger im 72sten Bande des Crelle'schen Journals eine längere Theorie derselben gegeben.

In allen diesen Arbeiten ist die Discriminante der Gleichungen unberücksichtigt geblieben. Die nähere Untersuchung derselben ergiebt gleich wichtige Resultate, wie die Untersuchung der Gleichungen selbst. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, einige derselben mitzutheilen und zwar solche, die hauptsächlich für die Algebra von Bedeutung sind. Es soll nämlich gezeigt werden, dass diese Discriminanten eine weitere Classe von Gleichungen bilden, deren Wurzeln vermöge bestimmter, näher anzugebender Methoden sämmtlich gefunden werden können.

Die Arbeit zerfällt in zwei Theile. In dem ersten wird eine Methode angegeben werden, mit deren Hülfe alle von einander verschiedenen Wurzeln der Discriminante zu bestimmen sind, in dem zweiten Theile soll die Entscheidung darüber getroffen werden, wie vielfach eine jede

---

*) Comptes rendus tome XLVII, pag. 341—345.

**) Sur la théorie des équations modulaires. Paris 1859, pag. 9—24.

***) Comptes rendus tome XLVIII, pag. 290—294.

dieser Wurzeln ist. Der erste Theil schliesst sich in mehreren Punkten an frühere Arbeiten des Verfassers über entsprechende Eigenschaften der Modulargleichungen*) an. Insofern dieses geschieht, soll sich derselbe auf eine blosse Angabe der Resultate beschränken. Der zweite Theil dagegen, dessen Grundlage die Lösung des allgemeinen Problems der Wurzelentwickelung bildet, unterscheidet sich wesentlich von dem entsprechenden bei den Modulargleichungen und soll daher etwas ausführlicher behandelt werden.

In der Bezeichnungsweise folgen wir dem Vorgange von Königsberger.

Setzt man:

$$U=\chi(\tau)=\varphi(\tau)\psi(\tau),$$

wo $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ die bekannten Hermite'schen Modularfunctionen bedeuten, so besteht, falls $n=a_0 a_1 \cdots a_p$ eine unpaare Zahl ohne quadratischen Theiler ist, — eine Annahme, die in der Folge beibehalten werden soll — zwischen $U=\chi(\tau)$ und den Grössen $V=\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau-16\xi_1}{\delta_1}\right)$, die entstehen, wenn man $\delta=\frac{n}{\delta_1}$ alle Theiler von n bedeuten und ξ_1 alle Werthe von 0 bis δ_1-1 annehmen lässt, eine algebraische Gleichung, die in Bezug auf V vom $(a_0+1)(a_1+1)\cdots(a_p+1)^{\text{ten}}$ Grade ist — die U-V Gleichung, wie sie im Folgenden bezeichnet werden möge.

Die Form und der Grad der Discriminanten dieser Gleichungen ist leicht festzustellen.

Wenn $q=e^{\pi i\tau}$ gesetzt wird, so ist:

$$U=\chi(\tau)=\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\left[(1+q^2)(1+q^4)\cdots\right]^3\left[(1-q)(1-q^3)\cdots\right]^3.$$

Hieraus folgt durch Umkehrung:

$$e^{\frac{\pi i\tau}{8}}=U\left[b_0+b_1U^8+b_2U^{16}+\cdots\right],$$

mithin allgemein:

$$\chi\left(\frac{\delta\tau-16\xi_1}{\delta_1}\right)=U^{\frac{\delta}{\delta_1}}\left[c_0+\sum_{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}\,U^{\frac{8\alpha\delta+8\beta\delta_1}{\delta_1}}\right]^3_{\alpha=1\ldots\infty,\ \beta=1\ldots\infty}.$$

Setzt man die entsprechenden Ausdrücke für sämmtliche Wurzeln in die Discriminante:

---

*) Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Math. Annalen Band VIII und IX. In letzterem Aufsatze lies

p. 556, Zeile 2 v. o. $\xi_2'-k_2u_1'$ statt $\xi_2'+k_2u_1'$.

p. 562, Zeile 7 v. u. $P,\ 2Q,\ R$ statt $P,\ Q,\ R$.

p. 565, Zeile 1 v. o. stets $\frac{\sigma}{2}$ statt σ.

$$D = \prod \left[\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right) - \chi\left(\frac{\delta'\tau - 16\,\xi_1'}{\delta_1'}\right)\right]^2$$

ein, so zeigt es sich unter Berücksichtigung der Werthe von c_0, dass dieselbe den Factor:

$$U^N = U^{n S'(n) - S(n) + 2\Delta(n)}$$

hat, wobei $S(n)$ gleich der Summe der Divisoren der Zahl n, $S'(n)$ gleich der Anzahl dieser Divisoren, ferner $\Delta(n) = \Sigma t t_1$ ist, und t und t_1 alle Divisoren von n bedeuten, für welche $t t_1 < n$ ist.

Aus dem Umstande, dass die U-V Gleichung unverändert bleibt, wenn man an Stelle von U: $U e^{\frac{2 i s \pi}{8}}$, an Stelle von V: $V e^{\frac{2 i s n \pi}{8}}$ setzt, folgt ferner, dass die Discriminante, von dem Factor U^N abgesehen, eine ganze Function von U^8 ist, endlich schliessen wir daraus, dass die U-V Gleichung unverändert bleibt, wenn man an Stelle von U: $\frac{1}{U\sqrt{2}}$, an Stelle von V: $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \frac{1}{V\sqrt{2}}$ setzt, dass der Grad der Discriminante gleich:

$$2 S(n)\,(S(n) - 1) - N \text{ ist. } -$$

Nachdem die Form und der Grad der Discriminante bestimmt ist, gehen wir zu der Bestimmung der Wurzeln selbst über.

Aehnlich wie bei den Modulargleichungen folgt als nothwendige und hinreichende Bedingung, damit zwei Wurzeln $\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right)$ und $\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1}\right)$ einander gleich werden, dass:

$$\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1} = \frac{b_0 - a_0 \dfrac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1}}{a_1 \dfrac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1} - b_1}$$

werde, vorausgesetzt, dass a_0, b_0, a_1, b_1 lineare Transformationszahlen sind, welche überdies den Bedingungen genügen:

$$1)\quad a_0 \equiv 1,\quad a_1 \equiv 0,\quad b_0 \equiv 0,\quad b_1 \equiv 1 \mod 2 \text{ und}$$

$$\left(\frac{2}{a_0 b_1}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)} = 1$$

oder:

$$2)\quad a_0 \equiv 0,\quad a_1 \equiv 1,\quad b_0 \equiv 1,\quad b_1 \equiv 0 \mod 2 \text{ und}$$

$$\left(\frac{2}{a_1 b_0}\right) e^{\frac{i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)} = 1.$$

Wie wir sehen, erhalten wir auf diese Weise eine quadratische Gleichung in τ:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0,$$

deren Determinante die Form:

$$\Delta = a^2 - n^2$$

hat und deren eine Lösung mindestens das Argument einer Wurzel der Discriminante ist.

Die Coefficienten P, Q, R haben die Form:

$$P = a_1 \delta u,$$
$$2Q = u[a_0\delta_1 - a_1 16\xi_1] - \delta[b_1 u_1 + a_1 16\xi_2],$$
$$R = a_1 16^2 \xi_1 \xi_2 + b_1 u_1 16\xi_1 - a_0 \delta_1 16\xi_2 - b_0 \delta_1 u_1.$$

Hieran knüpfen wir eine wichtige Bemerkung. Die soeben näher definirten Werthe von τ sind zu gleicher Zeit die Argumente der Moduln $\varphi(\tau)^8$, für welche complexe Multiplication stattfindet. Nach einer Bemerkung von Abel*) und Kronecker**) lassen letztere sich durch Wurzelzeichen ausdrücken. Hieraus folgt, dass auch die Lösungen der betrachteten Discriminanten durch Wurzelzeichen ausdrückbar sind.

Untersucht man nun die obigen Ausdrücke von P, Q, R näher***), so ergiebt sich der:

Lehrsatz.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit zu einer Lösung von:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

eine Function $\chi(\tau)$ *gehöre, die Wurzel der Discriminante*

$$D = 0$$

ist, sind:

1) *Die Determinante muss sich in eine der vier Formen:*

$$\Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta), \quad \Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta),$$
$$\Delta = 8(n - 4\delta)(n - 8\delta), \quad \Delta = -32\delta(n - 8\delta)$$

bringen lassen und negativ sein,

2) *falls* $\Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta)$ *ist, muss* δ *ungerade*

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 0 \bmod 4 \text{ und } P + R \equiv 0 \bmod 16 \text{ sein,}$$

falls $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta)$ *ist, muss*

$$P \equiv 1, \quad Q \equiv 0, \quad R \equiv 1 \bmod 2 \text{ sein,}$$

falls $\Delta = 8(n - 4\delta)(n - 8\delta)$ *ist, muss*

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 2 \bmod 4 \text{ sein,}$$

falls $\Delta = -32\delta(n - 8\delta)$, *muss*

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 0 \bmod 4 \text{ und } P + R \equiv 0 \bmod 16 \text{ sein.}$$

---

*) Oeuvres complètes, tome I, pag. 272.

**) Monatsberichte der Berliner Akademie aus dem Jahre 1857, pag. 455.

***) Siehe die entsprechenden Betrachtungen: Mathem. Annalen Bd. VIII, pag. 542—554.

Schliessen wir den Fall $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta) = -n^2$ aus, so zeigt es sich, dass für die zugehörige Function $\chi(\tau)$ im Ganzen m von einander verschiedene Wurzelpaare der U-V Gleichung denselben Werth annehmen, wenn $m = 1$ oder $m = (a_p + 1)(a_q + 1)\cdots$ ist, je nachdem die Coefficienten P, Q, R mit n den grössten gemeinsamen Theiler 1 oder $a = a_p a_q \cdots$ haben.

Es soll diese Bedeutung von m für die Folge beibehalten werden. Der Fall $\Delta = -n^2$ muss gesondert betrachtet werden. Für denselben wird $a = 0$. Nehmen wir zunächst an, dass P, Q, R mit n keinen gemeinsamen Theiler haben, so wird δ gleich u gleich dem grössten gemeinsamen Theiler von P, Q, n, während ξ_1 und ξ_2 aus den Congruenzen zu bestimmen sind:

$$16\,\xi_1 \frac{P}{\delta} \equiv -Q \bmod n,$$

$$16\,\xi_2 \frac{P}{\delta} \equiv -Q \bmod n.$$

Wie wir sehen, ergiebt sich:

$$u = \delta, \quad u_1 = \delta_1, \quad \xi_1 = \xi_2,$$

d. h.: die beiden gleich werdenden Wurzeln fallen in eine zusammen, so *dass dieser Fall einfach auszuschliessen ist.*

Mögen zweitens P, Q, R mit n den grössten gemeinsamen Theiler a_p haben, wobei a_p eine Primzahl ist und $\frac{P}{a_p}$ den Theiler a_p nicht mehr enthält. Alsdann sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

1) δ sowohl, wie u enthalten den Factor a_p nicht.

Dann folgt, dass $\delta = u$ ist, ferner, dass $\frac{P}{a_p \delta^2}$ nur Theiler von der Form $4s + 1$ hat. In der That, setzen wir:

$$P = a_p P', \quad Q = a_p Q', \quad R = a_p R',$$

so ist:

$$Q'^2 - P'Q' = -\left(\frac{n}{a_p}\right)^2,$$

also:

$$\left(\frac{Q'}{\delta}\right)^2 - \frac{P'}{\delta^2} Q' = -\left(\frac{n}{a_p \delta}\right)^2.$$

Hieraus folgt, dass für jeden Theiler p von $\frac{P'}{\delta^2}$ oder $\frac{P}{a_p \delta^2}$ die Congruenz bestehen muss:

$$\left(\frac{Q'}{\delta}\right)^2 \equiv -\left(\frac{n}{a_p \delta}\right)^2 \bmod p.$$

Das aber ist nur möglich, wenn ein jedes $p \equiv 1 \bmod 4$ ist.

Die Werthe von ξ_1 und ξ_2 sind bis auf Vielfache von $\frac{\delta_1}{a_p}$ dadurch eindeutig bestimmt, dass a_0 und b_1 sich aus:

$$n\delta a_0 = (Q\delta + P16\xi_1),$$
$$n\delta b_1 = -(Q\delta + P16\xi_2)$$

als ganze Zahlen ergeben müssen. Da $a_1 = \frac{P}{\delta^2}$ auch eine ganze Zahl ist, so ist die einzige noch zu erfüllende Bedingung, dass b_0 sich aus:

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

als ganze Zahl ergiebt. Dieses liefert die Congruenz:

$$\left(\frac{Q\delta + P16\xi_1}{n\delta}\right)\left(\frac{Q\delta + P16\xi_2}{n\delta}\right) \equiv -1 \bmod \frac{P}{a_p\delta^2} a_p.$$

Dieselbe ist symmetrisch in Bezug auf ξ_1 und ξ_2. Hieraus folgt, dass sie im Ganzen $\frac{a_p - 1}{2}$ nach dem Modul δ_1 incongruente Paare $\xi_1 \xi_2$ ergeben wird. Diesen werden ebenso viele Paare von gleich werdenden Wurzeln der U-V Gleichung entsprechen, falls nicht einmal $\xi_1 = \xi_2$ wird. Dieses findet entweder zweimal oder gar nicht statt, je nachdem die Congruenz:

$$x^2 \equiv -1 \bmod \frac{P}{a_p\delta^2} a_p$$

auflösbar ist, oder nicht. Vermöge der gemachten Bemerkung über die Factoren von $\frac{P}{a_p\delta^2}$ ist dieses aber damit identisch, ob die Congruenz:

$$x^2 \equiv -1 \bmod a_p$$

auflösbar ist oder nicht.

Es ergeben sich also in diesem Falle

$$\frac{a_p - 1 - 2\varepsilon}{2}$$

von einander verschiedene, einander gleich werdende Wurzelpaare der U-V Gleichung, wobei $\varepsilon = 1$ oder 0 ist, je nachdem

$$\left(\frac{-1}{a_p}\right) = \pm 1$$

ist.

2) δ ist durch a_p theilbar, u nicht. Dieser Fall fällt mit Fall

3) zusammen, in welchem u durch a_p theilbar ist, δ nicht. Beide liefern nur *ein* neues Wurzelpaar.

Im Ganzen erhalten wir also:

$$\frac{a_p + 1 - 2\varepsilon}{2}$$

von einander verschiedene Wurzelpaare, die denselben Werth annehmen. Dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn $\frac{P}{a_p}$ den Theiler a_p enthält.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass zu einer Form:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + Q = 0,$$

deren Determinante gleich $-n^2$ ist und deren Coefficienten den aufgestellten Bedingungen genügen, eine Wurzel der Discriminante gehört, für welche:

$$\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2}$$

von einander verschiedene Wurzelpaare der U-V Gleichung einander gleich werden, wobei $\varepsilon = 1$ oder 0 ist, je nachdem ein jedes der Legendre'schen Zeichen:

$$\left(\frac{-1}{a_p}\right), \quad \left(\frac{-1}{a_q}\right) \cdots$$

gleich 1 ist oder nicht und r die Zahl der von der Einheit verschiedenen Primfactoren von $\alpha = a_p a_q \cdots$ bedeutet*).

Mit Hülfe dieser Sätze ist es möglich, sämmtliche Gleichungen

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

aufzustellen, deren Lösungen die Argumente der von einander verschiedenen achten Potenzen der Wurzeln der Discriminante ergeben — es kommt nur auf die achten Potenzen der Wurzeln an, da die Discriminante, von U^N abgesehen, eine ganze Function von U^8 ist**).

Hierbei schicken wir eine Bemerkung voraus. Aus dem vorhin aufgestellten Lehrsatz folgt, dass bei drei Arten von Determinanten die Coefficienten den gemeinsamen Theiler 2 resp. 4 haben.

Es soll im Folgenden davon abgesehen werden.

Schliessen wir dann vorläufig die Determinanten:

$$-\Delta = \sigma^2 = 16\sigma_1^2, \text{ und } -4\Delta = 3\sigma^2$$

aus, wo σ den grössten gemeinsamen Theiler von P, $2Q$, R bedeutet, so folgt der

Lehrsatz:

Ist $\Delta = (3n - 8\delta)(n - 2\delta)$ *und* δ *ungerade, so liefert eine jede Classe Formen der verlangten Art und zwar die uneigentlich primitiven je drei, alle übrigen je eine.*

Ist $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta)$ *oder* $\Delta = 2(n - 4\delta)(n - 8\delta)$, *so liefert eine jede Classe eine Form der verlangten Art.*

Dasselbe findet statt, wenn $\Delta = -2\delta(n - 8\delta)$ *und* δ *ungerade ist.*

---

*) Für den speciellen Fall einer Primzahltransformation und die specielle Form: $n\tau^2 + n = 0$ ist dieser Satz von Joubert ohne Beweis mitgetheilt worden: Comptes rendus, tome XLVIII, pag. 292.

**) Siehe die entsprechenden Betrachtungen: Math. Ann. Bd. IX, p. 560 sq.

Ist dagegen δ gerade, so sind nur diejenigen Classen beizubehalten, bei welchen sämmtliche Coefficienten durch 2 theilbar sind und zwar liefern die Classen, bei welchen $P \equiv R \equiv 0 \bmod 4$ ist, je drei, alle übrigen je eine Form.

Dabei genügt es, in denjenigen Classen, denen drei Formen entsprechen, eine einzige anzugeben, da die beiden andern aus derselben durch eine lineare Transformation des 3ten und 5ten Falles erhalten werden können.

Die Wahl der repräsentirenden Form soll später vorgenommen werden.

Wir kommen zu den Ausnahmen.

Dieselben beziehen sich auf die beiden Classen, die von den Formen:

$$(4\sigma,\ 0,\ 4\sigma) \text{ und } \left(\sigma,\ \frac{\sigma}{2},\ \sigma\right)$$

abgeleitet sind.

Man erhält die ersten, wenn n oder einer seiner Theiler von der Form:

$$64\alpha^2 + \beta^2$$

ist. Alsdann hat man an Stelle von drei Formen nur zwei zu nehmen:

$$4\sigma_1\tau^2 + 4\sigma_1 = 0,$$

woraus $\tau = i$; $\chi^8(\tau) = \frac{1}{4}$ folgt,

$$8\sigma_1\tau^2 + 8\sigma_1\tau + 4\sigma_1 = 0,$$

woraus $\tau = \frac{-1}{1+i}$; $\chi^8(\tau) = -2$ folgt.

Man erhält ferner die zweiten, wenn n oder einer seiner Theiler von einer der beiden Formen:

$$12\alpha^2 + \beta^2,$$

oder

$$4\alpha^2 + 3\beta^2$$

ist. Alsdann hat man an Stelle von drei Formen nur eine zu wählen, nämlich:

$$\sigma\tau^2 + \sigma\tau + \sigma = 0,$$

woraus $\tau = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; $\chi^8(\tau) = 1$ folgt.

Wir kommen zu dem zweiten Theile der Aufgabe, durch welchen bestimmt werden soll, wie vielfach eine jede der Wurzeln ist. Die Bestimmung beruht auf der Lösung folgender Aufgabe: Sei $U = U_0$ eine beliebige Wurzel der Discriminante ausser $U = 0$, für welche mehrere Wurzeln der U-V Gleichung gleich V_0 werden, so sollen alle diejenigen Stellen angegeben werden, welche in der Nähe von $U_0\,V_0$ liegen. Nehmen wir die Punkte $U = 0$ und $U = \infty$ hinzu, so kann die Aufgabe auch dahin präcisirt werden: es soll die Riemann'sche Fläche der algebraischen Function V construirt werden.

Ist

$$u^8 = \varphi(\tau)^8 = 1 - u'^8 = 1 - \psi(\tau)^8$$

der primäre Modul,

$$v^8 = \varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right)^8 = 1 - v'^2 = 1 - \psi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right)^8$$

ein transformirter, so besteht bekanntlich zwischen diesen Grössen und dem zugehörigen Multiplicator die Relation:

$$M^2 = \frac{1}{n}\,\frac{v}{u}\,\frac{v'^8}{u'^8}\,\frac{du}{dv}\,.$$

Hieraus folgt, da: $U = uu'$; $V = vv'$ ist:

$$M^2 = \frac{1}{n}\,\frac{V}{U}\,\frac{v'^8 - v^8}{u'^8 - u^8}\,\frac{dU}{dV}\,.$$

Da der Multiplicator nie für einen endlichen Werth von U oder u Null oder unendlich gross werden kann, so lehrt diese Formel, dass bei Ausschluss von $U = 0$ und $U = \infty$, $\left(\frac{dU}{dV}\right)$ stets endlich ist, wenn sowohl u^8, wie v^8 von $\frac{1}{2}$ verschieden sind, sie lehrt zweitens, dass $\left(\frac{dV}{dU}\right)$ unendlich gross wird, wenn allein $u^8 = \frac{1}{2}$ ist, doch so, dass:

$$\lim\left[(u'^8 - u^8)\,\frac{dV}{dU}\right]_{u^8=\frac{1}{2}}$$

eine endliche von Null verschiedene Grösse ist, sie lehrt drittens, dass $\left(\frac{dV}{dU}\right)$ gleich Null wird, wenn allein $v^8 = \frac{1}{2}$ ist, doch so, dass:

$$\lim\left[(v'^8 - v^8)\,\frac{dU}{dV}\right]_{v^8=\frac{1}{2}}$$

eine endliche von Null verschiedene Grösse ist. Ist schliesslich sowohl $u^8 = \frac{1}{2}$, wie $v^8 = \frac{1}{2}$, so lehrt diese Formel, dass jedenfalls:

$$\lim\left[\frac{v'^8 - v^8}{u'^8 - u^8}\,\frac{dU}{dV}\right]_{u^8=\frac{1}{2},\; v^8=\frac{1}{2}}$$

eine endliche von Null verschiedene Grösse ist.

Mögen ferner für $U = U_0$ mehrere Wurzeln der U-V Gleichung $V_1, V_2, V_3, \cdots$ gleich V_0 werden, so beweisen wir, dass die Quotienten

$$\left(\frac{dV_\alpha}{dU}\right) : \left(\frac{dV_\beta}{dU}\right)_{\substack{\alpha=1,\,2,\,3,\,\ldots\\ \beta=1,\,2,\,3,\,\ldots}}$$

an der Stelle $U_0\,V_0$ stets einen endlichen von Null und der Einheit verschiedenen Werth haben, wenn α von β verschieden ist.

Wenn zwei Wurzeln:

$$V_1 = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right) \text{ und } V_2 = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1}\right)$$

einander gleich werden, so besteht zwischen den Argumenten eine lineare Relation des ersten oder des zweiten Falles. Nehmen wir zunächst an, es bestehe eine solche des ersten Falles, so werden zu gleicher Zeit für die entsprechenden v Grössen die Relationen stattfinden:

$$v_1{}^8 = v_2{}^8; \quad v_1'^8 = v_2'^8.$$

Hieraus folgt, wenn wir die entsprechenden Werthe der Multiplicatoren mit M_1 und M_2 bezeichnen:

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{\left(\frac{dU}{dV_1}\right)}{\left(\frac{dU}{dV_2}\right)} = \text{einem endlichen, von Null verschiedenen Werth.}$$

Nun ist bekanntlich, wenn auf den primären Modul τ die Substitution $\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ 16\xi_1 & \delta_1 \end{vmatrix}$ angewandt wird:

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} M_1 = \frac{C}{K_1} \frac{\delta_1}{n},$$

wenn C das zu dem Modul τ, K_1 das zu dem Modul $\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}$ gehörende geradlinige Normalintegral erster Gattung bedeutet.

Ebenso folgt:

$$(-1)^{\frac{u-1}{2}} M_2 = \frac{C}{K_2} \frac{u_1}{n},$$

wenn K_2 das zu dem Modul $\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}$ gehörende Integral bedeutet. Also wird:

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{K_2^2}{K_1^2} \frac{\delta_1^2}{u_1^2} = \frac{\left(\frac{dU}{dV_1}\right)}{\left(\frac{dU}{dV_2}\right)}.$$

Nun ist:

$$K_1 = 2\pi\, \vartheta\left(0, \frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right)_3^2,$$

$$K_2 = 2\pi\, \vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^2,$$

also:

$$\frac{\left(\frac{dU}{dV_1}\right)}{\left(\frac{dU}{dV_2}\right)} = \frac{\vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1^2}{\vartheta\left(0, \frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right)_3^4 u_1^2} = \frac{\vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1^2}{\vartheta\left(0, \dfrac{b_0 - a_0\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1}\right)_3^4 u_1^2}.$$

Sollte dieser Ausdruck gleich der Einheit werden, so müsste:

$$\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1}\right)_3^4 u_1^2 = \vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1^2$$

werden. Nun ist, wenn a_0, b_1, a_1, b_0 Transformationszahlen des ersten Falles bedeuten, und $a_1 = 2^\alpha\beta$ gesetzt wird, allgemein:

$$\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3$$

$$= e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{(\beta-1)^2+(a_0\beta+1)^2}{2}\right]} \left(\frac{-a_0}{\beta}\right)\left(-1\right)^{\frac{a_0^2-1}{8}(\alpha+1)} \sqrt{-i(a_1\tau - b_1)}\,\vartheta(0,\tau)_3\text{*}).$$

Setzen wir an Stelle von τ: $\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}$, so müsste also in unserem Falle werden:

$$u_1^2\left[a_1\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1\right]^2 = \delta_1^2.$$

Das aber ist unmöglich, da τ, mit ihm $\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}$ die Form hat $A + Bi$, wo B eine von Null verschiedene positive Grösse ist und a_1 von Null verschieden sein muss.

Aehnlich gestaltet sich die Sache, wenn zwischen den Moduln eine lineare Transformation des zweiten Falles besteht. Alsdann wird:

$$v_1^8 = v_2'^8;\quad v_2^8 = v_1'^8,$$

also:

$$\frac{\left(\frac{dU}{dV_1}\right)}{\left(\frac{dU}{dV_2}\right)} = -\frac{M_1^2}{M_2^2} = -\frac{\vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1^2}{\vartheta\left(0, \frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right)_3^4 u_1^2} = \text{endl. von 0 verschied. Grösse.}$$

Sollte dieser Ausdruck gleich der Einheit werden, so müsste sein:

$$\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1}\right)_3^4 u_1^2 = -\vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1^2.$$

Nun ist für Transformationszahlen des zweiten Falles allgemein:

$$\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3 = \left(\frac{\frac{-a_0}{2}}{a_1}\right) i^{\left(\frac{a_1-1}{2}\right)^2} \sqrt{-i(a_1\tau - b_1)}\,\vartheta(0,\tau)_3,$$

mithin müsste werden:

$$\delta_1^2 = u_1^2\left[a_1\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1\right]^2, \text{ w. n. g.}$$

Die Schlüsse werden unstrenge, wenn $v_1^8 = v_1'^8 = v_2^8 = v_2'^8 = \frac{1}{2}$ wird, indessen zeigt eine leichte Ueberlegung, dass sie auch dann richtig bleiben.

---

*) Siehe Journal de Mathématiques par Liouville, tome III, 1858, pag. 26 sq., oder Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, Leipzig 1874, Vierundzwanzigste Vorlesung.

Hieraus folgt das Resultat: Mögen für $U = U_0$ mehrere Wurzeln der U-V Gleichung gleich V_0 werden, so denke man sich dieselbe nach Potenzen von $U - U_0$ und $V - V_0$ entwickelt. Die niedrigste alleinstehende Potenz von $V - V_0$ sei die $\varkappa^{\text{te}}$, d. h. es mögen für $U = U_0$ $\varkappa$ Wurzeln der U-V Gleichung gleich V_0 werden, die niedrigste alleinstehende Potenz von $U - U_0$ sei die $\varkappa_1^{\text{te}}$, d. h. es mögen für $V = V_0$ $\varkappa_1$ Wurzeln der V-U Gleichung gleich U_0 werden, ferner sei λ der grösste gemeinsame Theiler von $\varkappa$ und $\varkappa_1$ und zwar:

$$\lambda\mu = \varkappa, \quad \lambda\nu = \varkappa_1,$$

so ergeben sich die gesuchten Wurzelentwickelungen in der Form:

$$V_{r\mu+s} - V_0 = c_{r\mu} e^{\frac{2s\nu i\pi}{\mu}} (U - U_0)^{\frac{\nu}{\mu}} + d_{r\mu} e^{\frac{2s(\nu+1)i\pi}{\mu}} (U - U_0)^{\frac{\nu+1}{\mu}} + \cdots,$$
$$r = 0, 1 \cdots \lambda - 1; \quad s = 1, 2, \cdots \mu,$$

wobei die Grössen $(c_{r\mu})^{\mu}_{r=0\ldots\lambda-1}$ sämmtlich von einander verschieden sind. —

Nun haben wir aber gesehen, dass an allen Stellen, an welchen sowohl U_0 wie V_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden sind, der Ausdruck:

$$\left(\frac{dV}{dU}\right)$$

einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat. Daraus folgt, dass für alle diese Stellen $\mu = \nu = 1$ ist, d. h. in diesen Punkten $U = U_0$ hängen die entsprechenden Blätter der Riemann'schen Fläche von V gar nicht zusammen.

Wir sahen ferner, dass, wenn $U_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$, dagegen V_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden war, der Ausdruck $\left(\frac{dV}{dU}\right)$ unendlich gross wurde, doch so, dass

$$\lim \left[(u_1^8 - u^8)\,\frac{dV}{dU}\right] = \text{endl. von Null verschied. Grösse ist.}$$

Nun ist allgemein:

$$\frac{u_1^8 - u^8}{\left(U^8 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1 - 2u^8}{\left(u^8(1-u^8) - \frac{1}{4}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1 - 2u^8}{(-1)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2p}{q}} \left(1 - 2u^8\right)^{\frac{2p}{q}}}$$
$$= \frac{(1 - 2u^8)^{1 - \frac{2p}{q}}}{(-1)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2p}{q}}}.$$

Daher wird:

$$\lim \left[\frac{u_1^8 - u^8}{\left(U^8 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{p}{q}}}\right]_{u^8 = \frac{1}{2}}$$

dann und nur dann einen endlichen von Null verschiedenen Werth annehmen, wenn $\frac{2p}{q} = 1$ ist. Dasselbe findet also für:

$$\lim \left[\frac{u_1^8 - u^8}{\left(U - \sqrt[8]{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{p}{q}}} \right]_{u^8 = \frac{1}{2}}$$

statt.

Wenden wir dieses Resultat auf unseren Fall an, so zeigt sich, dass wenn $U_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$, dagegen V_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden ist, $\frac{\nu}{\mu} = \frac{1}{2}$ oder $\nu = 1$, $\mu = 2$ wird.

In dem Punkte $U_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ hängen also die entsprechenden Blätter der Riemann'schen Fläche zu je zwei zusammen, ausser etwa, es entspräche einem derselben der Werth $V_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$.

In ähnlicher Weise zeigt sich, dass, wenn U_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden, dagegen V_0 gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ wird, $\nu = 2$, $\mu = 1$ zu setzen ist, so dass in diesen Punkten die entsprechenden Blätter der Riemann'schen Fläche nicht an einander geheftet sind, und ebendasselbe Resultat ergiebt sich, wenn U_0 wie V_0 gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ wird, indem diesem Falle $\nu = 1$, $\mu = 1$ entspricht.

Für den Punkt $U = 0$ sind die Cyklen schon gebildet, es bliebe nur der Punkt $U = \infty$ zu betrachten übrig, doch kann derselbe ausser Acht gelassen werden, da durch Herstellung der Cyklen in allen andern Punkten die Anfgabe für den Unendlichkeitspunkt zu gleicher Zeit gelöst ist.

Wie wir sehen, ergiebt sich das merkwürdige Resultat, dass die Riemann'sche Fläche der algebraischen Function V aus $(a_0 + 1)(a_1 + 1) \cdots$ Blättern besteht — $n = a_0 a_1 \cdots$ —, welche nur in den Punkten $U = 0$, $U = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$, $U = \infty$ an einander geheftet sind und hier in einer für alle Transformationsgrade bestimmten Weise*). —

Nachdem dieses festgestellt ist, gehen wir zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück und untersuchen zunächst, welches die nothwendigen Bedingungen dafür sind, dass U oder V gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ wird.

---

*) Aehnlich ergiebt sich bei den Modulargleichungen: Die Riemann'sche Fläche von v, welches sich aus zu dem Transformationsgrade n gehörender Modulargleichung als algebraische Function von u ergiebt, besteht aus $(a_0 + 1)(a_1 + 1) \cdots$ Blättern, welche nur in den Punkten $u = 0$, $u = \sqrt[8]{1}$, $u = \infty$ zusammenhängen.

Zu $U^8 = \frac{1}{4}$ gehört $\tau = i$ und alle diejenigen Grössen, welche aus $\tau = i$ durch eine lineare Substitution des ersten oder zweiten Falles abgeleitet sind, so dass dieser Werth von U nur aus Classen erhalten werden kann, deren Repräsentanten Formen:

$$d\tau^2 + d = 0$$

sind.

Der Fall $V^8 = \frac{1}{4}$ kann jedenfalls auch nur bei Formen eintreten, deren Determinante gleich $-d^2$ ist, da ja, wenn τ einer Gleichung:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

genügt, zwei zugehörige Werthe $\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}$ und $\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}$ einer Gleichung mit derselben Determinante genügen, z. B. $\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \tau_1$ der Gleichung:

$$\frac{P}{\delta}\delta_1\tau_1^2 + 2\left[\frac{P}{\delta}16\xi_1 + Q\right]\tau_1 + \frac{\frac{P}{\delta}16^2\xi_1^2 + 2Q16\xi_1 + \delta R}{\delta_1} = 0.$$

Die nothwendigen Bedingungen dafür, dass hieraus sich $\chi(\tau_1)^8 = V^8 = \frac{1}{4}$ ergiebt, sind, dass:

$$\frac{P}{\delta}\delta_1 = dP_1,$$

$$\frac{P}{\delta}16\xi_1 + Q = dQ_1,$$

$$\frac{P}{\delta}16^2\xi_1^2 + 2Q16\xi_1 + \delta R = d\delta_1 R_1$$

gesetzt werden kann. Mag nun d mit n den grössten gemeinsamen Theiler d' haben und $\frac{d}{d'} = d^{(2)}$ sein, so müssen zur Erfüllung der obigen Bedingungen P, Q, R nothwendig durch $d^{(2)}$ theilbar sein. Wir schliessen alle Classen, die Formen dieser Art enthalten, vorläufig von der Betrachtung aus.

Mögen unter Ausschluss dieser Classen sich unter den zu n gehörenden Determinanten eine beliebige Anzahl von den Formen:

$$-d_1^2\Delta_1, \quad -d_2^2\Delta_1, \quad -d_3^2\Delta_1, \ldots$$

ergeben, wo Δ_1 kein volles Quadrat mehr enthält, so werden zu diesen Determinanten eine Reihe von repräsentirenden Formen gehören:

$$g_1P\tau^2 + 2g_1Q\tau + g_1R = 0,$$
$$g_2P\tau^2 + 2g_2Q\tau + g_2R = 0,$$
$$g_3P\tau^2 + 2g_3Q\tau + g_3R = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zunächst ist klar, dass sich nicht aus zweien dieser Formen zu gleicher Zeit ergeben kann:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right),$$

da sonst die Gleichung:

$$\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \frac{b_0 - a_0\dfrac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}}{a_1\dfrac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} - b_1}$$

auf eine der obigen Formen führen müsste, was nur bei den vorläufig ausgeschlossenen Determinanten möglich wäre.

Nennen wir daher $m_1, m_2, m_3 \cdots$ die zu den einzelnen Formen gehörenden Werthe von m, so giebt

$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = \Sigma m$$

die Anzahl der für $U_0 = \chi(\tau)$ einander gleich werdenden verschiedenen Wurzelpaare an.

Es soll bewiesen werden, dass $U_0 = \chi(\tau)$ eine $2\Sigma m$-fache Wurzel der Discriminante ist.

Der Beweis ist in einem Falle unmittelbar geliefert, wenn nämlich nie mehr als zwei Wurzeln einander gleich werden. Dann ergeben sich vermöge der vorhin gefundenen Resultate Σm Entwickelungen der Form:

$$\begin{aligned} V_{2s-1} - V_0^{(s)} &= c_{2s-2}(U - U_0) + d_{2s-2}(U - U_0)^2 + \cdots, \\ V_{2s} \quad - V_0^{(s)} &= c_{2s-1}(U - U_0) + d_{2s-1}(U - U_0)^2 + \cdots, \\ s &= 1 \cdots \Sigma m, \end{aligned}$$

wo die Grössen $V_0^{(s)}$ die verschiedenen Werthe der Σm gleichen Wurzelpaare bezeichnen und c_{2s-2} von c_{2s-1} verschieden ist. Setzen wir diese Entwickelungen in die Discriminante ein, so ergiebt sich in der That das obige Resultat.

Aber der Satz bleibt allgemein richtig. Mögen für $U_0 = \chi(\tau)$ im Ganzen k Wurzeln $V_1, V_2, \cdots V_k$ gleich V_0 werden, so entsprechen diesen k gleichen Wurzeln im Ganzen $\frac{k(k-1)}{2}$ gleiche Wurzelpaare. Es wird daher U_0 in $2\Sigma m$ insofern für dasselbe k Wurzeln gleich V_0 werden, $k(k-1)$ mal gezählt. Dasselbe Resultat ergeben aber die Wurzelentwickelungen, die in diesem Falle lauten:

$$\begin{aligned} V_1 - V_0 &= c_0 \quad (U - U_0) + d_0 \quad (U - U_0)^2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_k - V_0 &= c_{k-1}(U - U_0) + d_{k-1}(U - U_0)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Sehen wir davon ab, dass die aufgestellten Gleichungen stets denselben Werth von τ ergeben, so können wir den Satz auch so aussprechen:

Eine jede Function $\chi(\tau)$, die zu einer Gleichung der betrachteten Art:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

gehört, ist eine $2m$-fache Wurzel der Discriminante. —

Wir kommen zu den ausgeschlossenen Fällen. Dieselben beziehen sich auf gewisse Classen der Determinanten von der Form $-d^2$.

Eine solche Determinante tritt bei einem jeden Transformationsgrad auf, da sich aus $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta)$ stets $\Delta = -n^2$ ergiebt.

Ist aber n oder einer seiner Theiler von der Form: $16\alpha^2 + \beta^2$, so ergeben sich überdies aus $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta)$ und $\Delta = -2\delta(n - 8\delta)$ eine gleiche Anzahl ungerader und gerader Determinanten der genannten Art. Wir bezeichnen die ersteren mit $-D_1^2, -D_2^2, \cdots$ die letzteren mit $-d_1^2, -d_2^2, \cdots$, so zwar, dass D_α und d_α mit n denselben grössten gemeinsamen Theiler haben. Eine leichte Betrachtung zeigt, dass diese Zuordnung stets möglich ist.

Wir betrachten die Classen, deren Repräsentanten die Formen sind:

$$\begin{array}{ll} n\tau^2 + n = 0, & \\ D_1\tau^2 + D_1 = 0, & d_1\tau^2 + d_1 = 0, \\ D_2\tau^2 + D_2 = 0, & d_2\tau^2 + d_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Die zugehörigen Werthe von m bezeichnen wir mit $m, M_1, M_2, \cdots, m_1, m_2, \cdots$. Es fragt sich zunächst, ob und wann zwei dieser Gleichungen dasselbe gleiche Wurzelpaar:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)$$

ergeben können. Offenbar muss dann sowohl

$$\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \frac{b_0 - a_0\dfrac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}}{a_1\dfrac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} - b_1}$$

wie

$$\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} = \frac{b_0' - a_0'\dfrac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1'\dfrac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1'}$$

werden, während zu gleicher Zeit ξ_1 und ξ_2 der Congruenz genügen:

$$16^2\xi^2 \equiv -1 \bmod n.$$

Dann ist aber:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right) = V_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}},$$

da $\delta = u = 1$; ferner:

$$\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \tau_1$$

der Gleichung genügt:

$$n^2\tau_1^2 + 2n16\xi_1\tau_1 + 16^2\xi_1^2 + 1 = 0$$

und $16^2\xi_1^2 + 1$ durch n theilbar ist.

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass, wenn eine der aufgestellten Formen ein gleiches Wurzelpaar liefert, welches gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ ist, eine und nur eine der übrigen Formen dasselbe gleiche Wurzelpaar ergiebt.

Nennen wir daher λ die Zahl der Wurzelpaare, welche den Werth $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ annehmen, so ist die Zahl der von einander verschiedenen gleichen Wurzelpaare vermöge der früheren Betrachtungen gleich:

$$\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2} + M_1 + M_2 + \cdots + m_1 + m_2 + \cdots - \lambda.$$

Ist V_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden, so schreiten die Wurzelentwickelungen nach Potenzen von $(U - U_0)^{\frac{1}{2}}$ fort, ist V_0 gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$, so schreiten sie nach Potenzen von $(U - U_0)$ fort; daraus folgt vermittelst einer einfachen Ueberlegung, dass die zu den obigen Formen gehörende Function $\chi(\tau) = U_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ eine

$$\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2} + M_1 + M_2 + \cdots + m_1 + m_2 + \cdots,$$

oder:

$$\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2} + 2(m_1 + m_2 + \cdots)$$

-fache Wurzel der Discriminante ist.

Sehen wir davon ab, dass diese Gleichungen denselben Werth von $\chi(\tau)$ ergeben, so können wir das Resultat auch so aussprechen: Beim Abzählen der Wurzeln hat man die ungeraden von $-n^2$ verschiedenen Determinanten einfach fortzulassen. Die zu der Gleichung:

$$n\tau^2 + n = 0$$

gehörende Function $\chi(\tau)$ ist dann eine $\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2}$-fache Wurzel der Discriminante, eine jede zu einer anderen Gleichung:

$$d\tau^2 + d = 0$$

gehörende Function $\chi(\tau)$ dagegen eine $2m$-fache Wurzel der Discriminante. —

In ähnlicher Weise ist der allgemeinere Fall zu behandeln. Wir fassen die Resultate, die sich für denselben ergeben, mit den früheren zusammen in folgenden

Lehrsatz.

Bei der Untersuchung, wievielfach eine jede Wurzel der Discriminante ist, hat man diejenigen Classen der ungeraden von $-n^2$ *ver-*

schiedenen Determinanten einfach fortzulassen, deren Repräsentanten die Formen:

$$D\tau^2 + D = 0$$

sind. Alsdann ist:

1) *die zu der Form:* $n\tau^2 + n = 0$ *gehörende Function* $\chi(\tau) = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ *eine* $\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2}$*-fache Wurzel der Discriminante.*

2) *ist die zu einer Form:* $P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$ *gehörende Function* $\chi(\tau)$ *eine* $m - \varepsilon \cdot 2^r$*-fache Wurzel der Discriminante, wenn* $Q^2 - PR = -n^2$ *ist und die Form selbst sich nicht in der durch* $n\tau^2 + n = 0$ *repräsentirten Classe befindet.*

3) *ist die zu einer jeden anderen Form:* $P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$ *gehörende Function* $\chi(\tau)$ *eine* $2m$*-fache Wurzel der Discriminante.*

Die Bedeutung der Grössen m, ε, r ist früher gegeben worden, ferner ist natürlich vorausgesetzt, dass die Coefficienten der Formen den früher aufgestellten Bedingungen sämmtlich Genüge leisten. — Hiermit sind die am Anfange erwähnten Aufgaben vollkommen gelöst und es wird sich nur noch darum handeln, die gefundenen Resultate an einigen Beispielen zu erläutern.

Bezeichnen wir mit $(P, Q, R)_1$ die Form

$$(P,\ Q - P,\ P - 2Q + R) = (P,\ Q,\ R)_1,$$

mit $(P, Q, R)_2$ die Form

$$(P - 2Q + R,\ Q - R,\ R) = (P,\ Q,\ R)_2,$$

und nehmen an, dass (P, Q, R) selbst eine reducirte ist, so kann als Repräsentant einer jeden Classe stets eine der drei Formen (P, Q, R), $(P, Q, R)_1$, $(P, Q, R)_2$ genommen werden, wie es in der Folge geschehen soll.

Wir können ferner vermöge der gefundenen Resultate die Discriminante schreiben:

$$D = U^N (a_0 + a_1 U^8 + \cdots + a_\nu U^{8\nu})^2,$$

wobei:

$$N = nS'(n) - S(n) + 2\Delta(n)$$

und

$$8\nu = S(n)(S(n) - 1) - N$$

ist.

Andererseits aber haben wir Methoden angegeben, wie alle von einander verschiedenen Wurzeln der Discriminante gefunden werden können und Criterien erhalten, vermöge deren festgestellt werden kann, wie vielfach eine jede Wurzel ist. Es muss sich hierbei in Bezug auf den Grad der Discriminante dasselbe Resultat wie vorher ergeben, was an den Beispielen der Transformationszahlen bis 30 nachgewiesen werden soll. —

Sei jetzt $n = 3$, $\nu = 1$.

Es ergiebt sich lediglich die Determinante $\Delta = -9$ und als einzige Form: $(3, 0, 3)$ mithin wird die Discriminante

$$D = U^4 (1 - 4 U^8)^2,$$

$$n = 5, \quad \nu = 3.$$

Es ergeben sich die Determinanten $\Delta = -6$ und $\Delta = -25$ mit den Formen:

$$(1, 0, 6)_1, \quad (2, 0, 3)_2, \quad (5, 0, 5),$$

mithin wird die Discriminante

$$D = U^6 (1 - 4 U^8)^2 (1 + 2^3 \cdot 17 U^8 + 2^4 U^{16})^{2} \text{*)},$$

$$n = 7, \quad \nu = 6.$$

Es ergeben sich die Determinanten $\Delta = -3$, $\Delta = -6$, $\Delta = -49$ mit den Formen:

$$(1, 0, 3), \quad (2, 1, 2), \quad (1, 0, 6)_1, \quad (2, 0, 3)_2, \quad (7, 0, 7),$$

mithin wird die Discriminante:

$$D = U^8 (1 - 4 U^8)^4 (1 - U^8)^2 (1 - 16 U^8)^2 (1 + 2^3 \cdot 17 U^8 + 2^4 U^{16})^2.$$

In diesen drei Discriminanten ist von etwaigen numerischen Factoren abgesehen.

Die Resultate für die andern Transformationszahlen sind in der folgenden Tabelle enthalten. In derselben ist gesetzt:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

wobei ν_1 den Theil von ν bezeichnet, welcher von den ungeraden Determinanten herrührt, ν_2 denjenigen, welcher von den geraden herrührt.

n	Ungerade Determinanten	Gerade Determinanten	ν
11	$-\Delta = 7$ $(1, 0, 7)\ (2, 1, 4)_2$. $-\Delta = 57$ $(1, 0, 57)\ \ (3, 0, 19)\ \ (2, 1, 29)_2$ $(6, 3, 11)_2$. $-\Delta = 121$ $(11, 0, 11)$. $\nu_1 = 9$.	$-\Delta = 6$ (s. $n = 5$). $-\Delta = 30$ $(1, 0, 30)_1\ (2, 0, 15)_2\ (3, 0, 10)_1$ $(5, 0, 6)_1$. $\nu_2 = 6$.	15

*) Der Ausdruck für diese Discriminante ist schon von Joubert aufgestellt worden. Comptes rendus, tome XLVIII, pag. 293.

n	Ungerade Determinanten	Gerade Determinanten	ν
13	$-\Delta = 3$ $(1, 0, 3)$ $(2, 1, 2)$. $-\Delta = 105$ $(1, 0, 105)$ $(3, 0, 35)$ $(5, 0, 21)$ $(7, 0, 15)$ $(2, 1, 53)_2$ $(6, 3, 19)_2$ $(11, 4, 11)$ $(10, 5, 13)_2$. $-\Delta = 169$ $(13, 0, 13)$. $\nu_1 = 13$.	$-\Delta = 10$. $(1, 0)\ 10)_1$ $(2, 0, 5)_2$. $-\Delta = 30$ (s. $n = 11$). $-\Delta = 22$ $(1, 0, 22)_1$ $(2, 0, 11)_2$. $\nu_2 = 8$.	21
15	$-\Delta = 11$ $(1, 0, 11)$ $(2, 1, 6)$ $(3, \pm 1, 4)_1$. $-\Delta = 161$ $(1, 0, 161)$ $(7, 0, 23)$ $(2, 1, 81)_2$ $(3, \pm 1, 54)_1$ $(6, \pm 1, 27)_2$ $(9, \pm 1, 18)_1$ $(5, \pm 2, 33)$ $(11, \pm 2, 15)$ $(10, \pm 3, 17)_2$ $(14, 7, 15)_2$. $-\Delta = 225$ $(3, 0, 75)$ $(5, 0, 45)$ $(15, 0, 15)$ $(6, 3, 39)_2$ $(10, 5, 25)_2$. $\nu_1 = 36$.	$-\Delta = 14$ $(1, 0, 14)_1$ $(2, 0, 7)_2$ $(3, \pm 1, 5)$. $-\Delta = 14$ (s. vorher). $-\Delta = 54$ $(1, 0, 54)_1$ $(2, 0, 27)_2$ $(3, 0, 18)_1$ $(6, 0, 9)_2$ $(5, \pm 1, 11)$ $(7, \pm 3, 9)$. $\nu_2 = 22$.	58
17	$-\Delta = 15$ $(1, 0, 15)$ $(3, 0, 5)$ $(2, 1, 8)_2$ $(4, 1, 4)$. $-\Delta = 33$ $(1, 0, 33)$ $(3, 0, 11)$ $(2, 1, 17)_2$ $(6, 3, 7)_2$. $-\Delta = 225$ $(1, 0, 225)$ $(3, 0, 75)$ $(5, 0, 45)$ $(9, 0, 25)$ $(2, 1, 113)_2$ $(6, 3, 39)_2$ $(9, \pm 3, 26)_1$ $(13, \pm 3, 18)_1$ $(10, 5, 25)_2$ $(17, 8, 17)$. $-\Delta = 289$ $(17, 0, 17)$. $\nu_1 = 24$.	$-\Delta = 18$ $(1, 0, 18)_1$ $(2, 0, 9)_2$ $(3, 0, 6)_1$. $-\Delta = 4$ $(2, 0, 2)$. $-\Delta = 70$ $(1, 0, 70)_1$ $(2, 0, 35)_2$ $(5, 0, 14)_1$ $(7, 0, 10)_1$. $-\Delta = 30$ (s. $n = 11$). $\nu_2 = 12$.	36

n	Ungerade Determinanten	Gerade Determinanten	ν
19	$-\Delta = 15$ (siehe $n=17$). $-\Delta = 105$ (s. $n=13$). $-\Delta = 297$ $(1, 0, 297)$ $(3, 0, 99)$ $(9, 0, 33)$ $(11, 0, 27)$ $(2, 1, 149)_2$ $(7, \pm 2, 43)$ $(6, 3, 51)_2$ $(9, \pm 3, 34)_1$ $(17, \pm 3, 18)_1$ $(14, \pm 5, 23)_2$ $(19, 8, 19)$ $(18, 9, 21)_2$. $-\Delta = 381$ $(19, 0, 19)$. $\nu_1 = 33$.	$-\Delta = 22$ (siehe $n = 13$). $-\Delta = 12$ $(2, 0, 6)$ $(4, 2, 4)$. $-\Delta = 70$ (siehe $n = 17$). $-\Delta = 78$ $(1, 0, 78)_1$ $(2, 0, 39)_2$ $(3, 0, 26)_1$ $(6, 0, 13)_2$. $\nu_2 = 12$.	45
21	$-\Delta = 27$ $(1, 0, 27)$ $(3, 0, 9)$ $(2, 1, 14)$ $(4, \pm 1, 7)_2$ $(6, 3, 6)$. $-\Delta = 185$ $(1, 0, 185)$ $(5, 0, 37)$ $(2, 1, 93)_2$ $(3, \pm 1, 62)_1$ $(6, \pm 1, 31)_2$ $(7, \pm 2, 27)$ $(9, \pm 2, 21)$ $(10, 5, 21)_2$ $(14, \pm 5, 15)_2$ $(13, \pm 6, 17)$. $-\Delta = 377$ $(1, 0, 377)$ $(13, 0, 29)$ $(2, 1, 189)_2$ $(3, \pm 1, 126)_1$ $(6, \pm 1, 63)_2$ $(7, \pm 1, 54)_1$ $(9, \pm 1, 42)_1$ $(14, \pm 1, 27)_2$ $(18, \pm 1, 21)_2$ $(21, 8, 21)$. $-\Delta = 441$ $(3, 0, 147)$ $(7, 0, 63)$ $(21, 0, 21)$ $(6, 3, 75)_2$ $(15, \pm 3, 30)_1$ $(14, 7, 35)_2$. $\nu_1 = 70$.	$-\Delta = 26$ $(1, 0, 26)_1$ $(2, 0, 13)_2$ $(3, \pm 1, 9)$ $(5, \pm 2, 6)_1$. $-\Delta = 20$ $(2, 0, 10)$ $(4, 2, 6)_2$. $-\Delta = 54$ (siehe $n = 15$). $-\Delta = 110$ $(1, 0, 110)_1$ $(2, 0, 55)_2$ $(5, 0, 22)_1$ $(10, 0, 11)_2$ $(3, \pm 1, 37)$ $(6, \pm 2, 19)_2$ $(7, \pm 3, 17)$ $(9, \pm 4, 14)_1$. $-\Delta = 38$ $(1, 0, 38)_1$ $(2, 0, 19)_2$ $(3, \pm 1, 13)$ $(6, \pm 2, 7)_2$. $\nu_2 = 40$.	110
23	$-\Delta = 15$ (siehe $n=17$). $-\Delta = 19$ $(1, 0, 19)$ $(2, 1, 10)$ $(4, \pm 1, 5)_2$. $-\Delta = 273$ $(1, 0, 273)$ $(3, 0, 91)$ $(7, 0, 39)$ $(13, 0, 21)$ $(2, 1, 137)_2$ $(6, 3, 47)_2$ $(17, 4, 17)$ $(14, 7, 23)_2$.	$-\Delta = 30$ (siehe $n = 11$). $-\Delta = 28$ $(2, 0, 14)$ $(4, 2, 8)$. $-\Delta = 22$ (siehe $n = 13$).	66

n	Ungerade Determinanten	Gerade Determinanten	ν
23	$-\Delta = 465$ $(1, 0, 465)\ (3, 0, 155)\ (5, 0, 93)$ $(10, 0, 31)_2\ (2, 1, 233)_2\ (7, \pm 2, 67)$ $(6, 3, 79)_2\ (13, \pm 4, 37)\ (10, 5, 49)_2$ $(14, \pm 5, 35)_2\ (23, 8, 23)\ (21, \pm 9, 26)_1.$ $-\Delta = 529$ $(23, 0, 23).$ $\nu_1 = 40.$	$-\Delta = 126$ $(1, 0, 126)\ (2, 0, 63)_2\ (3, 0, 42)_1$ $(6, 0, 21)_2\ (7, 0, 18)_1\ (9, 0, 14)_1$ $(5, \pm 2, 26)_1\ (10, \pm 2, 13)_2$ $(9, \pm 3, 15).$ $-\Delta = 102$ $(1, 0, 102)_1\ (2, 0, 51)_2\ (3, 0, 34)_1$ $(6, 0, 17)_2.$ $\nu_2 = 26.$	66
29	$-\Delta = 7$ (siehe $n = 11$). $-\Delta = 51$ $(1, 0, 51)\ (3, 0, 17)\ (2, 1, 26)$ $(4, \pm 1, 13)_2\ (5, \pm 2, 11)\ (6, 3, 10).$ $-\Delta = 265$ $(1, 0, 265)\ (5, 0, 53)\ (2, 1, 133)_2$ $(7, \pm 1, 38)_1\ (14, \pm 1, 19)_2\ (10, 5, 29)_2.$ $-\Delta = 585$ $(1, 0, 585)\ (3, 0, 195)\ (5, 0, 117)$ $(9, 0, 65)\ (13, 0, 45)\ (15, 0, 39)$ $(2, 1, 293)_2\ (19, \pm 2, 31)\ (6, 3, 99)_2$ $(9, \pm 3, 66)_1\ (11, \pm 3, 54)_1\ (18, \pm 3, 33)_2$ $(22, \pm 3, 27)_2\ (10, 5, 61)\ (23, \pm 6, 27)$ $(18, 9, 37)_2\ (27, 12, 27)\ (26, 13, 29)_2.$ $-\Delta = 777$ $(1, 0, 777)\ (3, 0, 259)\ (7, 0, 111)$ $(21, 0, 37)\ (2, 1, 389)_2\ (11, \pm 2, 71)$ $(6, 3, 131)_2\ (13, \pm 4, 61)\ (14, 7, 59)_2$ $(29, 8, 29)\ (22, \pm 9, 39)_2\ (26, \pm 9, 33)_2.$ $-\Delta = 841$ $(29, 0, 29).$ $\nu_1 = 69.$	$-\Delta = 42$ $(1, 0, 42)_1\ (2, 0, 21)_2\ (3, 0, 14)_1$ $(6, 0, 7)_2.$ $-\Delta = 52$ $(2, 0, 26)\ (4, 2, 14)_2.$ $-\Delta = 30$ (siehe $n = 11$). $-\Delta = 78$ (siehe $n = 19$). $-\Delta = 198$ $(1, 0, 198)_1\ (2, 0, 99)_2\ (3, 0, 66)_1$ $(6, 0, 33)_2\ (9, 0, 22)_1\ (11, 0, 18)_1$ $(9, \pm 3, 23)\ (13, \pm 6, 18)_1.$ $-\Delta = 190$ $(1, 0, 190)_1\ (2, 0, 95)_2\ (5, 0, 38)_1$ $(10, 0, 19)_2.$ $-\Delta = 54$ (siehe $n = 15$). $\nu_2 = 36.$	105

Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen.

Von P. Gordan in Erlangen.

Im neunten Bande dieser Annalen (p. 183 — 188) hat sich Herr Klein mit dem Probleme beschäftigt:

Alle endlichen Gruppen zu construiren, die sich aus linearen Transformationen einer Veränderlichen bilden lassen,

und dasselbe zu einem einfachen Schlussresultate geführt. Aber die geometrischen Betrachtungen, deren er sich zu diesem Zwecke bedient, sind sehr abstract und jedenfalls mit der Fragestellung nicht nothwendig verknüpft; ich werde daher im Folgenden zeigen, wie man diese Aufgabe algebraisch behandeln kann.

§ 1.

Fundamentalformeln.

Bekanntlich zerfallen die linearen Substitutionen:

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0),$$

sofern man von der sogenannten *identischen* Substitution:

$$\eta' = \eta$$

absieht, in zwei Arten, je nachdem die beiden Werthe, welche durch die Substitution sich nicht ändern, gleich sind oder nicht.

Im ersteren Falle kann man statt η', η solche lineare Functionen η_1', η_1 von η' bez. η einführen, dass die Substitution die kanonische Form annimmt:

$$(1) \qquad \eta_1' = \eta_1 + r;$$

im zweiten Falle hat man als kanonische Form:

$$(2) \qquad \eta_1' = \varrho\,\eta_1.$$

Die einzelne lineare Substitution ist in dieser kanonischen Form am einfachsten zu behandeln. Wird aber die Aufgabe gestellt, verschiedene lineare Substitutionen zu combiniren, so erscheint es nicht zweckmässig, von vornherein kanonische Veränderliche einzuführen; ich bediene mich dann folgender Formeln:

Sei $\eta = \frac{x_1}{x_2}$, $\eta' = \frac{y_1}{y_2}$, so kann die Substitution, die ich S nennen will, dargestellt werden durch das Verschwinden einer bilinearen Form:

$$r_x s_y = 0.$$

Eine solche Form hat zwei Invarianten (rs) und $(rr')(ss')$, deren zweite mit der Determinante der Substitution gleichbedeutend ist. Ich will die Coefficienten der bilinearen Form in der Weise absolut bestimmen, dass

$$\frac{1}{2}(rr')(ss') = 1.$$

Dann setze man:

$$\frac{1}{2}(rs) = - \cos\varphi$$

und die quadratische Covariante

$$r_x s_x = i \sin\varphi \cdot a_x^2.$$

Dann ist

$$(ab)^2 = -2,$$

und es wird:

$$r_x s_y = i \sin\varphi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos\varphi. \tag{3}$$

Diese Gestalt der bilinearen Form nenne ich die *Normalform der linearen Substitution* S, a_x^2 heisse die *zugehörige quadratische Form*, φ das *Argument*. Setzt man $a_x^2 = 0$, so erhält man diejenigen Werthe von $\frac{x_1}{x_2}$, welche bei der linearen Substitution ungeändert bleiben. Da für die Substitutionen erster Art diese beiden Werthe zusammenfallen, so ist das Resultat $(ab)^2 = -2$ für sie nur dadurch möglich, dass die Coefficienten von a_x^2 unendlich gross werden. Dann ist nothwendig $\sin\varphi = 0$, und also $\varphi = 0$ oder π. Auch für die identische Substitution ist $\varphi = 0$ oder π; aber a_x^2 verschwindet für sie identisch; ihre Normalform lautet:

$$\pm (yx).$$

Man hat also diesen Satz:

Wenn bei der Substitution S, die keine identische sein soll, das Argument φ verschwindet oder π ist, dann und nur dann ist die Substitution von der ersten Art. —

Die Normalform einer Substitution ist nicht eindeutig bestimmt; statt a_x^2 und φ darf man auch setzen $-a_x^2$ und $-\varphi$, oder statt φ $\varphi + \pi$. Wenn wir also von der quadratischen Form einer Substitution sprechen, sehen wir stets vom Vorzeichen ab. —

Sollen zwei in der Normalform gegebene Substitutionen

$$S = r_x s_y = i \sin\varphi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos\varphi,$$

$$T = \varrho_y \sigma_z = i \sin\psi \cdot \alpha_y \alpha_z + (zy) \cdot \cos\psi$$

nach einander angewandt werden, so entsteht:

$$S\,T = r_x\,(s\varrho)\,\sigma_z = i\sin\Theta\cdot p_x p_z + (z\,x)\cdot\cos\Theta\,,$$

wo:

$$(4)\quad\begin{cases}\cos\Theta = \cos\varphi\,\cos\psi + \frac{1}{2}\,(a\,\alpha)^2\sin\varphi\,\sin\psi\,,\\[1ex] \sin\Theta\cdot p_x{}^2 = \sin\varphi\cos\psi\cdot a_x{}^2 + \cos\varphi\sin\psi\cdot\alpha_x{}^2 + i\sin\varphi\sin\psi\,(a\,\alpha)\,a_x\,\alpha_x\,.\end{cases}$$

Ist also insbesondere $S = T$ und schreibt man wieder y statt z, so kommt:

$$S^2 = i\sin 2\,\varphi\cdot a_x\,a_y + (y\,x)\cdot\cos 2\,\varphi\,,$$

und überhaupt:

$$S^\nu = i\sin\nu\varphi\cdot a_x a_y + (y\,x)\cdot\cos\nu\varphi.$$

Nennt man dementsprechend:

$$-\,i\sin\varphi\cdot a_x\,a_y + (y\,x)\cdot\cos\varphi = S^{-1}$$

und bildet das Argument H der Substitution $S^{-1}T$, wo T die obige Bedeutung hat, so giebt die Vergleichung mit der ersten der beiden Gleichungen (4) folgende wichtige Formel:

$$(5)\qquad \cos\Theta + \cos\mathsf{H} = \cos\,(\varphi + \psi) + \cos\,(\varphi - \psi).$$

§ 2.

Endliche Gruppen von Substitutionen.

Eine Substitution S kann die Eigenschaft haben, nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen die identische Substitution zu ergeben. Es tritt das nach der soeben für S^ν gegebenen Formel dann und nur dann ein, wenn φ ein (reelles) rationales Multiplum von π ist. Ich nenne dann die Substitution *iterirend* und die kleinste Zahl n, für welche

$$S^n = \pm\,(y\,x),$$

die *Periode* von S.

Bei Substitutionen der ersten Art war $\varphi = 0$; man hat also den folgenden Satz, der sich auch unmittelbar aus der kanonischen Form (1) ergiebt: *Substitutionen der ersten Art sind nie iterirend.*

Bei einer iterirenden Substitution ist daher stets die kanonische Form (2) am Platze. Dieselbe nimmt für sie (sofern wir die unteren Indices bei η', η unterdrücken) die Gestalt an:

$$\eta' = \varepsilon\,\eta,$$

wo ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel bezeichnet.

Die Werthe, welche aus einem Anfangswerthe η durch Wiederholung der Substitution entstehen, sind diese n:

$$\eta,\ \varepsilon\,\eta,\ \varepsilon^2\eta,\ \cdots\cdots\ \varepsilon^{n-1}\eta;$$

sie sind, so lange η nicht $= 0$ oder $= \infty$, alle von einander verschieden.

Die allgemeine Aufgabe nun, mit der wir uns im Folgenden beschäftigen wollen, ist diese: *Substitutionen S, T, $\cdots$ in endlicher Zahl* *derart zusammenzustellen, dass sie eine Gruppe bilden*, d. h. dass jede Substitution, die sich aus den S, T, $\cdots$ durch Combination oder Wiederholung bilden lässt, selbst zu den S, T, $\cdots$ gehört. Vor allen Dingen müssen dann sämmtliche Substitutionen S, T, $\cdots$ iterirend sein; denn die Gruppe soll ja nur eine endliche Zahl von Substitutionen umfassen.

Ich zeige nun zunächst: *Wenn die quadratischen Formen zweier Substitutionen S, T — ohne identisch zu sein — einen linearen Factor gemein haben, so lässt sich aus S, T eine Substitution der ersten Art zusammensetzen, die also nicht iterirend ist.*

Zu dem Zwecke seien $a_x^2 = b_x^2$ und $\alpha_x^2 = \beta_x^2$ die quadratischen Formen von S und T. Die Resultante von a_x^2 und α_x^2 verschwindet; mithin ist

$$((a\alpha)^2)^2 = (ab)^2\,(\alpha\beta)^2 = 4 \text{ und } (a\alpha)^2 = \pm 2.$$

Wir wollen das Vorzeichen von a_x^2, α_x^2 so bestimmen, dass $(a\alpha)^2 = -2$ ist. Es seien nun $\frac{\pi}{m}$ und $\frac{\pi}{n}$ die Argumente von S und T; nach Formel (4) ist dann $\frac{\lambda\pi}{m} - \frac{\mu\pi}{m}$ das Argument von $S^\lambda T^\mu = U$. Jetzt bestimme man λ, μ in der Weise, dass $\lambda n - \mu m = \varrho$ der grösste gemeinsame Factor von m und n ist. Es wird dann das Argument ψ von U ein Theiler des Argumentes φ von S, etwa $\varphi = \nu\psi$. Daher hat die Substitution $S^{-1}U^\nu$ das Argument Null. Sie ist aber nicht identisch. Denn sonst wäre $S = U^\nu$; S hätte dieselbe quadratische Form wie U, also auch wie $S^{-\lambda}U = T^\mu$, also auch wie T, was der Voraussetzung widerspricht. Mithin ist $S^{-1}U^\nu$ eine Substitution erster Art, w. z. b.

Zwei Substitutionen daher, welche zu einer endlichen Gruppe gehören, haben entweder dieselbe quadratische Form (von nicht verschwindender Determinante), oder ihre quadratischen Formen sind durchaus verschieden.

Im ersteren Falle sei

$$S = i\sin\varphi\cdot a_x a_y + (yx)\cdot\cos\varphi,$$
$$T = i\sin\psi\cdot a_x a_y + (yx)\cdot\cos\psi.$$

Bedeutet dann χ den grössten Winkel, der gleichzeitig in φ und ψ als Theil enthalten ist, so dass

$$\varphi = \lambda\cdot\chi,\quad \psi = \mu\cdot\chi,$$

wo λ, μ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, so kann man S und T und jede Combination derselben als Potenzen darstellen der Substitution

$$U = i\sin\chi\cdot a_x a_y + (yx)\cdot\cos\chi;$$

umgekehrt lassen sich alle Potenzen von U darstellen durch Combinationen von S und T. Daher der Satz:

Alle Substitutionen einer endlichen Gruppe, welche dieselbe quadratische Form besitzen, lassen sich ersetzen durch die Potenzen einer einzigen Substitution.

Ist n die Periode der letzteren, so heisse n zugleich die in der Gruppe *der quadratischen Form zugehörige* Periode.

§ 3.

Aufzählung der einfachsten Gruppen.

Man kann die gesuchten Gruppen jedenfalls in folgende zwei Classen theilen:

1) in solche, deren Substitutionen alle dieselbe quadratische Form besitzen,
2) in solche, bei denen verschiedene quadratische Formen auftreten.

Die Gruppen der *ersten* Art lassen sich, dem letzten Satze zufolge, erzeugen durch Wiederholungen einer einzigen Substitution. Hat diese die Periode n und bedeutet ε eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit, so ist also die Gruppe in kanonischer Form dargestellt durch folgendes Schema:

(I) $$\eta,\ \varepsilon\eta,\ \varepsilon^2\eta,\ \cdots\cdots\ \varepsilon^{n-1}\eta$$

in dem Sinne, dass das Schema diejenigen n Werthe angiebt, welche aus einem beliebig angenommenen Werthe der Veränderlichen $\frac{x_1}{x_2}$ durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehen, sofern man statt $\frac{x_1}{x_2}$ eine geeignete lineare Function von $\frac{x_1}{x_2}$ als Grösse η einführt. Es bezeichnen $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ die beiden Wurzeln der allen Substitutionen der Gruppe gemeinsamen quadratischen Form.

Die Gruppen der *zweiten* Art lassen sich folgendermassen weiter eintheilen. Zu jeder quadratischen Form, welche bei einer Substitution der Gruppe auftritt, gehört nach dem Obigen eine Periode. Ich betrachte nun insonderheit diejenigen quadratischen Formen, welche die *grösste* überhaupt auftretende Periode besitzen.

Möglicherweise ist nur *eine* quadratische Form vorhanden, der die betr. grösste Periode zukommt. Alle derartige Gruppen bestimmt man durch folgende Ueberlegung.

Die Substitutionen, welche zu der betreffenden ausgezeichneten quadratischen Form gehören, lassen sich darstellen als Wiederholungen einer einzigen:

$$S,\ S^2,\ S^3,\ \cdots\ S^n.$$

Sei T eine Substitution der Gruppe, welche nicht in dieser Reihe enthalten ist. Aus ihr und S lässt sich die Substitution zusammensetzen:

$$T^{-1}\,S\,T,$$

von der man sofort zeigt, dass sie dasselbe Argument besitzt, wie S. Sie muss daher auch dieselbe quadratische Form haben, wie S. Mithin führt T die quadratische Form von S (bis auf das Vorzeichen) in sich über. Ist nun diese quadratische Form a_x^2 und

$$T = i \sin\psi \cdot \alpha_x \alpha_y + (yx) \cdot \cos\psi,$$

so entsteht aus a_x^2:

$$(i \sin\psi \cdot \alpha_x(\alpha a) + \cos\psi \cdot a_x)\,(i \sin\psi \cdot \beta_x(\beta a) + \cos\psi \cdot a_x),$$

oder:

$$-\sin^2\psi\,\alpha_x\beta_x\,(\alpha a)\,(\beta a) + \cos^2\psi \cdot a_x^2 + i \sin 2\psi \cdot \alpha_x a_x (\alpha a)$$

$$= -\sin^2\psi\,(\alpha_x^2(\beta a)^2 - \frac{1}{2}\,a_x^2(\alpha\beta)^2) + \cos^2\psi \cdot a_x^2 + i \sin 2\psi \cdot \alpha_x a_x (\alpha a)$$

$$= \cos 2\psi \cdot a_x^2 - \sin^2\psi \cdot (a\alpha)^2 \cdot \alpha_x^2 + i \sin 2\psi \cdot \alpha_x a_x (\alpha a).$$

Daher folgt:

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad (a\alpha)^2 = 0.$$

Die Substitutionen $S\,T^\nu$ und $T^{n-\nu}S$ sind dann identisch, und die Gruppe umfasst, neben den schon aufgeführten Potenzen von S, nur noch diese Substitutionen:

$$TS,\ TS^2,\ TS^3,\ \ldots\ TS^n.$$

Um die Gruppe in kanonischer Form darzustellen, wähle man eine lineare Function η von $\frac{x_1}{x_2}$ so, dass die Wurzelpunkte der zu S gehörigen quadratischen Form durch $\eta = 0$, $\eta = \infty$ dargestellt sind, während die zu T gehörige quadratische Form gegeben sei durch: $\eta^2 + 1 = 0$. Dann erscheinen die $2n$ Werthe, welche aus einem durch die Substitutionen der Gruppe entstehen, in folgender Gestalt:

$$\text{(II.)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \eta, \quad \varepsilon\eta, \quad \varepsilon^2\eta, \ \ldots\ \varepsilon^{n-1}\eta, \\ -\frac{1}{\eta}, \quad -\frac{\varepsilon}{\eta}, \quad -\frac{\varepsilon^2}{\eta}, \ \ldots\ -\frac{\varepsilon^{n-1}}{\eta}. \end{array} \right.$$

Hier ist ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel und n der Voraussetzung nach > 2. Nehmen wir $n = 2$, so haben wir eine Gruppe, die nur Substitutionen von der Periode 2 umfasst, und die sich im Laufe unserer Aufzählung erst später einstellt (§ 10.).

Es bleiben jetzt nur noch solche endliche Gruppen linearer Substitutionen aufzusuchen, bei denen *verschiedene* quadratische Formen auftreten, denen der grösste unter den vorhandenen Periodenwerthen zukommt. Ich werde den letzteren zugleich den Periodenwerth der

Gruppe nennen. Vor allen Dingen entsteht die Frage, welche Zahlen als Periodenwerthe derartiger Gruppen auftreten können. Mit dieser Untersuchung werde ich mich in den nächstfolgenden Paragraphen beschäftigen.

§ 4.

Formulirung des Problems.

Unter den quadratischen Formen der noch gesuchten Gruppen finden sich, der Voraussetzung nach, jedenfalls zwei, welche die grösste Periode besitzen. Diejenigen beiden zu ihnen gehörigen Substitutionen, welche die kleinste Amplitude φ besitzen, will ich S und T nennen. Für die Amplituden Θ und H der Substitutionen ST und $S^{-1}T$ liefert dann Formel (5) folgende Gleichung:

$$\cos\Theta + \cos\mathsf{H} = \cos 2\varphi + 1.$$

Hier müssen, damit die Gruppe endlich wird, Θ, H in rationalem Verhältnisse zu π stehen. Es dürfen ferner $\cos\Theta$, $\cos\mathsf{H}$ nicht 1 sein, weil die entsprechenden Substitutionen ST resp. $S^{-1}T$, die keine identische sein können, dann der ersten Art angehören, also nicht iteriren würden. Endlich kann Θ, H nicht kleiner als φ sein. Doch lassen wir vorab diese Nebenbedingungen bei Seite, schreiben

$$2\varphi = \varphi_1, \quad \pi - \Theta = \varphi_2, \quad \pi - \mathsf{H} = \varphi_3,$$

so haben wir die Hauptaufgabe vor uns: *die Gleichung*

$$1 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0$$

durch rationale Winkel zu lösen. Es wird sich zeigen, dass die Zahl dieser Lösungen sehr beschränkt ist.

Ich gebrauche bei dieser Untersuchung einen Satz, den Kronecker im 19ten Bande von Liouville's Journal (1854) bewiesen hat:

Ist p eine Primzahl und α eine ganze Zahl, so kann der Ausdruck:

$$X_{p,\alpha} = 1 + x^{p^{\alpha-1}} + x^{2p^{\alpha-1}} + \cdots\cdots + x^{(p-1)p^{\alpha-1}}$$

nicht in Factoren niederen Grades zerlegt werden, deren Coefficienten rationale ganzzahlige Functionen sind von Einheitswurzeln, die sich auf nicht durch p theilbare Exponenten beziehen.

Hieraus kann man schliessen:

Sind in der Function:

$$f(x) = \Sigma c_i x^i$$

die Coefficienten c rationale und ganzzahlige Functionen von Einheitswurzeln, deren Exponenten nicht durch p theilbar sind, und ist:

$$f\left(e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}}\right) = 0,$$

so ist $f(x)$ durch $X_{p,\alpha}$ theilbar.

Unter den Exponenten i der Reihe $f(x)$ können Zahlen vorkommen, welche nicht nach dem Modul $p^{\alpha-1}$ congruent sind. Man wird dann f der Art in eine Anzahl von Summen zerlegen:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots,$$

dass in jedem einzelnen f_k alle diejenigen Glieder $c_i x^i$ und nur diejenigen vorkommen, bei denen i, durch $p^{\alpha-1}$ dividirt, den nämlichen Rest r_k liefert, und sieht leicht ein, dass dann jede Summe f_k für sich den Ausdruck $X_{p,\alpha}$ zum Factor hat.

§ 5.

Einfachste Lösungen.

Sei in der Gleichung

$$1 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0,$$

$$\varphi_i = \frac{2a_i}{m_i}\pi,$$

wo die a_i, m_i ganze Zahlen ohne gemeinsamen Factor vorstellen. Da $\cos(2\pi+\varphi) = \cos\varphi$, so kann man jedenfalls wählen $\frac{a_i}{m_i} \leqq \frac{1}{2}$. Dies vorausgesetzt, soll also sein:

$$1 + \cos\frac{2a_1}{m_1}\pi + \cos\frac{2a_2}{m_2}\pi + \cos\frac{2a_3}{m_3}\pi = 0.$$

Betrachten wir zunächst den Fall, in welchem eins der m, etwa m_1, $= 2$ ist. Dann ist $\varphi_1 = \pi$, $\cos\varphi_1 = -1$, also:

$$\cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0.$$

In diesem einfachsten Falle erhalten wir also die Auflösung:

(A) $$\varphi_1 = \pi,\quad \varphi_2 = \varphi_2,\quad \varphi_3 = \pi - \varphi_2,$$

wo φ_2 ein beliebiger, zu π in rationalem Verhältniss stehender, Winkel $\leqq \pi$ ist.

Für die übrigen Auflösungen sind alle $m_i > 2$; wir wollen zunächst diejenigen unter ihnen aufsuchen, bei denen $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$ rationale Werthe besitzen. Die einzigen rationalen Werthe solcher Cosinus sind bekanntlich:

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad 0,\quad -\frac{1}{2},\quad -1;$$

ihnen entsprechen die Winkel:

$$0,\quad \frac{\pi}{3},\quad \frac{\pi}{2},\quad \frac{2\pi}{3},\quad \pi.$$

Von diesen Werthen sind hier π, 0, $\frac{\pi}{3}$ auszuschliessen; π, weil das betr. $m_i = 2$, und 0 und $\frac{\pi}{3}$, weil die Formeln

$$1 + 1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0,$$
$$1 + \frac{1}{2} + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0$$

nur erfüllt werden können, wenn man statt φ_2, φ_3 andere Werthe setzt als

$$0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}.$$

Es bleiben für die φ_i also nur die Werthe $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{2\pi}{3}$ übrig. *In der That findet man für*

(B)
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \frac{2\pi}{3},$$
$$1 + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = 0,$$

und dies ist die einzige hier aufzuführende Lösung.

§ 6.

Hülfssatz, betr. irrationale Lösungen.

Für etwaige irrationale Werthe der $\cos\varphi_i$, die unserer Gleichung genügen, muss mindestens eine der Zahlen m_1, m_2, m_3 von 1, 2, 3, 4, 6 verschieden sein.

Ich nehme zunächst an, dass mindestens ein m_i durch das Quadrat einer Primzahl theilbar sei. Man setze:

$$m_k = r_k \cdot p^{\nu_k}, \qquad a_k = \alpha_k r_k + \beta_k p^{\nu_k},$$

und wähle die m in solcher Reihenfolge, dass

$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3 .$$

Es wird dann:

$$1 + \sum_{k=1}^{k=3} \cos 2\pi \left(\frac{\alpha_k}{p^{\nu_k}} + \frac{\beta_k}{r_k}\right) = 0,$$

oder:

$$0 = 2 + \sum_{k=1}^{k=3} \left\{ e^{\frac{2i\beta_k\pi}{r_k}} \cdot e^{\frac{2i\alpha_k\pi}{p^{\nu_k}}} + e^{\frac{-2i\beta_k\pi}{r_k}} \cdot e^{\left(2i\pi - \frac{2i\alpha_k\pi}{p^{\nu_k}}\right)} \right\}.$$

Also ist der Ausdruck:

$$U = 2 + \sum_{k=1}^{k=3} \left\{ e^{\frac{2i\beta_k\pi}{r_k}} \cdot x^{\alpha_k p^{(\nu_1 - \nu_k)}} + e^{\frac{-2i\beta_k\pi}{r_k}} \cdot x^{\left(p^{\nu_1} - \alpha_k p^{(\nu_1 - \nu_k)}\right)} \right\}$$

durch

$$X_{p,\nu_1} = 1 + x^{p^{\nu_1 - 1}} + \cdots\, x^{(p-1)\cdot p^{\nu_1 - 1}}$$

theilbar. Man unterscheide jetzt drei Fälle:

$$\text{a)}\quad \nu_1 > \nu_2,$$
$$\text{b)}\quad \nu_1 = \nu_2 > \nu_3,$$
$$\text{c)}\quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3.$$

a) Im ersten Falle sind die Exponenten α_1 und $p^{\nu_1} - \alpha_1$ den übrigen nach dem Modul p incongruent, da die letzteren den Factor p besitzen. Es muss also schon die Theilsumme

$$e^{\frac{2i\beta_1\pi}{r_1}} \cdot x^{\alpha_1} + e^{\frac{-2i\beta_1\pi}{r_1}} \cdot x^{(p^{\nu_1} - \alpha_1)}$$

durch X_{p,ν_1} theilbar sein, also für $x = e^{\frac{2i\nu_1\pi}{p}}$ verschwinden. Es ist dann:

$$\cos 2\pi\left(\frac{\beta_1}{r_1} + \frac{\alpha_1}{p_1}\nu_1\right) = \cos\varphi_1 = 0,$$

also:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2},\quad p = 2,\quad m_1 = 4,\quad \nu_1 = 2,\quad \nu_2 < 2,\quad \nu_3 < 2,$$

und m_2 und m_3 nicht durch 4 theilbar.

b) Im zweiten Falle $\nu_1 = \nu_2 > \nu_3$ sind die Exponenten

$$\alpha_1 = \alpha_2,\quad p^{\nu_1} - \alpha_1,\quad p^{\nu_1} - \alpha_2$$

den übrigen nach dem Modul p incongruent, da die letzteren durch p theilbar sind. Hieraus folgt, dass die Summe

$$2 + e^{\frac{2i\beta_3\pi}{r_3}} \cdot x^{\alpha_3 p^{(\nu_1 - \nu_3)}} + e^{\frac{-2i\pi\beta_3}{r_3}} \cdot x^{\left(p^{\nu_1} - \alpha_3 p^{(\nu_1 - \nu_3)}\right)}$$

durch X_{p,ν_1} theilbar ist, also für $x = e^{\frac{2i\pi}{p^{\nu_1}}}$ verschwindet. Es ist also

$$0 = 2 + 2\cos\varphi_3,$$

was unserer Voraussetzung $m_3 > 2$ widerstreitet.

c) Im dritten Falle $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$ ist keiner der Exponenten

$$\alpha_i,\quad p^{\nu_1} - \alpha_i$$

durch p theilbar, also der Zahl Null nach p congruent. Es müsste also die Zahl 2 durch X_{p,ν_1} theilbar sein, was unmöglich ist.

Wir haben also den Satz:

Der einzige Fall, dass einer der Nenner m_i durch das Quadrat einer Primzahl p theilbar ist, ist der, wo $p = 2$, eine der $m = 4$ und die beiden anderen nicht durch 4 theilbar sind.

Hieraus folgt, dass für alle Auflösungen unserer Gleichung, von den Systemen (A), (B) abgesehen, mindestens eine der Zahlen m_i durch eine Primzahl $p > 3$ theilbar sein muss und dass keine der m_i durch p^2 theilbar sein darf.

§ 7.

Bestimmung der irrationalen Lösungen.

Ich unterscheide wieder drei Fälle:

1) Alle drei Zahlen m_i sind durch p theilbar.
2) Zwei der Zahlen m_i, etwa m_1 und m_2, sind durch p theilbar, m_3 aber nicht.
3) Eine der Zahlen m_i, etwa m_1, ist durch p theilbar, m_2 und m_3 aber nicht.

1) Im ersten Falle setze ich:

$$m_k = r_k p, \qquad a_k = \alpha_k r_k + \beta_k p.$$

Es wird dann:

$$1 + \sum_{k=1}^{k=3} \cos 2\pi \left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{r_k}\right) = 0,$$

oder:

$$2 + \sum_{k=1}^{k=3} \left(e^{\frac{2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot e^{\frac{2i\pi\alpha_k}{p}} + e^{\frac{-2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot e^{\left(2i\pi - \frac{2i\pi\alpha_k}{p}\right)}\right) = 0;$$

mithin der Ausdruck:

$$U = 2 + \sum_{k=1}^{k=3} \left(e^{\frac{2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot x^{\alpha_k} + e^{\frac{-2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot x^{p-\alpha_k}\right)$$

durch

$$X_p = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$$

theilbar. Der Coefficient von x^0 in U ist 2, mithin ist $U = 2X_p$, und, wenn man $x = 1$ setzt:

$$2 + \sum_{k=1}^{k=3} 2\cos\frac{2\pi\beta_k}{r_k} = 2p.$$

Dies ist aber unmöglich, da $p \geqq 5$.

2) Im zweiten Falle setze ich:

$$m_1 = r_1 p, \quad m_2 = r_2 p, \quad a_1 = \alpha_1 r_1 + \beta_1 p, \quad a_2 = \alpha_2 r_2 + \beta_2 p.$$

Es wird dann:

$$1 + \cos\frac{2a_3\pi}{m_3} + \sum_{k=1}^{k=2} \cos 2\pi \left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{r_k}\right) = 0,$$

oder

$$2 + 2\cos\frac{2a_3\pi}{m_3} + \sum_{k=1}^{k=2} \left(e^{\frac{2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot e^{\frac{2i\pi\alpha_k}{p}} + e^{\frac{-2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot e^{\left(2i\pi - \frac{2i\pi\alpha_k}{p}\right)}\right) = 0,$$

also:

$$U = 2 + 2\cos\frac{2a_3\pi}{m_3} + \sum_{k=1}^{k=2}\left(e^{\frac{2i\pi\beta_k}{r_k}}\cdot x^{\alpha_k} + e^{\frac{-2i\pi\beta_k}{r_k}}\cdot x^{p-\alpha_k}\right)$$

durch X_p theilbar. U enthält fünf verschiedene Potenzen von x, also ist $p = 5$. Setzt man

$$U = \varrho X_p,$$

so wird:

$$\varrho = 2 + 2\cos\frac{2a_3\pi}{r_3} = e^{\frac{2i\pi\beta_1}{r_1}} = e^{\frac{-2i\pi\beta_1}{r_1}} = e^{\frac{2i\pi\beta_2}{r_2}} = e^{\frac{-2i\pi\beta_2}{r_2}}$$

und die vier Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, 5-\alpha_1, 5-\alpha_2$ bilden eine Permutation der Zahlen $1, 2, 3, 4$. — Hieraus folgt $\varrho^2 = 1$, also

$$\varrho = 2 + 2\cos\frac{2a_3\pi}{r_3} = \pm 1, \quad \cos\varphi_3 = \pm\frac{1}{2} - 1,$$

Da die numerischen Werthe der $\cos\cdot < 1$ wird, so muss das obere Vorzeichen gelten, also $\varrho = 1$ sein.

Hieraus folgen die Formeln:

$$\cos\varphi_3 = \cos\frac{2a_3\pi}{m_3} = -\frac{1}{2},$$

$$1 = e^{\frac{2i\pi\beta_1}{r_1}} = e^{\frac{2i\pi\beta_2}{r_2}}, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0;$$

$a_1 = \alpha_1 r_1$, $a_2 = \alpha_2 r_2$ und da a_1 mit m_1, a_2 mit m_2 keinen Factor gemein hat, $r_1 = r_2 = 1$, $m_1 = m_2 = 5$.

Die Formel wird jetzt:

$$1 + \cos\frac{2\alpha_1\pi}{5} + \cos\frac{2\alpha_2\pi}{5} - \frac{1}{2} = 0$$

oder

$$1 + 2\cos\frac{2\alpha_1\pi}{5} + 2\cos\frac{2\alpha_2\pi}{5} = 0,$$

und da $\alpha_1, \alpha_2, 5-\alpha_1, 5-\alpha_2$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, 3, 4$ bilden:

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0.$$

Dieser Formel entsprechen die Werthe:

$$(\Gamma) \qquad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{5}, \quad \frac{4\pi}{5}$$

für die φ.

3) Im dritten Falle setze ich:

$$m_1 = rp, \quad a_1 = \alpha r + \beta p.$$

Es wird dann:

$$1 + \sum_{k=2}^{k=3}\cos\frac{2a_k\pi}{m_k} + \cos\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{r}\right)2\pi = 0$$

oder:

$$2+2\sum_{k=2}^{k=3}\cos\frac{2a_k\pi}{m_k}+e^{\frac{2\beta i\pi}{r}}\cdot e^{\frac{2\alpha i\pi}{p}}+e^{\frac{-2\beta i\pi}{r}}\cdot e^{\left(2i\pi-\frac{2\alpha i\pi}{p}\right)}=0,$$

und der Ausdruck:

$$U=2+2\sum_{k=2}^{k=3}\cos\frac{2a_k\pi}{m_k}+e^{\frac{2\beta i\pi}{r}}\cdot x^\alpha+e^{\frac{-2\beta i\pi}{r}}\cdot x^{p-\alpha}$$

durch X_p theilbar. Da er nur 3 ($< p$) Glieder besitzt, so verschwindet er identisch; es ist

$$e^{\frac{2i\beta\pi}{r}}=0,$$

was unmöglich ist.

§ 8.

Das Resultat.

Die Gleichung:

$$1+\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos\varphi_3=0,$$

kann nach dem Vorangehenden, sobald die φ_i zu π in rationalem Verhältnisse stehen, nur dann Statt haben, wenn sie Glied für Glied mit einer der drei Gleichungen übereinstimmt:

(A) $$1+\cos\pi+\cos\varphi_2+\cos(\pi-\varphi_2)=0,$$

(B) $$1+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=0,$$

(Γ) $$1+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0.$$

Schreiben wir wieder, wie ursprünglich (§ 4.):

$$1+\cos 2\varphi=\cos\Theta+\cos \mathrm{H}$$

und berücksichtigen, dass, zufolge der früheren Betrachtung, $\cos\Theta$ und $\cos \mathrm{H}$ von 1 verschieden sein muss, dass ferner φ nicht grösser als Θ, H angenommen zu werden braucht, so sehen wir, dass neue endliche Gruppen nur entstehen können, wenn:

$$1+\cos 2\varphi=\cos\Theta+\cos \mathrm{H}$$

Glied für Glied übereinstimmt mit einer der folgenden Gleichungen:

$$1+\cos\pi=\cos\Theta+\cos\Theta+\pi,$$

$$1+\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3},$$

$$1+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3},$$

$$1+\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{6}.$$

Mit anderen Worten: *Zu den bereits aufgestellten Gruppen linearer Substitutionen I und II sind nur noch (möglicherweise) solche zuzufügen, welche die Periode* 2, 3, 4 *oder* 5 *besitzen.*

Es wird sich in der That zeigen, dass für jeden dieser Periodenwerthe je eine Gruppe existirt. Ich bestimme zunächst, unter der Voraussetzung, dass solche Gruppen existiren, die Beziehungen, welche zwischen den quadratischen Formen derjenigen Substitutionen Statt finden, welche bez. die grösste Periode aufweisen. Dann erst stelle ich die Gruppen selbst auf. Besonderes Gewicht möchte ich legen auf die *Index-Relationen,* die ich später zur Darstellung der Gruppen verwende.

§ 9.

Bestimmung der quadratischen Formen.

1) Ist 2 die Periode der Gruppe, so hat man die Formel:

$$1 + \cos \pi = \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}.$$

Es haben alle Substitutionen der Gruppe die Periode 2, abgesehen von der einen identischen Substitution. Sind φ, ψ, $\chi \cdots$ die quadratischen Formen der Substitutionen von der Periode 2, so ist, nach Gleichung (4) des § 1.:

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\varphi \psi)^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2},$$

also:

$$(\varphi \psi)^2 = 0, \text{ ebenso } (\varphi, \chi)^2 = 0, \quad (\psi, \chi)^2 = 0.$$

Durch die beiden letzteren Formeln ist χ linear gegeben. *Es treten also nur drei quadratische Formen von der Periode* 2 *auf.*

2) Sei 3 die Periode der Gruppe. Dann hat man die Formel:

$$1 + \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3}.$$

Daher giebt die Gleichung (4) des § 1.:

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} (\varphi, \psi)^2 \sin^2 \frac{\pi}{3}.$$

Hieraus $(\varphi, \psi)^2 = -\frac{2}{3}$. Sind also f, φ, ψ, $\chi \cdots$ quadratische Formen, welche zur Periode 3 gehören, so sind die simultanen Invarianten dieser Formen $= \pm \frac{2}{3}$. Man kann das Vorzeichen von φ, ψ, χ so wählen, dass $(f, \varphi)^2 = (f, \psi)^2 = (f, \chi)^2 = + \frac{2}{3}$ ist; ich behaupte, dass alsdann die 3 Invarianten $(\varphi, \psi)^2$, $(\varphi, \chi)^2$, $(\psi, \chi)^2$ ebenfalls den Werth $+ \frac{2}{3}$ besitzen.

Beweis: Ich setze $(\psi, \chi)^2 = \frac{2}{3}\varrho$, $(\chi, \varphi)^2 = \frac{2}{3}\sigma$, $(\varphi, \psi)^2 = \frac{2}{3}\tau$, so dass $\varrho^2 = \sigma^2 = \tau^2 = 1$ wird und beweise, dass $\varrho = \sigma = \tau = 1$. Zu dem Zwecke bilde ich die Identität:

$$\begin{vmatrix} (ff)^2 & (f\varphi)^2 & (f\psi)^2 & (f\chi)^2 \\ (\varphi f)^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & (\chi\chi)^2 \end{vmatrix} = 0$$

und aus derselben für ϱ, σ, τ die Relation:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & \tau & \sigma \\ 1 & \tau & -3 & \varrho \\ 1 & \sigma & \varrho & -3 \end{vmatrix} = 30 - 6\varrho\sigma\tau - 2(\varrho\sigma + \varrho\tau + \sigma\tau) - 6(\varrho + \sigma + \tau) = 0,$$

aus welcher die Behauptung sich ergiebt.

Es ist also, wenn 3 der Formen $f, \varphi, \psi, \chi \cdots$ gegeben sind, die vierte linear bestimmt; *es giebt also bei Gruppen von der Periode 3 nur vier Formen von der Periode* 3.

3) Sei die Gruppe der Periode $= 4$. Dann haben wir unter den Formeln des § 8. diese anzuwenden:

$$1 + \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3},$$

also, nach Gleichung (4):

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos^2\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\varphi, \psi)^2 \sin^2\frac{\pi}{4},$$

$$(\varphi, \psi)^2 = 0.$$

Sind also $\varphi, \psi, \chi \cdots$ die zur Periode gehörigen quadratischen Formen, so hat man wieder $(\varphi\psi)^2 = 0$, $(\varphi\chi)^2 = 0$, $(\psi, \chi)^2 = 0$, und es ist also wieder die Form χ durch φ und ψ linear bestimmt. Es *giebt also, wie bei den Gruppen von der Periode* 2, *und aus demselben Grunde, auch hier nur drei quadratische Formen vom grössten Periodenwerthe.*

4) Nehmen wir die Periode der Gruppe $= 5$, so hat man die Formel anzuwenden:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{6}.$$

Dann hat man nach Formel (4) des § 1.:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos^2\frac{\pi}{5} + \frac{1}{2}(f, \varphi)^2 \sin^2\frac{\pi}{5},$$

also:

$$(f\varphi)^2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Die simultanen Invarianten der quadratischen Formen $f, \varphi, \psi, \chi \cdots$, welche zur Periode 5 gehören, haben mithin die Werthe $\pm \frac{2}{\sqrt{5}}$. Ich wähle φ, ψ, χ so, dass:

$$(f\varphi)^2 = (f\psi)^2 = (f\chi)^2 = + \frac{2}{\sqrt{5}}$$

und setze:

$$(\psi\chi)^2 = \frac{2\varrho}{\sqrt{5}}, \quad (\chi\varphi)^2 = \frac{2\sigma}{\sqrt{5}}, \quad (\varphi\psi)^2 = \frac{2\tau}{\sqrt{5}},$$

so dass $\varrho^2 = \sigma^2 = \tau^2 = 1$. Die Formel:

$$\Sigma \pm (ff)^2 (\varphi\varphi)^2 (\psi\psi)^2 (\chi\chi)^2 = 0$$

liefert dann zwischen ϱ, σ, τ die Relationen:

$$\begin{vmatrix} -\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{5} & \tau & \sigma \\ 1 & \tau & -\sqrt{5} & \varrho \\ 1 & \sigma & \varrho & -\sqrt{5} \end{vmatrix} = 0 = -2 - 2\varrho\sigma\tau\sqrt{5} - 2(\varrho+\sigma+\tau)\sqrt{5} \\ - 2(\sigma\tau + \tau\varrho + \varrho\sigma) = 0.$$

Mithin ist:

$$1 + \varrho + \sigma + \tau = 0, \quad \varrho\sigma\tau + \sigma\tau + \tau\varrho + \varrho\sigma = 0.$$

Zwei der Grössen ϱ, σ, τ haben also den Werth -1, die dritte den Werth $+1$. Hieraus folgt, dass es nur drei Formen χ geben kann, deren simultane Invarianten mit f, φ, ψ die nothwendigen Bedingungen befriedigen, *dass es also in unserer Gruppe höchstens* 6 *Formen giebt, welche zu der Periode* 5 *gehören.* — Die so bestimmten Anzahlen quadratischer Formen erscheinen zunächst als Maximalzahlen; sie werden aber auch wirklich erreicht. Im Falle die Periode 3 oder 5 ist, erkennt man es sofort durch folgende Ueberlegung. Die 2, resp. 4 Substitutionen von der Periode 3 resp 5, welche eine der quadratischen Formen fest lassen, machen aus einer der übrigen nothwendig 2 bez. 4 neue, gleichberechtigte, so dass 4 und 6 als *Minimal*werth für die Anzahl der betr. quadratischen Formen erscheint. — Ist der Periodenwerth 2 oder 4, so ergiebt sich die Richtigkeit der Behauptung ohne Weiteres aus den sogleich mitzutheilenden Formeln.

§ 10.

Gruppen von der Periode 2.

Setzt man, um die Bedingungen des vorangehenden Paragraphen zu befriedigen:

$$\varphi = 2x_1x_2,$$
$$\psi = x_1^2 - x_2^2,$$
$$\chi = i(x_1^2 + x_2^2),$$

schreibt sodann:

$$\frac{x_1}{x_2} = \eta,$$

so erhält man folgendes Schema für Gruppen von der Periode 2:

$$(\mathrm{II_a}) \qquad \pm \eta, \quad \mp \frac{1}{\eta};$$

dasselbe entspricht dem schon oben hervorgehobenen Falle, dass in dem Schema (II) $n = 2$ gesetzt wird.

§ 11.

Gruppen von der Periode 3. (Tetraedergruppe.)

Bei den nun noch aufzustellenden Gruppen werde ich die Untersuchung in der Weise führen, dass ich die quadratischen Formen der bei ihnen vorkommenden linearen Substitutionen durch Indices unterscheide und die Beziehungen der Substitutionen zu einander und die Vollständigkeit der Gruppe den Index-Relationen entnehme. Bei Gruppen von der Periode 3, die hier zunächst betrachtet werden sollen, treten vier quadratische Formen von der Periode 3 auf; sie mögen:

$$\varphi_\infty, \; \varphi_0, \; \varphi_1, \; \varphi_2$$

genannt sein, wo die Indices nach dem Modul 3 zu nehmen sind. Ihnen entsprechen vier Substitutionen mit dem Argumente $\frac{\pi}{3}$:

$$S_\infty, \; S_0, \; S_1, \; S_2.$$

Wir wählen die φ so, dass $(\varphi_i, \varphi_k)^2 = +\frac{2}{3}$ ist und durch S_∞ die Formen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ cyclisch in einander übergehen.

Nach den Formeln für die Transformation einer quadratischen Form, welche in § 3. gelegentlich entwickelt wurden, erhält man, indem man die Substitutionen S_∞ und S_∞^2 auf die Form φ_ϱ anwendet:

$$\varphi_{\varrho+1} = \cos\frac{2\pi}{3}\cdot\varphi_\varrho - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}\cdot\varphi_\infty + i\sin\frac{2\pi}{3}(\varphi_\infty\cdot\varphi_\varrho),$$

$$\varphi_{\varrho+2} = \cos\frac{4\pi}{3}\cdot\varphi_\varrho - \frac{2}{3}\sin^2\frac{2\pi}{3}\cdot\varphi_\infty - i\sin\frac{2\pi}{3}(\varphi_\infty\cdot\varphi_\varrho),$$

und andererseits, indem man S_ϱ und S_ϱ^2 auf φ_∞ anwendet:

$$\psi_1 = \cos\frac{2\pi}{3}\cdot\varphi_\infty - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}\cdot\varphi_\infty - i\sin\frac{2\pi}{3}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho).$$

$$\psi_2 = \cos\frac{4\pi}{3}\cdot\varphi_\infty - \frac{2}{3}\sin^2\frac{2\pi}{3}\cdot\varphi_\infty + i\sin\frac{2\pi}{3}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho).$$

Hieraus folgt:

$$\varphi_\infty + \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = 0, \quad \psi_1 = \varphi_{\varrho+2}, \quad \psi_2 = \varphi_{\varrho+1}.$$

Es führt also S_ϱ die Formen φ_∞, $\varphi_{\varrho+2}$, $\varphi_{\varrho+1}$ cyclisch in einander über.

Geht vermöge S_∞^μ φ_x in φ_y über, so hat man die Relation:

$$U_\infty^\mu = x - y - \mu \equiv 0, \text{ (mod 3)}.$$

Für S_ϱ^λ finden wir analog:

$$\frac{1}{x-\varrho} - \frac{1}{y-\varrho} \equiv \lambda \text{ (mod 3)}$$

oder:

$$U_\varrho^\lambda = \lambda xy + x(1-\lambda\varrho) - y(1+\lambda\varrho) + \lambda\varrho^2 \equiv 0, \text{ (mod 3)}.$$

Beides sind lineare Substitutionen, deren Determinante $\equiv 1$ (mod 3). Dasselbe gilt daher für alle Indexrelationen, die den Combinationen der S_∞, S_ϱ entsprechen. Sie haben die Form:

$$U = axy + bx + cy + d \equiv 0, \quad (ad-bc) \equiv 1, \quad \text{(mod 3)}.$$

Aber man hat:

$$U_\varrho^\lambda U_\infty^\mu = \lambda xy + x(1+\lambda\mu - \lambda\varrho) - y(1+\lambda\varrho) + \lambda\varrho^2 - \mu - \lambda\mu\varrho \equiv 0 \text{ (mod 3)}.$$

Man kann hier λ, μ, ϱ so bestimmen, dass ein beliebiges U resultirt. *Mithin entspricht jedem U eine Substitution der Gruppe, die durch Combination der S_∞, S_ϱ entsteht, und jede Substitution derselben ist in der Gestalt darstellbar $S_\varrho^\lambda S_\infty^\mu$.*

Diejenigen U, bei denen $a=0$ ist, lassen sich in die Form setzen:

$$x - y - \mu \equiv 0, \text{ (mod 3)};$$

sie entsprechen also den Substitutionen S_∞^μ.

Die übrigen U kann man schreiben:

$$(x-\alpha)(y-\beta) + 1 \equiv 0 \text{ (mod 3)}.$$

Ihre Anzahl ist 9, so dass unsere Gruppe aus 12 Substitutionen besteht. Ist $\alpha = \beta$, so entspricht U eine Substitution T mit der Periode 2; dieselbe lässt $\varphi_\alpha + \varphi_\infty$ ungeändert; mithin ist die quadratische Form f_α von T diesem Ausdrucke proportional. Wir gelangen so zu den Formeln:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} f_\alpha = \varphi_\alpha + \varphi_\infty; \quad (f_\alpha, f_\beta)^2 = 0; \quad \sqrt{3}\cdot\varphi_\infty = f_0 + f_1 + f_2.$$

Ist $\alpha \gtrless \beta$, so entspricht U eine Substitution mit der Periode 3, d. h. eine der Substitutionen S_ϱ^λ. — *Da sich alle U aus den beiden*

$$x - y - \mu \equiv 0, \quad (x-\alpha)(y-\alpha) + 1 \equiv 0 \text{ (mod 3)}$$

zusammensetzen lassen, so sind alle Substitutionen der Gruppe in der Form S_∞^μ und $S_\infty^\mu T_\alpha$ enthalten.

Um die Gruppe in kanonischer Form zu erhalten, setze man:

$$f_0 = 2x_1x_2, \quad f_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad f_2 = ix_1^2 + ix_2^2;$$

es wird dann:

$$\sqrt{3}\cdot\varphi_\infty = x_1^2(1+i) + 2x_1x_2 + x_2^2(i-1),$$

$$T_0 = x_1y_2 + x_2y_1; \qquad T_1 = x_1y_1 - x_2y_2; \qquad T_2 = ix_1y_1 + ix_2y_2;$$

$$S_\infty = x_1y_1\left(\frac{i-1}{2}\right) + \frac{i}{2}(x_1y_2+x_2y_1) - x_2y_2\left(\frac{i+1}{2}\right) + \frac{1}{2}(y_1x_2-y_2x_1)$$
$$= \frac{-1}{1+i}(x_1y_1 - ix_1y_2 + x_2y_1 + ix_2y_2).$$

Durch diese Substitutionen geht $\frac{x_1}{x_2} = \eta$ in folgende Werthe über:

$$\pm\eta, \quad \pm\frac{1}{\eta}, \quad i\frac{1+\eta}{1-\eta},$$

und also durch ihre Combinationen in:

$$\text{(III)}\quad \pm\eta, \quad \pm\frac{1}{\eta}, \quad \pm i\frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad \pm i\frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad \pm\frac{i+\eta}{i-\eta}, \quad \pm\frac{i-\eta}{i+\eta}.$$

Dies sind die 12 *Substitutionen unserer Gruppe.*

Es ist leicht zu sehen, dass sie nicht noch in einer umfassenderen Gruppe enthalten sein kann, welche ebenfalls die Periode 3 besitzt. Denn durch die Substitutionen einer solchen Gruppe müssen die vier Formen φ_∞, φ_0, φ_1, φ_2 unter einander vertauscht werden, da es, von der identischen Substitution abgesehen, keine Substitution giebt, welche jedes der φ ungeändert lässt. Aber es giebt nur 24 Vertauschungen von vier Dingen und unter ihnen nur 12, deren Periode $\leqq 3$ ist, d. h. die, wiederholt angewandt, nach höchstens dreimaliger Anwendung die Identität ergeben. Eben diese sind es, die in unserer Gruppe vorkommen.

§ 12.

Gruppen von der Periode 4. (Oktaedergruppe.)

Zur Periode 4 gehören 3 quadratische Formen:

$$f_\infty, \; f_0, \; f_1;$$

ihnen entsprechen 3 Substitutionen mit dem Argumente $\frac{\pi}{4}$:

$$S_\infty, \; S_0, \; S_1,$$

und zwischen ihnen bestehen die Relationen $(f_i, f_k)^2 = 0$. Jedes S_ϱ lässt das zugehörige f_ϱ unverändert und vertauscht die beiden anderen f cyclisch bis auf das Vorzeichen. — Die Substitution S_ϱ^2 also lässt f_ϱ unverändert und ändert an den beiden anderen f nur das Vorzeichen. *Ueberhaupt also lassen die* 4 *Substitutionen*

$$(yx), \; S_\infty^2, \; S_0^2, \; S_1^2$$

die f bis aufs Vorzeichen ungeändert)*, und man zeigt leicht, dass sie die einzigen Substitutionen sind, welche diese Eigenschaft besitzen.

---

*) Sie bilden für sich eine Gruppe von der Periode 2 (§ 10.).

Combinirt man sie mit irgend einer Substitution der Gruppe, so erhält man 4 Substitutionen, welche die Formen f in derselben Weise permutiren; andere, als diese 4 Substitutionen, müssen eine andere Permutation der f bewirken. *Da es 6 Vertauschungen von drei Dingen giebt, so umfasst unsere Gruppe (höchstens) 24 Substitutionen und ihnen entsprechen 6 Relationen zwischen den Indices der f.* Die letzteren gewinnen wir so. Geht durch S_ϱ f_x in $\pm f_y$ über, so hat man:

$$\frac{1}{x-\varrho} - \frac{1}{y-\varrho} \equiv 1 \pmod 2,$$

oder:

$$U_\varrho = xy - x(\varrho+1) + y(1-\varrho) + \varrho^2 \equiv 0 \pmod 2$$

und, wenn $\varrho = \infty$ ist:

$$U_\infty = x - y - 1 \equiv 0 \pmod 2.$$

Den Substitutionen S_ϱ und S_∞ und ihren Combinationen entsprechen die U_ϱ, U_∞ und ihre Combinationen. Jede Substitution:

$$U = axy + bx + cy + d \equiv 0, \quad ad - bc \equiv 1 \pmod 2$$

lässt sich in eine der Formen:

$$x - y, \quad U_\infty, \; U_\varrho,$$
$$U_\varrho U_\infty = xy - \varrho x + y(1-\varrho) + 1 \equiv 0 \pmod 2$$

bringen. *Man hat also in der That 6 Relationen zwischen den Indices und 24 Substitutionen der Gruppe.*

Den $U_\varrho U_\infty$ entsprechen 8 Substitutionen mit der Periode 3, welche f_∞, f_0, f_1 cyclisch in einander permutiren; dieselben bilden mit den vier obengenannten Substitutionen (yx), S^2_∞, S^2_0, S^2_1 zusammen die im vorigen Paragraphen betrachtete Tetraedergruppe. Die Oktaedergruppe entsteht, indem man sie mit U_∞ combinirt.

Setzt man wieder, wie oben:

$$f_\infty = 2x_1x_2; \quad f_0 = x_1^2 - x_2^2; \quad f_2 = ix_1^2 + ix_2^2,$$

so geht durch die Substitution der Tetraedergruppe $\eta = \frac{x_1}{x_2}$ über in:

$$\pm\eta, \quad \pm\frac{1}{\eta}, \quad \pm i\frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad \pm i\frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad \pm\frac{i+\eta}{i-\eta}, \quad \pm\frac{i-\eta}{i+\eta},$$

durch U_∞ einfach in $i\eta$, *mithin durch die Oktaedergruppe in:*

$$\text{(IV)} \quad i^\varrho\eta, \quad \frac{i^\varrho}{\eta}, \quad i^\varrho\cdot\frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad i^\varrho\cdot\frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad i^\varrho\cdot\frac{i+\eta}{i-\eta}, \quad i^\varrho\cdot\frac{i-\eta}{i+\eta}.$$

§ 13.

Gruppen von der Periode 5. (Ikosaedergruppe.)

Zur Periode 5 gehören 6 quadratische Formen:

$$\varphi_\infty, \; \varphi_0, \; \varphi_1, \; \varphi_2, \; \varphi_3, \; \varphi_4;$$

ihnen entsprechen 6 Substitutionen mit dem Argument $\frac{\pi}{5}$:

$$S_\infty,\ S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4.$$

Wir wählen die φ so, dass $(\varphi_\infty, \varphi_i)^2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ und dass S_∞

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4$$

cyclisch in einander überführt. Wendet man S_∞, S_∞^2, S_∞^3, S_∞^4 auf φ_ϱ an, so entsteht also:

$$\varphi_{\varrho+1} = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\varphi_{\varrho+2} = \cos\frac{4\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\varphi_{\varrho+3} = \cos\frac{4\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\infty - i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\varphi_{\varrho+4} = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\varphi_\infty - i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho).$$

Umgekehrt geht durch S_ϱ, S_ϱ^2, S_ϱ^3, S_ϱ^4 aus φ_∞ hervor:

$$\psi_1 = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho - i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\psi_2 = \cos\frac{4\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho - i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\psi_3 = \cos\frac{4\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\psi_4 = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho).$$

Nun ist:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin^2\frac{\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5},\quad \frac{2}{\sqrt{5}}\sin^2\frac{2\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5},$$

also:

$$\varphi_{\varrho+1} = \cos\frac{2\pi}{5}(\varphi_\varrho + \varphi_\infty) + i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\varphi_{\varrho+2} = \cos\frac{4\pi}{5}(\varphi_\varrho - \varphi_\infty) + i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\varphi_{\varrho+3} = \cos\frac{4\pi}{5}(\varphi_\varrho - \varphi_\infty) - i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\varphi_{\varrho+4} = \cos\frac{2\pi}{5}(\varphi_\varrho + \varphi_\infty) - i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\psi_1 = \cos\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty + \varphi_\varrho) - i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\psi_2 = \cos\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty - \varphi_\varrho) - i\sin\frac{4\pi}{4}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\psi_3 = \cos\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty - \varphi_\varrho) + i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\psi_4 = \cos\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty + \varphi_\varrho) + i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

oder:

$$\psi_1 = \varphi_{\varrho+4}, \quad \psi_2 = -\varphi_{\varrho+2}, \quad \psi_3 = -\varphi_{\varrho+3}, \quad \psi_4 = \varphi_{\varrho+1}.$$

Es führt also S_ϱ cyclisch in einander über:

$$\varphi_\infty, \varphi_{\varrho+4}, -\varphi_{\varrho+2}, -\varphi_{\varrho+3}, \varphi_{\varrho+1}.$$

Den Substitutionen S_∞^μ entsprechen die Indexrelationen:

$$U_\infty^\mu = x - y - \mu \equiv 0 \pmod 5;$$

den S_ϱ^λ diese:

$$\frac{1}{x-\varrho} - \frac{1}{y-\varrho} \equiv \lambda \pmod 5$$

oder:

$$U_\varrho^\lambda = \lambda xy + x(1-\varrho\lambda) - y(1+\varrho\lambda) + \varrho^2\lambda \equiv 0 \pmod 5.$$

Bei allen diesen ist die Determinante $\equiv \pm 1$ (mod. 5); dasselbe gilt also auch für ihre Combinationen.

Umgekehrt kann man jede Substitution:

$$U = axy + bx + cy + d \equiv 0, \quad ad - bc \equiv \pm 1 \pmod 5$$

in eine der vier Formen bringen:

(1) $$U_\infty^\mu = x - y - \mu \equiv 0 \pmod 5,$$

(2) $$U_\infty^\mu U_2 U_4^3 = x + y + \mu \equiv 0 \pmod 5,$$

(3) $$U_\varrho U_\infty^\mu = xy + x(1+\mu-\varrho) - y(1+\varrho) + \varrho^2 - \mu - \mu\varrho \equiv 0 \pmod 5,$$

(4) $$U_\varrho U_\infty^\mu U_2 U_4^3 = xy - x(1+\mu-\varrho) - y(1+\varrho) - \varrho^2 + \mu + \mu\varrho \equiv 0 \pmod 5;$$

ihre Anzahl ist 60; *jeder entspricht eine und nur eine Substitution unserer Gruppe.* Denn es giebt, abgesehen von der identischen Substitution, keine andere, welche die 6 Formen $\varphi_\infty, \varphi_0, \cdots \varphi_4$ ungeändert lässt. Jeder Vertauschung der Indices entspricht also nur eine Substitution.

Um die Gruppe in kanonischer Form aufzustellen, bemerke man vorab dieses. S_2 entspricht $U_2 = xy - x + 2y - 1$, es führt $\left(\frac{x-2}{5}\right)\varphi_x$ in $\left(\frac{y-2}{5}\right)\varphi_y$ über; S_4^3 entspricht $U_4^3 = yz - z - 2y + 1$, es führt $\left(\frac{y-4}{5}\right)\varphi_y$ in $\left(\frac{z-4}{5}\right)\varphi_z$ über. Also entspricht $S_2 S_4^3$ $U_2 U_4^3 = x + z$; es führt φ_x in $\left(\frac{x-2}{5}\right)\left(\frac{y-2}{5}\right)\left(\frac{y-4}{5}\right)\left(\frac{z-4}{5}\right)\varphi_z = -\varphi_{-x}$ über. Hierbei ändern sich die Formen $(\varphi_\infty, \varphi_0)$, $\varphi_1 - \varphi_4$, $\varphi_2 - \varphi_3$ nicht; sie sind also der quadratischen Form von $S_2 S_4^3$ proportional.

Jetzt nehme man für φ_∞ und φ_0 irgend zwei quadratische Formen, bei denen:

$$(\varphi_\infty, \varphi_\infty)^2 = -2, \quad (\varphi_0, \varphi_0)^2 = -2, \quad (\varphi_0, \varphi_\infty)^2 = \frac{-2}{\sqrt{5}};$$

also etwa:

$$\varphi_\infty = 2x_1x_2, \quad \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}\,(x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2).$$

Es wird dann:

$$(\varphi_\infty, \varphi_0) = \frac{-2}{\sqrt{5}}\,(x_1^2 + x_2^2); \quad \varphi_\varrho = \frac{2}{\sqrt{5}}\,(\varepsilon^{-\varrho} x_1^2 + x_1x_2 - \varepsilon^\varrho x_2^2),$$

wo $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Für S_∞, $S_2S_4^3$, S_ϱ erhalten wir daher die Substitutionen:

$$x_1y_2 - \varepsilon x_2y_1 = 0; \quad x_1y_1 + x_2y_2 = 0,$$

$$\frac{2i}{\sqrt{5}}\sin\frac{2\pi}{5}\left(\varepsilon^{-\varrho}x_1y_1 + \frac{x_1y_2+x_2y_1}{2} - \varepsilon^\varrho x_2y_2\right) + (y_1x_2 - y_2x_1)\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = 0.$$

Da $\sqrt{5} = 4\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{2\pi}{5}$, also $\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}$ $= -\left(\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5}\right)$, sowie $\frac{1}{2} = -\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{4\pi}{5}$, so lässt sich die letzte Formel (für S_ϱ) folgendermassen zusammenziehen:

$$\begin{aligned}0 &= \left(\varepsilon^{-\varrho}x_1y_1 - \left(x_1y_2 + x_2y_1\right)\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right) - \varepsilon^\varrho x_2y_2\right.\\ &\qquad \left. + \left(x_1y_2 - y_1x_2\right) i\left(\sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5}\right)\right)\\ &= \varepsilon^{-\varrho}x_1y_1 - (\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,x_1y_2 - (\varepsilon+\varepsilon^3)\,x_2y_1 - \varepsilon^\varrho x_2y_2.\end{aligned}$$

Durch S_∞, $S_2S_4^3$, S_ϱ geht also nunmehr $\frac{x_1}{x_2} = \eta$ in folgende Werthe über:

$$\varepsilon\eta, \quad -\frac{1}{\eta}, \quad \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon+\varepsilon^3)}$$

und also überhaupt durch die Combinationen S_∞^μ, $S_2S_4^3S_\infty^\mu$, $S_\varrho S_\infty^\mu$, $S_\varrho S_\infty^\mu S_2S_4^3$ in diese:

$$\text{(V)} \qquad \varepsilon^\mu\eta, \quad -\frac{\varepsilon^\mu}{\eta}, \quad \varepsilon^\mu\,\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon+\varepsilon^3)}, \quad \varepsilon^\mu\,\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta + (\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\varrho}.$$

Dies ist die kanonische Darstellung der Ikosaedergruppe.

Von ihren 60 Substitutionen hat die Identität die Periode 1; die 15 Substitutionen, welche η in

$$-\frac{\varepsilon^\mu}{\eta}, \quad \varepsilon^4\,\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon+\varepsilon^3)}, \quad \varepsilon^{2\varrho}\,\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta + (\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta + \varepsilon^\varrho}$$

verwandeln, haben die Periode 2; die 20 Substitutionen, die dem η entsprechen lassen:

$$\varepsilon\,\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon+\varepsilon^3)}, \quad \varepsilon^2\,\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon+\varepsilon^3)},$$

$$\varepsilon^{2\varrho+1}\,\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta+(\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta+\varepsilon^\varrho},\quad \varepsilon^{2\varrho+4}\,\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta+(\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta+\varepsilon^\varrho},$$

haben die Periode 3; die 24 Substitutionen endlich, vermöge deren η übergeht in:

$$\varepsilon^\mu\eta,\quad \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta+\varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta-(\varepsilon+\varepsilon^3)},\quad \varepsilon^3\,\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta+\varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta-(\varepsilon+\varepsilon^3)},$$

$$\varepsilon^{2\varrho+2}\,.\,\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta+(\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta+\varepsilon^\varrho},\quad \varepsilon^{2\varrho+3}\,.\,\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta+(\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\,\eta+\varepsilon^\varrho},$$

haben die Periode 5.

Endlich beweist man noch, dass diese Gruppe von 60 Substitutionen nicht noch in einer umfassenderen Gruppe von der Periode 5 (und also überhaupt in keiner umfassenden Gruppe) enthalten ist. Denn es giebt keine anderen Vertauschungen der φ_∞, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, als die vorangeführten 60, bei denen die zwischen den φ bestehenden Invariantenrelationen ungeändert bleiben.

Erlangen, im Februar 1877.

Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystemes durch doppelt periodische Functionen.

Von Axel Harnack in Darmstadt.

Die bekannte Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung, welche den Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung bildet, durch doppelt periodische Functionen ist für die nähere Untersuchung geometrischer Eigenschaften derselben wenig oder doch nur in einer Form benutzt worden, in welcher die Einfachheit dieser Darstellung nicht genügend hervortritt. Zu einer fruchtbaren Anwendbarkeit solch eines Hilfsmittels gelangt man, wie mir scheint, immer nur auf die Weise, dass man sich ein deutliches Bild der Parametervertheilung in allen Punkten der Curve entwirft. Damit hat man die Möglichkeit gewonnen, auch das Reelle und Imaginäre zu unterscheiden, weit leichter als es bei einer synthetisch geometrischen Untersuchung oder auf Grund eines Coordinatensystemes der Fall ist. Durch eine Zuordnung je zweier Parameterwerthe nach irgend welchem stetigen Gesetze und nach Verbindung der zugeordneten Punkte erhält man bei den Curven in der Ebene Classencurven, die in einer durch die Zuordnung bedingten Beziehung zu der Fundamentalcurve stehen. Bei den Raumcurven gewinnt dieses Verfahren ein weiteres Interesse, weil sich auf diese Weise Linienflächen darstellen, die dem Secantensysteme der Curve angehören.

Für die hier behandelten Curven entsteht also zunächst die Frage, durch welche Relation sich die Erzeugenden jeder die Raumcurve enthaltenden *Fläche zweiter Ordnung* ergeben. Es führt die Beantwortung dieser Frage auf eine so einfache Beziehung, dass sich vermöge derselben alle projectiven Eigenschaften des Flächenbüschels bis ins einzelnste hinein verfolgen lassen. Insbesondere können in jeder Schaar von Erzeugenden diejenigen vier ohne weiteres bestimmt werden, welche das Polartetraeder nach gleichem Doppelverhältniss schneiden. Die Gesammtheit solcher zusammengehöriger Linien gruppirt sich für jeden Werth des Doppelverhältnisses zu einer Linienfläche und das System dieser *Flächen achter Ordnung* (Quadricuspidalen), als nächst einfaches nach dem Büschel zweiter Ordnung den Secanten der Curve zugehörig, besitzt auch in der Parameterdarstellung eine leicht discutirbare Form.

Die Darstellung dieser beiden Flächensysteme nebst ihren wesentlichsten Eigenschaften bildet den Hauptgegenstand der folgenden Untersuchungen, die freilich keinen Anspruch darauf machen können, irgend welche neue Methoden zu enthalten. In den Paragraphen 1.—4. habe ich algebraische Entwickelungen der Werthe des elliptischen Differentiales vorangestellt, welche zugleich den Beweis des Abel'schen Theoremes, wie ich denselben in einer früheren Arbeit allgemein gegeben habe, umfassen und ausserdem auf diejenigen mit dem Formensysteme der Curve verbundenen Differentialgleichungen aufmerksam machen, deren Integrationen durch Einführung des Parameters auf Quadraturen gebracht sind*).

Bei dem Bestreben, die Einfachheit und weitgehende Anwendbarkeit dieser Darstellungsweise auch in der Ableitung einzelner geometrischer Eigenschaften übersichtlich hervorzuheben, musste ich mich entschliessen, diesen Aufsatz ausführlicher zu gestalten, als es sonst mein Wunsch gewesen wäre.

§ 1.

Das elliptische Differential.

Sind $a_x^2 = 0$ und $\alpha_x^2 = 0$ die Gleichungen der beiden Flächen zweiten Grades, durch deren Schnitt die Raumcurve erzeugt wird, so lässt sich dem einen überall endlichen Differentiale, welches sich auf die Raumcurve bezieht, die Form geben:

$$(1)\quad D = \frac{u_x v_{dx} - v_x u_{dx}}{a_x \alpha_x (a \alpha u v)}, \quad (a_x^2 = 0,\ \alpha_x^2 = 0,\ a_x a_{dx} = 0,\ \alpha_x \alpha_{dx} = 0).$$

Dabei bedeuten $u_x = 0$ und $v_x = 0$ die Gleichungen zweier beliebigen Ebenen und der Nenner von D ist die Functionaldeterminante zwischen diesen und den beiden Flächen. Diese Functionaldeterminante, selbst eine Fläche zweiter Ordnung darstellend, verschwindet für diejenigen 8 Punkte der Curve, deren Tangenten die Schnittlinie $\widehat{uv}$ treffen; für eben dieselben Punkte verschwindet auch der Zähler und das Dif-

*) Die bezüglichen Aufsätze, welche die Veranlassung und die Grundlage dieser Arbeit bilden, finden sich in den Mathem. Annalen Bd. IX. Betreff der Litteratur über Raumcurven vierter Ordnung verweise ich auf Fiedler's Bearbeitung der „Analytischen Geometrie des Raumes" von Salmon, 2. Auflage, p. 627, 653, 671. Die von mir benutzten Arbeiten sind im Folgenden an den zugehörigen Stellen genannt.

ferential behält seinen endlichen Werth. (Der Ausdruck „endlicher Werth" ist der Kürze halber gebraucht; er soll ausdrücken, dass der Werth von D von derselben Ordnung unendlich klein ist wie die Differentiale dx_i.) Aus dieser Betrachtung folgt, dass D überhaupt nur scheinbar von den Grössen u_i und v_i abhängt, so dass man, um den Werth von D in den Punkten zu erhalten, für welche Zähler und Nenner verschwinden, statt u und v nur andere willkührliche Constanten einzuführen braucht. In der That ist unter den vorausgesetzten Bedingungen, wie auch eine directe Multiplication lehrt:

$$\frac{u_x v_{dx} - v_x u_{dx}}{a_x \alpha_x (a \alpha u v)} = \frac{u'_x v'_{dx} - v'_x u'_{dx}}{a_x \alpha_x (a \alpha u' v')},$$

wobei u_i' und v_i' neue willkührliche Ebenencoordinaten bezeichnen.

Um dieses Differential auf seine Normalform zu transformiren, d. h. auf eine Form, in welcher es unmittelbar als Function einer einzigen unabhängigen Variabelen erscheint, ist es zweckmässig, sich als Linie $\widehat{uv}$ die Tangente der Raumcurve in einem beliebigen Curvenpunkte: c_i zu denken, demnach:

$$a_c^2 = 0, \quad \alpha_c^2 = 0, \quad u_x = \varrho \cdot a_x a_c, \quad v_x = \varrho \cdot \alpha_x \alpha_c$$

zu setzen. Ausser dem vierfach zählenden Punkte c sind alsdann noch *vier* weitere Punkte auf der Curve vorhanden, deren Tangenten die Tangente des Punktes c schneiden. Diese vier Punkte lassen sich auf eine andere Weise darstellen. Schneiden sich nämlich zwei Tangenten der Raumcurve, so ist die von ihnen gebildete Ebene eine Berührungsebene an einen der vier Kegel, welche sich durch die Curve legen lassen. Jede dieser durch c_i gehenden Berührungsebenen hat also die Form:

$$\varkappa a_x a_c + \lambda \alpha_x \alpha_c = 0$$

wenn $\varkappa$, λ der biquadratischen Gleichung:

$$\varkappa^4 \Delta + 4 \varkappa^3 \lambda \Theta + 6 \varkappa^2 \lambda^2 \Phi + 4 \varkappa \lambda^3 \Theta' + \lambda^4 \Delta' = 0$$

Genüge leisten. Die Coefficienten dieser Gleichung sind die fünf Invarianten des Flächenbüschels, und zwar sind die Zahlencoefficienten so bestimmt, dass in der symbolischen Bezeichnung:

$$\Delta = (abcd)^2, \quad \Theta = (abc\alpha)^2, \quad \Phi = (ab\alpha\beta)^2, \quad \Theta' = (a\alpha\beta\gamma)^2, \quad \Delta' = (\alpha\beta\gamma\delta)^2.$$

Das Product der vier Ebenen ist also, wenn:

$$\frac{\varkappa}{\lambda} = -\frac{\alpha_x \alpha_c}{a_x a_c} = -\frac{v_x}{u_x}$$

gesetzt wird:

$$v_x^4 \Delta - 4 v_x^3 u_x \Theta + 6 v_x^2 u_x^2 \Phi - 4 v_x u_x^3 \Theta' + u_x^4 \Delta' = 0.$$

Demnach folgt: *Unter den Bedingungen:*

$$a_x^2 = 0, \quad \alpha_x^2 = 0, \quad u_x = \varrho \cdot a_x a_c, \quad v_x = \varrho \cdot \alpha_x \alpha_c$$

besteht die Gleichung:

$$(2) \quad [a_x \alpha_x (a \alpha u v)]^2 = C(v_x^4 \Delta - 4 v_x^3 u_x \Theta + 6 v_x^2 u_x^2 \Phi - 4 v_x u_x^3 \Theta' + u_x^4 \Delta').$$

Denn die linke sowohl wie die rechte Seite stellt durch ihr Verschwinden die nämlichen 16 Punkte auf der Raumcurve dar, von denen 8 mit dem Punkte c zusammenfallen, die übrigen 8 durch 4 je zweifach zählende Punkte repräsentirt sind. Beide Seiten sind in den Coefficienten der gegebenen Formen von gleicher Dimension, und mithin ist die Constante C, weil sie auch eine absolute Invariante nicht sein kann, ein blosser Zahlenfactor.

Diesen Zahlenfactor entnehmen wir aus einem speciellen Beispiele, welches wir beliebig wählen können, mit der einzigen Einschränkung, dass nicht die Seiten unserer Gleichung identisch verschwinden. Es sei:

$$a_x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad \alpha_x^2 = 2 x_1 x_2.$$

Der Punkt c, von dem wir ausgingen, genüge den beiden Gleichungen:

$$c_1 = 0, \quad c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 0,$$

so ist:

$$\alpha_x \alpha_c = x_1 c_2, \quad a_x a_c = x_2 c_2 + x_3 c_3 + x_4 c_4.$$

Ferner ist

$$\Delta = 1, \quad 6\Phi = -1, \quad \Theta = \Theta' = \Delta' = 0.$$

Die rechte Seite der Gleichung (2) wird durch den Factor $x_1^2 c_2^2$ theilbar und bekommt nach Absonderung desselben die Form:

$$C\,(x_1^2 c_2^2 - (x_2 c_2 + x_3 c_3 + x_4 c_4)^2).$$

Für die linke Seite findet man nach Absonderung des nämlichen Factors:

$$(c_4 x_3 - c_3 x_4)^2.$$

Setzt man nun in dem ersten Ausdruck $x_2 = 0$, $x_1^2 = -x_3^2 - x_4^2$, so müssen beide Ausdrücke in x_3 und x_4 identisch werden. Hieraus ergiebt sich, wenn noch $c_2^2 = -c_3^2 - c_4^2$ eingeführt wird, die Relation:

$$C = 1.$$

Folglich ist unter den vorausgesetzten Bedingungen:

$$\frac{u_x v_{dx} - v_x u_{dx}}{a_x \alpha_x (a \alpha u v)} = \frac{u_x v_{dx} - v_x u_{dx}}{\sqrt{v_x^4 \Delta - 4 v_x^3 u_x \Theta + 6 v_x^2 u_x^2 \Phi - 4 v_x u_x^3 \Theta' + u_x^4 \Delta'}},$$

oder, wenn wieder:

$$\frac{v_x}{u_x} = -\frac{\varkappa}{\lambda},$$

ferner, da der benachbarte Curvenpunkt durch die benachbarte Ebene des Büschels ausgeschnitten werden soll,

$$\frac{u_x v_{dx} - v_x u_{dx}}{u_x^2} = \frac{\varkappa d\lambda - \lambda d\varkappa}{\lambda^2}$$

gesetzt wird:

(3) $$D = \frac{\varkappa d\lambda - \lambda d\varkappa}{\sqrt{\varkappa^4\Delta + 4\varkappa^3\lambda\Theta + 6\varkappa^2\lambda^2\Phi + 4\varkappa\lambda^3\Theta' + \lambda^4\Delta'}} = \frac{\varkappa d\lambda - \lambda d\varkappa}{\sqrt{R(\varkappa, \lambda)}}.$$

Die absolute Invariante des elliptischen Differentiales ist also nichts anderes als die absolute Invariante des Flächenbüschels; der Modul des Differentiales mithin das Doppelverhältniss, welches der um eine Tangente der Raumcurve gelegte Büschel der Berührungsebenen der vier Kegel besitzt, oder das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen irgend eine Tangente der Raumcurve von vier anderen Tangenten getroffen wird*).

§ 2.

Die Werthe des Differentiales in den Schnittpunkten der C_4 mit einer Ebene.

In der Form:

(1) $$D = \frac{u_x v_{dx} - v_x u_{dx}}{a_x \alpha_x (a\alpha u v)}$$

ist zunächst ganz unbestimmt gelassen, in welcher Weise der Fortgang von einem Curvenpunkte x_i zu dem benachbarten $x_i + dx_i$ erfolgt. In der zweiten Form (Gleichung (3)) dagegen wird die Grösse des Differentiales durch die Aenderung gemessen, welche der Parameter des Ebenenbüschels bei unendlich kleiner Drehung der schneidenden Ebene um die Tangente erleidet. Wir wollen uns die allgemeinere Aufgabe stellen: die Werthe des Differentiales zu ermitteln, wenn eine beliebige Ebene um irgend eine in ihr gelegene Gerade gedreht wird. Auf diese Weise entstehen, da vier Schnittpunkte mit der Curve vorhanden sind, vier Differentialwerthe, die sich als Wurzeln einer in den Coefficienten der Grundformen rationalen biquadratischen Gleichung darstellen lassen müssen.

---

*) Die oben stehende Transformation des elliptischen Differentiales ist nach der Methode ausgeführt, welche von Aronhold (Berliner Monatsberichte 1861) für das auf eine ebene Curve dritter Ordnung bezügliche Differential angegeben worden ist. *Dieselbe lässt sich bei allen elliptischen und hyperelliptischen Curven in der Ebene und im Raume verwerthen.* Hat man das hyperelliptische Differential zunächst in homogener Form mit drei oder vier Veränderlichen, zwischen denen eine oder zwei Bedingungsgleichungen gelten, so definirt, dass die willkührlichen in der Functionaldeterminante des Nenners enthaltenen Formen adjungirte Curven bez. Flächen sind, welche die Specialschaar $g_2^{(1)}$ ausschneiden, so ist das Quadrat der Functionaldeterminante unmittelbar gleich zu setzen einer rationalen gebrochenen Function, welche nur aus adjungirten Formen besteht und zufolge deren der Parameter des adjungirten Büschels als die unabhängige Veränderliche im Differential erscheint.

Bedeutet $u_x = 0$ die schneidende Ebene, $u_x + du_x = 0$ die ihr benachbarte, so besteht für den Punkt: $x_i + dx_i$ der Curve, falls er auf dieser zweiten Ebene liegen soll, die Bedingung $u_{dx} + du_x = 0$. Setzt man in der Form (1) $u_x = 0$ und benutzt diese Relation, so erfordert die Lösung des bezeichneten Problemes die Elimination der Grössen x_i aus den Gleichungen:

$$(2) \qquad D = \frac{v_x du_x}{a_x \alpha_x (a\alpha uv)}, \quad a_x^2 = 0, \quad \alpha_x^2 = 0, \quad u_x = 0\ ^{*}).$$

In dem Ausdrucke für D sind die Grössen v nur scheinbar enthalten und müssen sich beim Endresultate absondern lassen. Die directe Inangriffnahme der Elimination ist daher unzweckmässig. Ich ziehe es vor, ein Verfahren einzuschlagen, durch welches diese Grössen von vornherein aus dem Differentiale herausfallen, ohne dass die Symmetrie desselben gestört wird.

Unter der Bedingung: $u_x = 0$, $\alpha_x^2 = 0$ kann $a_x^2 = 0$ gleichgesetzt werden dem Producte zweier Ebenen: $p_x^{(1)} p_x^{(2)} = 0$, und ebenso unter der Bedingung $u_x = 0$, $a_x^2 = 0$ ist $\alpha_x^2 = q_x^{(1)} q_x^{(2)} = 0$. Denn bezeichnet w_x eine beliebige Ebene, so kann dieselbe stets so gewählt werden, dass das Flächennetz: $a_x^2 + \lambda \alpha_x^2 + \mu u_x w_x = 0$ Ebenenpaare enthält. Zu dem Zwecke ist es nur nöthig, die Ebene w_x so festzulegen, dass die vier Punkte, in welchen sie die Raumcurve schneidet, paarweise mit den Punkten, in denen u_x die Curve trifft, in einer Ebene liegen. Demnach können wir setzen:

$$a_x^2 + \lambda \alpha_x^2 + \mu u_x w_x \equiv p_x^{(\prime)} p_x^{(2)}; \quad \alpha_x^2 + \lambda' a_x^2 + \mu' u_x w_x' \equiv q_x^{(\prime)} q_x^{(2)},$$

oder:

$$(3) \qquad a_x^2 \equiv p_x^{(\prime)} p_x^{(2)}, \quad \alpha_x^2 \equiv q_x^{(\prime)} q_x^{(2)}.$$

Die vier Schnittpunkte der Ebene u_x lassen sich also durch die Unterdeterminanten:

$$(p' q' u)_i, \quad (p' q^2 u)_i, \quad (p^2 q' u)_i, \quad (p^2 q^2 u)_i$$

bezeichnen; d. h. für beliebige Werthe von w besteht die identische Relation:

$$p' q' uw)(p' q^2 uw)(p^2 q' uw)(p^2 q^2 uw) = \varrho \cdot \left\{ [(a\alpha uw)^2]^2 - (abuw)^2 (\alpha\beta uw)^2 \right\}.$$

Es wird ferner vermöge der Gleichungen (3):

$$4\, a_x \alpha_x (a\alpha uv) = p_x' q_x' (p^2 q^2 uv) + p_x' q_x^2 (p^2 q' uv) + p_x^2 q_x' (p' q^2 uv) + p_x^2 q_x^2 (p' q' uv).$$

---

*) Das allgemeine Eliminationsproblem zwischen drei quaternären quadratischen und einer linearen Form ist von Gundelfinger erledigt worden in seiner Abhandlung: „Ueber das simultane System von drei ternären quadratischen Formen" (Borchardt's Journal Bd. 80). In dem speciellen hier vorliegenden Falle vereinfacht sich das Problem, weil die Coefficienten der einen quadratischen Form von den beiden anderen abhängen.

Substituiren wir nun für x successive die vier Werthe, so heben sich jedesmal im Zähler und Nenner des Differentiales die Determinanten, in denen v auftritt, fort und man erhält die vier auf die Schnittpunkte bezüglichen Differentiale in den Formen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} D_1 &= \frac{4\,(p'q'u\,du)}{(p^2p'q'u)\,(q^2p'q'u)}, & D_2 &= \frac{4\,(p'q^2u\,du)}{(p^2p'q^2u)\,(q'p'q^2u)},\\ D_3 &= \frac{4\,(p^2q'u\,du)}{(p'p^2q'u)\,(q^2p^2q'u)}, & D_4 &= \frac{4\,(p^2q^2u\,du)}{(p'p^2q^2u)\,(q'p^2q^2u)}. \end{aligned}$$

Die biquadratische Gleichung, deren Wurzeln diese vier Werthe von D sind, lautet demnach:

$$aD^4 + bD^3 + cD^2 + dD + e = 0,$$

wobei:

$$\begin{aligned} a &= (p^2p'q'u)^2\,(q^2p'q'u)^2\,(p^2p'q^2u)^2\,(q^2p^2q'u)^2,\\ b &= -\,4\sum_4 (p'q'u\,du)\,(p^2p'q^2u)^2\,(q'p'q^2u)\,(p'p^2q'u)\,(q^2p^2q'u)^2,\\ c &= 16\sum_6 (p'q'u\,du)\,(p'q^2u\,du)\,(p'p^2q'u)\,(q^2p^2q'u)\,(p'p^2q^2u)\,(q'p^2q^2u),\\ d &= -64\sum_4 (p'q'u\,du)\,(p'q^2u\,du)\,(p^2q'u\,du)\,(p'p^2q^2u)\,(q'p^2q^2u),\\ e &= 256\,(p'q'u\,du)\,(p'q^2u\,du)\,(p^2q'u\,du)\,(p^2q^2u\,du). \end{aligned}$$

(Der Index unter dem Zeichen $\sum$ giebt die Zahl der Summanden an.)

Die Form b verschwindet identisch. Denn hebt man aus allen Summanden den gemeinsamen Factor heraus, so bleiben die vier Glieder:

$$\begin{aligned} &(p'q'u\,du)\,(p^2p'q^2u)\,(q^2p^2q'u) - (p'q^2u\,du)\,(p^2p'q'u)\,(q^2p^2q'u)\\ &- (p^2q'u\,du)\,(p^2p'q^2u)\,(q^2p'q'u) + (p^2q^2u\,du)\,(p^2p'q'u)\,(q^2p'q'u). \end{aligned}$$

Die ersten beiden liefern durch ihre Vereinigung die Form:

$$(p'p^2u\,du)\,(q'p'q^2u)\,(q^2p^2q'u),$$

die beiden letzten:

$$(p^2p'u\,du)\,(p^2q^2q'u)\,(q^2p'q'u)$$

und die Summe dieser beiden ist 0.

Mit dem Vorstehenden ist die verlangte Elimination geleistet und zugleich das *Abel'sche Theorem* für die vier Schnittpunkte einer Ebene bewiesen. Es ist indessen auch von Werth, diese Formen in der gewöhnlichen symbolischen Bezeichnung anzugeben, da diese für eine *reale* Bildung in den Coefficienten der Grundform geeigneter ist. Diese Uebertragung kommt der Aufgabe gleich, das simultane System des Flächenbüschels zweiter Ordnung und einer Ebene als Function ihrer vier gemeinsamen Punkte darzustellen. Da nun das vollständige System eines Kegelschnittbüschels bekannt ist, so ist es für die Durchführung dieser Aufgabe vortheilhaft, die Formen auszuwählen, welche für die vier Coefficienten in Frage kommen, und nach Substitution der Symbole p und q die Zahlencoefficienten zu ermitteln.

§ 3.

Die Coefficienten der biquadratischen Gleichung.

Die geometrische Bedeutung der obigen Grössen: a, c, d, e folgt aus einfachen Ueberlegungen.

Der Coefficient a von D^4 muss verschwinden, sobald von den vier Punkten, in welchen die Raumcurve von der Ebene u_x geschnitten wird, *zwei* zusammenfallen, d. h. sobald die Ebene u eine Tangente der Curve enthält. Die beiden Kegelschnitte, in denen a_x^2 und α_x^2 von der Ebene geschnitten werden, müssen sich berühren, es muss also die Bedingung bestehen (Clebsch, Vorlesungen über Geometrie; herausgegeben von Lindemann, p. 298)*):

$$\mathsf{A} = 4(A_{111}A_{122}-A_{112}^2)(A_{112}A_{222}-A_{122}^2)-(A_{111}A_{222}-A_{112}A_{122})^2 = 0,$$

wobei:

$$A_{111} = (abcu)^2, \qquad A_{122} = (a\alpha\beta u)^2,$$
$$A_{112} = (ab\alpha u)^2, \qquad A_{222} = (\alpha\beta\gamma u)^2.$$

Die Form a kann, da sie in den Coefficienten der Grundform von der gleichen Dimension wie A ist, nur um einen Zahlenfactor von A verschieden sein.

Der Coefficient c von D^2 muss gleichzeitig mit a und zwar unabhängig von du_i zu 0 werden, sobald die Ebene u nicht nur eine Tangentialebene, sondern eine *Osculationsebene* der C_4 ist. Denn alsdann sind *drei* Wurzeln der Gleichung im Verhältniss zu dem Differentialwerth du_i unendlich gross. Die vorhin bezeichneten Kegelschnitte berühren sich in diesem Falle zweipunktig (schneiden sich in drei zusammengefallenen Punkten). Die Bedingung hierfür ist (a. a. O. p. 298):

$$\frac{A_{111}}{A_{112}} = \frac{A_{112}}{A_{122}} = \frac{A_{122}}{A_{222}}.$$

Der Coefficient c muss aber gleicherweise unabhängig von du_i auch dann verschwinden, wenn die Ebene u *zwei* Tangenten der Raumcurve enthält, wenn also die Kegelschnitte sich in zwei getrennten Punkten berühren. Soll dieses der Fall sein, so verschwindet für jeden Werth von du_i die Form:

---

*) Die beim Flächenbüschel zweiter Ordnung auftretenden Formen sind auch zum Theil behandelt im Supplement III der „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes" von Hesse, herausgegeben von Gundelfinger.

$$\Gamma = (A_{111} A_{122} - A_{112}^2) F_{22} - (A_{111} A_{222} - A_{122} A_{112}) F_{12} \\ + (A_{112} A_{222} - A_{122}^2) F_{11},$$

wobei:

$$F_{11} = (a b u d u)^2, \quad F_{12} = (a \alpha u d u)^2, \quad F_{22} = (\alpha \beta u d u)^2;$$

es muss demnach c mit Γ bis auf einen Zahlenfactor übereinstimmen.

Betrachten wir nun zunächst *den Coefficienten* e *von* D^0; derselbe wird 0, wenn die Gerade $\widehat{udu}$ eine Treffgerade der Curve ist, d. h. er muss bis auf einen Zahlenfactor gleich sein der Resultante:

$$\mathsf{E} = F_{12}^2 - F_{11} F_{22}.$$

Der Coefficient d *von* D' endlich muss folgenden Forderungen genügen. In dem Falle, dass u eine Ebene ist, welche *zwei* Tangenten der Raumcurve enthält, wird d unabhängig von du_i zu Null. Ferner, wenn die Linie $\widehat{udu}$ eine Secante der Curve ist, verschwindet d für diesen Werth von u und du. In der beliebigen Schnittebene u_x liegen aber sechs Secanten der Curve, und sonach müssen diese durch die in den Coordinaten du_i cubische Form d der Ebene zugeordnet werden. Mithin stellt dieselbe, im ternären Gebiete der Ebene u_x interpretirt, das gemeinsame Polardreieck des Kegelschnittbüschels dar, d. h. sie ist bis auf einen Zahlenfactor gleich (p. 291):

$$\Delta = (a \alpha u d u)(b c u d u)(\beta \gamma u d u)(\alpha \beta \gamma u)(a b c u).$$

Ausser den sechs Erzeugenden ergiebt das Verschwinden dieser Form alle Tangenten des Flächenbüschels, welche sich in der Ebene u_x befinden; *bei einer Drehung um eine dieser Linien sind,* wie wir später ausführlicher sehen werden, *von den vier Differentialwerthen immer zwei einander entgegengesetzt gleich.*

Für die durch diese Betrachtungen bestimmten Coefficienten muss sich noch folgende gemeinsame Eigenschaft nachweisen lassen: Ist $u_x = 0$ eine Tangentialebene und $\widehat{udu}$ eine durch den Berührungspunkt gehende Gerade, so verschwinden alle Coefficienten der Gleichung. Dass dieses bei A, Δ, E der Fall ist, ist evident; nur für Γ muss es besonders gezeigt werden. Die geometrische Bedeutung des der Ebene $u_x = 0$ durch $\Gamma = 0$ in Ebenencoordinaten zugeordneten Kegelschnittes ist folgende. Man bestimme in einem der Grundpunkte des in der Ebene gelegenen Kegelschnittbüschels zu den drei Strahlen, welche zu den übrigen Grundpunkten führen, die beiden äquianharmonischen. Jeder Geraden der Ebene werden zwei dieselbe tangirende Kegelschnitte zugeordnet und diese Kegelschnitte liefern in dem betrachteten Schnittpunkt ein Tangentenpaar. Der Kegelschnitt $\Gamma = 0$ enthält alle diejenigen Linien in der Ebene, welche Tangentenpaare bestimmen, die harmonisch zu den beiden anfangs construirten Strahlen sind. Tangiren sich nun die Kegelschnitte, so liegen diese beiden

Strahlen vereinigt. Alle Linien $\Gamma = 0$ müssen also Tangentenpaare liefern, von denen eine Linie immer in die Verbindung eines Grundpunktes mit dem doppelt zählenden hineinfällt; d. h. der Kegelschnitt degenerirt in den doppelt zählenden Büschel von Geraden, dessen Mittelpunkt in dem Berührungspunkte liegt.

§ 4.

Die Gleichungen zwischen den Formen a, c, d, e und A, Γ, Δ, E.

Substituirt man in die Form E für a_x^2 die Symbole $p_x^{(1)} p_x^{(2)}$, für α_x^2 die Symbole $q_x^{(1)} q_x^{(2)}$, so folgt, da:

$$(a\alpha u du)^2 = \frac{1}{2}\left[(p' q' u du)(p^2 q^2 u du) + (p^2 q' u du)(p' q^2 u du)\right],$$

$$(a b u d u)^2 = -\frac{1}{2}(p' p^2 u du)^2,$$

$$(\alpha \beta u du)^2 = -\frac{1}{2}(q' q^2 u du)^2,$$

die Gleichung:

$$4\mathsf{E} = [(p'q'udu)(p^2q^2udu) + (p^2q'udu)(p'q^2udu)]^2 - (p'p^2udu)^2(q'q^2udu)^2.$$

Durch Auflösen dieser Differenz zweier Quadrate in das Product zweier linearer Factoren wird:

$$(1) \quad 4\mathsf{E} = 4(p'q'udu)(p^2q^2udu)(p'q^2udu)(p^2q'udu) = \frac{1}{64}e.$$

In dem Ausdrucke für A verschwinden durch Substitution der Ebenencoordinaten p und q die Formen A_{111} und A_{222} identisch, so dass sich A auf das Product $3A_{112}{}^2 A_{122}{}^2$ reducirt. Nun ist:

$$A_{112} = (ab\alpha u)^2 = \frac{1}{2}(p^2p'q'u)(p'p^2q^2u),$$

$$A_{122} = (a\alpha\beta u)^2 = \frac{1}{2}(q^2q'p'u)(q'q^2p^2u),$$

also:

$$(2) \quad \mathsf{A} = \frac{3}{16}(p^2p'q'u)^2(p'p^2q^2u)^2(q^2q'p'u)^2(q'q^2p^2u)^2 = \frac{3}{16}a.$$

Bei dem Coefficienten von D' ist

$$\Delta = (a\alpha udu)(bcudu)(\beta\gamma udu)(a\beta\gamma u)(\alpha bcu)$$

zu identificiren mit

$$d = -64\sum_4 (p'q'udu)(p'q^2udu)(p^2q'udu)(p'p^2q^2u)(q'p^2q^2u).$$

Der Ausdruck Δ kann durch Vertauschung der Symbole in die Form gebracht werden:

$$\frac{1}{2}\Delta = (a\alpha udu)(b\gamma udu)(\beta cudu)(a\beta\gamma u)(\alpha bcu).$$

Ersetzt man hier zuerst die Symbole a, b, c durch $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{4}\sum_2 (p'\alpha u du)(p^2\gamma u du)(\beta p' u du)(p^2\beta\gamma u)(\alpha p' p^2 u).$$

(Das zweite Glied dieser Summe folgt durch Vertauschung von p' und p^2.)

Werden nun für α β γ die Symbole q eingeführt, so wird:

$$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{16}\sum_4 (p'q' u du)(p^2 q' u du)(q^2 p' u du)(p^2 q' q^2 u)(q^2 p' p^2 u).$$

Also ist:

(3) $$d = -8 \cdot 64\,\Delta.$$

Die Form Γ endlich reducirt sich bei Substitution der Ebenencoordinaten auf:

$$-A_{112}{}^2 F_{22} + A_{112}A_{122}F_{12} - A_{122}{}^2 F_{11},$$

oder $\frac{1}{8}$ mal:

$$(p^2p'q'u)^2(p'p^2q^2u)^2(q'q^2u du)^2 + (q^2q'p'u)^2(q'q^2p^2u)^2(p'p^2u du)^2$$
$$+(p^2p'q'u)(p'p^2q^2u)(q^2q'p'u)(q'q^2p^2u)\left\{(p'q'u du)(p^2q^2u du)+(p^2q'u du)(p'q^2u du)\right\}$$

Die beiden letzten Summanden dieses viergliedrigen Ausdruckes sind direct in der für c aufgestellten Summenformel enthalten; die beiden anderen lassen sich umformen. Der erste zerlegt sich in das Product: $(p^2p'q'u)(p'p^2q^2u)$ mal:

$$\left\{(q'p^2q^2u)(p'q^2u du)+(p'q'q^2u)(p^2q^2u du)\right\}\left\{(q^2p'q'u)(q'p^2u du)+(p^2q'q^2u)(p'q'u du)\right\}$$

Der zweite ebenso in das Product: $(q^2q'p'u)(q'q^2p^2u)$ mal:

$$\left\{(p'q^2p^2u)(q'p^2u du)+(q'p'p^2u)(q^2p^2u du)\right\}\left\{(p^2q'p'u)(p'q^2u du)+(q^2p'p^2u)(q'p'u du)\right\}$$

Durch Auswerthung dieser Producte erhält man die sechs Summanden von c, jeden mit -1 multiplicirt, und zwar die beiden Summanden, welche direct als Glieder in der für Γ aufgestellten Formel stehen, ausserdem noch mit dem Factor 2 behaftet. Indem dieser Factor durch Subtraction fortfällt, resultirt die Gleichung:

(4) $$c = -8 \cdot 16\,\Gamma.$$

Die biquadratische Gleichung lautet demnach, in Symbolen a und α geschrieben:

$$\frac{16}{3}\mathsf{A}\cdot D^4 - 8\cdot 16\,\Gamma\cdot D^2 - 8\cdot 64\,\Delta\cdot D + 256\,\mathsf{E} = 0,$$

oder:

(5) $$\mathsf{A}\cdot D^4 - 24\,\Gamma\cdot D^2 - 96\,\Delta\cdot D + 48\,\mathsf{E} = 0.$$

Den bisher durchgeführten Rechnungen zur Bestimmung der Zahlencoefficienten kann man zweierlei Bedeutung unterlegen. Einmal nämlich lassen sich dieselben so auffassen, als seien die Zahlencoefficienten an einem speciellen Beispiele eines Flächenpaares, für welches man insbesondere zwei zerfallene Flächen gewählt hat, ermittelt worden. Die Wahl von Ebenenpaaren für die Flächen ist deshalb statthaft, weil bei den hier behandelten Covarianten nur das Quadrupel der gemeinsamen Punkte zwischen den Flächen und einer beliebigen Ebene maassgebend ist. Auch der Beweis des Abel'schen Theoremes, welcher für das Schnittpunktsystem einer Ebene in diesen Untersuchungen mit enthalten war, wird nur für die Summe von vier Differentialen, *welche sich auf die Kanten eines windschiefen Vierseites* (den Durchschnittslinien der Ebenenpaare $p_x^{(1)} p_x^{(2)} = 0$ und $q_x^{(1)} q_x^{(2)} = 0$) *beziehen*, geführt und gilt dann ohne weiteres für die Raumcurve selbst. Dieser einfache Zusammenhang beruht auf dem Umstande, dass sich in dem Differentiale D unter der Bedingung: $u_x = 0$ die Grössen dx_i durch die Ebenencoordinaten du_i unmittelbar ersetzen lassen.

Zweitens können aber auch die Werthe p und q nur als Symbole gedeutet werden (wie dies im ternären Gebiete zuerst von Battaglini geschehen ist). Die einfache Rechnungsweise mit diesen, insbesondere das identische Verschwinden aller Determinanten, in denen mehr als zwei Reihen desselben Symboles vorkommen, gründet sich auf die in der ersten Auffassungsweise enthaltene Möglichkeit, jedem Symbole eine reale Bedeutung beizulegen.

Die biquadratische Gleichung (5) kann dazu benutzt werden, das Differential auf eine Form zu bringen, in welcher es wiederum nur als Function einer *unabhängigen* Veränderlichen sich darstellt. Da diese Form eine Verallgemeinerung der im § 1. gefundenen bildet und bei den folgenden Betrachtungen öfters vorausgesetzt wird, will ich die Entwickelung derselben kurz andeuten. Man denke sich die schneidende Ebene u_x und die benachbarte $u_x + du_x$ durch dieselben zwei Punkte ξ_i und η_i der Curve, also durch eine Secante derselben gelegt. Demnach setze man:

$$u_i = \varrho \cdot \widehat{x\xi\eta_i}, \quad du_i = \varrho \cdot \widehat{dx\xi\eta_i}, \quad a_\xi^2 = a_\eta^2 = \alpha_\xi^2 = \alpha_\eta^2 = 0.$$

Die Coordinaten x_i bezeichnen einen beliebigen variabelen Punkt, die Formen: $\wedge$ die dreigliedrigen Unterdeterminanten aus den Punktcoordinaten. Durch Substitution dieser Werthe von u und du verschwinden die Coefficienten Δ und E unserer Gleichung; zwei Werthe des Differentiales werden 0, die beiden anderen sind:

$$D = \pm \sqrt{24} \frac{\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{\mathsf{A}}}.$$

Man kann sich nun die weitere Rechnung, freilich mit Verlust der Symmetrie, dadurch erheblich vereinfachen, dass man annimmt, die Secante $\widehat{\xi\eta}$ sei eine Erzeugende der Fläche $a_x^2 = 0$; d. h. man setzt $a_\xi a_\eta = 0$. Denn es ist jedenfalls *eine* Fläche im Büschel vorhanden, für welche diese Relation besteht. Demzufolge verschwinden in den Ausdrücken für Γ und A die Formen: A_{111}, F_{11}, F_{12}, und es wird:

$$\Gamma = -A_{112}{}^2 F_{22}, \quad \mathsf{A} = A_{112}{}^2 (3A_{122}{}^2 - 4A_{112}A_{222}),$$

also:

$$D = \pm \sqrt{24} \frac{\sqrt{-F_{22}}}{\sqrt{3A_{122}{}^2 - 4A_{112}A_{222}}}.$$

Nun ist:

$$F_{22} = (\alpha\beta u du)^2 = (\alpha\beta\, \widehat{x\xi\eta}\, \widehat{dx\xi\eta})^2 = -2(\alpha_\xi\alpha_\eta)^2 (\xi\eta x dx)^2.$$

Ferner findet man unter den vorausgesetzten Bedingungen:

$$\begin{aligned}
A_{112} &= 4a_x a_\xi \cdot b_x b_\eta \cdot \alpha_\xi\alpha_\eta, \\
A_{122} &= 4a_x a_\xi \cdot \alpha_x\alpha_\eta \cdot \beta_\xi\beta_\eta + 4a_x a_\eta \cdot \alpha_x\alpha_\xi \cdot \beta_\xi\beta_\eta - 2a_x{}^2 \cdot (\alpha_\xi\alpha_\eta)^2, \\
A_{222} &= 12\alpha_x\alpha_\xi \cdot \beta_x\beta_\eta \cdot \gamma_\xi\gamma_\eta - 6\alpha_x{}^2 \cdot (\beta_\xi\beta_\eta)^2.
\end{aligned}$$

Das Differential hat also den Werth:

$$D = \pm \sqrt{48} \cdot \alpha_\xi\alpha_\eta \cdot \frac{|\xi\eta x dx|}{\sqrt{3A_{122}{}^2 - 4A_{112}A_{222}}}.$$

Die Function unter der Quadratwurzel ist zufolge ihrer Entstehung das Product der vier tangirenden Ebenen, welche durch die Secante $\xi\eta$ gehen; die Punktcoordinaten x sind völlig unabhängige Veränderliche. Nach Entwickelung der unter der Quadratwurzel stehenden Formen hebt sich der Factor $\alpha_\xi\alpha_\eta \sqrt{12}$ im Zähler und Nenner fort und es folgt:

$$D = \pm 2 \frac{|\xi\eta x dx|}{\sqrt{R}},$$

wobei $R =$

$$(2a_x a_\xi \cdot \alpha_x\alpha_\eta + 2a_x a_\eta \cdot \alpha_x\alpha_\xi - a_x^2 \cdot \alpha_\xi\alpha_\eta)^2 - 8a_x a_\xi \cdot b_x b_\eta (2\alpha_x\alpha_\xi \cdot \beta_x\beta_\eta - \alpha_x^2 \cdot \beta_\xi\beta_\eta).$$

Diese Form kann wieder zu einer symmetrischen gemacht und die Voraussetzung $a_\xi a_\eta = 0$ fallen gelassen werden, indem man überall statt $a_x{}^2$ den Werth $a_x{}^2 - \alpha_x{}^2 \cdot \frac{a_\xi a_\eta}{\alpha_\xi\alpha_\eta}$ substituirt.

§ 5.

Die Parameterdarstellung der Curvenpunkte.

Jedem Punkte der Curve ist zufolge der biquadratischen Gleichung bei unendlich kleiner Drehung der schneidenden Ebene ein bestimmter Differentialwerth zugehörig. Legt man also eine bestimmte Ebene als untere Grenze der auszuführenden Integration fest, und bewegt die schneidende Ebene nach irgendwelchem stetig verlaufenden Drehungsgesetze, so kommen jedem Punkte der Raumcurve Werthe des bestimmten elliptischen Integrales zu. Zufolge des Gesetzes, dass die Summe der vier bei der unendlich kleinen Bewegung der Ebene entstehenden Differentiale immer gleich 0 ist, werden auch die Integralwerthe der in einer Ebene gelegenen Punkte eine constante Summe besitzen. Der Integralwerth eines Curvenpunktes kann sich bei constanter unterer Grenze, wenn der Integrationsweg ein anderer wird, nur um Vielfache der beiden Perioden des elliptischen Integrales ändern, es besteht also für die Parameterwerthe von vier in einer Ebene liegenden Curvenpunkten die Relation:

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv C \ (\text{mod } \omega \text{ und } \omega')\ ^*).$$

Wir wollen nun die untere Grenze der Integrale so zu bestimmen suchen, dass die Constante $C \equiv 0$ wird. Je nach der Art der Raumcurve wird man hierbei auf reelle oder imaginäre Punkte geführt.

Die Raumcurven vierter Ordnung erster Species, welche reelle Gebiete besitzen, zerfallen überhaupt in zwei Hauptgruppen, die auch durch keine eindeutige Transformation in einander übergeführt werden können. Die eine Gruppe besteht aus allen *zweitheiligen* Curven; dieselben besitzen einen *reellen* Modul; die andere aus allen *eintheiligen*, deren Modul *complex*, aber vom *absoluten Betrage* 1 ist. Die zweitheiligen Curven können entweder aus zwei getrennt verlaufenden *paaren* oder aus zwei getrennt verlaufenden *unpaaren* Zügen zusammengesetzt sein. Ein paarer Zug wird von jeder Ebene (also auch von der unendlich fernen) in 0, 2 oder 4, ein unpaarer in 1 oder 3 Punkten geschnitten.

Bei den aus zwei paaren Zügen bestehenden Curven (Curven: α) lassen sich durch jede Tangente noch 4 in einem weiteren Punkte berührende Ebenen legen; von diesen gehen zwei an den einen, zwei an den anderen Zug. Die biquadratische Gleichung $R(\varkappa, \lambda) = 0$ besitzt vier reelle Wurzeln; d. h. die vier Kegel des Büschels sind reell. Bei den aus zwei unpaaren Zügen bestehenden Curven hingegen (Curven β) giebt es durch jede Tangente keine in einem weiteren Punkte berührenden reellen Ebenen mehr; die Gleichung $R(\varkappa, \lambda) = 0$ liefert, wiewohl der Modul reell ist, vier imaginäre Wurzeln. Für die eintheilige, aus einem paaren Zuge bestehende Curve (Curven: γ) ent-

---

*) Für alle zweitheiligen Curven ist ω reell, ω' rein imaginär, während bei den eintheiligen Curven die eine Periode complex wird. Aus der quadratischen Transformation dritter Art des elliptischen Integrales mit reellem Modul kann gefolgert werden, dass sich die complexe Periode der eintheiligen Curve in der Form $\frac{\omega + \omega'}{2}$ darstellen lässt, wenn ω die reelle Periode bedeutet. Math. Annalen Bd. IX, p. 18.

hält $R(\varkappa, \lambda)$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln; d. h. durch jede Tangente lassen sich noch zwei reelle, in einem neuen Punkte berührende Ebenen legen; es sind zwei reelle Kegel im Büschel vorhanden*).

Zufolge der Gleichung (1) besitzt jede Raumcurve 16 Punkte, in denen sie von einer Ebene vierpunktig geschnitten wird; von diesen 16 Punkten sind für die zweitheilige Curve erster Art (α): 8, für die zweite Art (β): 0 und für die eintheilige Curve (γ): 4 reell. In einen dieser Punkte muss der Anfangswerth des elliptischen Integrales verlegt werden, damit die auf die Schnittpunkte einer Ebene bezügliche Constante gleich 0 sei. Ist dieses geschehen, so ergiebt sich folgende Vertheilung der Parameterwerthe:

Bei den *Curven* α können den Punkten des einen Zuges alle Werthe von 0 bis ω (mod ω und ω') zugetheilt werden, die Punkte des anderen Zuges erhalten alsdann die nämlichen Parameterwerthe, vermehrt um den rein imaginären Werth $\frac{\omega'}{2}$. Ueber den Fortschreitungssinn, in welchem diese continuirlich auf einander folgenden Werthe auf dem einen Zuge vertheilt sind, kann eine beliebige Festsetzung getroffen werden. Dass damit auf dem anderen Zuge die Vertheilung der Parameter bestimmt ist, wird aus den Betrachtungen des folgenden Paragraphen sich ergeben. *Conjugirt imaginäre Punkte* erhalten zu Folge dessen auch conjugirt imaginäre Argumente, ein Satz, der sich auch umkehren lässt.

Bei den *Curven* β bekommen alle Punkte des einen wie des anderen Zuges lauter complexe Werthe, so jedoch, dass der imaginäre Bestandtheil derselben constant ist, und der reelle alle Werthe von 0 bis ω annimmt; denn die untere Grenze des Integrales ist complex und dieses selbst muss bis zu einem reellen Curvenpunkte auf einem imaginären Wege, dann aber auf einem durchaus reellen geführt werden. Ist v der Werth des rein imaginären Bestandtheiles auf dem einen, w der auf dem anderen Zuge, so müssen dieselben den Gleichungen genügen:

$$3v + w \equiv 0, \quad 3w + v \equiv 0, \quad (\text{mod } \omega');$$

denn es lassen sich reelle Ebenen construiren, welche den einen Zug in drei, den anderen in einem reellen Punkte schneiden. Aus diesen

*) Alle diese Verhältnisse lassen sich leicht übersehen, wenn man die Raumcurve von einem ihrer Punkte aus auf eine Ebene projicirt. Bei den Curven α wird der Zug, auf welchem das Projectionscentrum liegt, zu einem unpaaren, bei den Curven β zu einem paaren Zuge der ebenen C_3. Von einer Secante, welche zwei Punkte des nämlichen Zuges verbindet, gehen also im ersten Falle vier reelle Tangentialebenen aus, von einer Secante, welche zwei Punkte verschiedener Züge vereinigt, vier imaginäre. Im zweiten Falle gelten diese Eigenschaften gerade umgekehrt. (Cremona: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen", deutsch von Curtze, p. 221 ff.)

Gleichungen folgt: $8v \equiv 0$, $w \equiv -3v$. Aber es erfüllen nicht alle Lösungen dieser Gleichung die im Wesen der Sache liegenden Bedingungen. Denn da man auf keinem ausschliesslich reellen Wege von einem Punkte des einen Zuges zu einem des anderen gelangen kann, so müssen die complexen Werthe v und w von einander verschieden sein. Die Lösungen $v = 0, \frac{\omega'}{4}, \frac{\omega'}{2}, \frac{3\omega'}{4}$ bedingen aber die entsprechend gleichen Werthe von w. Es bleiben mithin nur die Werthe:

$$v = \frac{1}{8}\omega', \ \frac{3}{8}\omega', \ \frac{5}{8}\omega', \ \frac{7}{8}\omega';$$

zu ihnen gehören bezüglich:

$$w = \frac{5}{8}\omega', \ \frac{7}{8}\omega', \ \frac{1}{8}\omega', \ \frac{3}{8}\omega'.$$

Jeder dieser um $\frac{\omega'}{4}$ von einander verschiedenen Werthepaare kann den Argumenten der reellen Curvenpunkte als constanter imaginärer Bestandtheil beigelegt werden; die Wahl eines Werthepaares hängt davon ab, welchem der 16 imaginären Osculationspunkte das Argument 0 gegeben wird. Jeder dieser Punkte, die durch Viertheilung der Perioden gewonnen werden, kann nämlich hinsichtlich seines imaginären Argumententheiles vier verschiedene Werthe erhalten. Wir wollen die Normirung $v = \frac{1}{8}\omega'$, $w = \frac{5}{8}\omega'$ für unsere Untersuchungen festsetzen; wo der Nullpunkt des reellen Argumententheiles hierbei gelegen ist, wird aus der Betrachtung des Flächenbüschels zweiter Ordnung folgen.

Durch eine Secante, welche jeden der beiden Züge trifft, lässt sich ein Ebenenbüschel legen, dessen Ebenen zum Theil in conjugirt imaginären Punktepaaren schneiden. Bestimmt man zunächst die vier tangirenden Ebenen dieses Büschels, so müssen, wenn $u_1 + \frac{1}{8}\omega'$, und $u_2 + \frac{5}{8}\omega'$ die beiden festen Punkte darstellen, die Parameter x der Berührungspunkte der Gleichung genügen:

$$u_1 + u_2 + 2x + \frac{3}{4}\omega' \equiv 0.$$

Daraus folgt:

$$x = -\frac{u_1+u_2}{2} + \frac{5}{8}\omega', \qquad -\frac{u_1+u_2}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{5}{8}\omega';$$
$$-\frac{u_1+u_2}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{1}{8}\omega', \ -\frac{u_1+u_2}{2} + \frac{1}{8}\omega'.$$

Reelle Ebenen, welche in conjugirt imaginären Punkten treffen, liegen zwischen der zweiten und dritten, und zwischen der vierten und ersten Ebene. In diesem Intervalle ist für jeden der beiden Punkte der reelle Werth constant gleich $-\frac{u_1+u_2}{2}$, in jenem gleich

$-\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{\omega}{2}$. Ueberhaupt sind die Argumente conjugirt imaginärer Punkte von der Form:

$$\alpha+\frac{1}{8}\omega'+\beta i \quad \text{und} \quad \alpha+\frac{1}{8}\omega'-\beta i.$$

Bei den *Curven* γ endlich geben wir allen Punkten des einen reellen Zuges Parameterwerthe von 0 bis ω. Legt man wiederum durch irgend eine Secante das Ebenenbüschel, so enthält dasselbe zwei Ebenen, welche in einem reellen Punkte berühren; dieselben führen zu den Punkten: $-\frac{u_1+u_2}{2}$ und $-\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{\omega}{2}$; für diesen Werth kann auch zufolge der zweiten Periode $-\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{\omega'}{2}$ gesetzt werden, so dass die reellen Argumententheile nicht von einander verschieden sind. (Vergl. Anmerkung p. 60.)

In dem einen Intervalle zwischen den Berührungsebenen liegen Ebenen, welche in conjugirt imaginären Punkten die Curve treffen; bei fortgesetzter Drehung in solch einem Intervalle gewinnt das Integral, welches zuerst reell war, lauter rein imaginäre Zuwüchse bis zu dem Werthe $\frac{\omega'}{2}$; d. h. conjugirt imaginäre Punkte haben auch hier conjugirt imaginäre Argumente, soweit dieses nicht durch Hinzufügung der complexen Periode verdeckt ist.

Die Berührungspunkte der 16 stationären Osculationsebenen erhalten, wenn einem derselben das Argument 0 gegeben wird, und die Perioden der Curve mit p und p' bezeichnet werden*), folgende Werthe:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{(I)} & 0, & \frac{p}{2}, & \frac{p'}{2}, & \frac{p+p'}{2}; \\
\text{(II)} & \frac{p}{4}, & \frac{3p}{4}, & \frac{p}{4}+\frac{p'}{2}, & \frac{3p}{4}+\frac{p'}{2}; \\
\text{(III)} & \frac{p'}{4}; & \frac{p}{2}+\frac{p'}{4}, & \frac{3p'}{4}, & \frac{3p}{2}+\frac{3p'}{4}; \\
\text{(IV)} & \frac{p}{4}+\frac{p'}{4}, & \frac{3p}{4}+\frac{p'}{4}, & \frac{p}{4}+\frac{3p'}{4}, & \frac{3p}{4}+\frac{3p'}{4}.
\end{array}
$$

*Jede Ebene, welche durch irgend drei dieser Punkte gelegt wird, schneidet die Raumcurve wiederum in einem Osculationspunkte***). Dabei

---

*) Der Gleichartigkeit wegen führe ich von jetzt ab diese Bezeichnungen ein; es ist fortan für die zweitheiligen Curven $p=\omega$, $p'=\omega'$, für die eintheiligen $p=\omega$, $p'=\frac{\omega+\omega'}{2}$ zu setzen; ω ist reell, ω' rein imaginär.

**) Vergl. hierzu: Reye, Sopra le curve gobbe di quart'ordine e prima specie. Annali di Matemat., S. II, T. II, p. 222.

kann derselbe Punkt einfach, zweifach und vierfach zählend auftreten. Unter den 105 Ebenen, welche, von einem dieser Punkte ausgehend, noch zwei andere enthalten, giebt es 6, in denen die Tangente dieses festen Punktes und 12, in denen die Tangente eines anderen Punktes gelegen ist. Die übrigen 87 Ebenen werden je auf drei Weisen construirt. Mithin folgt: *Die 16 Osculationspunkte lassen sich im Ganzen 116 mal zu Gruppen von vier von einander verschiedenen Punkten so anordnen, dass eine Ebene durch jede Gruppe hindurchgeht.* Diese Ebenen können zu Tetraedern zusammengesetzt werden, so dass auf jedem Tetraeder alle 16 Punkte gelegen sind.

Unter denselben ist das eine besonders ausgezeichnet, auf dessen Seiten sich je vier Punkte befinden, deren Argumente um halbe Periodenwerthe sich unterscheiden. In dem obenstehenden Schema sind diese Punktquadrupel in eine Horizontalreihe gesetzt, die zugehörigen Ebenen durch (I) bis (IV) bezeichnet. Aus dem folgenden Paragraphen wird der Beweis des bekannten Satzes hervorgehen, dass diese vier Ebenen nichts anderes sind, als die Seiten des dem Flächenbüschel zugehörigen Polartetraeders. Die Aufgabe, die 16 stationären Osculationspunkte und damit die gewählten unteren Grenzen des elliptischen Integrales zu bestimmen, führt also auf das durch zwei biquadratische Gleichungen algebraisch lösbare Problem, die Durchschnitte mit den Seiten des Polartetraeders zu ermitteln.

Auch die Realitätsverhältnisse dieses Punktsystemes lassen sich leicht übersehen. Ich beschränke mich auf die Angabe folgender Sätze:

Für die *Curven* α sind alle vier Ebenen (I) bis (IV) reell; es enthalten indess nur die Ebenen (I) und (II) je vier reelle Schnittpunkte, von denen immer zwei auf dem einen, zwei auf dem anderen Zuge sich befinden. In jeder der Ebenen (III) und (IV) verlaufen zwei reelle Gerade, auf denen je ein conjugirt imaginäres Punktepaar gelegen ist.

Für die *Curven* β sind alle vier Ebenen und alle ihre Schnittpunkte mit der Curve imaginär. Es giebt indess 8 reelle Linien, auf denen je zwei conjugirt imaginäre Punkte gelegen sind. Dieselben verbinden einen Punkt der Ebene (I) mit einem Punkte der Ebene (III), und einen Punkt der Ebene (II) mit einem von (IV).

Für die *Curven* γ sind nur die Ebenen (I) und (II) reell; sie schneiden die Curve in je zwei reellen Punkten, während die anderen Punktepaare conjugirt imaginär und also auf zwei reellen Geraden gelegen sind. Je ein imaginärer Schnittpunkt der Ebene (III) befindet sich mit je einem der Ebene (IV) auf einer reellen Geraden.

Projicirt man die Raumcurve von einem dieser 16 Punkte aus auf eine beliebige Ebene, so entspricht dem Projectionspunkte ein Wendepunkt der Bildcurve dritter Ordnung. Die mit demselben auf einer

Seite des Polartetraeders gelegenen Punkte werden die drei Durchschnitte der zu diesem Wendepunkte gehörigen harmonischen Polaren, während die drei übrigen Systeme von Quadrupeln in die Berührungspunkte der 12 Tangenten übergeführt werden, welche sich an die ebene C_3 von diesen Schnittpunkten aus legen lassen.

Bei der Projection der Raumcurve von irgend einem ihrer Punkte aus, dessen Argument u ist, entsprechen diejenigen neun Punkte den Wendepunkten der ebenen C_3, welche ihre Osculationsebenen durch u senden. Die Argumente derselben ergeben sich aus der Gleichung $3x + u \equiv 0$, welche zu einem Punkte u neun Punkte x bestimmt, von denen, falls u reell ist, für alle drei Arten von Curven immer drei reell sind.

Insbesondere giebt es Punktepaare auf den Curven, welche in der gegenseitigen Beziehung zu einander stehen, dass die Osculationsebene des einen durch den anderen Punkt hindurchgeht. Sind u und v die gesuchten Argumente, so müssen dieselben den Gleichungen Genüge leisten:

$$3u + v \equiv 0, \qquad 3v + u \equiv 0, \qquad (\text{mod}\, p \text{ und } p'),$$

oder

$$8u \equiv 0, \qquad v \equiv -3u.$$

Unter den 64 Lösungen dieser Gleichung sind die 16 stationären Osculationspunkte enthalten, für welche die Werthe von u und v zusammenfallen. Es bleiben mithin noch 48 Punkte oder 24 Punktepaare.

Für die Curven α und γ sind nur *vier*, bezüglich *zwei* dieser Paare reell, und die Punkte eines Paares liegen immer auf demselben Curvenzuge. Dagegen besitzen die aus *zwei unpaaren Zügen bestehenden Curven* (β) 8 reelle Paare; die Punkte eines Paares befinden sich auf verschiedenen Zügen. Die Bestimmung derselben ist für die Parametervertheilung von Werth, weil hierbei eine geometrische Eigenschaft für ein Punktsystem zu Tage tritt, in welchem auch der Nullpunkt des reellen Argumentes enthalten ist.

Bei einer Projection der Raumcurve von solch einem Punkte u aus, entspricht dem Punkte v ein Wendepunkt der ebenen C_3, während dem Punkte u der Berührungspunkt einer von diesem Wendepunkte ausgehenden Tangente zugeordnet ist.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch zum Schlusse der völlig imaginären Curven (δ), welche durch den Schnitt zweier *reellen* Flächen erhalten werden. Dieselben treten indess für die geometrische Anschauung zurück und werden auch im Folgenden nur gelegentlich berücksichtigt werden. Vor allen übrigen imaginären Curven vierter Ordnung sind sie dadurch charakterisirt, dass zu jedem Curvenpunkte der conjugirt imaginäre sich gleichfalls auf der Curve vorfindet. Der Modul des elliptischen

Integrals ist reell; von den beiden Perioden kann demnach die eine als reell, die andere als rein imaginär vorausgesetzt werden. Denkt man sich auch hier den Anfangswerth des elliptischen Integrales in einen der 16 stationären Osculationspunkte verlegt, so fragt sich, durch welche Relation die Argumente conjugirt imaginärer Punkte verbunden sind. Ist $\alpha+\beta i$ das Argument des einen Punktes, so kann das Argument des anderen sich von $\alpha-\beta i$ nur um eine Constante unterscheiden. Denn $\alpha+\beta i$ entsteht vom Nullpunkte aus auf einem Wege, der conjugirt ist zu demjenigen, auf welchem $\alpha-\beta i$ von dem zum Nullpunkte conjugirten Punkte aus erreicht wird. Der Werth dieser Constanten: $c+c'i$ ergiebt sich ohne besondere Rechnung aus folgender Betrachtung: Ist $\alpha-\beta i+c+c'i$ conjugirt zu $\alpha+\beta i$, so muss auch umgekehrt $(\alpha+\beta i+c-c'i)+(c+c'i)$ gleich $\alpha+\beta i$ sein; das heisst $2c\equiv 0 \pmod p$. Da c nicht gleich 0 sein kann, (denn sonst gäbe es conjugirt imaginäre Punkte mit demselben Argument), so ist $c=\frac{p}{2}\cdot$ Für den Werth von $c'i$ folgt, indem man sich eine reelle Ebene durch zwei conjugirt imaginäre Punktepaare gelegt denken kann, die Gleichung $2c'i\equiv 0 \pmod{p'}$; mithin ist $c'i=0$, oder $\frac{p'}{2}\cdot$ Jeder dieser beiden Werthe kann für c' gewählt werden, und die Wahl eines Werthes hängt wiederum davon ab, welcher der 16 Punkte als Nullpunkt angenommmen ist*). Wir wollen für das Folgende die Normirung $\alpha+\beta i$ und $\alpha-\beta i+\frac{p}{2}$ festsetzen. Aus dem obigen Schema (pag. 63) folgt, dass für die Curven δ alle Ebenen I bis IV reell sind, indem jede derselben 2 Paare conjugirt imaginärer Punkte enthält.

§ 6.

Die Erzeugung der Raumcurven durch zugeordnete Punktsysteme.

Durch irgend eine Tangente der Curve lassen sich vier Ebenen legen, welche die Curve in einem weiteren Punkte berühren, und jede dieser Ebenen ist Berührungsebene an einem der vier Kegel. Ist u das Argument eines beliebigen Punktes, so ergiebt sich das Argument x des gesuchten Berührungspunktes aus der Gleichung:

$$2u+2x\equiv 0,\quad (\text{mod. } p \text{ und } p'),$$

---

*) Sind z. B. 0 und $\frac{p}{2}$ die Argumente zweier conjugirter Punkte, so gehen dieselben, indem man jedem Punkte das Argument $\frac{p'}{4}$ zufügt, in die Relation $\frac{p'}{4}$ und $-\frac{p'}{4}+\left(\frac{p}{2}+\frac{p'}{2}\right)$ über. Bei der ersten Relation liegt die Tangente des Nullpunktes auf einem reellen Kegel, bei der zweiten auf einem imaginären. Vergl. den folgenden Paragraphen.

d. h. *legt man durch den Punkt u die vier Strahlen, welche bezüglich nach den Punkten:*

$$-u, \quad -u+\frac{p}{2}, \quad -u+\frac{p'}{2}, \quad -u+\frac{p+p'}{2}$$

führen, so sind diese die von dem Punkte ausgehenden Kanten der vier Kegel; und umgekehrt schneidet auch jede Kante eines Kegels die Curve in zwei Punkten, die in einer dieser vier Relationen zu einander stehen. Jeder dieser vier Kegel ist also durch einen der Werthe: $0, \frac{p}{2}, \frac{p'}{2}, \frac{p+p'}{2}$ charakterisirt.

Betrachtet man nun eine der vier im vorigen § angegebenen Ebenen, so erkennt man, dass die 6 Seiten des von den vier Punkten gebildeten vollständigen Viereckes paarweise die Kanten von drei Kegeln sind, so dass also diese Ebenen je drei Kegelcentren enthalten*).

Insbesondere sind die Tangenten der Curve in den Berührungspunkten der 16 stationären Osculationsebenen Kegelkanten, so zwar, dass die Tangenten von vier in einer Tetraederebene gelegenen Punkten durch die gegenüberliegende Ecke gehen.

Bei den Curven α enthalten also zwei der Kegel je *vier* reelle Tangenten und nur auf diesen beiden ist es möglich, reelle Erzeugende zu construiren, welche in imaginären Punkten schneiden. Bei den Curven γ enthält jeder der beiden reellen Kegel je zwei reelle Tangenten der Curve, d. h. auch hier lassen sich reelle Erzeugende mit imaginären Schnittpunkten finden. Bei den Curven δ sind überhaupt die Erzeugenden nur auf den beiden Kegeln, welche zu den Werthen 0 und $\frac{p}{2}$ gehören, reell, während die anderen beiden imaginäre Kegel mit reellen Centren darstellen**).

Je zwei Punkte der Reihe:

$$-u, \quad -u+\frac{p}{2}, \quad -u+\frac{p'}{2}, \quad -u+\frac{p+p'}{2},$$

deren Argumente um halbe Perioden von einander differiren, sollen *correspondirende Punkte* heissen. Zu einem Punkte gehören also drei verschiedene correspondirende Punkte und die drei Arten der Correspondenz entsprechen den drei Werthen der halbirten Perioden. Unterscheidet man diesen drei Werthen: $\frac{p}{2}, \frac{p'}{2}, \frac{p+p'}{2}$ entsprechend Correspondenz erster, zweiter und dritter Art, so gehören bei den Curven α und β zu einem reellen Punkte u drei reelle correspondirende, von denen der erste auf dem nämlichen Zuge wie u, die anderen auf dem anderen

*) Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, p. 358.

**) Cremona a. a. O. p. 224.

Zuge sich befinden. Bei den Curven γ vereinigt nur die Correspondenz erster Art reelle Punkte.

Zwei correspondirende Punkte haben die Eigenschaft, dass die vier Kegelkanten, welche von dem einen Punkte ausgehen, sich mit den Kegelkanten des anderen Punktes kreuzweise auf der Curve schneiden, *so dass also die beiden Punkte zweimal mit je zwei Kegelcentren in einer Ebene liegen.* Oder wie wir auch sagen können: Die Verbindungslinie zweier correspondirender Punkte schneidet immer ein Paar von Gegenkanten des Polartetraeders, und umgekehrt enthält jede Secante, welche von irgend einem Punkte der Tetraederkante ausgeht, zwei correspondirende Punkte *und schneidet die Gegenkante des Tetraeders* (Ausnahmepunkte bilden nur die vier Ecken des Tetraders, von denen aus sich unendlich viele Secanten legen lassen).

Alle Secanten der Raumcurve, welche die in einem Punkte construirte Tangente ausser in ihrem Berührungspunkte treffen, schneiden auch die Tangente des correspondirenden Punktes. Verbindet man überhaupt zwei beliebige Punkte der Curve durch eine Gerade, so treffen alle Secanten, welche diese Gerade ausser in den Curvenpunkten schneiden, auch die Verbindungslinie der correspondirenden Punkte; d. h. die beiden einander correspondirenden Verbindungslinien haben auch die Eigenschaft, zwei Erzeugende einer die Raumcurve enthaltenden Fläche zweiter Ordnung zu sein, eine Eigenschaft, durch welche allein sie übrigens noch nicht definirt sind.

Eine Raumcurve vierter Ordnung ist durch zwei Paare correspondirender Punkte und drei weitere Punkte bestimmt. Denn sind a_1 a_2 a_3 die Argumente dieser drei letztgenannten Punkte, ferner u und $u+\frac{p}{2}$, v und $v+\frac{p}{2}$ die Argumente der correspondirenden Punktepaare, so kann man, da die Verbindungslinien: $\overline{u, v}$ und $\overline{u+\frac{p}{2}, v+\frac{p}{2}}$ Erzeugende einer Fläche des Büschels sind, diese Fläche vermittelst projectiver Ebenenbüschel darstellen; ebenso liefern aber auch die Geraden: $\overline{u, v+\frac{p}{2}}$ und $\overline{u+\frac{p}{2}, v}$ die Erzeugenden einer zweiten Fläche und die Raumcurve erscheint als Schnitt dieser beiden; d. h. in jeder durch zwei Punkte, wie u und v, gelegten Ebene ist der Schnitt einer Geraden mit einem Kegelschnitte zu bestimmen.

Drei Paare correspondirender Punkte derselben Art sind in ihrer gegenseitigen Lage nicht mehr von einander unabhängig. Denn sind u, v, w die Argumente dreier Punkte, $u+\frac{p}{2}$, $v+\frac{p}{2}$, $w+\frac{p}{2}$ die der correspondirenden, so müssen sowohl die Ebenen durch:

$$\begin{array}{ccc} u & v & w \\ u & v+\frac{p}{2} & w+\frac{p}{2} \\ u+\frac{p}{2} & v & w+\frac{p}{2} \\ u+\frac{p}{2} & v+\frac{p}{2} & w \end{array}$$

wie auch die Ebenen durch:

$$\begin{array}{ccc} u+\frac{p}{2} & v+\frac{p}{2} & w+\frac{p}{2} \\ u+\frac{p}{2} & v & w \\ u & v+\frac{p}{2} & w \\ u & v & w+\frac{p}{2} \end{array}$$

sich bezüglich in den Curvenpunkten:

$$-u-v-w \text{ und } -u-v-w+\frac{p}{2}$$

schneiden.

Eine sehr einfache *lineare* Construction der Raumcurve ergiebt sich durch eine andere Art von Zuordnung ihrer Punkte. Legt man nämlich von einem Punkte u die 9 Ebenen, welche die Curve in einem weiteren Punkte osculiren, so folgt das Argument x dieser Punkte aus der Gleichung:

$$3x+u\equiv 0, \quad x=-\frac{u}{3}+\frac{\pi}{3}, \quad (\pi=p,p').$$

Diese neun Punkte lassen sich auf 12 Weisen zu Tripeln anordnen, so dass die Punkte eines Tripels um den nämlichen Drittheil der Perioden differiren; je drei solcher Punkte sollen ein *Tripel conjugirter Punkte* heissen. Bei der Projection der Raumcurve von einem ihrer Punkte aus auf eine beliebige Ebene entstehen aus solchen neun Punkten jedesmal neun Punkte der ebenen C_3, welche die Projectionen eines bestimmten Curvenpunktes von den neun Wendepunkten aus bilden, und also entsprechend den 12 Wendepunktslinien zu 12 Inflexionstripeln angeordnet werden können. Dieselben werden nach den vier Wendepunktsdreiseiten in vier Arten zusammengefasst.

Ein reeller Curvenpunkt gehört einem und nur einem Tripel conjugirter Punkte an, welches lauter reelle Punkte vereinigt. Die drei Punkte befinden sich dann immer auf dem nämlichen Curvenzuge. Sind nun zwei reelle Tripel derselben Art gegeben:

$$u, \quad u+\frac{p}{3}, \quad u+\frac{2p}{3},$$

$$v, \quad v+\frac{p}{3}, \quad v+\frac{2p}{3}$$

(u und v können demselben Zuge oder verschiedenen angehören), so lege man durch je drei Punkte eine Ebene, deren Durchschnitt einen neuen Punkt der Raumcurve bestimmen wird; nämlich die Ebenen durch:

$$u\ \ v\ \ v+\frac{p}{3};\quad u+\frac{p}{3}\ \ v+\frac{p}{3}\ \ v+\frac{2p}{3};\quad u+\frac{2p}{3}\ \ v+\frac{2p}{3}\ \ v$$

schneiden sich im Punkte: $-u-2v+\frac{2p}{3}\cdot$ Die Ebenen durch:

$$u\ \ v\ \ v+\frac{2p}{3};\quad u+\frac{p}{3}\ \ v+\frac{p}{3}\ \ v;\quad u+\frac{2p}{3}\ \ v+\frac{2p}{3}\ \ v+\frac{p}{3}$$

im Punkte $-u-2v+\frac{p}{3}\cdot$ Endlich die Ebenen durch:

$$u\ \ v+\frac{p}{3}\ \ v+\frac{2p}{2};\quad u+\frac{p}{3}\ \ v+\frac{2p}{3}\ \ v;\quad u+\frac{2p}{3}\ \ v\ \ v+\frac{p}{3}$$

im Punkte $-u-2v$. Es sind somit drei neue Punkte der Curve gefunden, die selber wieder ein Tripel conjugirter Punkte bilden. Indem man nun die nämliche Operation z. B. auf die Tripel u, $u+\frac{p}{3}$, $u+\frac{2p}{3}$ und das eben construirte anwendet, erhält man z. B. das Tripel:

$$1u+4v,\quad 1u+4v+\frac{p}{3},\quad 1u+4v+\frac{2p}{3}\,.$$

Auf diese Weise lässt sich die Construction im Allgemeinen unbegrenzt fortsetzen, und liefert jedesmal als Schnitt dreier Ebenen, welche durch je drei Punkte gelegt sind, einen neuen der Curve angehörigen Punkt*). Diese Construction giebt in ihrer Einfachheit ein Analogon zur Schröter'schen Construction der ebenen Curve dritter Ordnung aus drei Paaren correspondirender Punkte. Wollte man die ebene Curve dritter Ordnung aus conjugirten Punktetripeln darstellen, so ist zu bemerken, dass zwei Tripel in der Ebene in ihrer Lage nicht mehr unabhängig von einander sind, und dass die Curve dritter Ordnung erst durch zwei Tripel und einen willkürlich angenommenen Punkt bestimmt ist (analog der Bestimmung der Raumcurve aus drei Paaren correspondirender Punkte)**).

---

*) Auf die weiteren geometrischen Eigenschaften dieser Construction will ich hier nicht eingehen. Es entsteht die Frage: welche Art von Curven ist durch zwei conjugirte Tripel festgelegt und auf welchem Zuge liegt jeder der gegebenen Punkte, sowie jeder weitere aus ihm construirte. Liegen u und v auf dem nämlichen Zuge einer zweitheiligen Curve erster Art (α), so erhält man durch diese Tripelconstruction nur die Punkte eines Zuges. Es ist indessen nicht schwer, auch den Uebergang zum anderen Curvenzuge vermittelst projectiver Ebenenbüschel zu vollziehen. Aus dem folgenden Paragraphen geht nämlich hervor, dass durch zwei conjugirte Tripel je drei Erzeugende derselben Schaar von drei Flächen des Büschels gegeben sind.

**) Es folgt hier beiläufig der Satz: Zwei beliebige Dreiecke im Raume lassen sich auf einfach unendlich viele Weisen von einem Punkte des Raumes auf jede

§ 7.

Das Secantensystem der Curven.

Wie die Kanten der vier Kegel dadurch erhalten werden, dass man einen Punkt u der Raumcurve mit den Punkten:

$$-u, \quad -u+\frac{p}{2}, \quad -u+\frac{p'}{2}, \quad -u+\frac{p+p'}{2}$$

verbindet, so lassen sich auch die Erzeugenden aller anderen Flächen des Büschels in gleich einfacher Weise kennzeichnen. Ordnet man nämlich einem Punkte u denjenigen Punkt zu, welchem das Argument $-u+C$ zukommt (wobei C eine beliebige Grösse innerhalb des Periodenparallelogrammes bedeutet), so entspricht auch umgekehrt der Punkt u dem Punkte $-u+C$. Durch die Verbindungslinien zugeordneter Punkte erhält man eine einfach unendliche Schaar von Geraden; durch jeden Punkt der Curve geht eine Linie der Schaar und auf jeder Linie liegen zwei Curvenpunkte. Betrachtet man nun zugleich die Zuordnung u und $-u-C$, und die durch dieselbe entstandene Schaar von Erzeugenden, so ist evident, dass jede Gerade der ersten Schaar von jeder Geraden der zweiten Schaar geschnitten wird; denn die Summe von u, $-u+C$, v, $-v-C$ ist congruent 0, welchen Werth u und v auch haben mögen.

Mithin bilden alle Secanten (u und $-u+C$) die eine, alle Secanten (u und $-u-C$) die andere Schaar einer und derselben Fläche zweiter Ordnung und jede Fläche des Büschels wird durch einen bestimmten Werth von C charakterisirt.

Diese Darstellung gewährt zunächst eine Orientirung über die Realität der Erzeugenden der Flächen bei den verschiedenen Curvenarten: Es giebt bei allen drei Curven Flächen mit reellen Erzeugenden. *Bei den Curven α* sind dieselben entweder durch reelle Werthe von C (auf diesen Flächen schneiden die reellen Erzeugenden theils in imaginären Punkten theils zweimal denselben Zug) oder durch complexe Werthe, deren imaginärer Bestandtheil $\frac{p'}{2}$ ist, charakterisirt; (hier schneidet jede Erzeugende jeden der beiden Züge). *Bei den Curven β* werden dieselben nur durch complexe Werthe von C, deren imaginärer Bestandtheil constant gleich $\frac{p'}{4}$ $\left(\text{oder auch } -\frac{p'}{4} \equiv \frac{3p'}{4}\right)$ ist, geliefert. Die Erzeugenden der einen Schaar treffen den nämlichen Curvenzug zweimal (zum Theil enthalten sie auch ein imaginäres Punktepaar), die Erzeugenden der anderen Schaar dagegen schneiden jeden der beiden

---

Ebene so projiciren, dass die Dreiecke in der Ebene auf drei Arten perspectivisch liegen. Die Projectionscentra befinden sich auf einer Raumcurve vierter Ordnung, für welche die gegebenen Dreiecke zwei Tripel conjugirter Punkte bilden.

Züge und besitzen demnach immer zwei reelle Schnittpunkte. *Bei den Curven* γ und δ werden Flächen mit reellen Erzeugenden nur durch reelle Werthe von C dargestellt; die Erzeugenden einer Fläche schneiden den Curvenzug γ theils zweimal, theils in imaginären Punkten.

Reelle Flächen mit imaginären Erzeugenden gehören bei den Curven α, γ und δ zu rein imaginären Werthen von C oder, was für die Curven γ dasselbe bedeutet, zu complexen, deren reeller Bestandtheil $\frac{p}{2}$ ist; bei den Curven β sind solche gar nicht vorhanden, da man zu einem Punkte u niemals zwei conjugirt imaginäre Punkte von der Form $-u+C$ und $-u-C$ erhalten kann.

Damit die auf einer Fläche C verlaufende Curve eine Erzeugende der Fläche *tangire*, muss die Bedingung bestehen:

$$-u-C \equiv u \text{ oder } -u+C \equiv u$$

also:

$$2u \equiv -C \text{ oder } 2u \equiv C.$$

Jede dieser Gleichungen liefert vier Werthe für u, die sich zu 6 Paaren von correspondirenden Punkten anordnen lassen; d. h. *es giebt auf jeder Fläche in jeder der beiden Schaaren vier Erzeugende, welche zugleich Tangenten der Raumcurve sind.* Bei den Curven α sind in den drei genannten Fällen bezüglich 8, 0 und 0 Tangenten reell, bei den Curven β in dem einen Fall reeller Flächen jedesmal 4, bei den Curven γ bezüglich 4 und 0. Die Osculationsebenen der Curve in diesen Punkten sind Tangentialebenen der zugehörigen Fläche.

Betrachten wir die beiden Tetraeder, welche von den Berührungspunkten jeder dieser beiden Systeme gebildet werden. Die vier Linien, welche eine Tetraederecke mit den Ecken des anderen verbinden, sind nach dem obigen Satze Erzeugende der vier Kegel, *d. h. die beiden Tetraeder liegen auf vier Arten perspectiv zu einander.* Die Anordnung ist folgende: Werden die Ecken des einen Tetraeders durch 1, 2, 3, 4, die des andern durch 1′, 2′, 3′, 4′ bezeichnet, so sind die Linien

11′	22′	33′	44′	Kanten des Kegels *I*
12′	21′	34′	43′	Kanten des Kegels *II*
13′	24′	31′	42′	Kanten des Kegels *III*
14′	23′	32′	41′	Kanten des Kegels *IV*.

Es schneiden sich demnach auch (die römischen Zahlen bedeuten die Centren der vier Kegel):

1 *I*	2 *II*	3 *III*	4 *IV*	im Punkte 1′
1 *II*	2 *I*	3 *IV*	4 *III*	im Punkte 2′
1 *III*	2 *IV*	3 *I*	4 *II*	im Punkte 3′
1 *IV*	2 *III*	3 *II*	4 *I*	im Punkte 4′,

d. h. *jedes der beiden Tetraeder liegt auch mit dem Polartetrader des Flächenbüschels perspectiv.*

Diese Punkte sind sonach, wie auch aus dem Satze p. 68 folgt, zu je 6 in 12 Ebenen vertheilt.

Zur Construction drei solcher auf vier Arten perspectiv liegender Tetraeder im Raume kann immer *eines* ganz willkürlich angenommen werden, und ausserdem noch ein Eckpunkt. Denken wir uns das Tetraeder $I \cdots IV$ als gegeben und überdies den Punkt 1, so werden die Punkte $1' \cdots 4'$ so construirt, dass man die Strahlen $1\,I$, $1\,II$, $1\,III$, $1\,IV$ zieht, und auf denselben jedesmal den vierten harmonischen Punkt zu 1 in Bezug auf die Tetraederecke und den Durchschnitt mit der gegenüberliegenden Tetraederebene bestimmt. Die nämliche Construction führt von irgend einem der so construirten Punkte zu den Punkten 1, 2, 3, 4. Zwischen den Tangenten der Raumcurve in diesen Punkten besteht noch die Eigenschaft, dass jede Tangente des einen Quadrupels sich mit den Tangenten des anderen auf einer der vier Tetraederebenen schneidet.

Hr. Voss hat in seiner Abhandlung: „Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades"*) auf die windschiefen der Curve eingeschriebenen *Vierseite* aufmerksam gemacht, deren Seiten Erzeugende zweier Flächen sind. Die Relationen, welche hierbei stattfinden, lassen sich leicht mit Hilfe der Parameterdarstellung übersehen.

Sollen die *Gegenseiten* des Vierseits Erzeugende derselben Schaar zweier Flächen sein, so müssen, wenn die aufeinanderfolgenden Eckpunkte mit: u, v, $-v+C$, $-u+C$ bezeichnet werden, die Gleichungen bestehen:

$$v = -u \pm C', \quad -v + C = u - C \pm C',$$

d. h.

$$u \mp C' + C = u - C \pm C' \text{ oder } 2C' = \pm 2C.$$

Die Lösung $C' = \pm C$ liefert keine eigentlichen Vierseite; als brauchbare Lösungen erhält man *die von u völlig unabhängigen* Werthe:

$$C' = \pm C + \frac{p}{2}, \quad C' = \pm C + \frac{p'}{2}, \quad C' = \pm C + \frac{p+p'}{2}.$$

Es giebt also zu jeder Fläche des Büschels drei zugeordnete, welche die Eigenschaft haben, dass sich je zwei Erzeugende aus einer Schaar der einen Fläche mit je zwei Erzeugenden aus einer Schaar der anderen Fläche schneiden. (Man kann die Eigenschaft auch so aussprechen: Die vier Flächen C, $C + \frac{p}{2}$ u. s. w. liegen paarweise mit einem linearen Complexe in

*) Math Annalen Bd. X, p. 147 ff.

Involution.) Bei den zweitheiligen Curven (α und β) sind einer reellen Fläche immer drei reelle in dieser Weise zugeordnet, bei den eintheiligen (γ) nur eine reelle. Die gegenüberliegenden Ecken des Vierseites sind Paare correspondirender Punkte derselben Art.

Insbesondere sind auch in dem Büschel Flächenpaare vorhanden, bei denen beide Arten von Erzeugenden sich gegenseitig durchschneiden; (so dass also eine Schaar von Erzeugenden auf der einen Fläche nicht nur mit einer, sondern mit jeder Art von Erzeugenden der anderen Fläche einem linearen Complexe angehört). Die Bedingung hierfür ist folgende:

Das Linienpaar: u und $-u+C$, v und $-v+C$ muss von einem Paare der Erzeugenden einer Fläche $-C'$ geschnitten werden; ebenso das Linienpaar u und $-u+C$, w und $-w+C$ von einem Paare derselben Fläche $-C'$. Demnach finden die Gleichungen statt:

$$v=-u+C', \qquad w=-u-C',$$
$$-v+C=u-C+C', \quad -w+C=u-C-C'.$$

Daraus folgen, indem sich u, v, w eliminiren, zwei Bedingungsgleichungen zwischen C und C':

$$2C\equiv 2C', \quad 2C\equiv -2C'$$

das heisst:

$$4C\equiv 0.$$

Ausser den vier Kegeln, welche selbstverständlich der gestellten Bedingung genügen, giebt es also noch 6 Flächen, entsprechend den Werthen: $\frac{p}{4}$ $\left(\text{oder } \frac{3p}{4}\right)$, $\frac{p}{4}+\frac{p'}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{3p}{4}+\frac{p'}{2}\right)$; $\frac{p'}{4}$ $\left(\text{oder } \frac{3p'}{4}\right)$, $\frac{p}{2}+\frac{p'}{4}\left(\text{oder } \frac{p}{2}+\frac{3p'}{4}\right)$; $\frac{p}{4}+\frac{p'}{4}\left(\text{oder } \frac{3p}{4}+\frac{3p'}{4}\right)$, $\frac{3p}{4}+\frac{p'}{4}\left(\text{oder } \frac{p}{4}+\frac{3p'}{4}\right)$. Diese Flächen lassen sich zu drei Gruppen von je zwei zusammengehörigen anordnen; — in der hingeschriebenen Reihenfolge gehören zwei aufeinanderfolgende zusammen. Es sind also drei Flächenpaare vorhanden, welche in der geforderten Relation zu einander stehen*); dieselben sind auch dadurch ausgezeichnet, dass sie von den 120 Verbindungslinien der 16 stationären Osculationspunkte je 16 als Erzeugende besitzen. (Die übrigen 24 in den Tetraederebenen gelegenen Linien gehören zu 6 einem der Kegel an.) Bei den Curven α sind zwei Flächenpaare reell; das eine besitzt reelle Erzeugende, das andere nicht. Bei den Curven β sind gleichfalls zwei Paare reell; die 8 reellen Verbindungsgeraden der stationären Osculationspunkte sind hierbei auf ein Flächenpaar vertheilt. Bei den Curven γ endlich ist nur ein Paar

*) Analytisch sind diese Flächenpaare im Büschel dadurch charakterisirt, dass ihre simultanen Invarianten Θ und Θ' verschwinden. Voss a. a. O. p. 177.

von Flächen reell; die eine derselben, auf welcher vier reelle Verbindungslinien verlaufen, ist geradlinig, die andere nicht.

Es lässt sich aber noch eine zweite Art von windschiefen Vierseiten der Raumcurve einschreiben, bei welchen nämlich ein Paar von *anliegenden* Seiten aus Geraden besteht, welche Erzeugende der beiden Schaaren einer und derselben Fläche sind. Vom Punkte u ziehe man die Linien nach $-u+C$ und $-u-C$, und suche einen Punkt v so zu bestimmen, dass die Verbindungen von v mit diesen beiden Punkten einer Fläche angehören. Es muss demnach:

$$-u-C=-v+C', \quad -u+C=-v-C'$$

sein; d. h.

$$-u-C=-u+C+2C \text{ oder } 2C'=-2C.$$

Durch diese Forderung sind also jeder Fläche dieselben drei, wie vorhin zugeordnet; aber die Erzeugenden eines Flächenpaares sind jetzt in anderer Weise gruppirt.

Es bietet sich hier Gelegenheit, nochmals auf die Parametervertheilung bei den Curven β zurückzugehen, um die Art der Bestimmtheit derselben zu erkennen. Nachdem man die imaginären Schnittpunkte zweier Tetraederebenen construirt hat, werden die vier reellen Geraden gezogen, welche die Punkte eines Ebenenpaares verbinden. Diese vier Geraden liegen auf einer bestimmten Fläche des Büschels, welche je zwei Tangenten mit jedem Curvenzuge gemein hat. Setzt man fest, welche reelle Gerade die Punkte 0 und $\frac{p'}{4}$ verbinden soll, so muss diejenige reelle Gerade, zu welcher man bei continuirlichem Fortgang innerhalb derselben Schaar von Erzeugenden gelangen kann, ohne eine der vier Tangenten zu überschreiten, die Argumente $\frac{p'}{2}$ und $\frac{3p'}{4}$ besitzen. Die beiden Tangenten, welche dieses Linienpaar einschliessen, führen dann zu den Punkten $0+\frac{p'}{8}$ und $0+\frac{5p'}{8}$ Damit sind die Nullpunkte des reellen Argumententheiles auf den beiden Zügen festgelegt, und es ist auch nicht mehr zweifelhaft, welchem Zuge der constante Werth $\frac{p'}{8}$ und welchem $\frac{5p'}{8}$ zukommt; desgleichen hat man die Punkte $\frac{p}{2}+\frac{p'}{8}$ und $\frac{p}{2}+\frac{5p'}{8}$. In welchem Fortschreitungssinne nun die Parameter von 0 bis $\frac{p}{2}$ auf jedem Zuge wachsen, darüber kann noch eine beliebige Festsetzung getroffen werden; denkt man sich z. B. durch die Verbindung von $0+\frac{p'}{8}$ und $\frac{p}{2}+\frac{5p'}{8}$ die vier tangirenden Ebenen gelegt, so kann man den Punkt $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ auf den Zügen durch *eine* willkührliche Bestimmung fixiren.

Von einer Secante, welche zwei Punkte mit den Argumenten u

und v verbindet, gehen vier Tangentialebenen aus, welche bezüglich nach den Punkten:

$$-\frac{u+v}{2},\quad -\frac{u+v}{2}+\frac{p}{2},\quad -\frac{u+v}{2}+\frac{p'}{2},\quad -\frac{u+v}{2}+\frac{p+p'}{2}$$

führen. Die Tangenten in diesen Punkten treffen die angenommene Secante in vier Punkten, deren Doppelverhältniss, für alle Secanten constant, gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Tangentialebenen ist. *In gleicher Weise lassen sich nun alle Secanten, welche die Linie* $\overline{u\ v}$ *treffen, in Quadrupel anordnen, nämlich:*

$$\begin{array}{llll} -\frac{u+v}{2}-\frac{C}{2}, & -\frac{u+v}{2}-\frac{C}{2}+\frac{p}{2}, & -\frac{u+v}{2}-\frac{C}{2}+\frac{p'}{2}, & -\frac{u+v}{2}-\frac{C}{2}+\frac{p+p'}{2}, \\ -\frac{u+v}{2}+\frac{C}{2}, & -\frac{u+v}{2}+\frac{C}{2}+\frac{p}{2}, & -\frac{u+v}{2}+\frac{C}{2}+\frac{p'}{2}, & -\frac{u+v}{2}+\frac{C}{2}+\frac{p+p'}{2}. \end{array}$$

Je zwei unter einander stehende Punkte sind dabei durch eine Secante verbunden gedacht, und giebt man der Grösse $\frac{C}{2}$ alle möglichen Werthe innerhalb des geviertheilten Periodenparallelogrammes, so erhält man alle Secanten, welche die Linie $\overline{u\ v}$ schneiden. *Das Doppelverhältniss, welches diese vier Linien (oder auch die vier zugehörigen Ebenen) auf der Secante* $\overline{u\ v}$ *bestimmen, ist nur abhängig von dem Werthe* $\frac{C}{2}$. Denn überhaupt wird der Ebenenbüschel um jede beliebige Secante durch die variabelen Werthe eines Parameters eindeutig dargestellt, und diese Parameterdarstellung ist bei allen Secanten so normirt, dass zu den Werthen der halben Perioden die Tangentialebenen der Büschel gehören. Je vier Ebenen des einen Büschels haben dasselbe Doppelverhältniss, wie die entsprechenden vier des anderen. Insbesondere differiren in den eben gebildeten Quadrupeln die Parameter immer nur um halbe Periodenwerthe; das Doppelverhältniss — unabhängig von u und v — ist also lediglich durch $\frac{C}{2}$ bestimmt.

Für den besonderen Werth $\frac{C}{2}=\pm\frac{(u-v)}{2}$ erhält man für die Secante $\overline{u\ v}$ das Quadrupel:

$$\begin{array}{llll} -u, & -u+\frac{p}{2}, & -u+\frac{p'}{2}, & -u+\frac{p+p'}{2}, \\ -v, & -v+\frac{p}{2}, & -v+\frac{p'}{2}, & -v+\frac{p+p'}{2}. \end{array}$$

In jeder dieser vier Ebenen liegt ein Kegelcentrum und die Gerade $\overline{u\ v}$ wird von den vier zugehörigen Secanten in ihren Schnittpunkten mit den Tetraederebenen getroffen. Das Doppelverhältniss dieser vier Punkte ist nur von dem Werthe $\frac{C}{2}=\pm(u-v)$ abhängig; somit erhalten wir den bemerkenswerthen Satz:

Alle Secanten, für welche die Differenz zwischen den Parameterwerthen der beiden Curvenpunkte denselben Werth hat, schneiden das Polartetraeder nach gleichem Doppelverhältniss.

Es giebt auch *drei* Werthe von $\frac{C}{2}$, für welche die zugehörigen Quadrupel sich auf doppelt zählende Secantenpaare reduciren; nämlich für

$$C = \frac{p}{2}, \quad \frac{p'}{2}, \quad \frac{p+p'}{2}.$$

Diese drei Punktepaare bilden die Covariante sechster Ordnung zu der biquadratischen Form, welche auf jeder Secante durch die 4 Tangenten ausgeschnitten wird. (Vgl. p. 80.)

§ 8.

Ueber ein System von covarianten Linienflächen achter Ordnung (Quadricuspidalen).

In meinen früheren Aufsätzen über die Darstellung der ebenen Curven dritter Ordnung durch elliptische Functionen habe ich Systeme von covarianten algebraischen und transcendenten Curven abgeleitet, indem ich die Gesammtheit der Geraden betrachtete, welche je einen variabelen Curvenpunkt, dessen Argument u ist, mit dem Punkte: $\varrho \cdot u + C$ verbinden. Bei constanten Werthen von ϱ und C entsteht eine Classencurve, und die Gesammtheit aller Curven, welche dem nämlichen Werthe von ϱ entsprechen, bilden das Integral eines zur Fundamentalcurve covarianten Connexes. Abgesehen vom Werthe $\varrho = -1$, welcher hier auf lauter Strahlbüschel führt, deren Mittelpunkte auf der Fundamentalcurve gelegen sind, erhält man das einfachste System dieser Art durch den Werth $\varrho = +1$. Dasselbe besteht aus Curven sechster Classe, welche durch eine ganze Reihe von sehr naheliegenden projectivischen Beziehungen mit der Fundamentalcurve verbunden sind. Gemäss der Differentialgleichung, welcher dieses System genügt, werde ich dieselben im Folgenden gelegentlich als die *Hauptcoincidenzcurven des Connexes Q* bezeichnen.

Die analoge Problemstellung führt bei den Raumcurven vierter Ordnung auf Systeme von covarianten Linienflächen, deren Erzeugende sämmtlich Secanten der Fundamentalcurve sind. Auch hier ist es der Werth $\varrho = +1$, der nächst dem Flächenbüschel zweiter Ordnung das einfachste System dieser Art bestimmt. Wie sich sogleich zeigen wird, sind diese Flächen die von de la Gournerie ausführlich behandelten „Quadricuspidalen*)“.

---

*) Recherches sur les surfaces réglées. Paris 1867.

Ordnet man einem Punkte u der Raumcurve denjenigen Punkt zu, welcher das Argument $u + C$ besitzt, so entspricht umgekehrt der Punkt u dem Punkte $u - C$. Hält man den Werth von C fest, während u alle möglichen Werthe durchläuft, so entsteht eine von einfach unendlich vielen Secanten gebildete Fläche, und demnach, wenn C successiv alle möglichen Werthe annimmt, ein System von einfach unendlich vielen Linienflächen. Jede Secante gehört zu einer und nur zu einer dieser Flächen, auf welcher stets die Raumcurve vierter Ordnung als Doppelcurve gelegen ist.

Um die *Ordnung und Classe* derselben zu bestimmen, frage man, von wie vielen Erzeugenden solch einer Fläche irgend eine Secante geschnitten wird. Ist diese Secante durch die Punkte a_1 und a_2 gelegt, so wird sie in diesen beiden Punkten von je zwei Erzeugenden ($a_1 + C$ und $a_1 - C$, $a_2 + C$ und $a_2 - C$) getroffen. Für jede weitere Erzeugende $\overline{u, u+C}$, welche die Secante schneiden soll, muss die Bedingung bestehen:

$$2u + a_1 + a_2 + C \equiv 0 \text{ oder } u = -\frac{a_1+a_2}{2} - \frac{C}{2}\left(0, \frac{p}{2}, \frac{p'}{2}, \frac{p+p'}{2}\right),$$

d. h. es giebt im Allgemeinen noch vier Erzeugende; dieselben bilden ein Quadrupel der im vorigen § charakterisirten Art. Mithin erhalten wir das Resultat:

Durch die Zuordnung: u und $u \pm C$ entsteht eine Schaar von Flächen achter Ordnung und achter Classe. Die vier Punkte, in denen eine beliebige Secante von einer solchen Fläche ausser in den Curvenpunkten getroffen wird, haben auf allen Secanten das gleiche Doppelverhältniss.

Die vier Erzeugenden, welche die Linie $\overline{a_1 \, a_2}$ schneiden, liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung (nämlich auf derjenigen, welche durch den Werth $\pm (a_1 - a_2)$ charakterisirt ist); also hat jede Fläche des Büschels mit einer der Flächen achter Ordnung ausser der Raumcurve noch 8 Erzeugende — vier von jeder ihrer beiden Schaaren — gemeinsam.

Für alle Erzeugenden einer der Flächen achter Ordnung ist die Differenz der Parameterwerthe zwischen den beiden Curvenpunkten constant gleich C, *und also schneiden die Erzeugenden einer solchen Fläche die Seiten des Tetraeders nach constantem Doppelverhältniss.* Oder wie wir auch sagen können, jede Fläche bildet den Durchschnitt eines auf das Polartetraeder bezüglichen tetraedralen Complexes mit der durch das Secantensystem dargestellten Congruenz.

Da die Erzeugenden jeder Fläche sich durch elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, so folgt, dass diese Fläche ausser der Raumcurve noch Doppelcurven besitzen muss, welche das Geschlecht weiter um 16 Einheiten erniedrigen. Die Untersuchung derselben ergiebt, dass es *vier rationale Curven vierter Ordnung sind, die in den Ebenen des Polartetraeders verlaufen.* Denn wenn die Secante $\overline{u\ u} + C$ von einer Secante $\overline{v\ v} + C$ getroffen werden soll, so besteht für den Werth von v die Bedingung:

$$2u + 2v + 2C = 0.$$

Es ist demnach:

$$v = -u - C, \quad v = -u - C + \frac{p}{2}, \quad v = -u - C + \frac{p'}{2}, \quad v = -u - C + \frac{p+p'}{2},$$

$$v + C = -u, \quad v + C = -u + \frac{p}{2}, \quad v + C = -u + \frac{p'}{2}, \quad v + C = -u + \frac{p+p'}{2}.$$

Jede Erzeugende wird also von vier anderen geschnitten, und diese vier Schnittpunkte liegen auf den Tetraederebenen, weil die durch vier Punkte wie: u, $u + C$, $-u$, $-u - C$ gelegte Ebene zwei Kanten eines Kegels enthält. Der Verlauf dieser vier ebenen Doppelcurven lässt sich aus dem Kegelschnittbüschel, welches in jeder Tetraederebene durch den Flächenbüschel bestimmt wird, entnehmen. Jede Curve geht nämlich durch die vier festen Punkte dieses Büschels und schneidet ausserdem jeden Kegelschnitt in vier Punkten, deren Doppelverhältniss constant ist. Denn von einem solchen Quadrupel gehen die 8 Erzeugenden aus, welche zugleich der Fläche achter Ordnung und der zum Kegelschnitt gehörigen Fläche zweiter Ordnung gemeinsam sind.

Jeder der vier Kegel berührt die Fläche längs *vier* von einander verschiedenen Erzeugenden und jede ebene Doppelcurve hat folglich in den drei Kegelcentren (dem Polardreiecke des Kegelschnittbüschels) selbst einen Doppelpunkt*).

Unter der Gesammtheit der Flächen achter Ordnung sind insbesondere *vier* ausgezeichnet. Die erste derselben ist durch den Werth 0 der Constante charakterisirt: jeder Punkt der Raumcurve wird dadurch sich selbst zugeordnet. Durch die Verbindungslinie entsprechender Punkte entsteht mithin die von den Tangenten der Curve gebildete *developpabele Fläche.*

Legt man nun weiter der Constanten C die speciellen Werthe $\frac{p}{2}$, $\frac{p'}{2}$, $\frac{p+p'}{2}$ bei, so erhält man *drei Flächen vierter Ordnung*, von denen jede doppelt zählend in dem behandelten Flächensysteme enthalten ist**). Denn von jedem Punkte u der Raumcurve geht jetzt

*) Die vier variabelen Punkte, in welchen ein Kegelschnitt des Büschels von den ebenen C_4 geschnitten wird, liegen paarweise mit den Schnittpunkten der Seiten des Polardreiecks und des Kegelschnittes harmonisch. Ein Grenzfall dieser Eigenschaft ist es, dass die beiden Tangenten in einem Doppelpunkte harmonisch sind zu den beiden von diesem Punkte ausgehenden Seiten des Polardreiecks, zufolge deren de la Gournerie diese Curven: „Trinodale harmonique" genannt hat. A. a. O. p. 91.

**) „Surfaces limites" de la Gournerie p. 114.

nur noch eine einzige Erzeugende aus, da die Punkte $u+C$ und $u-C$ identisch sind. Ebenso wird, wie die früheren Gleichungen lehren, eine beliebige Secante der Curve nur noch in zwei weiteren Punkten geschnitten. Die Erzeugenden je einer dieser drei Flächen verbinden *„correspondirende Punkte“ derselben Art*; solche Linien schneiden sich aber, wie wir gesehen haben, nur auf zwei Gegenkanten des Tetraeders. Es ergiebt sich demnach das Resultat:

Die durch zwei Gegenkanten des Polartetraeders bestimmte Liniencongruenz hat mit dem Secantensysteme der Raumcurve vierter Ordnung eine Linienfläche vierter Ordnung gemein.

Die Leitlinien der Congruenz sind die Doppellinien dieser Fläche. Das Geschlecht derselben ist also ebenfalls gleich 1. Jede Tetraederebene schneidet die Fläche längs der Doppellinie und einem Paare von Erzeugenden. Nach allem Bisherigen kann die Construction dieser Linienflächen vierter Ordnung auch so ausgesprochen werden: Bestimmt man auf jeder Secante der Fundamentalcurve die vier Punkte, in welchen dieselbe von vier Tangenten der Curve geschnitten wird, so lassen sich diese auf drei Arten in je zwei Punktepaare zusammenfassen; construirt man nun weiter auf allen Secanten drei neue Paare von Punkten, von denen jedes mit zwei zusammengehörigen Paaren des Quadrupels harmonisch ist, so erzeugen diese drei Punktepaare die drei Linienflächen vierter Ordnung.

Da durch jeden Punkt des Raumes im Allgemeinen nur *zwei* Secanten der Curve gehen (ausser den Punkten der Curve bilden nur die vier Kegelcentren eine Ausnahme, während auf den Erzeugenden der vier Kegel die beiden Secanten in eine zusammenfallen), und in jeder Ebene 6 Secanten enthalten sind, so folgt, dass auch in jedem Punkte des Raumes sich im Allgemeinen nur *zwei* Flächen schneiden, und dass jede Ebene von *sechs* Flächen des Systemes berührt wird. Um die Lage der sechs Berührungspunkte in irgend einer Ebene zu bestimmen, projicire man die Raumcurve von einem ihrer Punkte aus auf eine Ebene. Die Bildcurve dritter Ordnung ist eindeutig auf die Raumcurve bezogen und jedem ihrer Punkte kann dasselbe Argument beigelegt werden, welches der entsprechende Punkt im Raume besitzt. Ist a das Argument des Projectionscentrums, so besteht für drei auf einer Geraden gelegene Punkte der C_3 die Relation: $u_1+u_2+u_3=-a$. *Demzufolge erscheinen die Tangentialkegel des Flächensystemes als die Hauptcoincidenzcurven des Connexes Q in der Ebene.* Eine beliebige Gerade in dieser Ebene wird von drei der Curven berührt und zwar in den drei Punkten, von denen jeder harmonisch gelegen ist zu *einem* Schnittpunkt der Geraden mit der Curve in Bezug auf die beiden anderen. Legt man also durch eine Secante der Raumcurve eine beliebige Ebene und sucht den Berührungspunkt dieser Ebene mit der

Fläche achter Ordnung, welcher die Secante angehört, so hat man zu den zwei Curvenpunkten und zu dem Punkte, in welchem die Verbindungslinie der beiden anderen in der Ebene gelegenen Punkte der C_4 die Secante trifft, den vierten harmonischen zu construiren.

Insbesondere ist um eine Erzeugende eines Kegels jede Ebene eine uneigentlich tangirende in dem Durchschnitte der Erzeugenden mit der gegenüber liegenden Tetraederseite und nur die Ebene, welche zugleich den Kegel tangirt, tangirt auch die Fläche längs der ganzen Geraden.

Es erübrigt noch die Réalitätsverhältnisse dieser Flächen zunächst bei den reellen Curvenarten kurz zu erörtern: *Bei den Curven* α *und* β gehen von einem reellen Curvenpunkte zwei reelle Erzeugende aus, wenn der Constanten C entweder völlig reelle oder complexe Werthe mit dem imaginären Bestandtheile $\frac{p'}{2}$ beigelegt werden. Es giebt indessen auch Flächen, für welche die Raumcurve vierter Ordnung eine *isolirte Doppelcurve* bildet; dieselben gehören zu rein imaginären Werthen von C. (Denn ist $C = \beta i$, so sind im ersten Falle die Punkte $\alpha - \frac{\beta i}{2}$ und $\alpha + \frac{\beta i}{2}$, im zweiten Falle $\alpha + \frac{1}{8}p' - \frac{\beta i}{2}$ und $\alpha + \frac{1}{8}p' + \frac{\beta i}{2}$ conjugirt imaginär, welchen Werth auch α haben mag). *Bei den Curven* γ werden die Flächen reell und die Doppelcurve verläuft auf einem reellen Flächenstücke, wenn C reell ist; dagegen wird sie für reelle Flächen bei rein imaginären Werthen der Constanten isolirt. Die vier ebenen Doppelcurven vierter Ordnung sind bei den zu α gehörigen Flächen alle reell, bei den zu β gehörigen imaginär, während bei der dritten Art γ zwei reell, zwei imaginär sind.

Hier bietet sich auch wiederum die Gelegenheit, die völlig imaginäre Raumcurve vierter Ordnung zu erwähnen, welche als Durchschnitt eines *reellen* Flächenbüschels zweiter Ordnung auftreten kann. Dieselbe führt nämlich auf reelle Quadricuspidalflächen, bei denen die vier ebenen Doppelcurven reell, dagegen die räumliche Doppelcurve imaginär ist. Von den drei Linienflächen vierter Ordnung sind in diesem Falle, wo die Developpable imaginär ist, zwei reell.

§ 9.

Die eindeutigen, insbesondere die linearen Transformationen der Curve in sich selbst.

Die beiden Arten eindeutiger Zuordnung der Curvenpunkte, welche durch die Erzeugenden des Flächenbüschels zweiter und des Flächensystemes achter Ordnung geliefert werden können, erschöpfen alle Möglichkeiten eindeutiger Transformationen der Curve in sich selbst. Es entsteht die Frage, ob unter diesen auch solche sind, welche zugleich eine *lineare* Transformation des ganzen Raumes bedeuten. Die nothwendige und, wie sich sogleich ergeben wird, auch hinreichende Bedingung, welche für dieselben erfüllt sein muss, besteht darin, dass vier in einer Ebene gelegene Curvenpunkte wiederum in vier Punkte einer Ebene übergeführt werden; d. h. es muss sowohl für die Transformationen u und $-u+C$, als auch u und $+u+C$ die Gleichung gelten:

$$4C \equiv 0, \quad (\text{mod. } p \text{ und } p').$$

Diese Gleichung liefert 16 Werthe für C. Unter diesen sind insbesondere ausgezeichnet: $C=0$, $\frac{p}{2}$, $\frac{p'}{2}$, $\frac{p+p'}{2}$. Die zu diesen Werthen gehörigen Transformationen der *einen* Art (u und $-u+C$) lassen jeden der vier Kegel in sich unverändert und sind je in einer Collineation des ganzen Raumes enthalten, bei welcher jedesmal eine Kegelspitze Collineationscentrum und die gegenüberliegende Tetraederebene die feste Collineationsebene ist. Die entsprechenden Transformationen der anderen Art (u und $+u+C$) setzen sich aus je zwei dieser linearen Transformationen zusammen; sie sind also selbst linear und enthalten auch die identische Transformation.

Die übrigen 12 aus jeder Reihe sind aber gleichfalls lineare des ganzen Raumes; denn durch dieselben wird jedem Raumpunkte, als dem Durchschnitte zweier Secanten, ohne Ausnahme ein und nur ein Punkt, nämlich der Durchschnitt der entsprechenden Secanten, zugeordnet. Es giebt mithin im Ganzen 32 lineare Transformationen, bei welchen die Raumcurve vierter Ordnung und mit ihr der Flächenbüschel zweiter Ordnung in ihrer Gesammtheit ungeändert bleiben*).

---

*) Setzt man das Polartetraeder des Flächenbüschels als bekannt voraus, so muss sich die Gruppe der ersten 8 Transformationen rational, die der 24 anderen durch Quadratwurzeln darstellen lassen. In der That wird, wenn das Polartetraeder als Coordinatensystem gewählt und das Flächenbüschel in der Form:

$$(k_1+\lambda)\,x_1^2 + (k_2+\lambda)\,x_2^2 + (k_3+\lambda)\,x_3^2 + (k_4+\lambda)\,x_4^2 = 0$$

gegeben ist, die erste Gruppe durch die einfachen Gleichungen:

$$\varrho \cdot x_1 = \pm y_1, \quad \varrho \cdot x_2 = \pm y_2, \quad \varrho \cdot x_3 = \pm y_3, \quad \varrho \cdot x_4 = \pm y_4$$

geliefert; die Zeichencombinationen bestimmen acht verschiedene Möglichkeiten. Die übrigen Transformationen sind durch Gleichungen von folgender Form charakterisirt:

$$\begin{aligned}
\varrho \cdot x_1 &= \pm\sqrt{(k_2-k_3)\,(k_4-k_2)} \cdot y_2\,,\\
\varrho \cdot x_2 &= \pm\sqrt{(k_1-k_3)\,(k_4-k_1)} \cdot y_1\,,\\
\varrho \cdot x_3 &= \pm\sqrt{(k_4-k_1)\,(k_4-k_2)} \cdot y_4\,,\\
\varrho \cdot x_4 &= \pm\sqrt{(k_3-k_1)\,(k_3-k_2)} \cdot y_3\,.
\end{aligned}$$

Solch ein System repräsentirt acht Transformationen und kann auf drei verschiedene Arten gebildet werden. Andere lineare Transformationen als diese sind nicht vorhanden.

Die geometrischen Eigenschaften derselben in Bezug auf den Flächenbüschel sind folgende. Hat C einen der vier ausgezeichneten Werthe, so geht bei den vier Transformationen: u und $-u+C$ jede Fläche des Büschels in sich selbst über, derart, dass sich eine Erzeugende der einen Schaar mit einer der vier aus der anderen Schaar vertauscht, von welcher sie auf einer Tetraederebene geschnitten wird. Dagegen bleiben bei den Transformationen u und $u+C$ die beiden Schaaren auf jeder Fläche in sich ungeändert und es vertauschen sich je zwei Linien des eben erwähnten Quadrupels. Bei den noch übrigen 12 Transformationen jeder Reihe geht *eine Fläche des Büschels in eine der drei anderen über, welche mit ihr einem linearen Complexe angehören* (§ 7.). Dieser Uebergang wird bei je zwei zusammengehörigen Flächen auf 8 verschiedene Weisen bewerkstelligt, *indem man jede Erzeugende mit einer der 8 Linien vertauscht, welche auf der anderen Fläche gelegen das Polartetraeder in demselben Doppelverhältniss treffen, wie die ursprüngliche Erzeugende.* Insbesondere geht bei diesen 24 Transformationen jeder Kegel in einen anderen über, und die nämlichen beiden Kegel entsprechen sich bei 8 verschiedenen Umformungen.

Ueberhaupt wird bei allen Transformationen der ersten Reihe (u und $-u+C$) die eine Schaar der Erzeugenden einer Fläche, welche durch den Werth C' charakterisirt ist, in die eine Schaar der Erzeugenden der durch den Werth $2C-C'$ charakterisirten Fläche übergeführt, während die zweite Schaar der ersten Fläche in eine Schaar von Erzeugenden auf der Fläche $2C+C'$ verwandelt wird. Es giebt also bei jeder Transformation *vier* Flächen, welche in Bezug auf jede ihrer beiden Schaaren in sich ungeändert bleiben; dieselben gehören zu den Werthen:

$$\pm C' = C, \quad C+\frac{p}{2}, \quad C+\frac{p'}{2}, \quad C+\frac{p+p'}{2}.$$

Nur bei den 24 linearen Transformationen fallen je zwei dieser Flächen zusammen.

Sind u und v die Argumente zweier Punkte, so sind $-u+C$ und $-v+C$ die der zugeordneten. Da die Differenz zwischen denselben für beide Paare den nämlichen Werth hat, so folgt, dass bei allen diesen Transformationen jede Secante immer nur in eine solche übergeführt wird, welche das Tetraeder in demselben Doppelverhältniss, wie jene schneidet; *es bleibt mithin in dem Systeme der Flächen achter Ordnung jede Fläche für sich bestehen.*

Die Transformationen der zweiten Reihe werden dadurch erhalten, dass man je zwei Transformationen der ersten Reihe verbindet. Insbesondere kann man auf eine Transformation der ersten Reihe immer eine perspectivische Umformung vermittelst eines der Kegel folgen lassen, man erhält so alle Transformationen der zweiten Reihe. Bei diesen

Collineationen vertauschen sich nur die beiden Schaaren von Erzeugenden auf jeder Fläche des Büschels, nämlich je zwei, welche sich auf einer Tetraederebene schneiden, und es bleiben die eben bewiesenen Sätze alle giltig.

§ 10.

Ueber mehrdeutige Beziehung zwischen den Curvenelementen und der entsprechenden Relation zwischen den Differentialen.

Es soll endlich noch kurz auf die Flächen, welche man durch eine allgemeine lineare Relation zwischen den Argumenten erhält, hingewiesen und der Zusammenhang zwischen diesen Untersuchungen mit der im § 4. aufgestellten Fundamentalgleichung für die Werthe des elliptischen Differentiales erörtert werden.

In einer Tangentialebene einer Fläche zweiter Ordnung liegen vier Punkte der Curve und zwischen den Argumenten je zweier derselben finden die Relationen statt:

$$v_2 = -v_1 + C, \quad v_4 = -v_3 - C.$$

Dreht man nun die berührende Ebene unendlich wenig um eine in ihr gelegene Tangente der Fläche $+C$, so erhält man wiederum eine Tangentialebene der nämlichen Fläche und zwischen den Differentialen der vier neuen Schnittpunkte, das heisst zwischen den Zuwüchsen, welche die Argumente erfahren haben, müssen die Gleichungen bestehen:

$$dv_2 = -dv_1, \quad dv_4 = -dv_3.$$

Sollen aber in der allgemeinen biquadratischen Gleichung je zwei Wurzeln einander gleich sein, so muss der Coefficient von D^1 verschwinden. *Der Flächenbüschel zweiter Ordnung bildet demnach das Integral der durch die Form:*

$$\Delta = (a\alpha u\, du)\,(bc u\, du)\,(\beta\gamma u\, du)\,(a\beta\gamma u)\,(\alpha bc u) = 0$$

*dargestellten Differentialgleichung**).

---

*) So evident dieses Resultat im gegebenen Falle vermöge der geometrischen Eigenschaft von $\Delta = 0$ ist, es knüpft sich an dasselbe doch die allgemeine Frage, in welcher Weise sich eine Form mit zwei Reihen von Ebenencoordinaten als Differentialgleichung auffassen lässt, und unter welchen Bedingungen das Integral solch einer Differentialgleichung in ein System von einfach unendlich vielen Flächen gebracht werden kann, so dass jeder Punkt des Raumes zusammen mit den durch ihn hindurchgehenden Tangentialebenen je ein Element der Differentialgleichung darstellt. Zur Bildung einer Differentialgleichung ist erforderlich, dass die zweite Reihe der Ebenencoordinaten nur in Unterdeterminanten mit der ersten Reihe verbunden auftritt, oder deutlicher gesagt, *die Formen mit einer Reihe von Ebenencoordinaten* (dualistisch: Punktcoordinaten) *und einer Reihe von Liniencoordinaten* sind es, welche zu den totalen Differentialgleichungen zwischen vier

Die nämliche Ueberlegung führt auch auf die Differentialgleichung des Flächensystemes achter Ordnung. In einer Berührungsebene an eine dieser Flächen liegen vier Curvenpunkte, und zwischen den Argumenten derselben bestehen die Gleichungen:

$$v_2 = v_1 + C, \quad (v_4 = -v_3 - 2v_1 - C).$$

Bei einer unendlich kleinen Drehung um eine Tangente der Fläche erhält man eine neue Tangentialebene, und die Differentiale der vier neuen Schnittpunkte sind durch die Gleichungen verbunden:

$$dv_2 = dv_1, \quad (dv_4 = -dv_3 - 2dv_1),$$

d. h. *das Flächensystem achter Ordnung ist das Integral der durch das Verschwinden der Discriminante unserer biquadratischen Gleichung dargestellten Differentialgleichung.* Nach Absonderung des Factors: $6^3 \cdot 4^6 \mathsf{A}$ erhält diese Discriminante die Form:

$$\mathsf{E}(\mathsf{AE} - 3\Gamma^2)^2 - 9\Delta^2(9\mathsf{A}\Delta^2 + 6\mathsf{A}\Gamma\mathsf{E} - 2\Gamma^3) = 0.$$

Dieselbe ist in den Differentialen du vom *zwölften* Grade und liefert mithin zu jeder Ebene u das *Quadrat* der sechs Punkte, welche auf den Secanten der Raumcurve harmonisch zu den Ecken des Polardreieckes in Bezug auf die Curvenpunkte gelegen sind*).

Diese Untersuchungen lassen sich nun so verallgemeinern, dass zwischen den Argumenten zweier Curvenpunkte die lineare Beziehung:

$$v = \frac{m}{n} u + C = \varrho \cdot u + C$$

eingeführt wird. Dabei bezeichnen m und n zwei relativ prime rationale oder irrationale reelle oder auch imaginäre Zahlen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte erzeugen bei constanten Werthen von ϱ und C eine Linienfläche, die im Allgemeinen nur für rationale und reelle Werthe von ϱ algebraisch ist. In diesem Falle ist Ordnung und Classe der Fläche gleich $3m^2 + 2mn + 3n^2$ und die Raumcurve vierter Ordnung bildet eine $m^2 + n^2$-fache Curve solch einer Fläche. Zu demselben Werthe von ϱ gehört, wenn C variirt wird, ein Flächensystem.

---

homogenen Veränderlichen führen. Soll eine solche Gleichung insbesondere durch ein Flächensystem integrabel sein, so muss sie erstlich in ein Product linearer Factoren in Bezug auf die Differentiale zerfallen (d. h. in jeder Ebene artet die zugeordnete Classencurve in ein Product von Strahlbüscheln erster Ordnung aus), sodann muss jeder dieser linearen Factoren ein exactes Differential sein. Die analytischen Bedingungen lassen sich am einfachsten formuliren, indem man die Formen wie homogene ternäre behandelt. Denn unter den sechs Liniencoordinaten können je drei so ausgewählt werden, dass von ihnen und den Grössen u_i die übrigen in linearer Weise abhängen.

*) Um direct den Nachweis zu führen, dass die Discriminante ein Quadrat ist, müsste man die Form Δ^2 als Function von $A_{111} \cdots$ und $F_{11} \cdots$ entwickeln.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen im Allgemeinen *vier* Flächen und jede Ebene wird von *zwölf* Flächen des Systemes berührt. Die zwölf Berührungspunkte liegen paarweise auf den sechs in der Ebene verlaufenden Secanten und je einer dieser Punkte bildet mit einer Ecke des Polardreieckes in Bezug auf die beiden Curvenpunkte ein für das ganze System constantes Doppelverhältniss, dessen Werth $d = -\varrho$ ist. Der Beweis dieser Sätze kann auch ohne weiteres aus den für die ebene C_3 in meinen früheren Aufsätzen aufgestellten Relationen entnommen werden.

Die Differentialgleichung solch eines Flächensystemes wird erhalten, indem man die Bedingung einführt, dass die biquadratische Gleichung zwei Wurzeln von der Form D und $\varrho \cdot D$ enthält; sie ist wie erforderlich in den Grössen du vom zwölften Grade. Dass speciell nur die Discriminante in ein Quadrat ausartet, ist zufolge des bei ihr stattfindenden harmonischen Verhältnisses in diesem Zusammenhange ersichtlich. Bei ihr wird das zugehörige Flächensystem gewissermaassen doppelt dargestellt, da zu dem Werthe $+C$ und $-C$ der Constanten dieselbe Fläche gehört. Auch für den äquianharmonischen Werth des Doppelverhältnisses gewinnt man eine Differentialgleichung zwölften Grades; denn es sind auf jeder Secante immer noch zwei Berührungspunkte vorhanden. Die nähere Untersuchung dieser Flächensysteme, insbesondere hinsichtlich der auf ihnen gelegenen Doppelcurven und der vier mit den Tetraederecken zusammenfallenden singulären Punkte erfordert Hilfsmittel, die über die Parameterdarstellung der Fundamentalcurve hinausgehen, weil nunmehr eine Repräsentation der einzelnen auf einer Erzeugenden gelegenen Punkte nothwendig wird.

Darmstadt, im Januar 1877.

Ueber die Discriminante.

Von

A. Brill in München.

In dieser Note beabsichtige ich, eine in der Geometrie gebräuchliche Untersuchungsmethode für die Theorie der Gleichungen zu verwerthen, um einige in der nachfolgenden Abhandlung öfter angewendete Sätze zu beweisen. Gegeben sei eine Gleichung mit einer Unbekannten und reellen Coefficienten, die nicht absolut constant, sondern von einer Anzahl von veränderlichen Parametern abhängig zu denken sind. Dann kann man den folgenden Satz aussprechen: Wenn die Discriminante dieser Gleichung bei stetiger Veränderung der Coefficienten den Werth Null passirt, indem sie ihr Vorzeichen *ändert*, so geht eine *ungerade* Anzahl von Wurzelpaaren der Gleichung aus dem Reellen in das Imaginäre über (oder umgekehrt); *ändert* die Discriminante aber, indem sie durch Null geht, ihre Vorzeichen *nicht*, so ändert sich die Zahl der complexen Wurzelpaare um eine *gerade* Anzahl oder überhaupt nicht. Lässt sich also beispielsweise aus der Discriminante ein in jenen Parametern rationaler Factor *doppelt* ausscheiden, so wird allemal, wenn dieser den Werth Null passirt, sich die Anzahl der reellen Wurzeln entweder überhaupt nicht, oder um ein Vielfaches von 4 ändern.

Der Satz ist eine unmittelbare Folge des nachstehenden:

Das Vorzeichen der Discriminante einer Gleichung — lauter verschiedene Wurzeln vorausgesetzt — ist negativ, wenn die Anzahl der complexen Wurzelpaare eine ungerade ist, positiv, wenn diese Zahl gerade ist.

Die Discriminante kann man hierbei durch das Quadrat der Wurzeldifferenzen, das von ihr sich um eine positive Constante unterscheidet, ersetzen. Wir betrachten das Quadrat des Differenzenproducts Δ_n von n reellen bez. paarweise conjugirt imaginären Grössen:

$$x_1\; x_2\; x_3\; \cdots\; x_n,$$

und nehmen an, das Product:

$$\Delta_n^2 = (x_1 - x_2)^2\,(x_1 - x_3)^2 \cdots (x_{n-1} - x_n)^2$$

habe einen positiven oder negativen Werth, je nachdem die Zahl der conjugirt imaginären Grössenpaare x eine gerade oder ungerade ist. Dann bleibt die Behauptung noch richtig, wenn man zu den vorhandenen n Grössen eine weitere reelle Grösse x_{n+1} hinzunimmt, wodurch zu Δ_n^2 der positive Factor:

$$(x_{n+1}-x_1)^2\,(x_{n+1}-x_2)^2\cdot\cdot\cdot\cdot(x_{n+1}-x_n)^2$$

hinzutritt; ebenso bei Hinzunahme von beliebig vielen reellen Grössen. Nimmt man aber zu jenen n Grössen 2 conjugirt imaginäre x_{n+1}, x_{n+2} hinzu, so erhält Δ_n^2 den Factor:

$$\begin{aligned}&(x_{n+1}-x_1)^2\,(x_{n+1}-x_2)^2\cdot\cdot\cdot\cdot(x_{n+1}-x_n)^2\,\cdot\\ \cdot\,&(x_{n+2}-x_1)^2\,(x_{n+2}-x_2)^2\cdot\cdot\cdot\cdot(x_{n+2}-x_n)^2\,\cdot\\ \cdot\,&(x_{n+2}-x_{n+1})^2,\end{aligned}$$

der wegen des letzten Klammerfactors eine negative Grösse ist. Der Satz ist also für $n+1$ und $n+2$ richtig, wenn er es für n ist. Für $n=2$ und $n=3$ ist die Giltigkeit aber evident, und was so für das Quadrat des Differenzenproducts bewiesen ist, gilt unmittelbar von der Discriminante selbst.

Bei Gleichungen, die der Analysis oder der Geometrie entstammen, kommt es vor, dass die Discriminante, als Function der Parameter, von welchen die Coefficienten abhängen, aufgefasst, in rationale Factoren zerfällt. Um den Zusammenhang zwischen dem Grade der Vielfachheit, in welchem ein solcher Factor in der Discriminante vorkommt, und der Anzahl der durch das Verschwinden derselben herbeigeführten Wurzelübergänge zu finden, ermittle man zunächst die entstehenden Doppel- oder vielfachen Wurzeln, und bestimme aus einer Variation, die man den Parametern zugleich mit den Variabeln ertheilt, die Zuwächse der letzteren als Function der ersteren.

Sei ξ die Doppelwurzel, so berechnet sich die Variation ε von ξ aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}&\delta f+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}\cdot\varepsilon^2+2\cdot\frac{\partial\,\delta f}{\partial\xi}\cdot\varepsilon+\delta^2 f\right)\\ &\quad+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial\xi^3}\cdot\varepsilon^3+3\cdot\frac{\partial^2\delta f}{\partial\xi^2}\cdot\varepsilon^2+3\cdot\frac{\partial\,\delta^2 f}{\partial\xi}\cdot\varepsilon+\delta^3 f\right)+\cdots=0,\end{aligned}$$

wo unter δf die erste, $\delta^2 f$ die zweite etc. Variation von f hinsichtlich der darin auftretenden Parameter zu verstehen ist und für x überall ξ, für die Parameter diejenigen Werthe angenommen sind, für die ξ eine Doppelwurzel wird. Aber indem man über das Verhalten der Variationen der Parameter beim Durchgang durch Null passend verfügt, kann man in der nächsten Nähe der Verschwindungswerthe alle Variationen einer unter ihnen proportional setzen, die dann als linearer Factor von δf, als quadratischer von $\delta^2 f$ etc. auftritt, so dass man hat:

$$\eta f_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\cdot \varepsilon^2 + 2\,\varepsilon\cdot\eta\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \eta^2\cdot f_2\right)$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}\cdot\varepsilon^3 + 3\cdot\varepsilon^2\eta\cdot\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + 3\,\varepsilon\eta^2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \eta^3\cdot f_3\right) + \cdots = 0.$$

Nimmt man nun η und damit ε sehr klein an, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$\eta f_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\cdot\varepsilon^2 = 0$$

sofern nicht einer dieser Terme einzeln für sich verschwindet.

Im anderen Falle muss man zu höheren Potenzen von ε bez. η fortschreiten und durch die bekannten (Puiseux'schen) Regeln die beizubehaltenden Terme bestimmen. Ebenso nun, wie in der Nähe des Verschwindungswerthes der Grösse η die Gleichung für ε, von welchem Grade sie auch immer sein mag, diejenige für x ersetzen kann, *so vertritt in der Nähe des Verschwindungswerthes der Variationen der Parameter die Discriminante der Gleichung für ε diejenige der Gleichung für x,* indem die erstere das Quadrat des Differenzenproducts der einander gleich werdenden Wurzeln und somit, bis auf einen constanten Factor, den verschwindenden Theil der Discriminante der Gleichung für x darstellt.

Aus dieser Bemerkung lässt sich aber die Vielfachheit desjenigen Factors der Discriminante der Gleichung für x bestimmen, dessen Verschwinden die Wurzel ξ zur Doppel- oder vielfachen Wurzel macht. Diese Zahl ist offenbar *gleich dem Grade der Discriminante der Gleichung für ε in Bezug auf η*, oder wenn zugleich mit ξ auch noch andere davon und untereinander verschiedene Wurzeln ξ', ξ'', $\cdots$ mehrfache Wurzeln werden, gleich dem Product der Grade der Discriminanten der entsprechenden Gleichungen.

Beispiele zu diesem Satz findet man bei Plücker, algebraische Curven (2. Abschnitt) und bei Zeuthen, der von ähnlichen Ueberlegungen geleitet eine auf zusammenfallende Lösungen bezügliche Modification des Chasles'schen Correspondenzprincips angab (Almindelige Egenskaber, Acad. Kopenhagen Ser. V, Vol. 10, § 26.) sowie in der nachfolgenden Abhandlung § 6., 7.

Ueber rationale Curven vierter Ordnung.

Von

A. Brill in München.

(Mit zwei lithographirten Tafeln.)

Die eleganten Eigenschaften einzelner rationaler Curven 4. Ordnung und ihr Vorkommen in Problemen der angewandten Mathematik hat die Geometer seit Langem und wiederholt zu Untersuchungen veranlasst, die interessante Details hinsichtlich der Gestalt und Erzeugungsweise dieser Curven zu Tage förderten. Viele jener Eigenschaften erscheinen aber bei näherer Betrachtung als Ausdruck bekannter Sätze der projectivischen Geometrie. Der Zweck des Nachfolgenden ist, eine zusammenfassende, auch die speciellen Fälle nicht ausschliessende Darstellung der projectivischen Eigenschaften der Curven 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten und ihrer gestaltlichen Formen zu geben, in welche sich die bekannteren bequem einreihen lassen. Es liegt nahe, hierbei auf gewisse Fragen einzugeben, die für die Curven 4. Ordnung ohne Doppelpunkt noch unbeantwortet, für die rationalen Curven aber wegen der Einfachheit ihrer Gleichung eben noch discutirbar sind. Ich habe namentlich die Eigenschaften der Wendepunkte und deren gegenseitige Lage im Auge, sowie den engen Zusammenhang derselben mit den Doppeltangenten, wie er nach den Untersuchungen von Zeuthen*) über Systeme von Curven 4. Ordnung und dessen Sätzen über die Realitätsverhältnisse der Doppeltangenten und Wendepunkte, die Klein auf Curven n. Ordnung ausgedehnt hat, bestehen muss.

Die Doppeltangenten der rationalen Curven 4. Ordnung hat Salmon**) durch eine geschickte Umformung der Gleichung dieser Curven dargestellt; zur Untersuchung der Wendepunkte muss man jedoch einen anderen Weg einschlagen. Ich gehe von der Darstellung der Coordinaten der Curve durch einen Parameter aus, was die Entwickelung

---

*) Zeuthen, Almindelige Egenskaber etc. (s. vorige Note), ferner: Sur les courbes du 4. ordre. Diese Annalen Bd. VII. — Klein, Eine neue Relation zwischen den Singularitäten etc., ibid. Bd. X.

**) Salmon, höhere Curven, herausg. von Fiedler, Art. 284 ff.

an die Bildungen eines simultanen Systems von 3 quadratischen Factoren zu knüpfen gestattet, und bilde in diesen die Gleichungen 6. und 8. Grades für die Parameter bez. der Wendepunkte und Doppeltangenten. Die erstere erweist sich als im Allgemeinen auf Gleichungen niederen Grades nicht zurückführbar; dies bestätigt die auch sonst sich ergebende Bemerkung, dass die Eigenschaften der Wendepunkte tiefer liegen als die der Doppeltangenten. Die 6 Wendepunkte zeigen ein den 3 Wendepunkten einer rationalen Curve 3. Ordnung, die auf einer Geraden liegen, analoges Verhalten: sie liegen auf einem Kegelschnitt, der die Curve in noch 2 Punkten von übrigens nicht weiter bemerkenswerthen Eigenschaften schneidet. Namentlich geht derselbe im Allgemeinen nicht durch einen Doppelpunkt der Curve, woraus man denn ersieht, dass beim Uebergang von einer rationalen zu einer Curve 4. Ordnung ohne Doppelpunkte dieser Kegelschnitt nicht in einen solchen durch 8 Wendepunkte übergehen kann.

Ein merkwürdiges Verhalten zeigen die Discriminanten der erwähnten Doppeltangenten- und Wendepunkts-Gleichungen; sie zerfallen nämlich (s. den vorstehenden Aufsatz) in Factoren, die in den Coefficienten der betreffenden Gleichung rational sind. Bei der Bedeutung derselben für die Curve erschien es zweckmässig, ihnen besondere Namen beizulegen; ich nenne z. B. „Undulationsfactor" den Factor, der durch sein Verschwinden das Auftreten einer Undulationstangente anzeigt. Diese Factoren nun sind alle bis auf einen den Discriminanten der Wendepunkts- und der Doppeltangentengleichung, zum Theil in verschiedener Vielfachheit, gemeinsam, und in dieser Erscheinung finde ich den algebraischen Erklärungsgrund für die von Zeuthen und Klein bemerkten Beziehungen zwischen den reellen Wendepunkten und den isolirten Doppeltangenten, wonach die Zahl der Ersteren zwar von den isolirten, nicht aber von den etwa vorhandenen imaginären Doppeltangenten abhängt. Wenn nämlich ein solcher Factor, wie z. B. der „Undulationsfactor", einfacher Factor in beiden Discriminanten ist, so verschwinden, nach dem in vorstehender Note aufgestellten Satz, gleichzeitig mit zwei reellen Wendepunkten auch zwei reelle Berührungspunkte einer Doppeltangente, sie wird zur isolirten Doppeltangente; wenn aber andererseits z. B. der „Cuspidalfactor", dessen Verschwinden nämlich das Auftreten eines Rückkehrpunktes anzeigt, in der Discriminante der Wendepunktsgleichung einfach, in der der Doppeltangentengleichung doppelt auftritt, so erkennt man daraus, dass beim Durchgang durch den Verschwindungswerth die Zahl der reellen Wendepunkte um 2, die der Berührungspunkte der Doppeltangenten entweder um 4 oder überhaupt nicht ab- oder zunimmt, d. h. die Zahl der Doppeltangenten mit reellen Berührungspunkten ändert sich entweder überhaupt nicht, oder es werden 2 conjugirt imaginär.

Man findet zum Schluss eine vollständige Aufzählung der verschiedenen Curvenformen, auf welche sich unsere Darstellung bezieht. Von allen rationalen Curven 4. Ordnung ist die Curve mit dreifachem Punkt die einzige, auf die unsere Untersuchungen keine unmittelbare Anwendung haben, weil diese Curve nicht, wie alle anderen, selbst die Grenzfälle nicht ausgenommen, durch quadratische Transformation aus einem Kegelschnitt erhalten werden kann.

§ 1.

Die Gleichungen für die Singularitäten einer rationalen Curve.

Wenn die Coordinaten einer Curve rational durch einen Parameter darstellbar sind, so lassen sich die homogenen (Dreiecks-)Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ ganzen Functionen $F_i(\lambda)$, $(i=1,2,3)$ desselben proportional setzen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho\cdot x_1 = F_1(\lambda) \\ \varrho\cdot x_2 = F_2(\lambda) \\ \varrho\cdot x_3 = F_3(\lambda), \end{cases}$$

wo von den Functionen $F_i(\lambda)$ mindestens eine den n. Grad erreicht, wenn die Curve von der n. Ordnung ist.

Es mögen zunächst die Gleichungen für die Singularitäten wie Wendungen, Doppelpunkte, Doppeltangenten in einer Form aufgestellt werden, welche eine bequeme Berechnung der Coefficienten dieser Gleichungen ermöglicht und darum für nicht zu hohe Werthe von n vor der üblichen Darstellung den Vorzug zu verdienen scheint. Ich beschränke mich der Einfachheit halber auf Curven 4. Ordnung:

$$F_i(\lambda) = a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i + \lambda^3 d_i + \lambda^4 e_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo die $a, b, c, \cdots$ constante (reelle oder imaginäre) Grössen sind, und beginne mit der Aufstellung der Beziehung zwischen den Parametern $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ von 3 auf einer geraden Linie:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

liegenden Punkten der Curve. Ist λ_4 der dem 4. Schnittpunkt zugehörige Parameter, so erhält man, nach Substitution der $F_i(\lambda)$ in die Gleichung der Geraden, die symmetrischen Functionen der Wurzeln dieser Gleichung ausgedrückt durch:

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \sigma\cdot\lambda_4\cdot\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = -\sigma\cdot\lambda_4(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) - \sigma\cdot\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 = \sigma\cdot\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \sigma(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2), \\ \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 = -\sigma\cdot\lambda_4\cdot 1 - \sigma(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \sigma\cdot 1, \end{cases}$$

wo σ ein constanter Factor ist. Hieraus ergiebt sich die Gleichung zwischen den Parametern $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ dreier auf gerader Linie liegender Punkte der Curve:

$$(4)\quad 0 = D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \begin{vmatrix} a_1\,a_2\,a_3 & \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 & 0 \\ b_1\,b_2\,b_3 & -\lambda_2\lambda_3-\lambda_3\lambda_1-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ c_1\;c_2\;c_3 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2 \\ d_1\,d_2\,d_3 & -1 & -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 \\ e_1\;e_2\;e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wir betrachten einige besondere Lagen der Geraden.

I. Der Punkt ϱ (wo der Parameter zur Benennung des Punktes verwendet ist) liege auf der *Tangente* an einem Punkt λ der Curve; dann besteht zwischen ϱ und λ eine „Correspondenz"-Gleichung, die aus (4) erhalten wird, indem man $\lambda_3 = \varrho$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ setzt:

$$D(\varrho\lambda\lambda) \equiv D_1(\lambda\lambda)\cdot\varrho^2 + D_2(\lambda\lambda)\cdot\varrho + D_3(\lambda\lambda) = 0.$$

Die Ausdrücke D_1, D_2, D_3 gehen aus den unten (IV) ebenso bezeichneten hervor, indem man dort $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ setzt, und sind demnach vom 4. Grad in λ.

II. Neben $D(\varrho\lambda\lambda) = 0$ besteht dieselbe nach ϱ differentiirte Gleichung, wenn ϱ, λ ein den Berührungspunkten einer *Doppeltangente* zukommendes Parameterpaar ist. Durch Elimination von ϱ erhält man die Discriminante:

$$D_2{}^2(\lambda\lambda) - 4\,D_1(\lambda\lambda)\,D_3(\lambda\lambda) = 0$$

als Gleichung für die den Berührungspunkten zugehörigen 8 Parameterwerthe.

Aus den 5 Gleichungen (3) ergeben sich für das *einer* Doppeltangente zugehörige Parameterpaar Λ_1, Λ_2, indem

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \Lambda_1; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \Lambda_2$$

gesetzt wird, 5 Gleichungen, welche sich durch Elimination der Verhältnisse $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \sigma$ auf ein (zweien äquivalentes) System von Gleichungen zwischen Λ_1 und Λ_2 reduciren. Eine dieser Gleichungen ist:

$$(1)\qquad \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3}{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3} = \Lambda_1{}^2\Lambda_2{}^2,$$

wenn, wie wir dies später annehmen werden, $a_1 = a_2 = e_1 = e_2 = 0$ ist.

III. Wird die Gerade Wendetangente, so erhält man die Bedingungsgleichung für den Parameter eines *Wendepunkts*:

$$D(\lambda\lambda\lambda) = 0 = D_1(\lambda\lambda)\cdot\lambda^2 + D_2(\lambda\lambda)\cdot\lambda + D_3(\lambda\lambda).$$

IV. Gehören endlich die Parameter λ_1 und λ_2 den 2 Zweigen eines Doppelpunkts an, so wird der Parameter $\lambda_3 = \varrho$ eines dritten Schnitt-punktes der Geraden unbestimmt. Ordnet man also $D(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ nach Potenzen von λ_3 an, so verschwinden die Coefficienten derselben einzeln. Nun ist aber:

$$D(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = D_1(\lambda_1 \lambda_2) \cdot \lambda_3^2 + D_2(\lambda_1 \lambda_2) \cdot \lambda_3 + D_3(\lambda_1 \lambda_2),$$

wo die D durch folgende Determinanten darstellbar sind:

$$(6) \quad \begin{cases} D_1(\lambda_1 \lambda_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \lambda_1 \lambda_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -\lambda_1 - \lambda_2 & -\lambda_1 \lambda_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & -1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ D_2(\lambda_1 \lambda_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \lambda_1 \lambda_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -\lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 & \lambda_1 \lambda_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & -\lambda_1 - \lambda_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \\ D_3(\lambda_1 \lambda_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -\lambda_1 \lambda_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 \lambda_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -1 & -\lambda_1 - \lambda_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Parameterwerthe eines Doppelpunktes genügen also den 3 Gleichungen*):

$$D_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0, \quad D_2(\lambda_1 \lambda_2) = 0, \quad D_3(\lambda_1 \lambda_2) = 0.$$

§ 2.

Die Gleichungen für die Wendepunkte und Doppeltangenten unter Adjunction der Coordinaten der Doppelpunkte.

Die Gleichungen des vorigen Paragraphen werden weiterer Behandlung zugänglich, wenn man die Doppelpunkte der rationalen Curve 4. Ordnung in die Eckpunkte des Coordinatendreiecks verlegt. Von den linearen Factoren, in welche man die $F_i(\lambda)$ zerfällen kann,

---

*) Diese Gleichungen sind zweien äquivalent; denn die D gehören einer Matrix von 5 Horizontal- und 6 Verticalreihen an, für welche sich in bekannter Weise (Salmon-Fiedler, Raumgeometrie II., Art. 408) die gemeinsamen Verschwindungswerthe aller Determinanten durch die von zweien und gewissen Unterdeterminanten darstellen lassen.

sind dann je 2 paarweise einander gleich, und man erhält so die Coordinaten in der Form:

$$(7) \qquad \begin{cases} \varrho \cdot x_1 = F_1 = f_2 f_3 , \\ \varrho \cdot x_2 = F_2 = f_3 f_1 , \\ \varrho \cdot x_3 = F_3 = f_1 f_2 , \end{cases}$$

wo f_1, f_2, f_3 quadratische Functionen von λ sind.

Die Gleichungen für die Parameter der Doppelpunkte werden dann gegenstandslos, und diejenigen für die Wendepunkte $W = 0$ und die Berührungspunkte der Doppeltangenten $T = 0$ erhalten eine einfachere Gestalt, wenn man die folgende kanonische Form der Functionen f zu Grunde legt:

$$(8) \qquad \begin{cases} f_1 = \lambda^2 + a\lambda + b , \\ f_2 = \lambda^2 + c\lambda + d , \\ f_3 = \lambda . \end{cases}$$

wodurch man dann erhält:

$$(9) \quad \begin{cases} \varrho \cdot x_1 = \lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda , \\ \varrho \cdot x_2 = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda , \\ \varrho \cdot x_3 = \lambda^4 + \lambda^3(a+c) + \lambda^2(b+d+ac) + \lambda(bc+ad) + bd. \end{cases}$$

Diese Form der f ist noch allgemein genug, um alle invarianten Bildungen, die in den Coefficienten derselben erhalten werden, auf allgemeine quadratische Formen übertragen zu können. Die Gleichungen $W = 0$ und $T = 0$ erhalten wir (§ 1., III., II.) in der Form:

$$\begin{aligned} W &\equiv D_1 \cdot \lambda^2 + D_2 \cdot \lambda + D_3 = 0 , \\ T &\equiv D_2^2 - 4 D_1 D_3 \qquad\quad = 0 . \end{aligned}$$

Führt man die Coefficienten der kanonischen Form von $F_1 F_2 F_3$, wie sie oben (7), (8) angenommen wurde, ein, so erhält man:

$$D_1 = -\lambda^2 \cdot K ; \quad D_2 = L ; \quad D_3 = -bd \cdot K ,$$

wo:

$$(10) \quad \begin{cases} K = \lambda^2(c-a) + 2\lambda(d-b) + ad - bc , \\ L = \lambda^4(b-d) + 2\lambda^3(bc-ad) + \lambda^2(b-d)(ac-b-d) \\ \qquad\qquad + 2\lambda bd(a-c) + bd(b-d) \end{cases}$$

ist. Es ist somit die Gleichung für die Wendepunkte:

$$(11) \qquad W \equiv \lambda \cdot L - (\lambda^4 + bd)K = 0 .$$

Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten wird:

$$(12) \qquad T \equiv L^2 - 4bd \cdot \lambda^2 K^2 = 0 .$$

Das Product endlich der Parameter $\Lambda_1 \Lambda_2$ zweier derselben Doppeltangente zugehörigen Berührungspunkte ist für unsere Annahmen eine constante Grösse und zwar (§ 1. (5)):

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 = bd. \tag{13}$$

Wir werden weiter unten aus den Gleichungen (9) durch Elimination von λ die Gleichung der Curve 4. Ordnung Φ in homogenen Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ ableiten, wobei sich die Coefficienten als simultane Invarianten der 3 quadratischen Formen f ergeben. Man denke sich nun die Gleichungen derjenigen Curven gebildet, durch welche die Wendepunkte und Berührungspunkte der Doppeltangenten aus Φ ausgeschnitten werden. Setzt man in diese Gleichungen für die Coordinaten x_1 etc. wieder ihre Werthe $f_2\, f_3$ etc., so erhält man resp. W und T durch simultane Invarianten der f dargestellt. Nachdem man sich nun aber von der Möglichkeit einer solchen Darstellung überzeugt hat, verfährt man zweckmässiger umgekehrt und bildet mit Hülfe des „vollständigen“ Formensystems, wie Gordan das System der In- und Covarianten genannt hat, durch die alle anderen in der Form von ganzen Functionen darstellbar sind, die allgemeinen Ausdrücke für W und T aus den oben für die kanonische Form aufgestellten.

Das vollständige System von 3 quadratischen Formen f_1, f_2, f_3 besteht aber aus folgenden Bildungen (Clebsch, binäre Formen, p. 201 ff.):

$$f_1\, f_2\, f_3\; \vartheta_{23}\; \vartheta_{31}\; \vartheta_{12}\; D_{23}\; D_{31}\; D_{12}\; D_{11}\; D_{22}\; D_{33}\; R_{123}\,,$$

wo die Indices jedesmal angeben, in welcher Ordnung die Coefficienten der 3 Formen auftreten. Die Bedeutung der ϑ, D und R ist, in den homogenen binären Variabeln λ, μ geschrieben, die folgende:

$$\vartheta_{ik} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} f_i'(\lambda) & f_i'(\mu) \\ f_k'(\lambda) & f_k'(\mu) \end{vmatrix};$$

$$R_{123} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} f_1''(\lambda\lambda) & f_1''(\lambda\mu) & f_1''(\mu\mu) \\ f_2''(\lambda\lambda) & f_2''(\lambda\mu) & f_2''(\mu\mu) \\ f_3''(\lambda\lambda) & f_3''(\lambda\mu) & f_3''(\mu\mu) \end{vmatrix};$$

$$D_{ik} = \frac{1}{4} f_i''(\lambda\lambda) \cdot f_k''(\mu\mu) + \frac{1}{4} f_i''(\mu\mu) \cdot f_k''(\lambda\lambda) - \frac{1}{2} f_i''(\lambda\mu) \cdot f_k''(\lambda\mu).$$

Ausser den Formen selbst und deren Functionaldeterminanten sind keine Covarianten in dem System enthalten. Dies erleichtert die Umwandlung von L und K, aus denen sich W und T zusammensetzen, in invariante Bildungen wesentlich. Das vollständige System lautet in der von uns angenommenen kanonischen Form folgendermassen (μ werde $= 1$ gesetzt):

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1 = \lambda^2 + a\lambda + b\,, \\ f_2 = \lambda^2 + c\lambda + d\,, \\ f_3 = \lambda\,; \\[1ex] \vartheta_{23} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - d)\,, \\[1ex] \vartheta_{31} = -\frac{1}{2}(\lambda^2 - b)\,, \\[1ex] \vartheta_{12} = \frac{1}{2}\left\{\lambda^2(c-a) + 2\lambda(b-d) + ad - bc\right\}; \\[1ex] D_{11} = 2\left(b - \frac{a^2}{4}\right), \\[1ex] D_{22} = 2\left(d - \frac{c^2}{4}\right), \\[1ex] D_{33} = -\frac{1}{2}\,; \\[1ex] D_{23} = -\frac{c}{2}\,, \\[1ex] D_{31} = -\frac{a}{2}\,, \\[1ex] D_{12} = b + d - \frac{ac}{2}\,; \\[1ex] R = R_{123} = \frac{1}{2}(b-d)\,. \end{array}\right.$$

Endlich mögen gleich hier noch die folgenden Invarianten, welche sich später als die Coefficienten in der Gleichung $\Phi(x_1 x_2 x_3) = 0$ unserer Curve 4. Ordnung in homogenen Coordinaten erweisen werden, Platz finden:

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} d_{11} = \Delta_{2233} = D_{22}D_{33} - D_{23}{}^2 = -d\,, \\ d_{22} = \Delta_{3311} = D_{33}D_{11} - D_{13}{}^2 = -b\,, \\ d_{33} = \Delta_{2211} = D_{11}D_{22} - D_{12}{}^2 = (bc - ad)(a-c) - (b-d)^2; \\[1ex] d_{23} = \Delta_{2311} = D_{31}D_{21} - D_{11}D_{23} = bc - \frac{a}{2}(b+d)\,, \\[1ex] d_{31} = \Delta_{3122} = D_{23}D_{21} - D_{22}D_{31} = ad - \frac{c}{2}(b+d)\,, \\[1ex] d_{12} = \Delta_{1233} = D_{31}D_{32} - D_{33}D_{12} = \frac{1}{2}(b+d)\,, \end{array}\right.$$

für welche meist die kürzere, aber mit der obigen Bestimmung bezüglich der Indices nicht mehr übereinstimmende Bezeichnung d_{ik} gebraucht werden wird. Wir merken noch an:

$$(15^a)\qquad \vartheta_{ik} = -\vartheta_{ki}\,; \quad D_{ik} = D_{ki}\,; \quad d_{ik} = d_{ki}\,.$$

Man hat nun sogleich:

$$K = 2\vartheta_{12}\,.$$

T ist in den Coefficienten jeder der 3 Formen vom 4., W vom 2. Grad. L muss sich also aus Covariantenproducten von der Form: $\Pi^{(4)}_{11223}$, wo der obere Index den Grad in λ, μ angiebt, zusammensetzen. Ein solches Product ist:

$$R_{123} \cdot f_1 f_2 ,$$

welches schon im ersten und letzten Glied mit L übereinstimmt. Zur Herstellung der übrigen kann also nur noch ein Product verwendet werden, das f_3 als Factor hat; das einzige dieser Art, das den vorigen Bedingungen genügt, ist:

$$f_3 \cdot \vartheta_{12} \cdot D_{12} .$$

In der That ist:

$$2 R_{123} f_1 f_2 + 2 \vartheta_{12} D_{12} f_3 = L - \frac{ac}{2} \cdot \lambda K = L - ac \cdot \lambda \cdot \vartheta_{12} .$$

Aber die Grösse $ac \cdot \lambda$, welche ein Product von der Form $\Pi^{(2)}_{123}$ sein müsste, lässt sich als solches nicht darstellen, und man darf dies nicht einmal erwarten, da ja zwar W und T, nicht aber K und L einzeln invariante Bildungen sein müssen. Andererseits ist aber:

$$-(\lambda^4 + bd) + (b + d)\lambda^2 = -4 \vartheta_{13} \vartheta_{23} ,$$

und weiter durch Vereinigung:

$$(ac - 2(b + d))\lambda^2 = -2 D_{12} f_3^2 ,$$

so dass schliesslich *die Gleichung zur Bestimmung der Wendepunkte den folgenden einfachen Ausdruck erhält:*

$$\frac{W}{2} = R_{123} \cdot f_1 f_2 f_3 + 4 \vartheta_{12} \vartheta_{23} \vartheta_{31} . \tag{16}$$

Mit Hülfe der Identitäten (Clebsch, binäre Formen l. c.):

$$(17) \left\{ \begin{array}{ll}
\text{(a)} & R \cdot f_i = D_{1i} \vartheta_{23} + D_{2i} \vartheta_{31} + D_{3i} \vartheta_{12} , \\
\text{(b)} & 0 = f_1 \vartheta_{12} + f_2 \vartheta_{31} + f_3 \vartheta_{12} , \\
\text{(c)} & 2 \vartheta_{21} \vartheta_{31} = - f_2 f_3 D_{11} - f_1^2 D_{23} + f_1 f_2 D_{31} + f_1 f_3 D_{12} , \\
\text{(d)} & 2 \vartheta_{23}^2 = - f_2^2 D_{33} - f_3^2 D_{22} + 2 f_2 f_3 D_{23} , \\
\text{(e)} & 2 R \cdot \vartheta_{ik} = \begin{vmatrix} D_{1i} & D_{2i} & D_{3i} \\ D_{1k} & D_{2k} & D_{3k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} ; \\
\text{(f)} & 2 R^2 = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} ; \\
\text{(g)} & 2 R^2_{123} \cdot D_{12} = d_{21} d_{33} - d_{23} d_{31} ,
\end{array} \right.$$

und der analog gebildeten kann man den Ausdruck für W oder vielmehr für $R \cdot W$ auf eine für das Folgende wichtige Form bringen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\frac{W}{2} &= 4\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_{31} + f_1f_2(D_{13}\vartheta_{23} + D_{23}\vartheta_{31} + D_{33}\vartheta_{12}) + D_{12}f_3(f_1\vartheta_{23} + f_2\vartheta_{31} + f_3\vartheta \\ &= -\vartheta_{23}(2\vartheta_{31}\vartheta_{21} - f_1f_2D_{31} - f_1f_3D_{12}) - \vartheta_{31}(2\vartheta_{23}\vartheta_{12} - f_1f_2D_{23} - f_2f_3D_{12}) \\ &\qquad + \vartheta_{12}(f_3^2D_{12} + f_1f_2D_{33}) \\ &= \vartheta_{23}(f_2f_3D_{11} + f_1^2D_{23}) + \vartheta_{31}(f_3f_1D_{22} + f_2^2D_{31}) + \vartheta_{12}(f_3^2D_{12} + f_1f_2D_{33}).\end{aligned}$$

Daher endlich:

$$R\cdot W = -\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & f_2f_3D_{11} + f_1^2D_{23} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & f_3f_1D_{22} + f_2^2D_{31} \\ D_{31} & D_{23} & D_{33} & f_1f_2D_{33} + f_3^2D_{12} \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da die Formen f_i den reciproken Werthen der Coordinaten x_i proportional sind, so hat die Gleichung $W = 0$ in dieser Darstellung (die den Fall $R = 0$ natürlich ausschliesst) die Bedeutung einer Curvengleichung, und zwar *werden durch diese Curve, die von der* 6. *Ordnung ist, die Wendepunkte aus der gegebenen Curve* 4. *Ordnung* Φ *ausgeschnitten.* In welchem Zusammenhang dieselbe mit der Hesse'schen von Φ steht, die sie in vielen Beziehungen zu ersetzen geeignet ist, wird weiter unten (§ 4.) erörtert werden. — Rechnet man die Determinante aus, so kommt unter Einführung der oben (15) definirten Invarianten d_{ik}, für welche Identitäten bestehen, wie:

$$(17^{\text{h}})\qquad \begin{cases} d_{11}D_{11} + d_{12}D_{12} + d_{13}D_{13} = 2R^2, \\ d_{11}D_{13} + d_{12}D_{23} + d_{13}D_{33} = 0, \end{cases}$$

der Ausdruck:

$$(18)\quad \varpi(f_1f_2f_3) = R\cdot W = \begin{cases} \quad d_{11}f_1^2(\;\;D_{23}f_1 - D_{31}f_2 - D_{12}f_3) + D_{11}d_{11}f_1f_2f_3 \\ + d_{22}f_2^2(-D_{23}f_1 + D_{31}f_2 - D_{12}f_3) + D_{22}d_{22}f_1f_2f_3 \\ + d_{33}f_3^2(-D_{23}f_1 - D_{31}f_2 + D_{12}f_3) + D_{33}d_{33}f_1f_2f_3. \end{cases}$$

Wir wenden uns zur Umgestaltung der *Gleichung* $T = 0$ *für die Doppeltangenten.* Man hat oben den Ausdruck für L erhalten in der Form:

$$\frac{1}{2}L = \Pi_{11223} + \frac{ac}{2}f_3\vartheta_{12},$$

wo

$$\Pi_{11223} = R_{123}f_1f_2 + \vartheta_{12}D_{13}f_3.$$

Daher

$$\begin{aligned}\frac{T}{4} = \frac{L^2}{4} - bd\lambda^2\cdot K^2 &= \left(\Pi + \frac{ac}{2}f_3\vartheta_{12}\right)^2 - 4bd\cdot f_3^2\vartheta_{12}^2 \\ &= -2\Pi^2\cdot D_{33} + 4\Pi f_3D_{13}D_{23}\vartheta_{12} + \vartheta_{12}^2f_3^2\left(\frac{a^2c^2}{4} - 4bd\right).\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\frac{a^2c^2}{4} - 4bd = 2(D_{11}D_{22}D_{33} - D_{22}D_{12}^2 - D_{11}D_{23}^2).$$

Vereinigt man diese Glieder mit den übrigen, welche den Factor ϑ_{12}^2 besitzen, so kommt, unter Benutzung der Identität (17^i):

$$(19)\quad \frac{T}{8} = R\left[-R(f_2^2 f_3^2 D_{11} + f_3^2 f_1^2 D_{22} + f_1^2 f_2^2 D_{33}) + 2 f_1 f_2 f_3 (\vartheta_{23} D_{12} D_{13} + \vartheta_{31} D_{23} D_{21} + \vartheta_{12} D_{13} D_{23})\right]$$

was endlich, mit Hülfe von (17^h) und (17^e), übergeht in:

$$(20)\quad \frac{T}{4} = (f_2 f_3 d_{23} + f_3 f_1 d_{13} + f_1 f_2 d_{12})^2 - f_2^2 f_3^2 d_{22} d_{33} - f_3^2 f_1^2 d_{33} d_{11} - f_1^2 f_2^2 d_{11} d_{22}.$$

Unter Einführung der den f_i proportionalen reciproken Werthe der Coordinaten x_i in $T=0$ erhält man *die Gleichung des die Berührungspunkte der Doppeltangenten ausschneidenden Kegelschnitts*, eine Gleichung, die auf anderem Wege Salmon (a. a. O.) aufgestellt hat.

§ 3.

Die Curvengleichung in homogenen Coordinaten. Specielle Fälle.

Bevor die erhaltenen Gleichungen weiter discutirt werden, möge die geometrische Bedeutung der vorstehenden Darstellung in Kürze untersucht werden.

Zwischen den simultanen Invarianten D_{ik} und den quadratischen Formen $f_1 f_2 f_3$ besteht nach Clebsch, bin. Formen p. 205, die identische Relation:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & f_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & f_2 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die Formen f_i proportional den homogenen Coordinaten y_i eines Punktes in der Ebene, so repräsentirt diese Gleichung einen Kegelschnitt:

$$(2)\quad \varphi(y) \equiv d_{11} y_1^2 + d_{22} y_2^2 + d_{33} y_3^2 + 2 d_{23} y_2 y_3 + 2 d_{31} y_1 y_3 + 2 d_{12} y_1 y_2 = 0,$$

welcher aus der Curve 4. Ordnung Φ durch die quadratische Transformation:

$$(3)\qquad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2$$

hervorgegangen ist. Die Gleichung unserer Curve ist demnach:

$$(4)\quad \Phi(x) \equiv d_{11} x_2^2 x_3^2 + d_{22} x_3^2 x_1^2 + d_{33} x_1^2 x_2^2 + 2 d_{23} x_1^2 x_2 x_3 + 2 d_{31} x_2^2 x_3 x_1 + 2 d_{12} x_3^2 x_1 x_2 = 0,$$

wo die d_{ik} die in § 2. (15) definirten Combinationen der Coefficienten der 3 quadratischen Formen f sind.

Umgekehrt kann man die Coordinaten jeder Curve 4. Ordnung, deren Gleichung in dieser Form gegeben ist, in der angegebenen

Weise darstellen, indem man die Coordinaten des zugehörigen Kegelschnitts durch einen Parameter ausdrückt. Ueberhaupt gehört in den Bereich unserer Darstellung jede rationale Curve 4. Ordnung, die durch eine quadratische Transformation der angegebenen Form in einen Kegelschnitt überführbar ist; und dies ist immer möglich, so lange die Doppel- (oder Rückkehr-) punkte, die reell oder imaginär (vgl. § 8.) sein können, nicht zusammenfallen. Dass jedoch durch passende Grenzübergänge auch diese Fälle mit in den Kreis der Untersuchung hereingezogen werden können, wird weiterhin (s. III., sowie § 6.) gezeigt werden.

Aus den Gleichungen (3) folgt:

$$(5) \qquad y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 = f_1 : f_2 : f_3 .$$

Die Substitution der x für die f in die Gleichungen ((18) und (20) § 2.) $R \cdot W = 0$ und $T = 0$ für die Wendepunkte und Doppeltangenten ergiebt Gleichungen von Curven von bez. der 6. und 2. Ordnung, von denen die erste in den Eckpunkten des Coordinatendreiecks 3-fache Punkte besitzt. Ersetzt man dagegen die f_i durch die y_i, so erhält man die aus jenen durch quadratische Transformation hervorgegangenen Curven, welche auf dem Kegelschnitt $\varphi(y) = 0$ diejenigen Punkte ausschneiden, in welchen Kegelschnitte, die durch die 3 Eckpunkte des Fundamental(Coordinaten)-Dreiecks gehen, osculiren, bez. doppelt berühren.

Einige specielle Fälle, auf die später öfters Bezug genommen wird, mögen gleich hier an die Darstellung der Curvengleichung angeschlossen werden.

I. Für $d_{11} = D_{22} D_{33} - D_{23}^2 = 0$ *zerfällt die Curve* 4. *Ordnung* (sofern nicht gleichzeitig $R = 0$ ist) in die Seite $x_1 = 0$ des Coordinatendreiecks und eine rationale Curve 3. Ordnung; zugleich haben f_1 und f_2 einen linearen Factor gemeinsam, der als solcher auch aus den $F_1 = f_2 f_3$, etc. sich ausscheiden und mit dem Proportionalitätsfactor ϱ vereinigen lässt. Es bleiben so die Coordinaten der Curve 3. Ordnung, ausgedrückt durch einen Parameter*).

---

*) Es ist bemerkenswerth — und diese Bemerkung gilt ganz allgemein, wenn eine rationale Curve in der angegebenen Weise in solche von niederer Ordnung zerfällt — dass man auch die Gleichung der sich absondernden Geraden erhalten kann, indem man die *durch ihr Verschwinden das Zerfallen bewirkende Grösse* d_{11} *nicht absolut* $= 0$ *setzt*, sondern zugleich mit dem verschwindenden Factor $(\lambda - \alpha)$ unendlich klein werden lässt, was denn, unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\lambda - \alpha$, für die x_i homogene lineare Functionen von $\lambda - \alpha$ und d_{11} ergiebt, welche, indem nun $\frac{\lambda - \alpha}{d_{11}}$ alle möglichen Werthe durchläuft, die Gleichung der Geraden darstellen. (Ein Beispiel bietet die kanonische Form der x_i für $d = 0$, $\lambda = 0$.)

II. Zerfällt für $R=0$ der Kegelschnitt φ in 2 Gerade, so spaltet sich die Curve Φ *in 2 Kegelschnitte*, deren Gleichungen unmittelbar durch die jener Geraden gegeben sind*).

III. Rücken 2 Seiten des Coordinatendreiecks zusammen, so erhält man einen *Selbstberührungspunkt.* Dann werden z. B. f_1 und f_2 einander proportional, also $d_{33}=R=0$. Setzt man, um das identische Verschwinden zu vermeiden:

$$f_2 = f_1 + \varepsilon \cdot f_4,$$

wo ε eine gegen Null convergirende Grösse und f_4 eine beliebige quadratische Form ist, so bleiben in der Tabelle des § 2. die Formen $f_1 f_3 \vartheta_{31} D_{11} D_{33} D_{31}$ ungeändert, ferner wird:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 + \varepsilon f_4, & D_{22} &= D_{11} + 2\varepsilon D_{14} + \varepsilon^2 D_{44}, \\ \vartheta_{12} &= \varepsilon \cdot \vartheta_{14}, & D_{23} &= D_{13} + \varepsilon D_{43}, & R_{123} &= \varepsilon \cdot R_{143}. \\ \vartheta_{23} &= \vartheta_{13} + \varepsilon \cdot \vartheta_{43}, & D_{12} &= D_{11} + \varepsilon D_{14}, \end{aligned}$$

Die Transformationsformeln (3) werden:

$$x_1 : x_2 : x_3 = f_2 f_3 : f_3 f_1 : f_1{}^2 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1{}^2$$

und die Gleichungen für die Wendepunkte und Doppeltangenten gewinnen die Form:

$$\frac{W}{2\cdot\varepsilon} \equiv f_1{}^2 f_3 R_{143} - 4\vartheta_{13}{}^2\vartheta_{14} = 0,$$

$$\frac{T}{8R\cdot\varepsilon} \equiv f_1{}^2[-R_{143}(2D_{11}f_3{}^2 + D_{33}f_1{}^2) + 2f_3(D_{31}D_{11}\vartheta_{43} + D_{43}D_{11}\vartheta_{31} + D_{31}{}^2\vartheta_{14})] = 0.$$

Durch das Auftreten eines Selbstberührungspunktes werden also zwei Doppeltangenten, jedoch kein Wendepunkt absorbirt.

---

*) Die Bedingung für das Zerfallen des Kegelschnitts:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= f_1(\lambda) = a_1\lambda^2 + 2b_1\lambda + c_1, \\ \varrho y_2 &= f_2(\lambda) = a_2\lambda^2 + 2b_2\lambda + c_2, \\ \varrho y_3 &= f_3(\lambda) = a_3\lambda^2 + 2b_3\lambda + c_3 \end{aligned}$$

ist die folgende:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus erhält man ein System von Grössen $u_1\ u_2\ u_3$, so dass:

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0.$$

Einem Punkt y, der dieser Gleichung genügt, entsprechen dann 2 Werthe λ, welche sich aus zweien von den obigen Gleichungen bestimmen. *Diese Gerade*, welche von dem System der Werthe von λ *doppelt* überdeckt wird, *repräsentirt im Allgemeinen, doppelt gerechnet, den Kegelschnitt.* Nur in dem speciellen Fall, dass die 3 Functionen f einen *Factor* gemeinsam haben, wird jene Gerade blos einfach erzeugt. Man hat dann den in der vorhergehenden Note besprochenen Fall, für welchen der Kegelschnitt in 2 *discrete* Curven (hier Gerade) zerfällt, deren Gleichungen man in der dort angegebenen Weise bestimmt.

Ein noch speciellerer Fall ist der einer Curve mit (Selbst)-*Osculationspunkt.* Es rücken dann die 3 Eckpunkte des Coordinatendreiecks so aneinander, dass sie consecutive Punkte des durch sie gehenden Kreises (des Bildes der unendlich fernen Punkte, § 9.) werden. Man kann dann die Formen f in folgender Weise annehmen:

$$f_2 = f_1 + \varepsilon f_4; \quad f_3 = f_1 + m\varepsilon f_4 + \varepsilon^2 m(m-1) f_5,$$

wo wieder ε eine gegen Null convergirende Grösse, m eine Constante und f_4, f_5 quadratische Formen sind. Die Coordinaten der Curve stellen sich unter Einführung von linearen Combinationen der x_i in der Form dar:

$$\xi_1 = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{x_1-x_3}{m} - \frac{x_2-x_3}{m-1}\right) = f_4^2 - f_1 f_5; \quad \xi_2 = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{x_2-x_3}{m-1} = f_1 f_4; \quad \xi_3 = f_1^2,$$

und die Gleichungen für die Wendepunkte und Doppeltangenten werden:

$$\frac{W}{2\varepsilon^3 m(m-1)} = R_{145} f_1^3 - 4\vartheta_{14} = 0,$$

$$\frac{T}{8R\varepsilon^3 m(m-1)} = f_1^3[-3f_1 D_{11}^2 R_{145} + 2\vartheta_{14}(D_{14}^2 - D_{11}D_{44}) + m\vartheta_{11} D_{11} D_{51} + \vartheta_{45} D_{11}^2 + \vartheta_{51} D_{11} D_{14}] = 0,$$

wo dann ersichtlich wieder die Zahl der Wendepunkte ungeändert bleibt, während 3 Doppeltangenten in die Osculationstangente fallen.

IV. Ein Doppelpunkt der Curve 4. Ordnung geht in einen *Rückkehrpunkt* über, wenn eine der 3 Formen 2 gleiche Factoren erhält, also wenn z. B. $D_{11} = 0$ ist.

Dass sich dann die Classe der Curve um 1 reducirt, erkennt man durch Darstellung der *Liniencoordinaten* $u_1\, u_2\, u_3$ *der rationalen Curve 4. Ordnung* als Functionen eines Parameters, was bei diesem Anlass geschehen möge. Die Liniencoordinaten sind bekanntlich proportional den Grössen:

$$\frac{\partial x_i}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial\mu} - \frac{\partial x_k}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\mu},$$

wenn man sich mit der Variabeln μ die Homogeneität hergestellt denkt. Nun ist aber z. B.:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(f_2 f_3)\frac{\partial}{\partial\mu}(f_3 f_1) - \frac{\partial}{\partial\lambda}(f_3 f_1)\frac{\partial}{\partial\mu}(f_2 f_3) = f_3(f_1\vartheta_{23} + f_2\vartheta_{31} - f_3\vartheta_{12}) = -2f_3^2\vartheta_{12},$$

und man hat also die folgende Darstellung:

$$u_1 : u_2 : u_3 = f_1^2\vartheta_{23} : f_2^2\vartheta_{31} : f_3^2\vartheta_{12}.$$

Diese Ausdrücke sind vom 6. Grade und bekommen für $D_{11} = 0$ den auch in ϑ_{13} und ϑ_{12} enthaltenen linearen Factor $\sqrt{f_1}$.

V. Die Bedeutung, welche das Verschwinden der Invarianten d_{ii} und D_{ii} besitzt, ist in I. und IV. auseinandergesetzt. Hier möge noch kurz über das *Verschwinden der* D_{ik} *und* d_{ik} gesprochen werden. Wenn

D_{12} verschwindet, so bilden die Wurzelpaare von f_1 und f_2 auf der Curve 4 *harmonische* Punkte. Das Verschwinden von $d_{12} = D_{23} D_{31} - D_{12} D_{33}$ veranlasst, dass die Tangenten des Doppelpunkts in der Ecke $x_1 = x_2 = 0$ zu den anstossenden Seiten des Coordinatendreiecks *harmonisch* liegen.

VI. $d_{12} D_{12} + d_{13} D_{13} = 0$ ist die Bedingung dafür, dass eine Tangente in dem Doppelpunkt $x_2 = x_3 = 0$ Wendetangente wird (vgl. § 4. am Ende).

VII. Weiter unten (§ 6.) wird eine Curve auftreten, für welche die Bedingungsgleichung erfüllt ist:

$$D_{11} D_{23}^2 - D_{22} D_{31}^2 = \frac{1}{2}(b c^2 - d a^2) = \frac{1}{R^2}(d_{11} d_{23}^2 - d_{22} d_{31}^2) = D_{22} d_{22} - D_{11} d_{11} = 0.$$

Dies geschieht allgemein durch die Annahme:

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda^2 + a\lambda + b &&= (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), \\ f_2 &= \lambda^2 + ak\lambda + bk^2 &&= (\lambda - k\alpha)(\lambda - k\beta), \\ f_3 &= \lambda &&= \lambda, \end{aligned}$$

wodurch die Wurzeln von f_1 und f_2, *übers Kreuz gepaart, mit denen von f_3 in Involution zu stehen kommen*; denn die Determinante R der Formen:

$$\varphi_1 = (\lambda - \alpha)(\lambda - k\beta); \quad \varphi_2 = (\lambda - \beta)(\lambda - k\alpha); \quad \varphi_3 = \lambda$$

verschwindet identisch.

Für die Curve 4. Ordnung sagt dies aus, dass *von den 4 Schnittpunkten der Tangenten in zwei Doppelpunkten zwei auf einer durch den dritten Doppelpunkt gehenden Geraden liegen.* Denn die Tangenten in $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 = x_3 = 0$ sind:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ x_1 k\alpha - x_3 f_1(k\alpha) = 0, \qquad &&\text{c)}\ x_2\alpha - x_3 f_2(\alpha) = 0, \\ &\text{b)}\ x_1 k\beta - x_3 f_1(k\beta) = 0, \qquad &&\text{d)}\ x_2\beta - x_3 f_2(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Schneidet man a) mit d) und b) mit c), so liegen, wie man sogleich erkennt, die Schnittpunkte auf der Linie: $x_1 k - x_2 = 0$, q. e. d.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Curve eine *Symmetrieaxe* besitzt oder aus einer solchen durch Centralprojection hervorgegangen ist.

§ 4.

Der Wendekegelschnitt.

Für die Wendepunkte ergab sich oben (§ 2.) eine Gleichung 3. Grades in den Formen f_i: $R \cdot W = 0$, welche durch Einführung der x_i in eine die Wendepunkte ausschneidende Curve 6. Ordnung (mit 3-fachen Punkten in den Eckpunkten des Coordinatendreiecks) überführbar war. Man kann nun die Gleichung dieser Curve mit Hülfe der Gleichung $\Phi = 0$ der gegebenen Curve in die *eines durch die Wende-*

punkte gehenden Kegelschnitts $\Gamma=0$ überführen*). Dies wird jedoch zweckmässig nicht erst an der Curve 6. Ordnung, sondern an der ihr vermöge der quadratischen Transformation entsprechenden Curve $R \cdot W=0$ oder $\varpi(y_1 y_2 y_3)=0$, wie ihre Gleichung in den y geschrieben heissen möge, vorgenommen, wo denn unter Adjunction des Kegelschnitts $\varphi=0$ (§ 3.) eine rationale Curve 4. Ordnung $\gamma=0$ mit 3 Doppelpunkten in den Eckpunkten des Coordinatendreiecks (statt des Kegelschnitts $\Gamma=0$) zu erzeugen ist. Der Ausdruck:

$$\varpi=\begin{cases} d_{11}y_1^2(y_1 D_{23}-y_2 D_{31}-y_3 D_{12}) \\ +d_{22}y_2^2(-y_1 D_{23}+y_2 D_{31}-y_3 D_{12})+y_1y_2y_3(d_{11}D_{11}+d_{22}D_{22}+d_{33}D_{33}) \\ +d_{33}y_3^2(-y_1 D_{23}-y_2 D_{31}+y_3 D_{12}), \end{cases}$$

(wo zwischen den d_{ik} und D_{ik} die § 2. angeführten Beziehungen bestehen) ist also mit Hülfe von:

$$\varphi=d_{11}y_1^2+d_{22}y_2^2+d_{33}y_3^2+2d_{23}y_2y_3+2d_{31}y_3y_1+2d_{12}y_1y_2$$

und gewisser noch zu bestimmender Formen 1. und 2. Ordnung q und p in eine solche Gestalt γ zu verwandeln, dass in:

$$\gamma=\varpi q+p\varphi \tag{1}$$

die Coefficienten der Glieder von y_1^4, $y_1^3 y_2$ und der analogen Glieder sämmtlich verschwinden. Aber man hat zu Erfüllung dieser 9 Gleichungen nur 8 Grössen: die Verhältnisse der Coefficienten in q und p, zur Verfügung, und es muss demnach eine dieser Gleichungen eine Folge der übrigen sein. Indem man die Coefficienten in p eliminirt, bleiben 3 Gleichungen für die in q, die sich als in der That mit einander verträglich erweisen. Man erfüllt sie durch die Annahme:

$$q=d_{11}d_{23}y_1+d_{22}d_{31}y_2+d_{33}d_{12}y_3$$

und es ergiebt sich weiter:

$$p=-D_{23}d_{23}d_{11}y_1^2-\cdots+2d_{23}(d_{12}D_{12}+d_{13}D_{13})y_2y_3+\cdots$$

wo die den angeschriebenen analog gebildeten Glieder hier wie im Folgenden durch Punkte bezeichnet sind. Endlich wird der Coefficient von $y_2^3y_3^3$ des Ausdrucks γ:

$$\gamma_{11}=-4R^2D_{11}(d_{12}D_{12}+d_{13}D_{13});$$

der Coefficient von $2y_1^2y_2y_3$ wird:

---

*) Ich erhalte nachträglich Kenntniss von einer Arbeit des Herrn J. Grassmann über Wendepunkte (Dissertat. Berlin 1875), in welcher derselbe ebenfalls die Existenz des Wendekegelschnitts und zwar durch directe Umgestaltung der ausgerechneten Hesse'schen Determinante erst auf die Form L (s. unten), dann auf die Form Γ nachweist.

$$\gamma_{23} = 2R^2(d_{12}d_{13} + D_{22}D_{33}d_{23} + D_{23}^2 d_{23} + \tfrac{1}{2}d_{11}d_{23})$$
$$= R^2(2d_{12}d_{13} + 3d_{11}d_{23} + 4d_{23}D_{23}^2),$$

wo man wie oben hat:

$$2R^2 \cdot D_{11} = d_{22}d_{33} - d_{23}^2; \quad 2R^2 D_{23} = d_{31}d_{12} - d_{11}d_{23}, \text{ etc.}$$

während die Determinante der $D_{ik} = 2R^2$, die der $d_{ik} = 4R^4$ ist.

Wendet man auf die Glieder der Identität (1) die quadratische Transformation $y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$ an, so erhält sie die Form:

$$\Omega_6 Q_2 + P_4 \Phi_4 = \Gamma_2 \cdot x_1^2 x_2^2 x_3^2,$$

und die Gleichung des Wendekegelschnitts wird:

$$0 = \Gamma = \begin{cases} -4D_{11}(d_{12}D_{12} + d_{13}D_{13})x_1^2 + 2(2d_{12}d_{13} + 3d_{11}d_{23} + 4d_{23}D_{23}^2)x_2 x_3 \\ -4D_{22}(d_{23}D_{23} + d_{21}D_{21})x_2^2 + 2(2d_{23}d_{21} + 3d_{22}d_{31} + 4d_{31}D_{31}^2)x_3 x_1 \\ -4D_{33}(d_{31}D_{31} + d_{32}D_{32})x_3^2 + 2(2d_{31}d_{32} + 3d_{33}d_{12} + 4d_{12}D_{12}^2)x_1 x_2. \end{cases}$$

Dieser Kegelschnitt geht durch einen Eckpunkt des Coordinatendreiecks, wenn $D_{11} = 0$, d. h., wenn ein Doppelpunkt zum Rückkehrpunkt geworden ist, oder für $d_{12}D_{12} + d_{13}D_{13} = 0$, was dann eine Wendetangente im Doppelpunkt anzeigt. Dann muss durch diesen auch die *Verbindungslinie* $G = 0$ *der beiden mit den Wendepunkten auf einem Kegelschnitt gelegenen Punkte* gehen. Man erhält die Gleichung derselben durch Combination von Q mit Φ zu folgender Identität:

$$\Phi \cdot d_{11}d_{22}d_{33} - Q(x_2 x_3 d_{13}d_{12} + \cdots) = 2x_1 x_2 x_3 \cdot G \cdot R^2,$$

wo die Gleichung der gesuchten Geraden wird:

$$0 = G = x_1 d_{23}(d_{12}D_{12} + d_{13}D_{13}) + x_2 d_{31}(d_{21}D_{21} + d_{23}D_{23})$$
$$+ x_3 d_{12}(d_{31}D_{31} + d_{32}D_{32}).$$

Diese Gerade geht durch den Doppelpunkt $x_2 = x_3 = 0$ auch dann hindurch, wenn $d_{23} = 0$ ist, d. h., wenn die Tangenten desselben zu den anstossenden Seiten des Fundamentaldreiecks harmonisch sind (§ 3.).

Die Curve 6. Grades $\Omega = 0$ schneidet in den Eckpunkten des Coordinatendreiecks die gegebene Curve $\Phi = 0$ in 6 Punkten, also ebensovielmal, wie in diesen Punkten die *Hesse'sche Curve* $H = 0$ von $\Phi = 0$ schneidet. Der Ausdruck Ω lässt sich aber trotzdem nicht mit Hülfe von Φ auf die Form H bringen, man hat es hier vielmehr mit einem der wohl von Nöther zuerst bemerkten Fälle zu thun, wo die Division $\frac{\Omega}{H}$ auch unter Adjunction von Φ nicht ausführbar ist, obgleich Zähler und Nenner dieselben Verschwindungspunkte auf $\Phi = 0$ besitzen. Man kann jedoch eine Uebereinstimmung von Ω und H in möglichst vielen Gliedern verlangen und erhält so die Identität:

$$H = 6\Omega + 3\Phi B + 3x_1 x_2 x_3 L,$$

wo H die Hesse'sche Determinante ist:

$$H=\frac{1}{8}\Sigma\pm\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=$$
$$=3x_1^4(d_{23}^2-d_{22}d_{33})(d_{33}x_2^2+2d_{23}x_2x_3+d_{22}x_3^2)+\cdots$$
$$+6x_1^3x_2x_3(d_{33}d_{22}+2d_{23}^2)(d_{13}x_2+d_{12}x_3)+\cdots$$
$$+6x_1^3x_2^3d_{33}(2d_{13}d_{23}-d_{12}d_{33})+\cdots$$
$$+18x_1^2x_2^2x_3^2(d_{11}d_{22}d_{33}+d_{12}d_{23}d_{31}),$$

B eine Form 2. Grades:

$$B=-x_1^2(d_{22}d_{33}-d_{23}^2)-\cdots+2d_{12}d_{13}x_2x_3+\cdots$$

und endlich $L=0$ die Gleichung einer durch die Wendepunkte gehenden Curve 3. Ordnung ist:

$$L=2x_1^2(d_{22}d_{33}-d_{23}^2)+\cdots+x_1x_2x_3(d_{11}d_{23}^2+d_{22}d_{31}^2+d_{33}d_{12}^2$$
$$+3d_{11}d_{22}d_{33}-6d_{12}d_{23}d_{31}).$$

§ 5.

Die Wendepunktsgleichung.

Indem wir von der allgemeinen Form zu den im §. 2 aufgestellten Gleichungen für die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten und der Wendepunkte in der kanonischen Darstellung zurückkehren, bemerken wir zunächst, dass die Erstere in zwei zerfällt:

$$T=L^2-4bd\cdot\lambda^2K^2=(L+2\sqrt{b}\,d\cdot\lambda K)(L-2\sqrt{b}\,d\cdot\lambda K)=T_1\cdot T_2=0.$$

Man kann diese Factoren T_1, T_2 sowie die Gleichung:

$$W=\lambda L-(\lambda^4+bd)K=0$$

dadurch auf einfachere Form bringen, dass man statt der Constanten a, b, c, d vier andere Grössen einführt, nämlich:

$$\alpha=\frac{3}{2}\,\frac{b-d}{a-c};\quad \beta=\frac{bc-ad}{a-c};\quad \gamma=\frac{ac-b-d}{6};\quad \delta=bd.$$

Man erhält so:

$$\left.\begin{matrix}T_1\\T_2\end{matrix}\right\}=\frac{2}{3}(a-c)\Big[\alpha\lambda^4+3\lambda^3\big(\beta\pm\sqrt{\delta}\big)+6\lambda^2\alpha\big(\gamma\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{\delta}\big)$$
$$\pm3\lambda\sqrt{\delta}\big(\beta\pm\sqrt{\delta}\big)+\alpha\delta\Big],$$

$$\frac{W}{a-c}=\lambda^6+2\lambda^5\alpha+3\lambda^4\beta+4\lambda^3\alpha\gamma+3\lambda^2\delta+2\lambda\alpha\delta+\beta\delta.$$

Setzt man noch für einen Augenblick:

$$\lambda^4=\delta\cdot\varrho^4;\ \text{also}\ \lambda=\varrho\cdot\sqrt[4]{\delta}=\varrho\cdot\varepsilon,$$

ferner:

$$p=\frac{\alpha}{\varepsilon};\quad q=\frac{\beta}{\varepsilon^2};\quad r=\frac{\alpha\gamma}{\varepsilon^3},$$

so gewinnt W die Form:

$$\frac{W}{a-c} = \begin{cases} \varrho^6 + 2p\varrho^5 + 3q\varrho^4 \\ + 3\varrho^2 + 2p\varrho + q \end{cases} + 4r\varrho^3 = 0.$$

Diese Gleichung geht für $q=1$ in eine reciproke über. Es treten dann die Wurzeln in Involution; aber der Punkt, in welchem sich dann die Verbindungslinien der (paarweise verbundenen) Bilder der Wendepunkte auf dem Kegelschnitt $\varphi=0$ schneiden, und der in diesem Falle sich rational ergiebt, ist in einem anderen speciellen Fall $(a=0, b=-d)$ nur durch Auflösung einer quadratischen Gleichung zu finden und kann demnach nicht für die allgemeine Gleichung rational vorhanden sein. Ueberhaupt scheint jene Gleichung 6. Grades keine Invarianteneigenschaften zu besitzen, die eine Zurückführung ihrer Auflösung auf solche von niedrigerem Grade ermöglicht*).

Den Fall involutorisch gepaarter Wurzeln mögen wir hier etwas näher erörtern. Zunächst folgt aus der Bedingungsgleichung:

$$1 = q^2 = \frac{\beta^2}{\delta}$$

---

*) In der That kann man folgendermassen zeigen, dass die 6 Wurzeln jener Gleichung 6. Grades im Allgemeinen in keiner Beziehung zu einander stehen. Man nehme die Coordinaten der Curve 4. Ordnung in der Form an:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda^3(\lambda + a) : (\lambda + b) : (\lambda + 1)^3 (\lambda + c),$$

wodurch die Tangenten in 3 Wendepunkten ($\lambda = 0, -1, \infty$) adjungirt und zu Seiten des Coordinatendreiecks gemacht werden. Dann wird die Gleichung für die 3 übrigen Wendepunkte:

$$W' = \lambda^3(A+3) + \lambda^2(2Ab - A + 3C) + \lambda(aC + 2B) + aB = 0,$$

wo

$$A = c - a; \quad B = 3bc - c + b; \quad C = c + 2b$$

ist. Die Wurzeln dieser Gleichung stehn aber augenscheinlich zu den Parametern der angenommenen Wendepunkte in keiner projectivischen Beziehung.

Für diese Darstellung der Gleichung der Curve lässt sich auch *die Bedingung, dass 3 Wendepunkte auf gerader Linie liegen*, in einfacher Weise ausdrücken. Wenn nämlich die Parameter $0, -1, \infty$ dreien in gerader Linie liegenden Punkten zugehören sollen, so muss die Grösse $D_1(\lambda_1 \lambda_2)$ (§ 1.) verschwinden, wenn man $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und für die Coefficienten $a_i, b_i, \cdots$ ihre Werthe einsetzt. Man erhält so:

$$ab = bc + b - c$$

als Bedingungsgleichung dafür, dass die 3 adjungirten Wendepunkte in gerader Linie liegen. Auf dieser Linie liegt aber noch ein weiterer Punkt der Curve, dessen Parameter:

$$\lambda = -\frac{B}{C}$$

in die Gleichung $W' = 0$ eingesetzt, dieselbe erfüllt. Denn mit Hülfe der Bedingungsgleichung lässt sich W' auf die Form bringen:

$$W' = (C\lambda + B)\,(\lambda^2 + \lambda(2b + a) + ab) = 0,$$

und *der 4. Schnittpunkt ist also ebenfalls ein Wendepunkt*, wie dies übrigens aus anderen Gründen vorauszusehen war.

entweder $b = d$, also Zerfallen (§ 3.), oder:

$$bc^2 - a^2 d = 0,$$

eine Gleichung, die (§ 3., VII) eine involutorische Paarung der Wurzeln der Formen f_1 und f_2 übers Kreuz mit denen von f_3 aussagt und durch Einführung der besonderen Form (§ 3.) für $f_1 f_2 f_3$ erfüllt wird. Nun folgt aus der Bedingungsgleichung aber weiter (Bezeichnungen wie in § 3.):

$$\beta = bk = \varepsilon^2.$$

Ist also λ eine Wurzel, so ist entsprechend dem Wurzelpaare ϱ und $\frac{1}{\varrho}$ der reciproken Gleichung, $\frac{bk}{\lambda}$ eine andere. Nun hat man:

$$f_1\left(\frac{bk}{\lambda}\right) = \frac{b}{\lambda^2} f_2(\lambda); \quad f_2\left(\frac{bk}{\lambda}\right) = \frac{bk^2}{\lambda^2} \cdot f_1(\lambda),$$

die Coordinaten eines Wendepunktpaares sind also von der Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda f_2(\lambda); & x_1' &= f_1(\lambda) \cdot \frac{b^2 k^3}{\lambda^3}, \\ x_2 &= \lambda f_1(\lambda); & x_2' &= f_2(\lambda) \cdot \frac{b^2 k}{\lambda^3}, \\ x_3 &= f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda); & x_3' &= f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \frac{b^2 k^2}{\lambda^4}. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Verbindungslinie dieser Punkte:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & x_1' \\ \xi_2 & x_2 & x_2' \\ \xi_3 & x_3 & x_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \lambda f_2 & k(kf_1 - f_2) \\ \xi_2 & \lambda f_1 & f_2 - kf_1 \\ \xi_3 & f_1 f_2 & 0 \end{vmatrix} \frac{b^2 k}{\lambda^3} = 0,$$

(wo ξ laufende Coordinaten sind) hat nun aber die Eigenschaft, unabhängig von λ erfüllt zu werden durch:

$$\xi_3 = 0, \quad \xi_1 + \xi_2 k = 0.$$

Die Coordinaten dieser Punktes befriedigen ferner, wie man sich leicht überzeugt, die Gleichung der Verbindungsgeraden $G = 0$ der beiden mit den Wendepunkten auf dem Wendekegelschnitt liegenden Punkten der Curve 4. Ordnung, und man hat also den Satz:

Wenn 2 von den Schnittpunkten der Tangenten in zwei Doppelpunkten der Curve 4. Ordnung auf einer Geraden mit dem dritten Doppelpunkt liegen (s. § 3.), so schneiden sich die Verbindungslinien der 3 Paare, in welche dann die 6 Wendepunkte zerfallen, in einem Punkte der Geraden G, durch welchen die Verbindungslinie jener 2 Doppelpunkte geht. — Der Fall, wo die Curve eine Symmetrieaxe besitzt, liefert ein anschauliches Bild dieses Vorkommens.

Die einfache Form, auf welche oben die Wendepunktsgleichung gebracht wurde, führt auf einen wichtigen *Factor der Discriminante* derselben.

Man bemerkt, dass die Gleichung (2) durch $\varrho = 1$ befriedigt wird, wenn die Bedingung:

$$1 + p + q + r = 0$$

zwischen den Coefficienten erfüllt ist, und dass dann zugleich auch:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{W}{a-c}\right)$$

für $\varrho = 1$ verschwindet. Ist also $\varrho = 1$ eine Wurzel der umgestalteten, oder ist $\lambda = \sqrt[4]{b\,d}$ eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung für die Wendepunkte, so ist sie eine *Doppelwurzel* derselben. Der Ausdruck:

$$\varphi(\varepsilon) \equiv (a-c)\,(1+p+q+r) = (a-c)\,(\varepsilon^3 + \varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta + \alpha\gamma)$$

ist also ein Factor der Discriminante Δ_W von W. Da dieser jedoch eine rationale Function der Grösse $\varepsilon^4 = \delta$ ist, in welcher Δ_W rational ist, so müssen noch die 3 anderen Ausdrücke, die man durch Vertauschung von ε mit den 3 übrigen vierten Wurzeln von δ erhält, Factoren von Δ_W sein. Man erhält durch Ausrechnung des Products aller 4 Factoren:

$$\begin{aligned}(4)\quad V &\equiv \varphi(\varepsilon)\cdot\varphi(-\varepsilon)\cdot\varphi(\sqrt{-\varepsilon})\cdot\varphi(-\sqrt{-\varepsilon})\\ &= (a-c)^4\left[\alpha^2(\sqrt{\delta}+\gamma)^2 - \sqrt{\delta}(\sqrt{\delta}+\beta)^2\right]\left[\alpha^2(-\sqrt{\delta}+\gamma)^2 + \sqrt{\delta}(-\sqrt{\delta}+\beta)^2\right]\\ &= (a-c)^4\left[\alpha^4(\gamma^2-\delta)^2 + 4\alpha^2\delta(\beta\gamma-\delta)(\beta-\gamma) - \delta(\beta^2-\delta)^2\right].\end{aligned}$$

Indem für die α, β, γ, δ wieder die Werthe in a, b, c, d eingeführt werden, kann man zunächst den Factor $(b-d)^2$ ausscheiden. Denn es ist:

$$\alpha(a-c) = \frac{2}{3}(b-d);$$

$$(\beta^2-\delta)(a-c)^2 = (bc-ad)^2 - bd(a-c)^2 = (b-d)^2(bc^2-a^2d).$$

Man erhält so:

$$V = \left(\frac{b-d}{2}\right)^2\cdot\left[81\left(\frac{b-d}{2}\right)^2(\gamma^2-\delta)^2 + 36\,b\,d(\beta\gamma-\delta)(\beta-\gamma) - 4\,b\,d(bc^2-a^2d)^2\right].$$

Berücksichtigt man ferner, dass:

$$\gamma^2 - \delta = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{b-d}{2}\right)^2 - \frac{ac}{4}\left(b+d-\frac{ac}{2}\right) - 8\,b\,d\right],$$

und substituirt für β, γ und δ auch sonst ihre Werthe in a, b, c, d, so kommt nach einer Reduction:

$$\begin{aligned}V = \left(\frac{b-d}{2}\right)^2\cdot\Bigg\{&\left(\frac{b-d}{2}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{b-d}{2}\right)^2 - \frac{ac}{4}\left(b+d-\frac{ac}{2}\right)\right]^2 +\\ &+ 4\,b\,d\left[(bc-ad)(a-c)-(b-d)^2\right]\left[\left(\frac{b-d}{2}\right)^2 - 4\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\left(d-\frac{c^2}{4}\right)\right]\Bigg\},\end{aligned}$$

oder endlich indem man von der kanonischen Form der f mittelst der Formeln des § 2. zu der allgemeinen übergeht und die simultanen Invarianten in der dortigen Bezeichnung einführt:

$$V = R^2 \cdot U,$$

wo:

$$U = R^2 (R^2 - 2 D_{11} D_{22} D_{33})^2 + 4 d_{11} d_{22} d_{33} (R^2 + 2 D_{11} D_{22} D_{33}).$$

Die Symmetrie dieses eleganten Ausdrucks ist eine Bestätigung für die Richtigkeit unserer Rechnung*). Der gefundene Ausdruck ist Factor der Discriminante der allgemeinen Wendepunktsgleichung 6. Grades (§ 2.):

$$\frac{W}{2} \equiv R \cdot f_1 f_2 f_3 + 4 \vartheta_{12} \vartheta_{23} \vartheta_{31} = 0$$

— die übrigen leichter zu bestimmenden Factoren werden unten angegeben — und sein Verschwinden bewirkt, dass $\lambda = \sqrt[4]{b\,d}$ Doppelwurzel der Gleichung $W = 0$ wird. Aber für $\lambda = \sqrt[4]{\delta} = \varepsilon$ nimmt der Factor T_1 von T (s. oben) die Form $4 \cdot \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)$ an, und da auch $\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$ für $\lambda = \varepsilon$ den Factor $\varphi(\varepsilon)$ erhält, so schliesst man wie oben, dass *der Factor* $V = R^2 U$ *auch in der Discriminante* Δ_T *der Doppeltangentengleichung:* $T_1 T_2 = 0$ *auftritt.* Andererseits erfüllt der Werth $\lambda = \sqrt[4]{b\,d}$, der auch hier Doppelwurzel wird, für die Parameter Λ_1 und Λ_2 der Berührungspunkte einer Doppeltangente gesetzt, die zwischen denselben bestehende Gleichung (§ 2.):

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 = b\,d,$$

und da man diesen Schluss umkehren kann, so hat die Curve in diesem Falle eine in dem Punkt $\lambda = \sqrt[4]{b\,d}$ vierfach berührende Tangente (Undulationstangente). $U = 0$ *ist also die Bedingung für das Auftreten eines Undulationspunktes*, und der Factor U möge darum der *„Undulationsfactor“* der Discriminante heissen.

Um U in den Coefficienten der Curvengleichung $\Phi = 0$ selbst anzuschreiben, multiplicire man U mit R^{10}, und setze für $2 R^2 D_{ik}$ die Werthe aus § 4. ein. Der so umgestaltete Ausdruck bildet dann den Hauptbestandtheil der *Tactinvariante* der Curve 4. Ordnung und ihrer Hesse'schen Curve (deren Verschwinden aussagt, dass beide Curven sich berühren, Salmon-Fiedler, höh. Curven § 377.); die übrigen Factoren sind diejenigen, welche sogleich noch für Δ_W bestimmt werden.

U ist vom 6. Grade in den Coefficienten jeder der 3 quadratischen Formen f_1, f_2, f_3 und im Allgemeinen nicht in rationale Factoren zerfällbar, wie man z. B. erkennt, indem man $D_{33} = 0$ setzt. Dann

*) Den Zusammenhang zwischen den d_{ik}, D_{ik} und R findet man in § 2. angegeben.

scheidet sich der Factor R^2 aus (was im Allgemeinen nicht der Fall ist) und der übrig bleibende Factor ist durch Einführung der a, b, c, d leicht als unzerfällbar zu erkennen. Dagegen lässt sich, wie sogleich gezeigt werden wird, U in irrationale Factoren auflösen.

Die übrigen Factoren, welche die Discriminante Δ_W ausser V besitzt, lassen sich in folgender Weise ermitteln.

I. $W=0$ erhält beim Auftreten eines Rückkehrpunktes (§ 3., III) einen Doppelfactor, der $=\sqrt{f_1}$ ist, wenn etwa $D_{11}=0$ oder $b=\frac{a^2}{4}$ angenommen wird. Daher besitzt (vgl. d. vorstehenden Aufsatz) die Discriminante Δ_W den Factor D_{11}, und der Symmetrie wegen auch die Factoren D_{22}, D_{33}, deren Product:

$$D_{11} D_{22} D_{33}$$

der „*Cuspidalfactor*" heissen möge.

II. $d_{11}=-d=0$ veranlasst die dreifache Wurzel $\lambda=0$ von $W=0$, daher (vgl. d. vorstehenden Aufsatz) Δ_W den Factor $d_{11}d_{22}d_{33}$ mindestens quadratisch besitzt. Dieser Factor, dessen Verschwinden im Allgemeinen anzeigt (§ 3., I), dass die Curve sich in eine Gerade und eine Curve 3. Ordnung spaltet, heisse „*Spaltungsfactor*" 1. Art.

III. Endlich bemerke man, dass, wenn die Curve in 2 Kegelschnitte zerfällt, d. h. für $b=d$ oder $R=0$, W ein vollständiger Cubus wird, dass also 2mal 3 Wurzeln zusammenfallen, was dann den „*Spaltungsfactor* 2. *Art*" R^4 ergiebt (vorstehende Note).

Das Product:

$$\Delta_W = U \cdot R^4 \cdot d_{11}{}^2 d_{22}{}^2 d_{33}{}^2 \cdot D_{11} D_{22} D_{33}$$

ist aber in den Coefficienten jeder der 3 quadratischen Formen vom $6+14=20$. Grade.

Andererseits muss die Discriminante der Wendepunktsgleichung in den Coefficienten:

$$(a-c), \quad \alpha(a-c), \quad \beta(a-c), \cdots \beta\delta(a-c)$$

der Gleichung 6. Grades $W=0$ vom Grade $2(6-1)=10$ sein. Jeder dieser Coefficienten ist aber in den Coefficienten der quadratischen Formen von höchstens dem 2. Grade, die Discriminante kann also den 20. Grad nicht übersteigen und das obige *Product* Δ_W *repräsentirt somit in der That die gesuchte Discriminante.*

§ 6.

Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten.

Man hat oben die Zerfällbarkeit der Gleichung $T=0$ in der kanonischen Form in zwei in den Coefficienten von T irrationale Factoren bemerkt. Aber die Eigenschaften der Doppeltangenten gestatten eine solche Zerfällung von T auch in der nicht kanonischen Form und zwar gleich in quadratische Factoren. Man kann nämlich den Ausdruck T durch Adjunction der Identität (§ 3. (I)) zwischen den f_i und d_{ik} in folgender Weise umgestalten:

$$\begin{aligned}\frac{T}{4} &= (f_2f_3d_{23}+f_3f_1d_{13}+f_1f_2d_{12})^2-f_2^2f_3^2d_{22}d_{33}-f_3^2f_1^2d_{33}d_{11}-f_1^2f_2^2d_{11}d_{22}\\ &= \frac{1}{4}\;(f_1\sqrt{d_{11}}+f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}})(-f_1\sqrt{d_{11}}+f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}})\\ &\qquad\cdot(f_1\sqrt{d_{11}}-f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}})(\;f_1\sqrt{d_{11}}+f_2\sqrt{d_{22}}-f_3\sqrt{d_{33}})\\ &= \frac{1}{4}\,t_1t_2t_3t_4,\end{aligned}$$

wo nun jeder dieser quadratischen Factoren die Berührungspunkte einer Doppeltangente ergiebt. Wir benutzen diese Zerfällung zur Bildung der *Discriminante* Δ_T *der Gleichung für die Doppeltangenten.*

Die Discriminante eines Products ist bekanntlich gleich dem Product (Π) der Discriminante der einzelnen Factoren mal dem Quadrat des Products (P) der Resultanten derselben, wenn man sie zu je zweien combinirt.

Was zunächst die Grösse P angeht, so lässt sich die Resultante aus je zweien der 4 Factoren von T, z. B. aus den beiden ersten t_1 und t_2, in die Form bringen:

$$\text{Res.}\ (t_1, t_2) = d_{11}\cdot\text{Res.}\ (f_1, f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}}) = d_{11}\cdot\text{Res.}\ (f_1, f_i),$$

wo für einen Augenblick:

$$f_i = f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}}$$

gesetzt ist. Nun ist aber (Clebsch, bin. Formen p. 201) in den Bezeichnungen des § 2. geschrieben:

$$\begin{aligned}\text{Res.}\,(f_1, f_i) &= D_{11}D_{ii}-D_{i1}^2\\ &= D_{11}(D_{22}d_{22}+2D_{23}\sqrt{d_{22}d_{33}}+D_{33}d_{33})-(D_{12}\sqrt{d_{22}}+D_{13}\sqrt{d_{33}})^2\\ &= 2\,d_{22}d_{33}-2\,d_{23}\sqrt{d_{22}d_{33}}\,.\end{aligned}$$

Daher endlich:

$$\text{Res.}\ (t_1, t_2) = 2\,d_{11}\sqrt{d_{22}d_{33}}\,(\sqrt{d_{22}d_{33}}-d_{23})\,.$$

Die Resultante von t_3 und t_4 unterscheidet sich hiervon nur durch das Vorzeichen des Wurzelausdrucks, und man hat also:

$$\text{Res.}\ (t_1, t_2)\cdot\text{Res.}\ (t_3, t_4) = -\,4\,d_{11}^2d_{22}d_{33}\cdot 2R^2\cdot D_{11}$$

und somit das Product P aller 6 Resultanten bis auf einen Zahlenfactor

$$P = (d_{11}d_{22}d_{33})^4D_{11}D_{22}D_{33}\cdot R^6.$$

Wir wenden uns zur Bildung des Products Π der 4 Discriminanten. Man erhält diese aus der Discriminante von t_1:

$$\text{Discr.}\,(t_1) = D_{11}d_{11} + D_{22}d_{22} + D_{33}d_{33} + 2\sqrt{d_{22}d_{33}}\,D_{23} + 2\sqrt{d_{33}d_{11}}\,D_{31} + 2\sqrt{d_{11}d_{22}}\,D_{12}$$

durch paarweise Aenderung der Wurzelvorzeichen. Aber die Ausrechnung des Products aller vier lässt sich vermeiden, wenn man bedenkt, dass seiner Bedeutung nach dieses Product Π von dem oben gefundenen Undulationsfactor U nur um einen unwesentlichen Factor sich unterscheiden kann. Wir können Letzteren durch eine Abzählung bestimmen.

T ist in den Coefficienten jeder der 3 quadratischen Formen f vom 4. Grade, Δ_T muss also in den Coefficienten beispielsweise von f_1 vom $4 \cdot 2\,(8-1) = 56$. Grade sein. Nun ist aber P^2 vom Grade $2 \cdot 24 = 48$, U vom 6. Grade, es fehlt also in Δ_T noch ein Ausdruck 2. Grades. T enthält aber den Factor R (§ 2. (9)) explicite, und die Discriminante Δ_T muss demnach R zur 14. Potenz enthalten. Jener fehlende Factor ist also R^2 und man hat:

$$\Delta_T = \Pi \cdot P^2 = R^{14} \cdot U \cdot (d_{11}d_{22}d_{33})^8 \cdot (D_{11}D_{22}D_{33})^2,$$

wo denn also auf Π das Product der Discriminante der 4 Factoren t

$$\Pi = R^2 \cdot U = V$$

kommt.

Mit Hülfe dieser Zerfällung des Undulationsfactors U (oder eigentlich von V) in 4 irrationale Factoren kann man sofort *die reellen (gemeinen), isolirten und imaginären Doppeltangenten, bez. Undulationstangenten, welche eine durch ihre Gleichung gegebene Curve besitzt, angeben.*

Für $d_{11} = d_{22} = d_{33}$ und $d_{12} = d_{23} = d_{31}$ werden die Discriminanten von t_2, t_3 und t_4 einander gleich und verschwinden für einen leicht angebbaren Werth des Verhältnisses $\frac{d_{11}}{d_{12}}$, was dann einer Curve mit 3 Undulationstangenten entspricht.

Sind von den Grössen d_{ik} eine oder zwei negativ, d. h. fallen ein oder zwei Eckpunkte des Fundamentaldreiecks ins Innere des Kreises, so werden 2 Doppeltangenten conjugirt imaginär. Das Gleiche tritt ein, wenn etwa f_1 und f_2 Formen mit conjugirt imaginären Coefficienten, d. h., wenn zwei Doppelpunkte conjugirt imaginär geworden sind (s. § 8.). Dann werden auch D_{11} und D_{22}, D_{13} und D_{23} und ebenso d_{11} und d_{22} je conjugirt imaginär, während D_{33}, D_{12} und d_{33} reell bleiben, so dass 2 Doppeltangenten conjugirt imaginär werden.

Wenn endlich die Curve einen Selbstberührungs- oder Osculationspunkt besitzt, so bestimmen sich die Factoren des Undulationsfactors ohne Mühe aus den hierfür aufgestellten Gleichungen des § 3., III. Statt der Gleichung $T = 0$ (für welche sich indess die Rechnung bequemer gestaltet) hätte man auch die von dem Factor R befreite Gleichung (§ 2.):

$$\mathsf{T} = \frac{T}{R} = 0$$

als Bestimmungsgleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten ansehn können. Uebrigens unterscheidet sich die Discriminante Δ_{T} von Δ_T bloss um den Factor R^{14}, d. h. die *Discriminante der von dem überflüssigen Factor R befreiten Doppeltangentengleichung erhält den Ausdruck:*

$$\Delta_{\mathsf{T}} = U\,(d_{11}\,d_{22}\,d_{33})^8 \cdot (D_{11}\,D_{22}\,D_{33})^2.$$

Hier bezieht sich dann also der Factor U auf das Zusammenfallen der Berührungspunkte auf einer Doppeltangente, alle anderen Factoren auf das Zusammenfallen der Berührungspunkte verschiedener.

Diese Unterscheidung zwischen zwei Gattungen von Factoren der Discriminante der Doppeltangentengleichung, die hier ein näheres Interesse kaum gewährt, wird von Bedeutung bei einer anderen Auffassung der Frage. Ich entnehme einer brieflichen Mittheilung von Herrn Zeuthen die Bemerkung, dass man die Frage nach den Factoren der Discriminante der Doppeltangenten- und Wendepunktsgleichung — unter Beschränkung auf ein einfach unendliches Curvensystem — auch für allgemeine Curven 4. Ordnung mit etwa vorhandenen (Plücker'schen) Singularitäten beantworten kann. Man hat dann nur unter der Gleichung für die Doppeltangenten etc. die für *eine Coordinate* der betreffenden Singularität zu verstehen; die auftretenden Factoren, deren Zahl und Bedeutung eine wesentlich andere wird, zerfallen dann für die Doppeltangentengleichung in die oben angegebenen 2 Gattungen. Zur ersten Gattung gehört, wie ich den von Herrn Zeuthen mir mitgetheilten Formeln entnehme, u. A. ein Factor, den man „Selbstberührungsfactor" nennen könnte. Für unsere Darstellung der Gleichung der Curve ist das Auftreten eines Selbstberührungspunktes an *zwei* Bedingungsgleichungen geknüpft, deren Verschwinden — ohne gleichzeitiges Zusammenfallen zweier Eckpunkte des Coordinatendreiecks — eine andere Bedeutung besitzt (§ 3., III.), so dass hier ein „Selbstberührungsfactor" im eigentlichen Sinne nicht auftritt.

§ 7.

Vergleichung der Discriminanten beider Gleichungen.

Ein Vergleich der Discriminante der Wendepunkts- und der Doppeltangentengleichung zeigt zunächst, dass sämmtliche in Δ_W auftretende Factoren, bis auf R, auch in Δ_{T} vorkommen. Verschwindet also einer dieser Factoren, so erhalten W und T gleiche Wurzeln, was denn je nach der Vielfachheit des verschwindenden Factors eine Aenderung in der Zahl der reellen Wurzeln hervorbringt oder nicht. Nach den Bemerkungen des vorstehenden Aufsatzes sind jedoch bei der Beurtheilung dieser Aenderung noch andere Umstände mit in Betracht zu ziehen; diese sollen im Nachfolgenden untersucht werden.

I. Was zunächst den Undulationsfactor betrifft, so kommt derselbe einfach in Δ_W und Δ_T vor; verschwindet er, so ändert sich also die Zahl der reellen Wendepunkte und Berührungspunkte um 2. Dass nun mit dem Gewinn (oder Verlust) von 2 *reellen* Wendepunkten immer ein solcher von 2 *reellen* Berührungspunkten verbunden ist, erkennt man daraus, dass für $U=0$ die kleinen Zuwächse σ der 2 gleichen Wurzeln $\lambda=\sqrt[4]{b\,d}$ der Gleichung $W=0$ und die Zuwächse τ der gleichen Wurzeln $\lambda=\sqrt[4]{b\,d}$ der Gleichung*) $T=0$ sich nur um einen *Zahlenfactor* unterscheiden.

In der That, es bestimmen sich σ und τ aus den Gleichungen:

$$\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda^2}\right]+\left[\delta W\right]=0,\quad \frac{\tau^2}{2}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial\lambda^2}\right]+\left[\delta T\right]=0,$$

wo die Variationen sich auf alle Coefficienten in W und T erstrecken, und die eckigen Klammern um einen Ausdruck bedeuten, dass $U=0$, d. h. (für $\varepsilon=\sqrt[4]{b\,d}$):

$$\varepsilon^3+\varepsilon^2\alpha+\varepsilon\beta+\alpha\gamma=0$$

und $\lambda^4=b\,d$ angenommen wird. Nun ist aber:

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda^2}\right]=-\,12\left[\lambda^2 K\right];\quad \left[\frac{\partial^2 T}{\partial\lambda^2}\right]=-\,16\left[\lambda^2 K\right]^2;$$

ferner ist:

$$[\delta T]=[4\lambda^2 K]\cdot[\delta W],$$

und somit:

$$3\sigma^2=\tau^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial W}{\lambda^2 K}\right],$$

wo denn ersichtlich die Zuwächse σ und τ gleichzeitig reell und imaginär werden.

Da bezüglich des betrachteten Undulationspunktes keinerlei beschränkende Voraussetzung gemacht wurde, so gilt die folgende aus Vorstehendem sich ergebende Bemerkung ganz allgemein, dass nämlich *die Geschwindigkeit, mit welcher, beim Durchgang durch den Fall einer Curve mit Undulationspunkt, die Berührungspunkte der Doppeltangenten sich von einander entfernen, zu derjenigen der Wendepunkte sich wie*

$$\sqrt{3}:1$$

*) Statt der Gleichung T möge in der Folge der Bequemlichkeit wegen die für alle Factoren ausser R äquivalente Gleichung T genommen werden (§ 6.).

verhält. Vorausgesetzt ist hierbei selbstverständlich, dass die Deformation der Curve *stetig* vor sich geht.

II. Verschwindet der *Cuspidalfactor*, indem z. B. $D_{11} = b - \frac{a^2}{4} = 0$ wird, so wird $f_1 = \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2$ Factor von T (§ 2. (19)), aber auch von $\vartheta_{12} = 2K$, und also von L (wegen § 2. (18ᵃ)). Demnach verschwindet nicht nur T selbst, sondern auch die erste Variation von T, welche dem Werth $\frac{a^2}{4} + \delta b$ von b entspricht, so dass sich die zugehörigen Zuwächse τ von λ (vgl. d. vorstehenden Aufsatz) aus einer quadratischen Gleichung von der Form:

$$\frac{\tau^2}{2}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}\right]_{\lambda = -\frac{a}{2}} + (\delta b)^2 \cdot T_1 = 0,$$

berechnen, wo T_1 und die eckige Klammer Constante sind. Passirt also δb den Werth Null stetig, so ändert τ^2 sein Vorzeichen nicht und die Zahl der reellen Wurzeln bleibt dieselbe.

Durch das Verschwinden des Cuspidalfactors bleibt also in T die Zahl der reellen Wurzeln ungeändert, während die von W um 2 zu- oder abnimmt, weil dieser Factor einfach in Δ_W auftritt.

III. Das Verschwinden des Spaltungsfactors veranlasst für W keine Aenderung in der Realität der Wurzeln, weil, beispielsweise für ein verschwindendes d, die zugehörige Wurzel λ sich dreifach ausscheidet. In T tritt, wenn die Zahl der reellen Wurzeln überhaupt sich ändert, eine Vermehrung oder Verminderung immer um 4 ein.

§ 8.

Fall imaginärer Doppelpunkte.

In den vorstehenden Paragraphen werden die Coefficienten der Gleichungen für Wendepunkte und Doppeltangenten als reell vorausgesetzt. Es ist nun bemerkenwerth, dass dies auch dann noch gestattet ist, wenn die Coefficienten von zweien der 3 quadratischen Formen, z. B. von f_1 und f_2, conjugirt imaginär sind. Dann werden auch die Coordinaten x_1 und x_2 conjugirt imaginär, und sofern man die homogenen Coordinaten eines Punktes den Abständen desselben von den Seiten eines Coordinatendreiecks gleich (oder von denselben um reelle Constante verschieden) setzt, werden dann auch 2 Seiten des Coordinatendreiecks und die 2 darauf liegenden Doppelpunkte der Curve imaginär, ohne dass es diese selbst wird. Setzt man:

$$\varrho \cdot y_1 = f_1 = \varphi_1 + i\varphi_2; \quad \varrho \cdot y_2 = f_2 = \varphi_1 - i\varphi_2; \quad \varrho \cdot y_3 = f_3,$$

wo $i = \sqrt{-1}$ und die φ und f_3 quadratische Functionen mit reellen Coefficienten sind, so kann man diese wieder in einer kanonischen

Form derart annehmen, das $f_3 = 0$ und in f_1 und f_2 die Coefficienten von λ^2 wie früher $= 1$, a und c dagegen ebenso wie b und d conjugirt imaginär sind. Dann werden aber die 4 Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (§ 6. ff.), aus denen sich die Gleichungen $W = 0$, $T = 0$ u. s. w. zusammensetzen, wieder reell und alle auf die Realität dieser Grössen gestützten Schlüsse, d. h. der Inhalt der vorstehenden Paragraphen fahren fort zu gelten. Um die so dargestellten Curven construiren zu können, führe man reelle rechtwinklige Coordinaten ξ, η ein durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{\varphi_1}{f_3}; \quad \eta = \frac{\varphi_2}{f_3},$$

so wird:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \xi + i\eta : \xi - i\eta : 1;$$

ferner werden die durch quadratische Transformation aus y erhaltenen Coordinaten x:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2} : \frac{\xi + i\eta}{\xi^2 + \eta^2} : 1 = \frac{1}{\xi + i\eta} : \frac{1}{\xi - i\eta} : 1 =$$
$$= \xi' + i\eta' : \xi' - i\eta' : 1.$$

Daher stehen die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η der y-Ebene mit den Coordinaten $\xi' \eta'$ der durch quadratische Transformation aus der y-Ebene hervorgegangenen x-Ebene in der Beziehung:

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}; \quad \eta' = \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

eine Transformation, die, wenn man $\xi' \eta'$ wieder als rechtwinklige Coordinaten deutet, bekanntlich durch reciproke Radienvectoren hergestellt wird. Wird also eine Curve 4. Ordnung auf diesem Wege aus einem Kegelschnitte abgeleitet, *so fahren für diese alle die vorstehenden Betrachtungen fort zu gelten, obgleich die zu Grunde gelegte Darstellung der Coordinaten nicht mehr reell ist.* Natürlich gilt das Gleiche von Curven, die durch reelle *Projection* aus einer solchen entstanden sind, wobei die imaginären Kreispunkte, welche für die Transformation durch reciproke Radienvectoren als Ecken des Coordinatendreiecks gelten müssen, sich in das Endliche hereinschieben. Lässt man diese schliesslich noch zusammenrücken, so hat man den Fall einer Curve mit Selbstberührungspunkt als Uebergang zu der mit 2 reellen Doppelpunkten.

§ 9.

Graphische Darstellung.

Bei den mannigfaltigen Anwendungen, welche die rationalen Curven 4. Ordnung in der Mechanik erfahren haben und in gewissen Zweigen derselben, wie der Kinematik, allem Anscheine nach noch erfahren werden, spielen die gestaltlichen Verhältnisse eine hervorragende Rolle.

Es scheint daher der Mühe nicht unwerth, die verschiedenen Formen, deren eine Curve 4. Ordnung fähig ist, zu einem übersichtlichen Schema zusammenzustellen, in welches die bekannten sich bequem einreihen lassen. Ich werde anknüpfend an eine bekannte Constructionsmethode (Salmon-Fiedler höh. Curven Art. 284) einen kurzen Ueberblick über das Gebiet der Gestalten der rationalen Curven 4. Ordnung geben, indem ich einige Betrachtungen über die Construction der Doppeltangenten vorausschicke.

Man denke sich in der y-Ebene den Kegelschnitt φ (§ 3., wir werden ihn später als Kreis annehmen) und ein reelles Dreieck gegeben, dessen Winkel $A_1 A_2 A_3$ seien; die Coordinaten seien gleich den Abständen von den Seiten desselben; man ordne der Ebene y die Ebene x durch quadratische Transformation:

$$\frac{y_i}{y_k} = \frac{x_k}{x_i}$$

zu. Dann erhält man die Curve Φ, indem man die beiden Ebenen sowie die Coordinatendreiecke zusammenfallen lässt, den Punkt y von φ mit den Eckpunkten $A_1 A_2 A_3$ dieses Dreiecks verbindet und die Winkel, die jeder dieser Strahlen mit den 2 durch den Eckpunkt gehenden Seiten bildet, je mit einander vertauscht, der so erhaltene Punkt x gehört dann der Curve Φ an. Der unendlich fernen Geraden der einen Ebene:

$$y_1 \sin A_1 + y_2 \sin A_2 + y_3 \sin A_3 = 0$$

entspricht dann in der anderen der dem Coordinatendreieck umschriebene Kreis ($\varkappa$):

$$\varkappa \equiv x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0,$$

und man findet also die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten von Φ durch Construction der Bilder der Schnittpunkte von φ mit $\varkappa$.

Den Wendepunkten und Doppeltangenten an Φ entsprechen osculirende bez. doppelt berührende Kegelschnitte zu φ, welche durch die Eckpunkte $A_1 A_2 A_3$ gehen. Aber während die Gleichung für die Ersteren im Allgemeinen durch Quadratwurzeln nicht auflösbar, also die Construction der Wendepunkte durch Zirkel und Lineal nicht möglich ist, lassen sich die Doppeltangenten aus der Bemerkung construiren, dass die Verbindungslinien der Berührungspunkte, deren Gleichungen (§. 6.):

$$y_1 \sqrt{d_{11}} \pm y_2 \sqrt{d_{22}} + y_3 \sqrt{d_{33}} = 0,$$
$$y_1 \sqrt{d_{11}} \pm y_2 \sqrt{d_{22}} - y_3 \sqrt{d_{33}} = 0$$

sind, sich paarweise auf den Seiten des Coordinatendreiecks schneiden, und zwar in Punkten, die offenbar sowohl zu den Eckpunkten des Dreiecks wie zu dessen Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt φ harmonisch gelegen sind (geometrisch beweist diesen Satz v. Staudt, Beiträge p. 238). Ueberträgt man die so erhaltenen Punkte von φ auf Φ, so erhält man die Berührungspunkte der reellen Doppeltangenten, bez. die isolirten Doppeltangenten, Letztere aus der bekannten Construction*) eines durch 3 feste Punkte gehenden Kegelschnitts, der durch die imaginären Schnittpunkte einer Geraden mit einem anderen Kegelschnitt geht.

Instructiv ist der Fall zweier Rückkehrpunkte, wo dann nur eine Doppeltangente vorhanden ist. Den Uebergang derselben vom Reellen zum Imaginären bildet die Undulationstangente, der ein 4-punktig berührender Kegelschnitt entspricht. Hält man diejenigen Seiten des Coordinatendreiecks fest, welche φ berühren, und lässt die dritte so sich bewegen, dass immer eine Curve mit Undulationspunkt entsteht, so umhüllt dieselbe einen jene 2 Seiten ebenfalls berührenden Kegelschnitt.

Auf diese Fälle beziehen sich die Zeichnungen Taf. II, Fig. 1, 2. Fig. 5 (Taf. II) zeigt eine Curve mit zerfallendem Wendekegelschnitt (und Osculationspunkt), für welche 4 Wendepunkte in gerader Linie liegen.

Zur *Aufzählung der verschiedenen Curven 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten übergehend* schicke ich voraus, dass nach Früherem in das Bereich unserer Darstellung sowohl Curven mit Selbstberührungspunkt und Osculationspunkt als auch Curven mit conjugirt imaginären Doppelpunkten fallen (§ 3., 6., 8.).

Es mögen nun als zu demselben Typus gehörig alle diejenigen Curvenformen angesehen werden, welche durch stetige Deformation (die Durchführung durch das unendlich Weite mit eingerechnet) in einander überführbar sind, ohne dass der Charakter einer der 3 Doppelpunkte (reell, imaginär oder isolirt zu sein) geändert wird. Zu demselben Typus gehören also namentlich alle durch Centralprojection aus einander ableitbaren Curven. Wir wollen nun das Coordinatendreieck der x mit dem der y zusammenfallen lassen — da man durch Projection jedes beliebige Dreieck in ein gegebenes überführen kann — und mit der gleichen Berechtigung auch den Einheitspunkt in den Schnittpunkt der Halbirungslinien der 3 Winkel verlegen, was zu der im Anfang dieses § angegebenen Constructionsmethode führt. Aber man kann die Zahl der zu construirenden Formen noch mehr beschränken. Denn, hat man mit diesem Dreieck auf alle Weisen einen Kegelschnitt zu combiniren, so kann man doch sich darauf beschränken, entweder: das Dreieck fest anzunehmen und Form und Lage des Kegelschnittes gegen dasselbe zu verändern, oder: den Kegelschnitt z. B. in Form eines Kreises, in der Ebene fest zu legen, und dem Dreieck alle möglichen Formen und Lagen gegen denselben zu ertheilen. Wir wählen der Uebersichtlichkeit wegen für den Fall des reellen Coordinatendreiecks

*) v. Staudt, Geometrie der Lage, p. 185 ff.

die letzte Erzeugungsweise, wobei dann 2 Dreiecke denselben Typus ergeben, wenn das eine in das andere überführbar ist, ohne dass zu den vorhandenen Schnittpunkten desselben mit dem Kreis neue hinzutreten oder eine Ecke des Dreiecks von dem Kreis überschritten wird. Hier kann es sich jedoch ereignen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks unendlich gross wird, indem die unendlich ferne Gerade dasselbe zu theilen kommt.

Man erhält so (abgesehen von den Grenzfällen) 9 wesentlich verschiedene Typen. Sie sind durch schematische Figuren*) auf der beigegebenen Tafel I (1—9) veranschaulicht, je mit den Kreisen φ, aus welchen sie entstanden sind. Daran reihen sich die 8 Uebergangstypen (1^a—9^a) mit Selbstberührungspunkten bez. isolirten consecutiven Doppelpunkten**), die sich ebenso wie bei einem Fundamentaldreieck mit getrennten Ecken durch Abtragen gleicher Winkel aus dem Kreise φ construiren lassen. Zur leichteren Vergleichung ist je der Grenzfall mit der gleichen Nummer bezeichnet, wie der Fall, aus dem er hervorgegangen (bei 7^a geschieht der Uebergang aus (7) dadurch, dass die Begrenzungspunkte der Grundlinie des Dreiecks zu beiden Seiten ins Unendliche rücken). Endlich kommen hierzu noch die 2 Fälle (Taf. II, 1^b, 5^b) eines Osculationsknotens, für welche die 3 Eckpunkte des Coordinatendreiecks consecutive Punkte eines Curvenelements sind.

Die Construction der Curven mit Osculationsknoten ergiebt sich durch einen Grenzübergang aus der für ein endliches Fundamentaldreieck, indem man dasselbe etwa gleichschenklig, mit den Eckpunkten auf einem festen Kreis, annimmt und die Länge $\overline{AB} = 2\delta$ (Taf. II, Fig. 3) der Grundlinie gegen Null convergiren lässt. Verbindet man den Punkt P und dessen Bild p je mit A und B, so ist $\sphericalangle\,\overline{ApB} - 2\varphi = \sphericalangle\,\overline{APB}$. Ist nun v der Neigungswinkel, den der Strahl $r = \overline{BP}$ in der Grenze mit $\overline{AB}$ bildet, so ist $-v$ der des Strahles $R = \overline{Bp}$ in der Grenze; ferner hat man, wenn a der Radius des durch die 3 Eckpunkte ABC gehenden Kreises $\varkappa$ ist:

$$\lim(\varphi) = \lim\left(\frac{\delta}{2a}\right);$$

sowie:

$$\lim(R \sin\alpha) = \lim(2\delta \sin v),$$
$$\lim(r \sin(\alpha + 2\varphi)) = \lim(2\delta \sin v),$$

wenn $\sphericalangle\,\overline{APB} = \alpha$ gesetzt ist. Eliminirt man α, so kommt:

$$\lim\left(\frac{R}{r}\right) = \lim\left(\frac{2a}{2a - \frac{r}{\sin v}}\right).$$

---

*) Die Curven sind, wie dies schon der angewandte Massstab mit sich bringt, nur in den Hauptzügen richtig.

**) Isolirte Punkte sind durch kleine Kreise bezeichnet.

Man erhält daher P aus p durch folgende Construction: Das Fundamentaldreieck werde durch 3 consecutive Punkte in A des Kreises $\varkappa$ mit $\overline{OA} = a$ als Halbmesser (Taf. II. Fig. 4) dargestellt. Man verbinde p mit A, trage den Winkel v auf der anderen Seite der Tangente in A ab und mache $\overline{Ap'} = \overline{Ap}$. Man errichte nun $qp' \perp \overline{Ap'}$, mache $\overline{DQ} = \overline{Aq}$ und ziehe $\overline{DP} \parallel \overline{Qp'}$, dann ist $\overline{AP} = R$ und P der gesuchte Punkt.

Auf diese Weise sind die Curven 1^b und 5^b entstanden. Der Typus 1^b ist merkwürdig wegen der 3 consecutiven isolirten Punkte, welche die Curve in A hat.

Die dem Auftreten von Rückkehrpunkten entsprechenden Typen lassen sich leicht aus denen mit wirklichen Doppelpunkten durch Zuziehen der Schleifen ableiten und sind deshalb übergangen worden.

Die Typen 1, 4 und 5 können 3 Symmetrieaxen besitzen und gehören dann dem Geschlecht der *Hypotrochoiden* (im Grenzfall des Rückkehrpunktes: den *Hypocycloiden*) an, welche ein Punkt beim Abrollen eines Kreises in einem anderen von dreifachem Durchmesser beschreibt.

Zu den Typen 6^a bez 7^a zählen die *Conchoiden* (6^a vermöge einer Collineation, durch welche der Selbstberührungspunkt ins Unendliche rückt).

Um die Typen mit imaginären Doppelpunkten zu erhalten, nehme man das Coordinatendreieck als fest, den Kegelschnitt aber in Lage und Form beweglich an. Man verlege die beiden imaginären Doppelpunkte in die unendlich fernen Kreispunkte, die quadratische Transformation reducirt sich dann auf die Verwandlung mittelst reciproker Radienvectoren und man erhält somit je nach Form und Lage des Kegelschnitts 4 verschiedene Typen, indem man Ellipse und Hyperbel mit dem Inversionscentrum innerhalb und ausserhalb combinirt (Taf. II, Nr. I—IV). Die der Parabel entsprechenden Curven, die im Inversionscentrum einen Rückkehrpunkt haben würden, sind hier übergangen worden, ebenso wie die Curven mit imaginären Rückkehrpunkten, die aus der Annahme des Inversionscentrums in einem Brennpunkte des Kegelschnitts entstehen.

Zu Typus I gehört die *Fusspunktscurve der Ellipse*, zu III die *Lemniscate*, zu II bez. IV die *Pascal'sche Schneckenlinie* (im Grenzfall die *Cardioide*).

München, im März 1877.

Note über die Integration totaler Differentialgleichungen.

Von

P. du Bois-Reymond in Tübingen.

1.

Die Auflösung der Differentialgleichung

$$0 = Xdx + Ydy + Zdz,$$

in der $X : Y : Z \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, ist neuerdings wieder zur Sprache gekommen, weshalb es mir gestattet sein mag, früher darüber Beigebrachtes*) durch einige Bemerkungen zu vervollständigen.

Bei drei Veränderlichen hat man den Vortheil der geometrischen Anschauung, und so habe ich damals mit Hülfe gewisser Constructionen die älteren Regeln für die Auflösung jener Differentialgleichung und einige neue nach übrigens sehr natürlich sich darbietenden allgemeinen Gesichtspunkten darzulegen gesucht. Man gelangt auf höchst einfache Weise zur Euler'schen Auflösungsmethode durch zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen die zweite erst aufgestellt werden kann, wenn die erste gelöst ist. Diese Methode habe ich in meinen Veröffentlichungen nicht geometrisch abgeleitet, was ich hier nach einem indessen etwas abweichenden Verfahren nachtragen werde. Weiter folgt ebenso leicht die Natani'sche Methode der Auflösung durch die Integrale zweier zugleich aufstellbarer Differentialgleichungen. Endlich eine dritte Methode, bei welcher die Auflösung einer Differentialgleichung genügt. Hierzu ist kürzlich noch ein Verfahren gekommen**), welches der Euler'schen Methode verwandter ist als der eben erwähnten zweiten und dritten Methode, und welches ich deshalb zugleich mit jener aus der geometrischen Vorstellung ableiten will.

---

*) *Beiträge zur Integration der partiellen Differentialgleichungen*, Leipzig 1864 bei Ambr. Barth, § 1., und *Ueber die Integration linearer totaler Differentialgleichungen* etc., Borch. Journ. Bd. 70.

**) Bertrand, Comptes Rendus.

2.

Sind dx, dy, dz die Projectionen eines Elements ds einer Curve auf einer Fläche der Schaar $\varphi(x, y, z) = c$, so genügen sie stets der Gleichung:

$$(1) \qquad M d\varphi = X dx + Y dy + Z dz = 0$$

und noch einer anderen ganz beliebigen Gleichung:

$$(2) \qquad U dx + V dy + W dz = 0.$$

Man kann die Sache aber auch so darstellen, dass die Projectionen dx, dy, dz den Gleichungen

$$(3) \qquad dx : dy : dz = X_1 : Y_1 : Z_1$$

genügen, wo X_1, Y_1, Z_1 die Bedingung:

$$(4) \qquad XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0$$

identisch erfüllen.

Nun seien

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha = \psi\,(x, y, z), \\ \beta = \psi_1(x, y, z) \end{cases}$$

die Integrale von (3). Sie bedeuten eine räumliche (zweifach unendliche) Schaar von Curven, die sämmtlich auf den Oberflächen $\varphi(x, y, z) = c$ liegen. Differentiirt man die Gleichungen (5) so, dass man sich vorstellt, man bleibe nicht auf einer Curve der räumlichen Schaar, sondern bewege sich auf einer Transversalen, die aber auch auf der Oberfläche $\varphi(x, y, z) = c$ liegen soll, so dass also die dx, dy, dz der Gleichung (1) genügen, und eliminirt aus $d\alpha = d\psi$, $d\beta = d\psi_1$ und (1) die Differentiale dx, dy, dz, so folgt eine Gleichung der Form:

$$(6) \qquad A d\alpha + B d\beta = 0,$$

die, weil der Gang der transversalen Curve nur der Beschränkung unterlag, eine Fläche $\varphi = c$ nicht zu verlassen, nach Elimination von z. B. y und z kein x mehr enthalten darf. Eben weil die Gleichung $A d\alpha + B d\beta = 0$ sämmtlichen Curven (5) auf einem Individuum $\varphi = c$ angehören muss. Man wird also aus (6) eine Beziehung zwischen α und β erhalten, die mit (5) den Ort der Curven des Systems (5) giebt, also die Fläche $\varphi = c$.

Setzt man in (3) $Z_1 = 0$, so kommt die Euler'sche Methode zum Vorschein, setzt man für X_1, Y_1, Z_1 die Grössen $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$, $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$, so erhält man die Methode des Herrn Bertrand.

3.

Man hat versucht, die drei ersten im Art. 1. erwähnten Methoden in Bezug auf ihre Brauchbarkeit unter einander zu vergleichen*). Eine derartige Untersuchung halte ich, wenn sie glückt, für sehr nützlich, aber auch für sehr schwierig.

Nach Durchlesung der ersten Hälfte meines Aufsatzes (Borch. Journ. Bd. 70, *Ueber die Integration* etc.) wird man mir zugeben, dass man zahllose ähnliche Regeln aus den allgemeinen Principien ableiten kann, und dass jene drei Methoden nur durch den einfachen Ausdruck, den sie gestatten, hervorragen. Wer ausserdem, wie ich es gethan, die Methoden an zahlreichen möglichst verschiedenartigen Beispielen prüfte, würde mir Recht geben, wenn ich es für misslich erachte, a priori einer dieser Regeln in allen oder doch den weitaus meisten Fällen den Vorzug zu ertheilen. Das richtige Verfahren ist, im gegebenen Falle der allgemeinen Grundsätze eingedenk zu sein, und sie der Beschaffenheit der gerade vorliegenden Differentialgleichung möglichst anzupassen, um zu sehen, ob sie vielleicht zugänglich ist. Ich habe den Eindruck behalten, dass von den angeführten einfachsten drei Regeln bei den naheliegenderen Beispielen die Natani'sche häufig rasch zum Ziele führt, wo die Euler'sche Schwierigkeiten macht, und dass endlich in manchen Fällen die dritte Methode oder ihr ähnliche Kunstgriffe eine Integration gestatten, während die beiden anderen zu gleichem Zwecke erst eine vorgängige, manchmal nicht naheliegende Veränderung der totalen Differentialgleichung durch geeignete Substitutionen erheischen. Im Allgemeinen aber scheinen die Methoden entweder alle drei auf mehr oder weniger Umwegen zum Ziele zu führen, oder es ist mit keiner etwas anzufangen. Eine Untersuchung, welche von den drei Methoden die Mehrzahl günstiger Chancen für sich habe, schiene mir ein gewagtes Unternehmen. Mehr Erfolg als dergleichen Speculationen versprächen wiederholte Untersuchungen besonderer Fälle und tafelartige Zusammenstellungen ihrer Ergebnisse, für welche saure Arbeit das Problem selbst aber schwerlich Interesse genug bietet. Das in diesem Artikel Gesagte will ich an einem Beispiele erläutern.

4.

Eine besondere Behandlung gestatten die totalen Differentialgleichungen $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, wenn die Coefficienten X, Y, Z nur von zwei Veränderlichen oder von zwei Combinationen der Veränderlichen abhängen, und unter diesen wollen wir wieder die Gleichungen homogenen Charakters herausgreifen, worunter ich diese verstehe:

---

*) A. Weiler, Schlömilch's Zeitschrift Jahrg. 1875, kleinere Mittheilungen p. 78.

$$(1) \qquad \varphi_0(u, v)\,dx + \varphi_1(u, v)\,dy + \varphi_2(u, v)\,dz = 0,$$

wo

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{z}{x}.$$

Um die Gleichung

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) - Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0$$

zu bilden, hat man:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right), \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial v} + u\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} + v\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}\right), \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial u} + u\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} + v\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Wenn die Gleichung (1) nicht transformirt wird und keine besonderen Functionen φ eingeführt werden, so ist sie weder für die erste und zweite noch für die vierte Methode des Art. 1. zugänglich, da von den Functionen φ_0, φ_1, φ_2 zwei beliebig sind. Aber mit der dritten Methode lässt sie sich behandeln.

Denn man führe $y = ux$, $dy = u\,dx$ ein, so hat man die Gleichung:

$$\varphi_0(u, v)\,dx + \varphi_1(u, v)\,u\,dx + \varphi_2(u, v)\,dz = 0$$

zu integriren, indem man u als eine Constante ansieht. Zu diesem Zwecke setzt man $z = vx$ und hat die Gleichung:

$$\frac{dx}{x}(\varphi_0 + u\varphi_1 + v\varphi_2) + \varphi_2\,dv = 0$$

aufzulösen, wodurch man erhält:

$$\int \frac{\varphi_2\,dv}{\varphi_0 + u\,\varphi_1 + v\,\varphi_2} + lx = c.$$

Nach dem Inhalt der dritten Methode ist nun c eine Function von u allein, die man gewöhnlich erhält, wenn man $x = 0$ und $z =$ einer willkürlichen Constanten setzt. Hier kann man aber die Function c von u auf diese Weise nicht bestimmen, weil wegen $v = \frac{z}{x}$, und wegen des Logarithmus lx x nicht gleich Null gesetzt werden kann. Differentiirt man jedoch die vorstehende Gleichung nach allen Variabeln, so erhält man (wenn man der Kürze wegen die Variable v statt z beibehält, wodurch (1) in:

$$(1') \qquad \frac{dx}{x}[\varphi_0 + u\varphi_1 + v\varphi_2] + \varphi_1\,du + \varphi_2\,dv = 0$$

übergeht) die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial u}\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\,\varphi_1+v\,\varphi_2}-\frac{\varphi_1}{\varphi_0+u\,\varphi_1+v\,\varphi_2}=\frac{dc}{du}$$

oder:

$$\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}-\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}=c,$$

woraus sich das Integral von (1) ergiebt. Es lautet:

$$\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}+\left[\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}-\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}\right]+lx=\text{Constans}.$$

Die Klammer [] enthält kein v, und es darf also darin $v=0$ gesetzt werden.

Wenn man aber in der Differentialgleichung:

$$\varphi_0(u,v)\,dx+\varphi_1(u,v)\,dy+\varphi_2(u,v)\,dz=0$$

statt y und z die Veränderlichen u und v einführt, so lässt diese transformirte Gleichung sich auch mit den Methoden von Euler und Natani behandeln. Man hat aber alsdann eine *neue* Differentialgleichung vor sich, die in diesem Falle allerdings sehr leicht aus der ersten folgt, ebenso gut aber auch in höchst verborgenem Zusammenhang mit ihr stehen könnte. Nun die neue Gleichung lautet:

(1′) $$\frac{dx}{x}(\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2)+\varphi_1 du+\varphi_2 dv=0.$$

Die Euler'sche Methode würde hier vorschreiben, dass man z. B. $du=0$ setzte und die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{x}(\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2)+\varphi_2 dv=0$$

auflöste, und dass man ferner die Integrationsconstante, die nur von u abhängen kann, aus (1′), dem Integral vorstehender gewöhnlicher Differentialgleichung, und dessen Differential nach allen Veränderlichen eliminirte, was offenbar genau auf die eben dargelegte directe Operation nach der dritten Methode hinausläuft, so dass man auch identisch dasselbe Integral von (1) findet.

Nach der Natani'schen Methode hätte man so zu verfahren: Setzt man $1'\equiv\psi_0(x,u,v)\,dx+\psi_1(x,u,v)\,du+\psi_2(x,u,v)\,dv=0$, so erhält man nach dieser Regel das Integral (1′) durch Auflösung z. B. folgender Gleichungen:

$$\psi_0(x,u,v)\,dx+\psi_2(x,u,v)\,dv=0,$$
$$\psi_0(x,u,0)\,dx+\psi_1(x,u,0)\,du=0.$$

Sind $\Psi(x,u,v)=c$, $\Psi_1(x,u)=c_1$ die Integrale beider Gleichungen, so ist das Integral von (1′) dieses:

$$\Psi(x,u,v)-\Psi(x_1,u,0)=0,$$
$$\Psi_1(x_1,u)\quad-\Psi(x_0,0)\quad=0,$$

x_1 aus beiden Gleichungen eliminirt gedacht. Wir haben also die Differentialgleichungen aufzulösen:

$$\frac{dx}{x}[\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2]+\varphi_2 dv=0,$$

$$\frac{dx}{x}[\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2]_{v=0}+\varphi_1(u,0)\,du=0.$$

Die erste giebt:

$$\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}+lx=\left[\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{v=0}+lx_1$$

die zweite:

$$\left[\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{v=0}+lx_1=\left[\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{u=0,\ v=0}+lx_0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt das Integral von (1):

$$\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}+\left[\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{v=0}-\left[\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{v=0}+lx=\text{Constans.}$$

wie oben.

Endlich nach der vierten Methode scheint ohne Kenntniss der Functionen φ hier eine Integration nicht angänglich zu sein, oder wenigstens nicht ohne Weiteres. Dagegen kann man die dritte Methode auch direct auf die transformirte Gleichung:

$$\frac{dx}{x}\left|\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2\right|+\varphi_1 du+\varphi_2 dv=0$$

anwenden, indem man z. B. $v=\gamma u$ einführt. Dadurch wird, γ als constant behandelt, folgende Gleichung aufzulösen sein:

$$\frac{dx}{x}\left|\varphi_0(u,\gamma u)+u\varphi_1+\gamma u\varphi_2\right|+\left|\varphi_1+\gamma\varphi_2\right|du=0.$$

Sie giebt integrirt:

$$\int du\,\frac{\varphi_1+\gamma\varphi_2}{\varphi_0+u\varphi_1+\gamma u\varphi_2}+lx=c.$$

Hierin $u=0$, $x=x_1$ gesetzt, erhält man c als Function von γ und x_1, und hat dann für γ zurückzusetzen $\frac{v}{u}$.

5.

Wir erhalten also folgende Ergebnisse. Von den Art. 1. angeführten einfachen Regeln gestattet eine directe Anwendung auf die Gleichung:

$$\varphi_0\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)dx + \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)dy + \varphi_2\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)dz = 0$$

nur die dritte. Transformirt man diese Gleichung in:

$$\frac{dx}{x}\left\{\varphi_0(u, v) + u\varphi_1(u, v) + v\varphi_2(u, v)\right\} + \varphi_1(u, v)du + \varphi_2(u, v)dv = 0,$$

so liefern die erste und zweite Methode dieselben Lösungsformen, wie bei der ursprünglichen Differentialgleichung die dritte. Endlich liefert die dritte Methode, auf die transformirte Differentialgleichung angewandt, eine der Form nach andere Lösung, indem jene Methoden zwei Quadraturen verlangen, diese nur eine, aber dem Anschein nach wohl etwas zusammengesetztere, als jede einzelne der zwei Quadraturen, was aber in Wirklichkeit auch manchmal sich anders verhalten kann. Die vierte Methode scheint, weder auf die ursprüngliche noch auf die transformirte Differentialgleichung angewandt, leichten Erfolg zu versprechen, so dass, wenn man bei irgend einer Untersuchung das Bedürfniss empfunden hätte, die allgemeine Auflösung der Gleichung:

$$\varphi_0\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)dx + \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)dy + \varphi_2\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)dz = 0$$

kennen zu lernen, man diesem Bedürfniss nur mit den drei ersten von den angeführten Methoden sofort hätte genügen können, am directesten aber mit der dritten. Aehnliche Ergebnisse erhält man, wenn statt der Functionen $u = \frac{y}{x}$, $v = \frac{z}{x}$ andere einer Integration günstige eingeführt werden, z. B. lineare. Specialisirt man im obigen Beispiel die Functionen φ, so hat Herr Bertrand an mehreren derartigen besonderen Fällen, die aber alle homogene Differentialgleichungen sind, gezeigt, dass auch seine (die vierte) Methode, wiewohl sie eigentlich am meisten Anstrengungen zu verlangen scheint, unter Umständen eine rasche Herleitung des Integrals ermöglicht. In der Bemerkung am Schlusse seiner Note scheint mir aus $\lambda d\varphi = 0$, wenn $\alpha = \lambda$, $\beta = \varphi$ gesetzt wird, $\alpha d\beta = 0$ zu folgen.

6.

Indessen, wie bemerkt, wird man im gegebenen Falle nicht an den Wortlaut einzelner Regeln sich halten, sondern an die allgemeinen Ueberlegungen, aus denen sie folgen, und wird die allgemeinen Grundsätze an den besonderen Fall anzupassen suchen.

Etwas anderes ist es, wenn man von dem Problem mit drei Veränderlichen zur totalen Differentialgleichung mit n Veränderlichen fortschreitet. Ich habe für diese Gleichungen, wenn ihnen durch ein Integral Genüge geschieht, zwei Behandlungsweisen vorgeschlagen*) und möchte

*) Borch. Journal Bd. 70. Ueber die Integration etc § 5., sqq.

mit ein paar Worten auf deren relative Vorzüge eingehen. Die zweite Behandlungsweise schreibt die Einführung einer Substitution von einer gewissen Form vor, wodurch die Integration (ihre Thunlichkeit angenommen) sehr erschwert werden kann, während, diese Integration vollzogen gedacht, man sofort das Integral der Differentialgleichung vor sich hat. Die erste Methode lässt die Form der Substitution viel unbeschränkter, ja fast ganz unbeschränkt, und wird so leichtere Integration gestatten, während nachher noch Eliminationen zu vollziehen sind, aus denen sich erst das Integral ergiebt. Mit Recht pflegt man diese weniger zu fürchten. Man wird es sogar meistens unterlassen dürfen, die Eliminationen wirklich auszuführen, und das Integral in Form mehrerer Gleichungen beibehalten*). Somit glaube ich also, dass man in der ungeheuren Mehrzahl der Fälle der ersten Methode unbedingt den Vorzug zuerkennen muss. Dementsprechend ist es mir auch wahrscheinlich, dass die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit $n+1$ Variabeln mehr Vortheil aus der ersten, denn aus der zweiten Methode würde ziehen können.

Weil ich nun gerade auf ältere Untersuchungen hier wieder zu sprechen gekommen bin, so sei es mir gestattet, einer Angelegenheit, die ich schon längere Zeit auf dem Herzen habe, eine kurze doch lediglich vorläufige Bemerkung zu widmen, denn ich beabsichtige, in einiger Zeit meine früheren Untersuchungen wieder aufzunehmen. In einem in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatze**) über Complexe etc., und in weiteren ähnliche Gegenstände behandelnden Untersuchungen ist in einigen Nebensächliches betreffenden Stellen meiner früheren Arbeiten Erwähnung geschehen, allein bezüglich der Kegeltheorie der partiellen Differentialgleichung wird mir nicht der geringste Antheil zugebilligt. Ich meine aber: Die Thatsache lässt sich nicht ungeschehen machen, dass ich die geometrische Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung auf die der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ zugehörigen Kegelflächen gegründet, und bis zu einer gewissen für meine Zwecke genügenden und die Hauptsätze deutlich enthaltenden Vollendung durchgeführt habe. Mir ist allerdings ebenfalls bei Monge und auch bei Lagrange eine Stelle aufgestossen, wo diese Autoren bemerken, dass der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ ein gewisser Kegel entspricht, was übrigens auch nahe liegt. Es folgt aber bei den genannten Autoren auf diese Bemerkung ein Weiteres nicht, und insbesondere Monge macht von ihr keinen Gebrauch in seiner Theorie der Charakteristiken. Die vielen Dinge, welche diese Theorie dunkel liess, waren für mich

*) L. c. § 5. am Schlusse. Die Werthe $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{n-1}$ dürfen auch unendlich wenig verschieden sein, wodurch eine besondere Auflösungsform entsteht.

**) Sophus Lie, Diese Annalen Bd.

gerade Veranlassung auf dem *ganz neuen* Wege der Kegeltheorie in die Lehre der partiellen Diffentialgleichungen tiefer einzudringen. Es verlangte dies den damals neuen Begriff der in Kegeln oder Conoiden angeordneten Systeme von Geraden oder Curven. Diese Vorstellung war so neu, dass ein guter Geometer behauptete, sie müsse unter den Hamilton'schen Begriff eines allgemeinen Systems von Geraden sich unterbringen lassen. Mir ist zur Stunde nicht bekannt, wem, Plücker oder mir, das publicatorische Erstlingsrecht an die Idee der Complexe zukommt. Sicher jedoch ist, dass, wenn meine „Beiträge etc.“ später als Plücker's erste Mittheilungen erschienen sein sollten, dieser Zeitunterschied nicht bedeutend sein kann. Aber die Urheberschaft in der Anwendung jener geometrischen Gebilde auf die Deutung der partiellen Differentialgleichungen und ihrer Lösungen wird mir schwerlich mit Erfolg streitig gemacht werden können.

Tübingen, Februar 1877.

Ueber den Multiplicator eines Jacobi'schen Systems.

Von

A. Mayer in Leipzig.

In dem vorhergehenden Bande dieser Annalen (p. 501 u. flg.) hat Lie gezeigt, dass, dem Jacobi'schen Multiplicator einer einzelnen linearen partiellen Differentialgleichung entsprechend, auch für jedes vollständige System ein Multiplicator von ganz analogen Eigenschaften existirt.

Für das gegebene vollständige System:

$$(1) \qquad A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots r,$$

kann man, vorausgesetzt, dass die Determinante:

$$\Delta = \sum \pm X_1^1 X_2^2 \cdots X_r^r$$

nicht $= 0$ ist, diesen Lie'schen Multiplicator M ebensowohl durch die Formel:

$$(\alpha) \qquad M = \frac{1}{\Delta} \sum \pm \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial f_{r+2}}{\partial x_{r+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

in der $f_{r+1}, f_{r+2}, \cdots f_n$ irgend $n-r$ von einander unabhängige Lösungen des Systems (1) bezeichnen, als auch, nachdem man mittels Auflösung nach $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_r}$ dieses System auf die Form:

$$(\beta) \qquad \Delta \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{h=r+1}^{h=n} \Delta_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0$$

gebracht hat, durch die r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial \Delta M}{\partial x_i} + \sum_{h=r+1}^{h=n} \frac{\partial \Delta_h^i M}{\partial x_h} = 0$$

definiren.

Aus diesen Definitionen erhellt unmittelbar, dass für ein vollständiges System von der Form (β) der Lie'sche Multiplicator des ganzen Systems zugleich ein, allen r Gleichungen des Systems gemeinsamer Jacobi'scher Multiplicator, oder kurz gesagt, ein *gemeinsamer Multiplicator* des Systems ist. Aber nicht jedes vollständige System theilt diese Eigenschaft. Im Allgemeinen besitzt vielmehr ein vollständiges System gar keinen gemeinsamen Multiplicator, oder es giebt, auch wenn die r Gleichungen (1) ein vollständiges System bilden, doch im Allgemeinen keine Function M, die allen r Gleichungen:

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h} = 0$$

gleichzeitig genügte. Gäbe es nämlich für jedes vollständige System eine solche Function, so müssten im Besondern auch je n unabhängige Gleichungen von der Form (2) eine gemeinsame Lösung zulassen, insofern die zugehörigen n Gleichungen (1), aufgefasst als partielle Differentialgleichungen zwischen f und $n+1$ unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n x_{n+1}$, die gemeinsame Lösung $f = x_{n+1}$ besitzen und somit stets als ein vollständiges System angesehen werden können. Man erkennt aber sofort, dass n beliebige Gleichungen von der Form (2) nicht eo ipso die Integrabilitätsbedingungen erfüllen. So ergeben z. B. die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \log M}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \log M}{\partial x_2} = 0,$$

$$x_2 \frac{\partial \log M}{\partial x_1} + (1 + x_1 x_2) \frac{\partial \log M}{\partial x_2} + x_1 = 0,$$

denen der gemeinsame Multiplicator des vollständigen Systems:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (1 + x_1 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

genügen müsste, die mit einander unvereinbaren Werthe:

$$\frac{\partial \log M}{\partial x_1} = x_1^2, \qquad \frac{\partial \log M}{\partial x_2} = -x_1.$$

Für ein Jacobi'sches System aber, d. h. für ein vollständiges System von der beliebigen Form (1), in welchem aber jedes:

$$A_i\big(A_k(f)\big) - A_k\big(A_i(f)\big)$$

identisch Null ist*), existirt, wie ebenfalls Lie nachgewiesen hat**), stets ein gemeinsamer Multiplicator und es ist bereits früher***) behauptet worden, dass auch für solche Systeme gemeinsamer Multiplicator und Lie'scher Multiplicator identische Begriffe seien. Diese Behauptung zu beweisen, ist der Hauptzweck der folgenden Note.

Der Beweis lässt sich fast ganz ohne Rechnung dadurch führen, dass man die Regel, die Jacobi (Crelle J. 27, p. 242) zur Ableitung des Multiplicators einer durch Einführung neuer unabhängiger Variabeln transformirten linearen partiellen Differentialgleichung aus dem Multiplicator der ursprünglichen Gleichung gegeben hat, mit denjenigen Formeln in Verbindung bringt, die sich aus Satz 17. der Lie'schen Abhandlung für ein n-gliedriges Jacobi'sches System mit n unabhängigen Variabeln ergeben. Da aber diese Jacobi'sche Regel, soweit ich weiss, ohne Anwendung fremder Hülfsmittel†), bisher immer nur aus derjenigen Definition des Jacobi'schen Multiplicators abgeleitet worden ist, der für ein vollständiges System die Lie'sche Formel (α) entspricht, so schien es nicht uninteressant, zunächst lediglich von der Voraussetzung ausgehend, dass die r Gleichungen (2) eine gemeinsame Lösung besitzen, direct aus diesen Gleichungen selbst die Jacobi'sche Regel zu gewinnen und sodann durch Anwendung derselben auf den Fall eines Jacobi'schen Systems gleichzeitig die Existenz eines gemeinsamen Multiplicators und seine Identität mit dem Lie'schen Multiplicator nachzuweisen. Der Vollständigkeit halber füge ich in § 3. noch die Form hinzu, welche das Princip des letzten Multiplicators annimmt, wenn man an Stelle einer einzelnen Gleichung ein Jacobi'sches System treten lässt. —

§ 1.

Ableitung des gemeinsamen Multiplicators transformirter linearer partieller Differentialgleichungen aus dem gemeinsamen Multiplicator der ursprünglichen Gleichungen.

Es sei:

$$(1) \qquad A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r,$$

---

*) Ich gebrauche hier die Bezeichnung Jacobi'sches System in dem ursprünglichen engeren Sinne, in welchem dieselbe von Clebsch (Borchardt's J. 65, p. 259) eingeführt ist, für das, was man nach der Lie'schen Terminologie etwa vollständiges System von involutorischer Form nennen würde.

**) A. a. O. p. 505, Satz 15.

***) Ib. p. 509, Anmerkung.

†) Boole (treatise on differential equations, suppl. vol. p. 216) hat die hübsche Bemerkung gemacht, dass die Jacobi'sche Regel sich unmittelbar aus der bekannten Jacobi'schen Transformationsformel ergiebt, die man durch Umformung und Variation eines n-fachen Integrales erhält.

ein beliebig gegebenes System partieller Differentialgleichungen, das einen gemeinsamen Multiplicator M besitze, oder also, für welches eine Grösse M existire, die den r Gleichungen:

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h} = 0$$

gleichzeitig genügt.

Führt man durch die n Gleichungen:

$$(3) \qquad \psi_1 = y_1, \quad \psi_2 = y_2, \quad \cdots \quad \psi_n = y_n,$$

in denen $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n$ irgend n gegebene, von einander unabhängige Functionen von $x_1 \cdots x_n$ bedeuten, die y an Stelle der x als neue Variable ein und bezeichnet der Deutlichkeit halber die Substitution der aus (3) folgenden Werthe von $x_1 \cdots x_n$ durch das Zeichen [ ], so wird:

$$(4) \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial x_h}\right] = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial [f]}{\partial y_k} \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right],$$

folglich, wenn man:

$$(5) \qquad Y_k^i = \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]$$

setzt:

$$(6) \qquad \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h}\right] = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial [f]}{\partial y_k}.$$

Durch Einführung der neuen unabhängigen Variabeln y verwandeln sich also die r Gleichungen (1) in die r Gleichungen:

$$(7) \qquad B_i[f] = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial [f]}{\partial y_k} = 0.$$

Es fragt sich, wie kann man aus irgend einer gemeinsamen Lösung M der r Gleichungen (2) eine gemeinsame Lösung N der r Gleichungen:

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial \log N}{\partial y_k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = 0$$

erhalten?

Zu diesem Ende bemerke ich, dass nach (5):

$$\frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial [X_h^i]}{\partial y_k} \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right] + \sum_{h=1}^{h=n} [X_h^i] \frac{\partial \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]}{\partial y_k},$$

folglich nach (4):

$$(9)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{\partial X_h^i}{\partial x_h}\right] + \sum_{h=1}^{h=n} \left[X_h^i\right] \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]}{\partial y_k}$$

ist. Weiter hat man:

$$(10)\quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \left\{\left[\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_h \partial x_1}\right] \frac{\partial [x_1]}{\partial y_k} + \cdots + \left[\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_h \partial x_n}\right] \frac{\partial [x_n]}{\partial y_k}\right\}.$$

Aus den Identitäten

$$[\psi_i] = y_i$$

aber folgt:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_h}\right] \frac{\partial [x_h]}{\partial y_k} = \frac{\partial y_i}{\partial y_k},$$

d. h. $= 0$, oder $= 1$, jenachdem $i \gtrless k$, oder $i = k$ ist, also, wenn man die Determinante:

$$(11)\qquad \sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} = A$$

setzt, durch Auflösung:

$$\frac{\partial [x_h]}{\partial y_k} = \left[\frac{\partial \log A}{\partial \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}}\right].$$

Hierdurch geht (10) über in:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]}{\partial y_k} = \left[\sum_{k=1}^{k=n} \left\{\frac{\partial \log A}{\partial \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1 \partial x_h} + \cdots + \frac{\partial \log A}{\partial \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_n \partial x_h}\right\}\right] = \left[\frac{\partial \log A}{\partial x_h}\right]$$

und daher lässt sich die Formel (9) so schreiben:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \left[\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h}\right] + \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log A}{\partial x_h}\right],$$

oder nach (6):

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \left[\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h}\right] + \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial \log [A]}{\partial y_k}.$$

Addirt man hierzu die aus (6) folgende Formel:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial \log [M]}{\partial y_k} = \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h}\right],$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial \log \left[\frac{M}{A}\right]}{\partial y_k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h}\right]$$

und diese Identität liefert uns als Antwort auf unsere Frage die Jacobi'sche Regel:

Satz 1. *Es sei:*

$$A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

ein beliebig gegebenes System linearer partieller Differentialgleichungen, das einen gemeinsamen Multiplicator M besitze. Führt man dann vermittelst irgend n unabhängiger Substitutionen:

$$\psi_1 = y_1, \quad \psi_2 = y_2, \cdots \psi_n = y_n$$

dieses System über in das folgende:

$$B_i(f) = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0,$$

dessen Coefficienten als Functionen der neuen Variabeln y nach den Formeln:

$$Y_k^i = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}$$

zu berechnen sind, so ist, ausgedrückt in diesen neuen Variabeln:

$$N = \frac{M}{\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}}$$

ein gemeinsamer Multiplicator des transformirten Systems $B_i(f) = 0$. Kennt man umgekehrt irgend einen gemeinsamen Multiplicator N dieses letzteren Systems, so erhält man aus der Formel:

$$M = N \sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n},$$

wenn man darin für die y_h wieder ihre Werthe ψ_h setzt, einen gemeinsamen Multiplicator M des gegebenen Systems $A_i(f) = 0$.

§ 2.

Anwendung auf Jacobi'sche Systeme.

Nehmen wir nunmehr an, dass das gegebene System:

$$(1) \qquad A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

ein Jacobi'sches System sei. Dann ist bekanntlich auch das transformirte System:

$$B_i[f] = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial [f]}{\partial y_k} = 0 \tag{7}$$

ein Jacobi'sches System. In der That aus der Identität:

$$[A_i(\varphi)] = B_i[\varphi]$$

folgt, wenn man

$$\varphi = A_k(f)$$

setzt:

$$[A_i(A_k(f))] = B_i[A_k(f)] = B_i[B_k[f]];$$

die Bedingungen:

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0$$

ziehen daher stets die folgenden:

$$B_i[B_k[f]] - B_k[B_i[f]] = 0 \tag{12}$$

nach sich.

Die r Gleichungen (1), da sie ein Jacobi'sches System bilden sollen, müssen sich auflösen lassen nach r von den Differentialquotienten der Function f. Der Einfachheit halber will ich annehmen, dass $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_r}$ solche r Differentialquotienten seien, oder dass die Determinante:

$$\Delta = \sum \pm X_1^1 X_2^2 \cdots X_r^r \tag{13}$$

verschieden von Null sei. Nennen wir dann $f_{r+1}, \cdots f_n$ irgend $n-r$ unabhängige Lösungen des Systems (1), so sind diese Functionen unabhängig von einander hinsichtlich $x_{r+1}, \cdots x_n$ *). Wir können daher in dem vorhergehenden Satze:

$$\psi_1 = x_1, \cdots \psi_r = x_r, \quad \psi_{r+1} = f_{r+1}, \cdots \psi_n = f_n$$

nehmen. Hierdurch wird nach (8):

$$Y_k^i = [X_k^i] \text{ für } k = 1, 2, \cdots r$$

und

$$Y_k^i = 0 \quad \text{für } k = r+1, \cdots n,$$

und das System (6) reducirt sich folglich auf:

$$B_i[f] = \sum_{k=1}^{k=r} [X_k^i] \frac{\partial [f]}{\partial x_k} = 0, \tag{14}$$

wo nunmehr die [] anzeigt, dass für $x_{r+1} \cdots x_n$ ihre, aus den Gleichungen:

*) Vgl. diese Annalen Bd. V. p. 469.

$$f_{r+1} = y_{r+1}, \cdots f_n = y_n$$

folgenden Werthe zu substituiren sind.

Der gemeinsame Multiplicator $[N]$ des r-gliedrigen Jacobi'schen Systems (14) wird definirt durch die r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(15) \qquad \sum_{k=1}^{k=r} [X_k^i] \frac{\partial \log [N]}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial [X_k^i]}{\partial x_k} = 0$$

und aus jeder gemeinsamen Lösung $[N]$ dieser r Gleichungen ergiebt sich nach Satz 1., ein gemeinsamer Multiplicator des gegebenen Jacobi'schen Systems (1) durch die Formel:

$$M = N \sum \pm \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Können wir daher nachweisen, dass die r Gleichungen (15) eine gemeinsame Lösung besitzen, so ist damit zugleich bewiesen, dass für jedes Jacobi'sche System ein gemeinsamer Multiplicator existirt. Die r Gleichungen (15) enthalten ferner nur die Differentialquotienten von $\log [N]$ nach $x_1 \cdots x_r$ und lassen sich nach diesen Differentialquotienten auflösen. Sie können daher abgesehen von einer additiven willkürlichen Constante oder von einer additiven willkürlichen Function von $y_{r+1}, \cdots y_n$ nur eine einzige gemeinsame Lösung $\log [N]$ besitzen. Gelingt es uns also irgend eine solche Lösung zu entdecken, so ist damit zugleich auch die allgemeine Form des gemeinsamen Multiplicators des gegebenen Jacobi'schen Systems (1) gefunden.

Aus den Identitäten (12) ergeben sich nun, wenn man $f = x_h$ und für die $B[f]$ ihre Werthe (14) einsetzt, die Relationen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^k] \frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \frac{\partial [X_h^k]}{\partial x_\lambda}.$$

Setzt man hierin $k = 1, 2, \cdots r$ und löst nach $\frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_h}$ auf, so folgt, da nach (13):

$$\sum \pm [X_1^1] [X_2^2] \cdots [X_r^r] = [\Delta]$$

ist:

$$[\Delta] \frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_h} = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial [\Delta]}{\partial [X_h^k]} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \frac{\partial [X_h^k]}{\partial x_\lambda},$$

und hieraus durch Summation nach h:

$$[\Delta] \sum_{h=1}^{h=r} \frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_h} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \sum_{h=1}^{h=r} \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial [\Delta]}{\partial [X_h^k]} \frac{\partial [X_h^k]}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \frac{\partial [\Delta]}{\partial x_h}$$

oder:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \frac{\partial \log \frac{1}{|\Delta|}}{\partial x_\lambda} + \sum_{h=1}^{h=r} \frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_h} = 0^{*}).$$

Demnach ist:

$$[N] = \frac{1}{[\Delta]}$$

eine gemeinsame Lösung der r Gleichungen (16) und damit nach dem Vorhergehenden der Satz gewonnen:

Satz 2. *Jedes Jacobi'sche System besitzt einen gemeinsamen Multiplicator. Für das gegebene Jacobi'sche System:*

$$\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

ist, wenn $f_{r+1}, \cdots f_n$ irgend $n-r$ von einander unabhängige Lösungen desselben bezeichnen und die Determinante:

$$\Delta = \sum \pm X_1^1 X_2^2 \cdots X_r^r$$

nicht Null ist, der allgemeine Werth dieses Multiplicators:

$$M = \frac{F(f_{r+1}, \cdots f_n)}{\Delta} \sum \pm \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

wo F eine willkürliche Function bedeutet.

Hiermit ist, wie man aus dem Vergleich der letzten Formel mit der früheren Formel (α) unmittelbar erkennt, der Nachweis geliefert, *dass für ein Jacobi'ches System gemeinsamer Multiplicator und Lie'scher Multiplicator identische Begriffe sind.*

§ 3.

Das Princip des letzten Multiplicators für ein Jacobi'sches System.

Es seien jetzt von dem gegebenen r-gliedrigen Jacobi'schen Systeme mit n unabhängigen Variabeln:

$$(1) \qquad A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

bekannt ein gemeinsamer Multiplicator M und $n-r-1$ von einander unabhängige Lösungen $f_{r+2}, \cdots f_n$. Führt man dann durch die Gleiungen:

$$\psi_1 = y_1, \cdots \psi_{r+1} = y_{r+1}, \quad f_{r+2} = y_{r+2}, \cdots f_n = y_n.$$

in denen $\psi_1, \cdots \psi_{r+1}$ willkürlich gewählte, von einander, wie von $f_{r+1}, \cdots f_n$ unabhängige Functionen der x bedeuten, $y_1 \cdots y_n$ als neue unabhängige

*) Diese Formel ist nur ein specieller Fall des allgemeineren Satzes 17. von Lie. Vgl. diese Annalen Bd. XI, p. 510.

Variable ein, so verwandelt sich hierdurch nach dem Vorhergehenden das System (1) in das r-gliedrige Jacobi'sche System mit nur noch $r+1$ unabhängigen Variabeln:

$$(16) \qquad B_i[f] = \sum_{k=1}^{k=r+1} Y_k^i \frac{\partial[f]}{\partial y_k} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r,$$

welches bloss eine einzige Lösung zulässt, die durch $[f_{r+1}]$ bezeichnet werde, und aus dem bekannten gemeinsamen Multiplicator M des gegebenen Systems (1) ergiebt sich ein gemeinsamer Multiplicator N des reducirten Systems (16) durch die Formel:

$$N = \left[\frac{M}{\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \cdot \frac{\partial f_{r+2}}{\partial x_{r+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}\right].$$

Auf der anderen Seite, wenn wir annehmen, dass die r unabhängigen Gleichungen (16) nach $\frac{\partial[f]}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial[f]}{\partial y_r}$ auflösbar seien, und:

$$\sum \pm Y_1^1 Y_2^2 \cdots Y_r^r = \Delta_{r+1}$$

setzen, so muss nach Satz 2., als gemeinsamer Multiplicator des Jacobi'schen Systems (16), N nothwendig die Form haben:

$$(17) \qquad N = \frac{F}{\Delta_{r+1}} \frac{\partial[f_{r+1}]}{\partial y_{r+1}},$$

wo F eine blosse Function von $[f_{r+1}]$ ist.

Durch Auflösung nach $\frac{\partial[f]}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial[f]}{\partial y_r}$ erhält nun das System (16) die Form:

$$\Delta_{r+1} \frac{\partial[f]}{\partial y_i} + \Delta_i \frac{\partial[f]}{\partial y_{r+1}} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

und wird folglich äquivalent der linearen totalen Differentialgleichung:

$$(18) \qquad \Delta_{r+1} dy_{r+1} - \sum_{i=1}^{i=r} \Delta_i dy_i = 0.$$

Diese totale Differentialgleichung besitzt also das Integral $[f_{r+1}] = \text{const.}$, oder es giebt einen Multiplicator μ, für welchen:

$$\mu \left\{\Delta_{r+1}\, dy_{r+1} - \sum_{i=1}^{i=r} \Delta_i\, dy_i\right\} = d\,[f_{r+1}]$$

wird. Aus dieser Identität aber folgt:

$$\mu = \frac{1}{\Delta_{r+1}} \frac{\partial[f_{r+1}]}{\partial y_{r+1}}.$$

Nach (17) ist also auch die bekannte Grösse N ein Multiplicator der Gleichung (18) und daher lässt sich das Integral $[f_{r+1}] = \text{const.}$ und damit auch die noch fehlende Lösung f_{r+1} des Systems (1) durch blosse Quadraturen finden, d. h.:

Satz 3. *Kennt man von dem gegebenen r-gliedrigen Jacobi'schen Systeme:*

$$\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

alle Lösungen bis auf eine und ausserdem noch irgend eine gemeinsame Lösung der r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h} = 0,$$

so kann man die fehlende Lösung stets durch blosse Quadraturen berechnen.

Die einfachste Art, ein gegebenes r-gliedriges vollständiges System auf ein Jacobi'sches zurückzuführen, ist*) die, dass man es durch Auflösung nach r Differentialquotienten auf die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{h=r+1}^{h=n} A_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

bringt. Für ein Jacobi'sches System von dieser besonderen Form kann man einen gemeinsamen Multiplicator M immer aus der Gleichung:

$$d \log M = - \sum_{i=1}^{i=r} d x_i \sum_{h=r+1}^{h=n} \frac{\partial A_h^i}{\partial x_h} \text{**)}$$

erhalten, sobald die rechte Seite derselben entweder an sich ein vollständiges Differential, oder mit Hülfe der $n-r$ Gleichungen:

$$d x_h = \sum_{i=1}^{i=r} A_h^i \, d x_i, \quad h = r+1, \cdots n$$

zu einem solchen gemacht worden ist.

---

*) Vgl. diese Annalen Bd. IV, p. 94.

**) Nach einem Referat im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. VII, p. 168, ist diese Formel zuerst von Herrn N. Sonine aufgestellt worden.

Note on the theory of Elliptic Integrals.

Von A. Cayley in Cambridge.

The equation

$$\frac{M\,dy}{\sqrt{1-y^2\cdot 1-k^2y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2\cdot 1-k^2x^2}}$$

is integrable algebraically when M is rational: and so long as the modulus is arbitrary, then conversely, in order that the equation may be integrable algebraically, M must be rational: for particular values however of the modulus, the equation is integrable algebraically for values of the form M, or what is the same thing $\frac{1}{M}$, $=$ a rational quantity $\pm$ square root of a negative rational quantity, or say $= \frac{1}{p}(l+m\sqrt{-n})$, where l, m, n, p are integral and n is positive; we may for shortness call this a half-rational numerical value. The theory is considered by Abel in two Memoirs in the Astr. Nach. Nos. 138 & 147 (1828), being the Memoirs XIII & XIV in the Œuvres Complètes (Christiania 1839); and I here reproduce the investigation in a somewhat altered (and, as it appears to me, improved) form.

Putting the two differentials each $= du$, we have $x = \operatorname{sn}(u+\alpha)$, $y = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}+\beta\right)$; and the question is whether there exists an algebraical relation between these functions; or what is the same thing, an algebraical relation between the functions $x = \operatorname{sn} u$ and $y = \operatorname{sn}\frac{u}{M}$.

Suppose that A and B are independent periods of $\operatorname{sn} u$; so that $\operatorname{sn}(u+A) = \operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn}(u+B) = \operatorname{sn} u$, and that every other period is $= mA + nB$ where m and n are integers. Then if n has successively the values u, $u+A$, $u+2A$, etc. the value of x remains always the same, and if x and y are algebraically connected, y can have only a finite number of values: there are consequently integer values p', p'' for which $\operatorname{sn}\frac{1}{M}(u+p'A) = \operatorname{sn}\frac{1}{M}(u+p''A)$: or writing $u-p'A$ for u and putting $p''-p' = p$, there is an integer value p for which $\operatorname{sn}\frac{1}{M}(u+pA) = \operatorname{sn}\frac{1}{M}u$.

Similarly there is an integer value q for which $\operatorname{sn}\frac{1}{M}(u+qB) = \operatorname{sn}\frac{1}{M}u$; and we are at liberty to assume $q=p$; for if the original values are unequal, we have only in the place of each of them to substitute their least common multiple.

We have thus an integer p, for which

$$\operatorname{sn}\frac{1}{M}(u+pA) = \operatorname{sn}\frac{1}{M}u$$

$$\operatorname{sn}\frac{1}{M}(u+pB) = \operatorname{sn}\frac{1}{M}u.$$

There are consequently integers m, n, r, s such that

$$\frac{pA}{M} = mA + nB,$$

$$\frac{pB}{M} = rA + sB$$

equations which will constitute a single relation $\frac{p}{M} = m$, if $m = s$, $r = n = 0$; but in every other case will be two independent relations. In the case first referred to the modulus is arbitrary, and M is rational.

But excluding this case, the equations give

$$B(mA+nB) = A(rA+sB),$$

or what is the same thing

$$rA^2 - (m-s)AB - nB^2 = 0,$$

an equation which implies that the modulus has some one value out of a set of given values. The ratio $A:B$ of the two periods is of necessity imaginary, and hence the integers m, n, r, s must be such that $(m-s)^2 + nr$ is negative.

The foregoing equations may be written

$$\left(m-\frac{p}{M}\right)A + \qquad nB = 0,$$

$$rA + \left(s-\frac{p}{M}\right)B = 0,$$

whence eliminating A and B we have

$$\left(m-\frac{p}{M}\right)\left(s-\frac{p}{M}\right) - nr = 0,$$

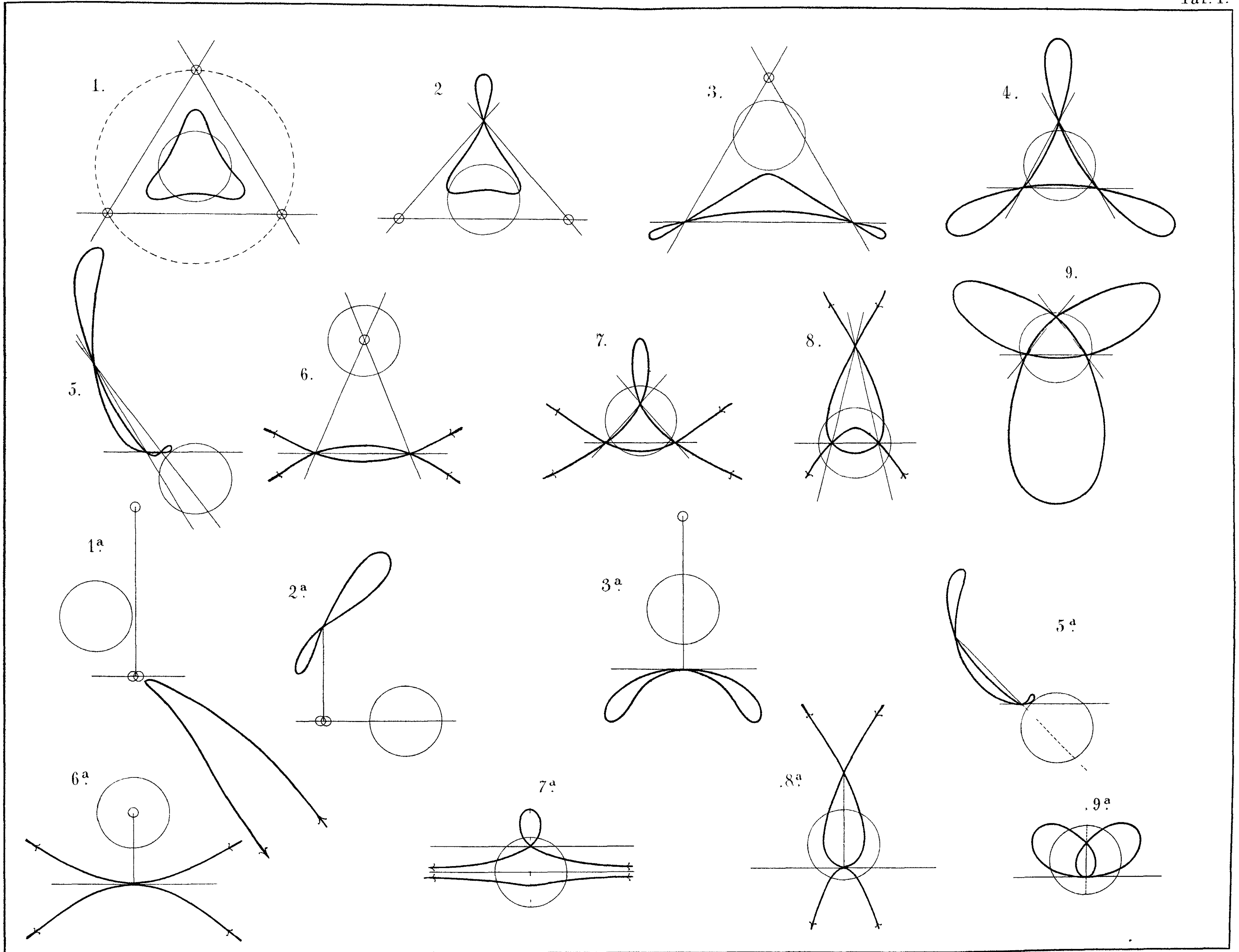
that is

$$\left(\frac{p}{M}\right)^2 - (m+s)\frac{p}{M} + ms - nr = 0.$$

and consequently

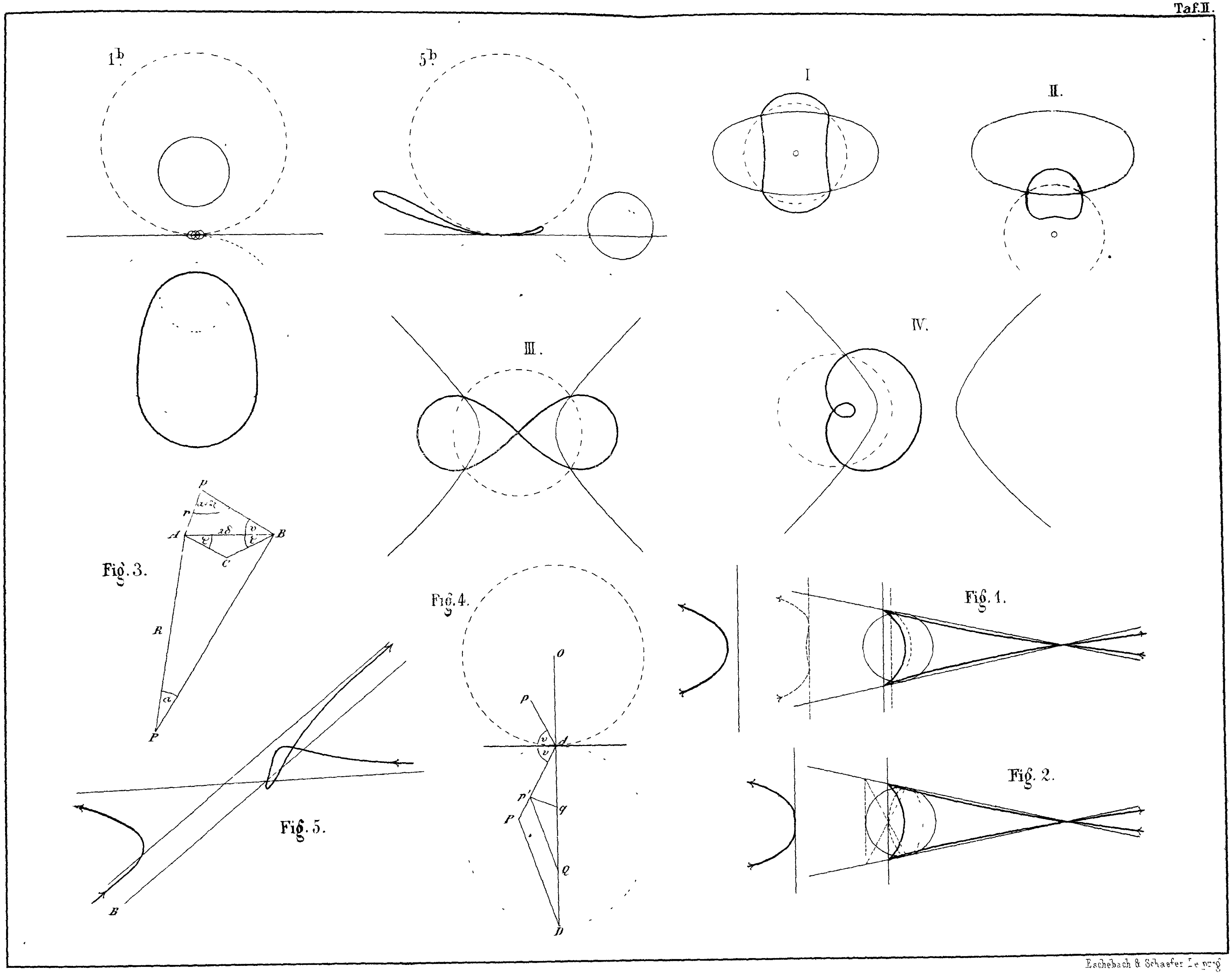
$$\frac{p}{M} = \frac{1}{2}(m+s) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m-s)^2+nr}$$

where, by what precedes, the integer under the radical sign is negative: and we have thus the above mentioned theorem.



Eschebach & Schaefer, Leipzig

Taf. II.



Eschebach & Schaefer Leipzig

As a very general example consider the two rational transformations

$$z=(x,\,u,\,v);\ \text{mod. eq. } Q\,(u,\,v)=0;\quad \frac{N\,dz}{\sqrt{1-z^2\cdot 1-v^8z^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2\cdot 1-u^8x^2}}$$

$$y=(z,\,v,\,w);\ \text{mod. eq. } P(v,\,w)=0;\quad \frac{M\,dy}{\sqrt{1-y^2\cdot 1-w^8y^2}}=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2\cdot 1-v^8z^2}}$$

viz. z is taken to be a rational function of x, and of the modular fourth roots u, v; and y to be a rational function of z, and of the modular fourth roots v, w; the transformations being (to fix the ideas) of different orders. We have y a rational function of x, corresponding to the differential relation

$$\frac{MN\,dy}{\sqrt{1-y^2\cdot 1-w^8y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2\cdot 1-u^8x^2}}.$$

Suppose here $w^8=u^8$, or say $w=\theta u$, θ being an eight root of unity: we then have $Q\,(u,\,v)=0$, $P\,(v,\,\theta u)=0$, equations which determine u, and the differential equation is then

$$\frac{MN\,dy}{\sqrt{1-y^2\cdot 1-u^8y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2\cdot 1-u^8x^2}},$$

an equation the algebraical integral of where is $y=a$ rational function of x as above: hence by what precedes we have

$$\frac{1}{MN}=\frac{1}{2p}\left\{m+s\pm\sqrt{(m-s)^2+nr}\right\}$$

a half-rational numerical value, as above.

To explain what the algebraical theorem implied herein is observe that the equations $Q\,(u,\,v)=0$, $P\,(v,\,\theta u)=0$, give for u an algebraical equation: admitting θ as an adjoint radical, suppose that an irreducible factor is $\varphi\,(u)$: and take u to be determined by the equation $\varphi u=0$; then v, and consequently also any rational function $\frac{1}{MN}$ of $(u,\,v)$ can be expressed as a rational integral function of u, of a degree which is at most equal to the degree of the functions φu less unity. The theorem is that in virtue of the equation $\varphi u=0$, this rational function of u becomes equal to a half-rational numerical value as above. Thus in a simple case which actually presented itself, the equation $\varphi u=0$ was $u^2-4u+1=0$; and $\frac{1}{MN}$ had the value $u-2$, which in virtue of this equation becomes $=\pm\sqrt{-3}$.

Thus if the second transformation be the identity $z=y$, $w=v$, $M=1$; we have $v=\theta u$; and the equations are

$$y=(x,\,u,\,\theta u),\ Q(u,\,\theta u)=0,\quad \frac{N\,dy}{\sqrt{1-y^2\cdot 1-u^8y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2\cdot 1-u^8x^2}}$$

and in particular if the relation between y, x be given by the cubic transformation

$$y = \frac{\frac{v+2u^3}{v}\,x + \frac{u^6}{v^2}\,x^3}{1+vu^2(v+2u^3)\,x^2}.$$

so that the modular equation $Q(u,v)=0$, is $u^4-v^4+2uv(1-u^2v^2)=0$; then writing herein $v=\theta u$, and taking θ a prime eighth root of unity, that is a root of $\theta^4+1=0$, we have

$$Q(u,\theta u) = -2\theta^3u^2(\theta u^2+\theta^2+u^4);$$

viz. disregarding the factor u^2, the equation for u is $u^4+\theta u^2+\theta^2=0$; or if ω be an imaginary cube root of unity $(\omega^2+\omega+1=0)$ this is $(u^2-\omega\theta)(u^2-\omega^2\theta)=0$; so that a value of u^2 is $u^2=-\omega\theta$.

Assuming then $\theta^4+1=0$, $v=\theta u$ and $u^2=-\omega\theta$, we have $(v+2u^3)v=\theta^3\omega(1+2\omega)$, $=\theta^3\omega(\omega-\omega^2)$; $\frac{v+2u^3}{v}=\omega-\omega^2$; $\frac{u^6}{v^2}=\omega^2$, $(v+2u^3)vu^2=-\omega^2(\omega-\omega^2)$, $u^8=\omega^4\theta^4=-\omega$ and the formula becomes

$$y=\frac{(\omega-\omega^2)\,x+\omega^2x^3}{1-\omega^2(\omega-\omega^2)\,x^2} \text{ giving } \frac{dy}{\sqrt{1-y^2\cdot 1+\omega y^2}} = \frac{(\omega-\omega^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2\cdot 1+\omega x^2}}$$

(where as before $(\omega^2+\omega+1=0)$, a result which can be at once verified. We have $(\omega-\omega^2)^2=-3$; or the coefficient $\omega-\omega^2$ in the differential equation is $=\sqrt{-3}$, which is of the form mentioned in the general theorem.

We might instead of $z=y$, have assumed between y and z the relation corresponding to any other of the six linear transformations of an elliptic integral, and thus have obtained in each case for a properly determined value of the modulus, a cubic transformation to the same modulus.

Cambridge, 10. April 1877.

Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten.

Von P. Gordan in Erlangen.

In der Abhandlung: *Ueber diejenigen Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invarianthentheorie*, Borchardt's Journal 81, hat Hr. Fuchs die Wichtigkeit gewisser binärer Formen gezeigt, die er *Primformen* nennt, und sich zumal damit beschäftigt, die in jedem Falle vorhandenen *Primformen niedersten Grades* zu bestimmen. Diese Primformen lassen sich dadurch charakterisiren, dass sie durch endliche Gruppen linearer Substitutionen in sich übergehen, und sind daher mit den von Hrn. Klein im neunten Bande dieser Annalen untersuchten „binären Formen mit linearen Transformationen in sich" gleichbedeutend*). Aber Hr. Fuchs giebt eine andere Eigenschaft der Primformen *niederster* Ordnung an, die er bei seiner Darstellung besonders benutzt: *Es haben diese Primformen keine Covarianten niederer Ordnung, und auch keine Covarianten höherer Ordnung, welche Potenzen sind von Formen niederer Ordnung.* Es fragt sich, ob diese Eigenschaft *allein* zur Charakterisirung der Formen ausreicht. Ich werde dies im Folgenden in der That nachweisen**).

Nach den Angaben, welche Hr. Klein gemacht hat, giebt es unter den Formen, deren Grad grösser als 4 ist (und nur solche Formen werde ich weiterhin berücksichtigen), nur zwei, welche Primformen niedersten Grades sind:

$$\text{das } \textit{Oktaeder:}\quad G_1 = 6x_1^5x_2 + 6x_1x_2^5,$$

$$\text{und das } \textit{Ikosaeder:}\quad G_2 = 12x_1^{11}x_2 + 132x_1^6x_2^6 - 12x_1x_2^{11}.$$

Ich werde im Folgenden zunächst zeigen, dass diese Formen die hier in Rede stehende Eigenschaft in der That besitzen, indem ich die vollen Formensysteme, welche zu G_1 und G_2 gehören, aufstelle und

---

*) Vergl. dessen Note: *Ueber lineare Differentialgleichungen* diese Annalen Bd. XI. p. 115, sowie meinen Aufsatz: *Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen*, Bd. XII. p. 23.

**) Man vergl. auch den Aufsatz von Hrn. Brioschi: Le théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. Math Annalen XI, p. 401 ff.

discutire. Es hat das Letztere mit Hülfe besonderer geometrischer Ueberlegungen in der bereits citirten Arbeit (Annalen IX) schon Hr. Klein gethan; ich komme hier darauf zurück, um zu zeigen, dass die Resultate unmittelbar hervorgehen aus den allgemeinen Regeln, welche ich in meiner Schrift: *Ueber das Formensystem binärer Formen* (Teubner 1875) entwickelt habe.

In den folgenden Paragraphen zeige ich dann, dass es ausser G_1 und G_2 resp. denjenigen Formen, welche aus G_1 oder G_2 durch lineare Substitution entstehen, keine anderen Formen der verlangten Eigenschaft giebt. Dieser Nachweis gelingt mir — immer im Anschlusse an die genannte Schrift — durch einen besonderen Ansatz. Ich setze zunächst nur voraus, dass bei $f = a_x^n$ $(n > 4)$ die Covarianten niederen Grades verschwinden. Dann betrachte ich diejenigen, immer vorhandenen, doch im einzelnen Falle zu bestimmenden Formen niedersten Grades

$$p_x^{\mu+1},$$

welche die Eigenschaft haben, mit f eine identisch verschwindende letzte Ueberschiebung zu besitzen:

$$(f, p)^{\mu+1} = 0.$$

Von ihnen ausgehend kann ich, im Allgemeinen, bei der Form f Covarianten nachweisen, welche Potenzen sind *linearer* Formen, und solche Formen f gehören also nicht zu den Primformen niedersten Grades. Dieser Nachweis gelingt *nicht* allein bei drei Formen f: bei G_1, G_2 und bei einer Form G_3 vom achten Grad, die sich als Hesse'sche Form von G_1 erweist. Da aber die Hesse'sche Form von G_3 gleich G_1^2 wird, so ist auch noch G_3 bei Seite zu lassen, und G_1, G_2 bleiben allein übrig.

§ 1.

Das System von G_1.

Die Form G_1:

$$f = 6x_1^5x_2 + 6x_1x_2^5$$

genügt der Relation $(f, f)^4 = 0$; mithin besteht (vergl. mein „Formensystem" p. 38) ihr System aus den Formen:

$$\begin{aligned} f, \quad h &= (f, f)^2 = -2(x_1^8 - 14x_1^4x_2^4 + x_2^8), \\ t &= (h, f) = -2(x_1^{12} + 33x_1^8x_2^4 - 33x_1^4x_2^8 - x_2^{12}), \\ i &= (f, f)^6 = -12, \end{aligned}$$

zwischen denen die Relationen bestehen:

$$(f, h)^2 = (f, h)^3 = 0; \quad (f, h)^1 = \frac{2}{15}\, if; \quad (h, h)^2 = \frac{1}{18}\, if^2;$$

$$2t^2 + h^3 + \frac{i}{18} f^4 = 0.$$

Jede Covariante P von G_1 ist somit eine ganze Function von f, h, t, i. Ich will den Grad von P in den Coefficienten durch μ, seinen Grad in den Variablen mit ν bezeichnen. Ist $6\mu - \nu$ nicht durch 4 theilbar, so hat P den Factor t; ist ν nicht durch 24 theilbar, so hat P eine der Formen f, h, t zum Factor; ist endlich ν durch 24 theilbar, so ist P eine ganze Function von if^4 und h^3. Hat P also die Factoren i, f, h, t bez. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ mal, so kann man es in die Form bringen:

$$P = i^{\alpha_1} \cdot f^{\alpha_2} \cdot h^{\alpha_3} \cdot t^{\alpha_4} (c_1 if^4 + d_1 h^3)(c_2 if^4 + d_2 h^3) \cdots,$$

in welcher die Factoren $cif^4 + dh^3$ nicht durch f, h, t theilbar sind. Nun können die Ausdrücke $cif^4 + dh^3$ keinen vielfachen Factor besitzen. Denn derselbe wäre sonst auch in den Ausdrücken

$$(cif^4 + dh^3, f) = dh^2 t, \quad (cif^4 + dh^3, h) = -cif^3 t$$

enthalten, was unmöglich ist, da $cif^4 + dh^3$ weder durch f noch durch h noch durch t theilbar ist und f, h, t keinen gemeinsamen Factor besitzen.

Die einzelnen Factoren von P: $f, h, t, cif^4 + dh^3$ haben also $6, 8, 12, 24$ verschiedene lineare Factoren; also hat auch P mindestens 6 verschiedene lineare Factoren und kann nicht Potenz einer Form sein, deren Grad kleiner als 6 ist; was zu beweisen war.

§ 2.

Das System von G_2.

Die Form G_2:

$$f = 12 x_1^{11} x_2 + 132 x_1^6 x_2^6 - 12 x_1 x_2^{11}$$

genügt den Relationen:

$$(f, f)^4 = (f, f)^8 = (f, f)^{10} = 0; \quad (f, f)^6 = c \cdot f,$$

wo:

$$84 c^2 = (f, f)^{12} = i; \quad i = \frac{300}{7}; \quad c = -\frac{5}{7}.$$

Das System von g_2 besteht daher aus den Formen:

$$f; \quad (f, f)^2 = h = -2(x_1^{20} - 228 x_1^{15} x_2^5 + 494 x_1^{10} x_2^{10} + 228 x_1^5 x_2^{15} + x_2^{20});$$

$$(h, f) = t = -2(x_1^{30} + 522 x_1^{25} x_2^5 - 10005 x_1^{20} x_2^{10} - 10005 x_1^{10} x_2^{20} - 522 x_1^5 x_2^{25} + x_2^{30});$$

$$cf; \; i; \; ch; \; ct; \; ci,$$

zwischen denen die Relationen bestehen:

$$(h, f)^2 = (h, f)^3 = 0; \quad (h, f)^4 = \frac{91}{510} cf^2; \quad (h, h)^2 = \frac{7}{90} cf^3;$$

$$2t^2 + h^3 + \frac{7}{90} cf^5 = 0.$$

Nun schliesst man ebenso, wie soeben. Jede Covariante P ist ganze

Function von f, h, t, c. Sei ihr Grad in den Variablen $= \nu$. Ist ν nicht durch 3 theilbar, so hat P den Factor h; ist ν nicht durch 4 theilbar, so hat P den Factor t; ist ν nicht durch 5 theilbar, so hat P den Factor f; ist also ν nicht durch 60 theilbar, so hat P mindestens einen der Factoren f, h, t; ist ν jedoch durch 60 theilbar, so ist P eine ganze Function von cf^5 und h^3. Hieraus folgt, dass man P in die Form bringen kann:

$$P = c^{\alpha_1} \cdot f^{\alpha_2} \cdot h^{\alpha_3} \cdot t^{\alpha_4} (a_1 cf^5 + b_1 h^3)(a_2 cf^5 + b_2 h^3) \cdots,$$

wo die Ausdrücke $acf^5 + bh^3$ von cf^5, h^3, t^2 verschieden sein sollen. Die linearen Factoren von f, h, t sind sämmtlich verschieden; ein Gleiches gilt für die 60 linearen Factoren der eingeklammerten Ausdrücke; P besitzt mithin mindestens 12 verschiedene lineare Factoren und kann nicht Potenz einer Form sein, deren Grad kleiner als 12 ist.

§ 3.

Die Formen U.

Indem ich mich jetzt zum zweiten Theile meiner Untersuchung wende, entwickele ich zunächst einige Formeln, die später zu Grunde gelegt werden sollen. Ich betrachte, wie in der Einleitung erwähnt, solche Formen $f = a_x^n$ $(n > 4)$, deren niedere Covarianten alle verschwinden, und die ich weiterhin, der Kürze wegen, als *Formen U* bezeichne. Für solche Formen verschwinden jedenfalls alle Covarianten $(f, f)^\nu$, für welche $\nu > \frac{n}{2}$, und umgekehrt kann man aus dem Verschwinden dieser Ueberschiebungen das Verschwinden aller anderen Covarianten niederen als n^{ten} Grades folgern (vergl. mein „Formensystem"). Die Gleichungen, welche sich somit für die Coefficienten von $U = f$ ergeben, kann man, je nachdem n ungerade, oder n gerade und nicht durch 4 theilbar, oder n durch 4 theilbar in verschiedener Weise zusammenfassen. Ich bezeichne dabei, wenn n gerade, die Invariante $(f, f)^n$ mit i, und, wenn n durch 4 theilbar, die Covariante $(f, f)^{\frac{n}{2}}$ mit $\varphi = \varphi_x^n$, die Invariante $(f, \varphi)^n$ mit j; zugleich setze ich im letzteren Falle $n = 4m$. *Dann erhält man folgende Formeln zur Charakterisirung der Formen U:*

1) für n ungerade. Es verschwinden die Covarianten:

$$(f, f)^{\frac{n+1}{2}}, \quad (f, f)^{\frac{n+3}{2}}, \cdots (f, f)^n,$$

und man kann also zusammenfassend schreiben:

$$\text{I)} \qquad (ab)^{\frac{n+1}{2}} a_y^{\frac{n-1}{2}} b_x^{\frac{n-1}{2}} = 0$$

für jeden Werth von y und x.

2) für n gerade, aber nicht durch 4 theilbar. Es verschwinden die Covarianten:

$$(f, f)^{\frac{n}{2}}, \quad (f, f)^{\frac{n}{2}+1}, \quad \ldots (f, f)^{n-1}$$

und man hat also:

$$\text{(II)} \qquad (ab)^{\frac{n}{2}} a_y^{\frac{n}{2}} b_x^{\frac{n}{2}} = -\frac{1}{\frac{n}{2}+1} \cdot i \cdot (yx)^n.$$

3) für n durch 4 theilbar. Es verschwinden die Covarianten:

$$(f, f)^{\frac{n}{2}+1}, \quad (f, f)^{\frac{n}{2}+2}, \quad \ldots (f, f)^{n-1}$$

und auch die Covarianten:

$$(f, \varphi)^{\frac{n}{2}+1}, \quad (f, \varphi)^{\frac{n}{2}+2}, \quad \ldots (f, \varphi)^{n-1}.$$

Man hat also:

$$\text{(III)} \qquad (a\, b)^{2m} a_y^{2m} b_x^{2m} = \varphi_x^{2m} \varphi_y^{2m} + \frac{i}{2m+1} (yx)^{2m},$$

$$\text{(IV)} \qquad (a\varphi)^{2m} a_y^{2m} \varphi_x^{2m} = (f, \varphi)^{2m}_{y^{2m}} + \frac{j}{2m+1} (yx)^{2m}.$$

§ 4.

Die Formen p und die Zahl μ.

Betrachten wir jetzt solche Formen $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$p = p_x^{\mu+1},$$

deren $(\mu+1)^{\text{te}}$ Ueberschiebung mit f identisch verschwindet:

$$(f, p)^{\mu+1} = a_x^{n-\mu-1} (ap)^{\mu+1} = 0.$$

Diese Formel liefert $(n-\mu)$ homogene lineare Gleichungen zur Bestimmung der $\mu+1$ Verhältnisse der Coefficienten von p; dieselben lassen sich also stets lösen, wenn

$$n - \mu \leq \mu + 1,$$

also

$$2\mu \geqq n - 1.$$

Ist f eine allgemeine Form, so haben die zu ihm gehörigen Formen p, wenn n ungerade, mindestens den Grad $\frac{n+1}{2}$ und, wenn n gerade, mindestens den Grad $\frac{n}{2}+1$. Sind die Coefficienten von f jedoch durch Relationen mit einander verbunden, so kann es vorkommen, dass auch Formen p von niedrigerer als der $\frac{n+1}{2}^{\text{ten}}$ oder $\frac{n}{2}+1^{\text{ten}}$ Ordnung existiren. *Zu jeder Form f gehört also eine charakteristische Zahl, die ich von jetzt ab ausschliesslich durch μ bezeichnen will, der Art, dass es Formen p vom Grade $\mu+1$ giebt, deren letzte Ueberschiebung über* *f verschwindet, dass es aber keine Formen von niederem Grade giebt, welche diese Eigenschaft haben.* Diese charakteristische Zahl μ ist:

$$\mu \leqq \frac{n}{2}.$$

Es kann möglicherweise nur eine Form p geben, welche den $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Grad hat, vielleicht auch unendlich viele. Ich gehe darauf aus, zu zeigen, dass bei den Formen U — wenn man nur von g_1, g_2, g_3 absieht — sich immer p so wählen lässt, dass es einen linearen Factor α besitzt, der, in eine geeignete Potenz erhoben, eine Covariante von U vorstellt*). Zu dem Zwecke gebrauche ich folgende Bezeichnung. Es sei $\alpha = \alpha_x$ ein linearer Factor von p, λ seine Vielfachheit, also:

$$p = \alpha q = \alpha_x q_x^{\mu} = \alpha^{\lambda} r = \alpha_x^{\lambda} r_x^{\nu},$$

wo

$$\lambda + \nu = \mu + 1.$$

Dann hat man:

$$\begin{aligned} 0 &= (f, p)^{\mu+1}, \\ &= (f, \alpha q)^{\mu+1} = ((f, q)^{\mu}, \alpha), \\ &= (f, \alpha^{\lambda} r)^{\mu+1} = ((f, r)^{\nu}, \alpha^{\lambda})^{\lambda}, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass $(f, q)^{\mu}$ und $(f, r)^{\nu}$ die Potenz $\alpha^{n-\mu}$ zum Factor besitzen. Ich setze jetzt noch:

$$\begin{aligned} (f, q)^{\mu} &= c\alpha^{n-\mu}, \\ (f, r)^{\nu} &= s\alpha^{n-\mu} = s_x^{\lambda-1} \alpha_x^{n-\mu} \end{aligned}$$

und zeige gleich hier, dass weder die Constante c verschwindet, noch der Ausdruck s den Factor α besitzt. Das Erstere folgt unmittelbar aus der Definition der Zahl μ, denn ihr zufolge kann $(f, q)^{\mu}$ nicht identisch Null sein. Um die andere Behauptung zu erweisen, schreibe man:

$$((f, r)^{\nu}, \alpha^{\lambda-1})^{\lambda-1} = (s_x^{\lambda-1} \alpha_x^{n-\mu}, \alpha_x^{\lambda-1})^{\lambda-1}$$

also

$$(f, r\alpha^{\lambda+1})^{\nu+\lambda-1} = \frac{1}{\binom{n-\nu}{\lambda-1}} \cdot \alpha^{n-\mu} (s\alpha)^{\lambda-1},$$

$$\alpha^{n-\mu} (s\alpha)^{\lambda-1} = \binom{n-\nu}{\lambda-1} (f, q)^{\mu} = \binom{n-\nu}{\lambda-1} c\alpha^{n-\mu}$$

und somit

$$(s\alpha)^{\lambda-1} = \binom{n-\nu}{\lambda-1} c,$$

woraus das Gesagte folgt, da $c \gtrless 0$.

---

*) Dieser Factor α ist dann immer auch in gewisser Multiplicität Factor von U, und die Beschaffenheit des zu U gehörigen vollständigen Formensystems ist eben durch den vielfachen Factor α begründet, den U enthält.

§ 5.

Die Eintheilung der Formen U.

Ich werde jetzt die verschiedenen Formen U in folgender Reihenfolge betrachten:

1) Die Formen U, bei denen n eine ungerade Zahl ist.

2) Die Formen U, bei denen n gerade aber nicht durch 4 theilbar ist, und zwar:

a) solche Formen, bei denen $i = 0$ ist, $\mu \leq \frac{n}{2}$

b) solche Formen, bei denen $i \gtrless 0$ aber $\mu < \frac{n}{2}$

c) solche Formen, bei denen $i \gtrless 0$ und $\mu = \frac{n}{2}$.

3) Die Formen U, bei denen n durch 4 theilbar ist, und zwar:

a) solche Formen, bei denen φ verschwindet, i, μ beliebig

b) solche Formen, bei denen $\varphi \gtrless 0$ aber $i = 0$, μ beliebig

c) solche Formen, bei denen $\varphi \gtrless 0$, $i \gtrless 0$, $\mu < \frac{n}{2}$

d) solche Formen, bei denen $\varphi \gtrless 0$, $i \gtrless 0$, $\mu = \frac{n}{2}$.

Bei den Formen 1, 2_a, 2_b, 3_a, 3_b lässt sich die Existenz einer Covariante, welche Potenz einer linearen Form ist, in dem oben angedeuteten Sinne zeigen. Der Beweis ist bei 1, 2_a, 2_b, 3_a fast derselbe; dagegen verlangt der Fall 3_b eine besondere Betrachtung. Die Formen 3_c existiren nicht. Endlich von den Formen 2_c, 3_d werde ich nachweisen, dass sie mit G_1 bez. mit G_2 oder G_3 identisch sind.

§ 6.

n ungerade, $\mu \leq \frac{n-1}{2}$.

Wenn n ungerade, so haben wir nach § 3. I:

$$(ab)^{\frac{n+1}{2}} a_y^{\frac{n-1}{2}} b_x^{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

mithin:

$$(ab)^{\frac{n+1}{2}} a_y^{\mu} a_x^{\frac{n-1}{2}-\mu} b_x^{\frac{n-1}{2}} = 0,$$

$$0 = (ab)^{\frac{n+1}{2}} (aq)^{\mu} a_x^{\frac{n-1}{2}-\mu} b_x^{\frac{n-1}{2}} = ((f, q)^{\mu}, f)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Nun ist nach § 4.:

$$(f, q)^{\mu} = c\,\alpha^{n-\mu},$$

also:

$$0 = (f, \alpha^{n-\mu})^{\frac{n+1}{2}} = a_x^{\frac{n-1}{2}} (a\alpha)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{n-1}{2}-\mu}.$$

$$0 = a_x^{\frac{n-1}{2}} (a\alpha)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Diese Formel lehrt, dass f den Factor α mindestens $\frac{n+1}{2}$ mal enthält. *Dann aber lässt sich allemal eine Potenz von α als Covariante darstellen.* Bezeichnet man nämlich durch a die Vielfachheit von α in f, setzt also:

$$f = \alpha_x^k \; t_x^l ,$$

wo

$$k \geqq \frac{n+1}{1}, \quad k + l = n, \text{ mithin } l \leqq \frac{n-1}{2},$$

so genügt die Ueberschiebung $(f, f)^{2l}$ der Gleichung:

$$\binom{n}{2l}\binom{n}{2l}(f, f)^{2l} = (-1)^l \binom{k}{l} (t\alpha)^l (t'\alpha)^l \cdot \alpha_x^{2k-2l}$$

und ist also bis auf einen Zahlenfactor eine Potenz von α_x.

Da übrigens im vorliegenden Falle alle Covarianten $(f, f))^\nu$ verschwinden sollen, deren Grad $< n$ ist, $(f, f)^{2l}$ aber nicht verschwindet, so folgt noch:

$$2n - 4l \geqq n, \quad l > \frac{n}{4}, \text{ also } k \geq \frac{3n}{4}.$$

Die Formen U, zu denen wir hier geführt werden, sind also diejenigen, welche einen linearen Factor α mindestens $\frac{3n}{4}$ mal besitzen. — In ähnlicher Weise können auch in den folgenden Fällen die Formen U, um die es sich handelt, explicite angegeben werden, was ich indess nicht ausführe.

§ 7.

n gerade, nicht durch 4 theilbar, $i = 0$, $\mu \leqq \frac{n}{2}$.

Wir haben in diesem Falle nach § 3. II:

$$(a\,b)^{\frac{n}{2}} a_y^{\frac{n}{2}} b_x^{\frac{n}{2}} = 0,$$

also auch

$$(a\,b)^{\frac{n}{2}} a_y^\mu \, a_x^{\frac{n}{2}-\mu} b_x^{\frac{n}{2}} = 0,$$

$$0 = (a\,b)^{\frac{n}{2}} (a\,q)^\mu a_x^{\frac{n}{2}-\mu} b_x^{\frac{n}{2}} = ((f, q)^\mu, f)^{\frac{n}{2}}.$$

Nun ist wieder nach § 4.:

$$(f, q)^\mu = c\,\alpha^{n-\mu}$$

also:

$$0 = (\alpha^{n-\mu}, f)^{\frac{n}{2}} = \alpha^{\frac{n}{2}-\mu} (\alpha^{\frac{n}{2}}, f)^{\frac{n}{2}}.$$

Daher enthält f den Factor α öfter als $\frac{n}{2}$ mal, und besitzt also eine Covariante, welche eine Potenz von α ist.

§ 8.

n ungerade, nicht durch 4 theilbar, $i \gtrless 0$, $\mu < \frac{n}{2}$.

In diesem Falle hat man zunächst:

$$(a\,b)^{\frac{n}{2}}\, a_y^{\frac{n}{2}}\, b_x^{\frac{n}{2}} = \frac{i}{\frac{n}{2}+1}\,(y\,x)^{\frac{n}{2}}.$$

Da aber $\mu < \frac{n}{2}$, so folgt wieder:

$$(a\,b)^{\frac{n}{2}}\, a_y^{\mu}\, a_x^{\frac{n}{2}-\mu}\, b_x^{\frac{n}{2}} = 0$$

und nun schliesst man, wie in den beiden vorangehenden Paragraphen.

§ 9.

n gerade, nicht durch 4 theilbar, $i \gtrless 0$, $\mu = \frac{n}{2}$.

Um in diesem Falle die Form U zu bestimmen, beachte man, dass die $\frac{n}{2}+1$ Verhältnisse der Coefficienten von p nur $\frac{n}{2}$ Relationen unterworfen sind. Man kann also eines derselben beliebig annehmen, und ich werde es in der Weise thun, *dass ein linearer Factor von p, der α heissen mag, zugleich Factor von f ist, also $(a\alpha)^n = 0$ ist.* Ich zeige zunächst, dass dann α Doppelfactor von p sein muss. Ich zeige sodann, dass zwischen dem α und dem zugehörigen s (§ 4.) Gleichberechtigung besteht; auch s wird linear, Factor von f und Doppelfactor von p. Hierdurch wird $n = 6$ und führt man nun statt x_1, x_2 als neue Veränderliche α und s ein, so geht f in die kanonische Form von g_1 über.

Da

$$p = \alpha\,q = \alpha_x\, q_x^{\frac{n}{2}} = \alpha^{\lambda}\, r = \alpha_x^{\lambda} \cdot r_x^{\nu},$$

so ist $\nu < \frac{n}{2}$, also nicht nur nach § 3. II:

$$(a\,b)^{\frac{n}{2}}\, a_y^{\frac{n}{2}}\, b_x^{\frac{n}{2}} = \frac{i}{\frac{n}{2}+1}\,(y\,x)^{\frac{n}{2}},$$

sondern auch:

$$(a\,b)^{n-\nu}\, a_y^{\nu}\, b_x^{\nu} = \frac{i}{\nu+1}\,(y\,x)^{\nu}.$$

Hieraus folgt:

$$(1)\quad \frac{i}{\frac{n}{2}+1} \cdot q = (ab)^{\frac{n}{2}}\,(a\,q)^{\frac{n}{2}}\, b_x^{\frac{n}{2}} = ((f,\,q)^{\frac{n}{2}},\,f)^{\frac{n}{2}} = c\,(\alpha^{\frac{n}{2}},\,f)^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{i}{\nu+1}\cdot r=(ab)^{n-\nu}(ar)^{\nu}b_x^{\nu}=((f,r)^{\nu},f)^{n-\nu}=(s\alpha^{\frac{n}{2}},f)^{n-\nu}$$
$$=\left(s,(\alpha^{\frac{n}{2}},f)^{\frac{n}{2}}\right)^{\lambda-1},$$

also:

$$\frac{cir}{\nu+1}=\frac{i}{\frac{n}{2}+1}(s,q)^{\lambda-1}=\frac{i}{\frac{n}{2}+1}(s,r\alpha^{\lambda-1})^{\lambda-1}$$

und:

$$(2)\qquad c\cdot\frac{\frac{n}{2}+1}{\nu+1}\cdot r=(s,r\alpha^{\lambda-1})^{\lambda-1}.$$

Aus Formel (1) folgt:

$$\frac{i}{\frac{n}{2}+1}(\alpha^{\frac{n}{2}},q)^{\frac{n}{2}}=c(\alpha,f)^n=0.$$

Diese Formel zeigt, dass $q=\alpha^{\lambda-1}r$ durch α theilbar ist, dass also

$$\lambda>1.$$

Ich zeige jetzt, dass $\lambda=2$. In der Formel (2) besteht die Ueberschiebung rechter Hand bis auf eines aus Gliedern, welche den Factor α haben. Dieses eine muss daher mit dem Ausdrucke linker Hand übereinstimmen. Es ist also:

$$\binom{\frac{n}{2}}{\lambda-1}c\cdot\frac{\frac{n}{2}+1}{\nu+1}\cdot r=(s\,\alpha)^{\lambda-1}r=\binom{n-r}{\lambda-1}cr$$

mithin

$$\binom{\frac{n}{2}+1}{\lambda-1}=\binom{n-\nu}{\lambda-1}$$

also, da $\lambda>1$ ist:

$$\frac{n}{2}+1=n-\nu,\quad \nu=\frac{n}{2}-1,\quad \lambda=2.$$

Trägt man jetzt diese Werthe in die Formeln des § 4. ein, so entsteht:

$$(3)\qquad p=\alpha q=\alpha^2 r=\alpha_x{}^2 r_x^{\frac{n}{2}-1},$$

$$(4)\qquad (f,r)^{\frac{n}{2}-1}=s_x\alpha_x^{\frac{n}{2}},$$

$$(s,\alpha)=\left(\frac{n}{2}+1\right)c$$

$$c\,\frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}\,r=(s,\alpha r),$$

also in der That s linear, und von α verschieden. Ferner ist

$$r(s\alpha) = \frac{n}{2}(s, \alpha r) = (s\alpha)\, r + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \alpha\,(s, r),$$
$$0 = (s, r).$$

Also hat r die Potenz $s^{\frac{n}{2}-1}$ zum Factor, so dass man schreiben kann

$$r = g s^{\frac{n}{2}-1},$$

wo g constant ist. Die Formeln (3) und (4) werden jetzt:

$$p = g\alpha^2 s^{\frac{n}{2}-1},$$
$$g a_x^{\frac{n}{2}+1} (as)^{\frac{n}{2}-1} = s\alpha^{\frac{n}{2}}.$$

Aus der letzteren folgt:

$$(as)^n = 0.$$

Es hat also p mit f nicht nur den Factor α sondern auch den Factor s gemein. Ebenso, wie wir eben zeigten, dass p den Factor α in der zweiten Potenz und nur in der zweiten Potenz enthält, kann man jetzt das Nämliche für den Factor s beweisen. Es ist demnach:

$$\frac{n}{2} - 1 = 2, \text{ also } n = 6,$$
$$p = g\alpha^2 s^2,$$
$$g a_x^4 (as)^2 = s\alpha^3,$$
$$a_x^2 (a\alpha)^2 (as)^2 = 0.$$

Somit:

$$f(s\alpha)^6 = a_x^6 (s\alpha)^6 = (s_x(a\alpha) - \alpha_x(as))^6$$
$$= -6\,(a\alpha)^5 (as)\, s^5 \alpha - 6\,(a\alpha)(as)^5 \alpha^5 s,$$

oder, durch lineare Substitution, gleich G_1.

Es ist auf diesem Standpunkte interessant, zu sehen, wie die linearen Transformationen, die G_1 in sich überführen, zu Stande kommen. Es bedeutete im Vorhergehenden α irgend eine Wurzel von f, s eine zugehörige. Da f sechs Wurzeln besitzt, so kann man α und s auf sechs Weisen wählen, wobei allerdings immer je zwei nur durch Verwechselung von α und s verschieden sind. Man kann also die vorstehende kanonische Form in drei wesentlich verschiedenen Weisen herbeiführen.

§ 10.

Formen U, deren Grad durch 4 theilbar ist. Relationen zwischen Covarianten.

Die Formen f, deren Grad durch 4 theilbar ist, sind immer viel schwerer zu behandelen, als die übrigen, weil sie die Covariante $\varphi = (f, f)^{2m}$ besitzen, deren Grad mit dem von f übereinstimmt. Ich will, ehe ich zur Unterscheidung der einzelnen hierher gehörigen U übergehe, eine Anzahl von Relationen zwischen den Covarianten von f aufstellen, deren ich später bedarf. Es handelt sich vor Allem darum, die Invariante i und die Form φ für die zusammengesetzte Grundform $\lambda_1 f + \lambda_2 \varphi$ zu berechnen.

Aus den Formeln III, IV des § 3.:

III $$(a\,b)^{2m}\, a_y^{2m}\, b_x^{2m} = \varphi_x^{2m}\, \varphi_y^{2m} + \frac{i}{2m+1}\,(y\,x)^{2m}$$

IV $$(a\,\varphi)^{2m}\, a_y^{2m}\, \varphi_x^{2m} = (f,\,\varphi)^{2m}_{y^{2m}} + \frac{j}{2m+1}\,(y\,x)^{2m}$$

will ich zunächst diese ableiten:

III$_a$ $$(a\,b)^{2m}\quad a_y^{2m-1}\, a_x\, b_x^{2m} = \varphi_x^{2m+1}\, \varphi_y^{2m-1}$$

III$_b$ $$(a\,b)^{2m-1}\, a_y^{2m+1}\, b_x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2}\, \varphi_x^{2m}\, \varphi_y^{2m}\,(y\,x) + \frac{i}{2m+2}\,(y\,x)^{2m+1}$$

III$_c$ $$(a\,b)^{2m-1}\, a_y^{2m}\, a_x\, b_x^{2m+1} = m\cdot \varphi_x^{2m+1}\, \varphi_y^{2m-1}\,(y\,x)$$

III$_d$ $$(a\,b)^{2m+1}\, a_y^{2m-1}\, b_x^{2m-1} = \frac{i}{2m}\,(y\,x)^{2m-1}$$

IV$_a$ $$(a\,\varphi)^{2m-1}\, a_y^{2m+1}\, \varphi_x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2}\,(f,\,\varphi)^{2m}_{y^{2m}}\,(y\,x) + \frac{j}{2m+2}\,(y\,x)^{2m+1}.$$

Nun folgt aus (III$_b$) und (III$_d$)

$$(a\,b)^{2m-1}\,(a\,c)^{2m+1}\, b_x^{2m+1}\, c_x^{2m-1} = \frac{2m+1}{2}\,(\varphi,\,f)^{2m} + \frac{i}{2m+2}\, f = \frac{i}{2m}\, f$$

und aus (III$_a$) und (III$_c$):

$$(a\,b)^{2m-1}\,(a\,c)^{2m}\, a_x\, b_x^{2m+1}\, c_x^{2m} = m\,(\varphi,\,f)^{2m-1} = (\varphi,\,f)^{2m-1}$$

Mithin ist:

(1$_a$) $$(f,\,\varphi)^{2m-1} = 0,$$

(1$_b$) $$(f,\,\varphi)^{2m} = \frac{i}{m\cdot m+1\cdot 2m+1}\cdot f$$

und nach (IV) und (IV$_a$):

(2$_a$) $$(a\,\varphi)^{2m}\, a_y^{2m}\, \varphi_x^{2m} = \frac{i}{m\cdot m+1\cdot 2m+1}\cdot a_x^{2m}\, a_y^{2m} + \frac{j}{2m+1}\,(y\,x)^{2m},$$

(2$_b$) $$(a\,\varphi)^{2m-1}\, a_y^{2m+1}\, \varphi_x^{2m+1} = \frac{1}{2m\cdot m+1}\cdot a_x^{2m}\, a_y^{2m}\,(y\,x) + \frac{j}{2m+2}\,(y\,x)^{2m+1}.$$

Aus den Formeln III und (2$_a$) endlich folgt:

(3$_a$) $$(a\,\varphi)^{2m}(b\,\varphi)^{2m}(a\,b)^{2m} = (\varphi,\,\varphi)^{4m} = \frac{i^2}{m\cdot m+1\cdot 2m+1},$$

(3$_b$) $$(a\,\varphi)^{2m}(a\,b)^{2m}\, b_x^{2m}\, \varphi_x^{2m} = (\varphi,\,\varphi)^{2m} + \frac{i}{2m+1}\cdot\varphi$$
$$= \frac{i}{m(m+1)(2m+1)}\cdot\varphi + \frac{j}{2m+1}\cdot f.$$

Also hat man die Formeln:

(4$_a$) $$(\lambda_1 f + \lambda_2\varphi,\, \lambda_1 f + \lambda_2\varphi)^{4m} = i\,\lambda_1{}^2 + 2j\,\lambda_1\lambda_2 + \frac{i^2}{m\cdot m+1\cdot 2m+1}\cdot\lambda_2{}^2,$$

$$(4_b)\quad (\lambda_1 f + \lambda_2\varphi,\ \lambda_1 f + \lambda_2\varphi)^{2m} = \left(\frac{2i\lambda_1\lambda_2}{m\cdot \overline{m+1}\cdot \overline{2m+1}} + \frac{j\lambda_2^2}{2m+1}\right)f$$

$$= \left(\lambda_1^2 + \frac{(1 - m\cdot \overline{m+1})\, i\lambda_2^2}{m\cdot \overline{m+1}\cdot \overline{2m+1}}\right)\varphi\,.$$

Das i und φ, gebildet für die zusammengesetzte Grundform, setzt sich aus den ursprünglichen i, j, f, φ zusammen.

§ 11.

n durch 4 theilbar, $\varphi = 0$, i, μ beliebig.

In diesem Falle liefert Formel III_b des vorangehenden Paragraphen

$$(a\,b)^{2m-1}\, a_y^{2m+1}\, b_x^{2m+1} = \frac{i}{2m+2}\,(yx)^{2m+1}$$

also

$$(ab)^{2m-1}\, a_y^{\mu}\, a_x^{2m+1-\mu}\, b_x^{2m+1} = 0$$

und nun schliesst man, wie in § 6., 7., 8., dass f einen Factor α von p mindestens $2m+2$mal enthält, daher eine Covariante besitzt, welche eine Potenz von α ist. Zugleich sieht man, dass in diesem Falle auch nothwendig $i = 0$.

§ 12.

$n = 4m$, $\varphi \gtrless 0$, $i = 0$, μ beliebig.

In diesem Falle werde ich zeigen, *dass φ eine Potenz einer linearen Form ist.* Zu dem Zwecke benutze ich die Formeln (2) des § 10. Sie liefern:

$$(a\varphi)^{2m-1}\, a_y^{2m+1}\, \varphi_x^{2m+1} = \frac{j}{2m+2}\,(yx)^{2m+1},$$

$$(a\varphi)^{2m}\quad a_y^{2m}\quad \varphi_x^{2m} = \frac{j}{2m+1}\,(yx)^{2m}.$$

Also:

$$(a\varphi)^{2m-1}\, a_y^{\mu}\, a_x^{2m+1-\mu}\cdot \varphi_x^{2m+1} = 0\,,$$

$$(a\varphi)^{2m-1}\,(a\,q)^{\mu}\, a_x^{2m+1-\mu}\,\varphi_x^{2m+1} = 0\,,$$

$$0 = ((f,\,q)^{\mu},\,\varphi)^{2m-1} = c\,(\alpha^{n-\mu},\,\varphi)^{2m-1}.$$

Hieraus geht zunächst hervor, dass φ den Factor α mindestens $2m+2$mal enthält. Aber ich werde zeigen, dass es eine volle Potenz von α ist. Sei nämlich α^k die höchste in φ enthaltene Potenz von α, so hat man:

$$(\varphi,\ \alpha^{n-k})^{n-k} = g\,\alpha^k,\quad (k \geqq 2m+2),$$

wo g constant. Nach den Formeln (1) des § 10. ist nun:

$$(a\varphi)^{2m}\,\varphi_y^{n-k}\,\varphi_x^{k-2m}\,a_x^{2m} = 0$$

also

$$0=(a\varphi)^{2m}(\varphi,\alpha)^{n-k}\varphi_x^{k-2m}a_x^{2m}=((\varphi,\alpha^{n-k})^{n-k},f)^{2m}=g(\alpha^k,f)^{2m}$$
$$=g\alpha^{k-2m}a_x^{2m}(a\alpha)^{2m}.$$

Aus dieser Formel schliesst man, wie in § 6., dass eine Ueberschiebung $(f,f)^{2l}$ existirt, welche, bis auf einen constanten Factor, eine Potenz von α ist, während alle höheren Ueberschiebungen von f über sich selbst verschwinden. Daher muss φ selbst Potenz von α sein, weil es nach Voraussetzung die höchste nicht verschwindende Ueberschiebung von f über sich selbst ist; w. z. b.

§ 13.

$n=4m$, $\varphi \gtrless 0$, $i \gtrless 0$. Ein Hülfssatz.

Für die noch zu betrachtenden Formen U beweise ich vorab den Satz: *f ist mit φ proportional.* Zu dem Zwecke zeige ich vor Allem: *Es giebt Formen $\lambda_1 f+\lambda_2\varphi$, wo λ_1, λ_2 nicht zugleich Null sind, für welche als Grundform φ und also auch i verschwindet.*

Nach Formel (4_a) des § 10. giebt es nämlich sicher solche Formen $\lambda_1 f+\lambda_2\varphi$, für welche $i=0$. Ist nun für eine derartige Form, die ϱ genannt werden mag, $(\varrho\varrho)^{2m}$ nicht Null, so betrachte man statt ϱ $\sigma=(\varrho\varrho)^{2m}$, welches nach Formel ($4_b$) des § 10. doch auch zu der Schaar $\lambda_1 f+\lambda_2\varphi$ gehört. Für σ ist dann jedenfalls $(\sigma\sigma)^{2m}$ und also auch, wie oben angegeben, $(\sigma\sigma)^n$ gleich Null. Es lassen sich also λ_1, λ_2 so bestimmen, dass man gleichzeitig folgende zwei Gleichungen hat:

$$(\sigma,\sigma)^{2m}=\left(\frac{2i\lambda_1\lambda_2}{m\cdot m+1\cdot 2m+1}+\frac{j\lambda_2^2}{2m+1}\right)f+\left(\lambda_1^2+\frac{(1-m\cdot m+1)\,i\lambda_2^2}{m\cdot m+1\cdot 2m+1}\right)\varphi=0,$$
$$(\sigma,\sigma)^{4m}=i\lambda_1^2+2j\lambda_1\lambda_2+\frac{i^2}{m\cdot m+1\cdot 2m+1}\lambda_2^2=0.$$

Nun aber können die Coefficienten von f und φ in $(\sigma,\sigma)^{2m}$ nicht zugleich verschwinden. Denn sonst wäre:

$$0=\begin{vmatrix} \frac{2i}{m\cdot m+1\cdot 2m+1} & \frac{j}{2m+1} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1-m\cdot m+1}{m\cdot m+1\cdot 2m+1}\cdot i \\ i & j & \frac{i^2}{m\cdot m+1\cdot 2m+1} \end{vmatrix},$$

also $m(m+1)-2=0$, was unmöglich ist, da wir $m>1$ vorausgesetzt haben. — Daher muss f mit φ proportional sein.

Ich setze:

$$\varphi=\gamma f.$$

Nach § 10., (1_b) hat man:

$$(f,\varphi)^{2m}=\frac{i}{m\cdot m+1\cdot 2m+1}\cdot f.$$

also

$$\gamma^2 = \frac{i}{m \cdot m+1 \cdot 2m+1}.$$

Durch Ueberschiebung von f über φ folgt ferner:

$$j = \gamma i,$$

und die Formel III des § 10. wird jetzt:

$$\text{III}' \qquad (a\,b)^{2m} a_y^{2m} b_x^{2m} = \gamma a_x^{2m} a_y^{2m} + \frac{i}{2m+1} (y\,x)^{2m}.$$

§ 14.

$$n = 4m, \ \varphi \gtrless 0, \ i \gtrless 0, \ \mu < 2m.$$

Es ist leicht zu sehen, dass Formen dieser Art nicht existiren. Wenn nämlich $\mu < 2m$, so liefert die Form III':

$$(a\,b)^{2m} a_y^{\mu} a_x^{2m-\mu} b_x^{2m} = \gamma a_y^{\mu} a_x^{n-\mu}$$

$$(a\,b)^{n-\mu} a_y^{\mu} b_x^{\mu} = \frac{i}{\mu+1} (y x)^{\mu}.$$

Also:

$$(a b)^{2m} (a q)^{\mu} a_x^{2m-\mu} b_x^{2m} = \gamma (a q)^{\mu} a_x^{n-\mu}, \quad (a b)^{n-\mu} (a q)^{\mu} b_x^{\mu} = \frac{i}{\mu+1} \cdot q,$$

$$((f, q))^{\mu}, f)^{2m} = \gamma (f, q)^{\mu} \quad , \quad ((f, q)^{\mu}, f)^{n-\mu} = \frac{i}{\mu+1} \cdot q,$$

$$(\alpha^{n-\mu}, f)^{2m} = \gamma \alpha^{n-\mu} \quad , \quad c\,(\alpha^{n-\mu}, f)^{n-\mu} = \frac{i}{\mu+1} \cdot q.$$

Nach der vorletzten Formel ist:

$$(f, \alpha^{2m})^{2m} = \gamma \alpha^{2m}, \text{ also } (f, \alpha^{n-\mu})^{n-\mu} = 0,$$

also folgt aus der letzten Formel, dass $i = 0$, d. h. *die Invariante i verschwindet und wir werden zu dem Falle des § 12. zurückgeführt.*

§ 15.

$n = 4m, \ \varphi \gtrless 0, \ i \gtrless 0, \ \mu = 2m.$ **Aufstellung einer Normalform.**

Wir sind endlich zu dem letzten Falle gelangt, wo $n = 4m$, $\mu = 2m$ und keine der Formen φ und i verschwindet. Ich werde hier zunächst einige Sätze und Formeln entwickeln, die ganz denjenigen analog sind, welche in § 9. ihre Stelle fanden bei Untersuchung der Formen, die sich in G_1 transformiren liessen. Vermöge derselben wird die Form U, ohne dass ich ihren Grad $4m$ schon hier bestimme, auf eine gewisse Normalform gebracht, die dann im folgenden Paragraphen der Untersuchung zu Grunde gelegt wird.

Es giebt in dem hier vorliegenden Falle wieder unendlich viele Formen p (vom $2m+1^{\text{ten}}$ Grade) und unter ihnen will ich wieder eine so aussuchen, dass einer ihrer linearen Factoren α zugleich Factor von f ist:

$$(a\alpha)^n = 0.$$

Aus den Formeln des § 4. und den in § 13. aufgestellten folgt dann:

$$(a\,b)^{n-\nu} a_y^\nu b_x^\nu = \frac{i}{\nu+1} (yx)^\nu,$$

$$(a\,b)^{2m} (a\,q)^{2m} b_x^{2m} = \gamma\, a_x^{2m} (a\,q)^{2m} + \frac{i}{2m+1} \cdot q, \quad (a\,b)^{n-\nu} (a\,r)^\nu b_x^\nu = \frac{i\,r}{\nu+1},$$

$$(1_a) \quad ((f,\, q)^{2m},\, f)^{2m} = \gamma\,(f,\, q)^{2m} + \frac{i\,q}{2m+1}, \qquad ((f,\, r)^\nu,\, f)^{n-\nu} = \frac{i\,r}{\nu+1},$$

$$(1_b) \quad c\,(\alpha^{2m},\, f)^{2m} = c\,\gamma\,\alpha^{2m} + \frac{i\,\alpha^{\lambda-1}\,r}{2m+1}, \qquad (s\,\alpha^{2m},\, f)^{n-\nu} = \frac{i\,r}{\nu+1},$$

so wie ferner:

$$(2) \qquad \frac{c\,i\,r}{\nu+1} = \left(s,\, c\,\gamma\,\alpha^{2m} + \frac{i\,\alpha^{\lambda-1}\,r}{2m+1}\right)^{\lambda-1}.$$

Aus den Formeln (1) geht hervor:

$$c\,(\alpha^n,\, f)^n = \frac{i}{2m+1} (q\,\alpha)^{2m} = 0;$$

es hat also q den Factor α, und λ ist grösser als 1. Die Ueberschiebung rechter Hand in Formel (2) besteht aus Gliedern, welche, bis auf eines, den Factor α enthalten. Dieses eine muss also mit dem Gliede linker Hand identisch sein. Daher

$$\frac{c\,i\,r}{\nu+1} = \frac{i\,r}{2m+1} \frac{(s,\, \alpha^{\lambda-1})^{\lambda-1}}{\binom{2m}{\lambda-1}},$$

$$\frac{2m+1}{\nu+1} \binom{2m}{\lambda-1} c = (s,\, \alpha^{\lambda-1})^{\lambda-1} = \binom{n-\nu}{\lambda-1} c,$$

$$\binom{2m+1}{\lambda-1} = \binom{n-\nu}{\lambda-1}.$$

Da $\lambda > 1$, so ist $2m+1 = n-\nu$, *und also* $\nu = 2m-1$, $\lambda = 2$, *s linear*. Trägt man die Werthe von ν und λ in die Formeln des § 4. sowie in (1) und (2) ein, so erhält man:

$$p = \alpha\,q = \alpha^2 r,$$

$$(f,\, r)^{2m-1} = s\,\alpha^{2m} = s_x\,\alpha_x^{2m},$$

$$(3) \qquad c\,(\alpha^{2m},\, f)^{2m} = c\,\gamma\,\alpha^{2m} + \frac{i\,\alpha\,r}{2m+1},$$

$$(s,\, \alpha) = (2m+1)\,c$$

$$\frac{c\,i\,r}{2m} = \left(s,\, c\,\gamma\,\alpha^{2m} + \frac{i\,\alpha\,r}{2m+1}\right).$$

Mithin ist:

$$\frac{ir\,(s\alpha)}{2m} = (s,\ \gamma\,\alpha^{2m}(s\alpha) + i\,\alpha r),$$
$$0 = 2m\gamma\,(s\alpha)^2\alpha^{2m-1} + (2m-1)\,i\alpha\,(sr),$$
$$0 = r_x^{2m-3}(rs)\,(r\alpha)'$$

Verbindet man hiermit die Identität:

$$r_x^{2m-1}(s\alpha)^{2m-1} = \{s_x(r\alpha) - \alpha_x(rs)\}^{2m-1},$$

so wird:

(4) $$r\,(s\alpha)^{2m-1} = (r\alpha)^{2m-1}\cdot s^{2m-1} - (rs)^{2m-1}\cdot\alpha^{2m-1}.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in die zweite und dritte der Gleichungen (3) erhält man die Formeln:

$$(r\alpha)^{2m-1}(f,\ \alpha^{2m-1})^{2m-1} - (rs)^{2m-1}(f,\ s^{2m-1})^{2m-1} = (s\alpha)^{2m-1}s\,\alpha^{2m},$$
$$(s\alpha)^{2m}(f,\ \alpha^{2m})^{2m} = \gamma\,(s\alpha)^{2m}\alpha^{2m} + (r\alpha)^{2m-1}\alpha\,s^{2m-1} - (rs)^{2m-1}\alpha^{2m}.$$

Ausser der Formel:

$$(a\alpha)^n = 0$$

hat man also noch die folgenden:

(5)
$$\begin{aligned} 2m(s\alpha)^{2m-1}(f,\ \alpha^{2m+1})^{2m+1} &= (2m-1)(r\alpha)^{2m-1}\alpha\,s^{2m}\ \ {}^{2} \\ (f,\ \alpha^{2m+1}s^2)^{2m+3} &= 0, \\ (f,\ \alpha^2 s^{2m+1})^{2m+3} &= 0, \\ (f,\ s^n)^n &= 0, \end{aligned}$$

und erhält also aus der Identität:

$$a_x^n\,(\alpha s)^n = (\alpha\,(as) + s\,(\alpha a))^n$$

die Formel:

$$f\,(\alpha s)^n = -\,n\,(as)^{n-1}(a\alpha)\,\alpha s^{n-1} + \binom{n}{2m}(as)^{2m}(a\alpha)^{2m}\alpha^{2m}s^{2m}$$
$$-\,n\,(as)\,(a\alpha)^{n-1}\alpha s^{n-1}.$$

Setzt man hier noch zur Abkürzung:

(6) $$\frac{-(as)^{n-1}(a\alpha)}{(\alpha s)^n} = c_1,\quad \frac{(as)^{2m}(a\alpha)^{2m}}{(\alpha s)^n} = c_2,\quad -\frac{(as)\,(a\alpha)^{n-1}}{(\alpha s)^n} = c_3,$$

so hat man *die Normalform von f*, deren Ableitung der Zweck dieses Paragraphen war:

(7) $$f = n\,c_1\,\alpha^{n-1}s + \binom{n}{2m}c_2\,\alpha^{2m}s^{2m} + n\,c_3\,\alpha s^{n-1}.$$

§ 16.

$$n = 4m,\ \mu = 2m,\ \varphi \gtrless 0,\ i \gtrless 0.\quad \text{Schluss.}$$

Nicht alle Formen, welche sich in der letztangegebenen Gestalt schreiben lassen, sind Formen U. Damit dieses der Fall ist, müssen gewisse Relationen für die Grössen:

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ n = 4m$$

erfüllt sein, die ich in der Weise aufstellen will, dass ich die Invariante i auf verschiedene Art berechne. Aus der Formel III' des § 13. folgt nämlich für beliebiges ϱ:

$$(ab)^{2m+2\varrho}\, a_y^{2m-2\varrho}\, b_x^{2m-2\varrho} = \frac{i}{2m-2\varrho+1}\,(yx)^{2m-2\varrho}$$

also:

$$(ab)^{2m+2\varrho}\,(a\alpha)^{2m-2\varrho}\,(bs)^{2m-2\varrho}\,(\alpha s)^{2m+2\varrho} = \frac{i}{2m-2\varrho+1}\,(\alpha s)^n$$

oder:

$$\frac{i}{2m-2\varrho+1}\,(\alpha s)^n = ((a\alpha)(bs)-(b\alpha)(as))^{2m+2\varrho}\,(a\alpha)^{2m-2\varrho}\,(bs)^{2m-2\varrho}$$
$$= \sum_{k=0}^{k=2m+2\varrho}(-1)^k\binom{2m+2\varrho}{k}(a\alpha)^{n-k}(bs)^{n-k}(as)^k(b\alpha)^k.$$

In dieser Summe verschwinden nach den Formeln (5) des § 14. alle diejenigen Glieder, welche einen der symbolischen Factoren haben:

$$(a\alpha)^n,\ (a\alpha)^{2m+1}(as)^2,\ (a\alpha)^2(as)^{2m+1},\ (as)^n,$$

die Coefficienten der übrigen Glieder lassen sich durch die Coefficienten c der Formel (6) (§ 15.) ausdrücken. So wird:

$$\frac{1}{2m-2\varrho+1}\cdot\frac{i}{(as)^n}$$
$$= -\left\{\left(\binom{2m+2\varrho}{1}+\binom{2m+2\varrho}{n-1}\right)c_1c_3+\binom{2m+2\varrho}{2m}c_2^2\right\}.$$

Setzt man nun für ϱ die Zahlen 1, 2, 3, so erhält man aus der vorstehenden Formel drei lineare Relationen zwischen den Grössen $\frac{i}{(as)^n}$, $2c_1c_3$, c_2^2; sollen dieselben zusammen bestehen, so muss ihre Resultante verschwinden. Es wird also:

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2m-1} & m+1 & \binom{2m+2}{2} \\ \frac{1}{2m-3} & m+2 & \binom{2m+4}{4} \\ \frac{1}{2m-5} & m+3 & \binom{2m+6}{6} \end{vmatrix}$$

oder

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2m^2+m-1 & (2m-1)\cdot\binom{2m+2}{2} \\ 1 & 2m^2+m-6 & (2m-3)\cdot\binom{2m+4}{4} \\ 1 & 2m^2+m-15 & (2m-5)\cdot\binom{2m+6}{6} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{2m-1\cdot 3\cdot 4}{2m-5\cdot 2m+3\cdot 2m+4} \\ 1 & 6 & \frac{2m-3}{2m-5} \\ 1 & 15 & \frac{2m+5\cdot 2m+6}{5\cdot 6} \end{vmatrix}$$

$$0 = \frac{2m+5\cdot 2m+6}{6} - \left(1+\frac{2}{2m-5}\right)14 + \frac{2m-1\cdot 3\cdot 4\cdot 9}{2m-5\cdot 2m+3\cdot 2m+4},$$

mithin:

$$(2m+5)(2m+6) < 84 + \frac{168}{2m-5}.$$

Dieses ist aber für $m > 3$ unmöglich, während für $m = 2, 3$ in der That die vorstehenden Gleichungen befriedigt sind.

Für $m = 2$ wird die obige Formel für i, wenn man für ϱ setzt 1 und 2:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{i}{(as)^8} = -6c_1c_3 + 15c_2^2, \quad \frac{i}{(as)^8} = -16c_1c_3 + 70c_2^2$$

mithin:

$$0 = 2c_1c_3 + 25c_2^2.$$

Es lässt sich also in diesem Falle die im vorigen Paragraph abgeleitete Normalform von f, die für $n = 8$ lautet:

$$f = 8c_1\alpha^7 s + 70c_2\alpha^4 s^4 + 8c_3\alpha s^7$$

durch lineare Substitution auf die Gestalt bringen:

$$f = y_1^7 y_2 + 7y_1^4 y_3^4 - 8y_1 y_2^7.$$

Wendet man hier noch die Substitution an:

$$y_1 = (1+\sqrt{3})x_1 + (1-\sqrt{3})x_2, \quad y_2 = x_1 + x_2,$$

so erhält man die Form:

$$f = G_3 = 108\left((7+4\sqrt{3})x_1^8 - 14x_1^4x_2^4 + (7-4\sqrt{3})x_2^8\right),$$

welche sich leicht in die Hesse'sche Form von G_1:

$$h = -2(x_1^8 - 14x_1^4x_2^4 + x_2^8)$$

transformiren lässt. *Da aber $(h, h)^2$ ein volles Quadrat ist, so ist, wie schon bemerkt, G_3 keine Primform.*

Nehmen wir endlich $m = 3$ und setzen in die Formel für i wieder einmal $\varrho = 1$, dann $\varrho = 2$, so kommt:

$$\frac{1}{(as)^{12}}\cdot\frac{i}{5} = -8c_1c_3 + 28c_2^2, \quad \frac{1}{(\alpha s)^{12}}\cdot\frac{i}{3} = -10c_1c_3 + 210c_2^2.$$

Also ist:

$$0 = c_1 c_3 + 49 c_2^2$$

und f geht durch lineare Substitution in G_2 über:

$$G_2 = 12 x_1^{11} x_2 + 132 x_1^6 x_2^6 + 12 x_1 x_2^{11}.$$

Man kann wieder bemerken, dass die linearen Substitutionen welche G_2 in sich überführen, bei dem hier eingehaltenen Gange der Untersuchung dadurch angedeutet sind, dass man als Factor α von p im vorigen Paragraphen eine beliebige Wurzel von f nehmen konnte, dass dann s eine bestimmte andere Wurzel von f wurde und sich schliesslich die kanonische Form G_2 ergab unabhängig davon, welches Paar zusammengehöriger Wurzeln α, s man genommen hatte. — Eine ähnliche Bemerkung bezieht sich auf G_3.

Erlangen, im März 1877.

Ueber lineare Differentialgleichungen.

Von Felix Klein in München.

Die folgenden Erörterungen sind bestimmt, die unter gleichem Titel im elften Bande dieser Annalen p. 115—118 erschienene Note in einigen Punkten zu vervollständigen.

1. *Endliche Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen.* Die endlichen Gruppen, welche man aus linearen Substitutionen einer Veränderlichen η bilden kann, zerfallen bekanntlich in fünf Classen, wegen deren Aufzählung und Charakterisirung ich am besten auf die inzwischen erschienene Gordan'sche Arbeit, Bd. XII dieser Annalen, p. 44, verweise. Ich nenne diese Gruppen (vergl. meine Arbeit: Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst, Annalen IX, p. 183 ff.) die *Kreistheilungsgruppe*, die *Doppelpyramidengruppe*, die Gruppe des (regulären) *Tetraeders*, *Oktaeders*, *Ikosaeders*. Die beiden erstgenannten Gruppen enthalten noch unendlich viele Arten, entsprechend dem Werthe, den man der in ihnen vorkommenden, positiven ganzen Zahl n ertheilen will. Dem Werthe $n=1$ entspricht als Kreistheilungsgruppe diejenige, welche allein aus der identischen Substitution besteht. Bei den Doppelpyramidengruppen hat man den Werth $n=1$ auszulassen.

Mit jeder dieser Gruppen ist nun eine rationale Function $\Omega(\eta)$, welche ich die *zugehörige* nennen will, wesentlich verknüpft — wobei indess gleich hier hervorgehoben sei, dass Ω nicht völlig bestimmt ist, sondern statt Ω ein beliebiges $\frac{\alpha\Omega+\beta}{\gamma\Omega+\delta}$ genommen werden kann. — Dieses Ω hat, gleich anderen rationalen Functionen von η, die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn auf η die Substitutionen der Gruppe angewandt werden, vor allen Dingen aber diese: *dass jede rationale Function von η, welche bei den Substitutionen ungeändert bleibt, eine rationale Function von Ω ist*)*.

*) Wegen der Beweise vergl. meine Arbeit im IX. Bande, p. 183 ff. — Es ist interessant, die *doppeltperiodischen* Functionen einer Variablen η zu vergleichen, die doch auch bei einer, allerdings *unendlichen* Gruppe linearer Substitutionen ungeändert bleiben und insofern den im Texte betrachteten Functionen analog sind. Da es keine doppeltperiodische Functionen giebt, die einen vorgeschriebenen Werth im Periodenparallelogramm nur *einmal* annimmt, so gelingt es nicht, wie im Texte, alle in Betracht kommenden Functionen durch eine (ausgezeichnete) rational auszudrücken, sondern erst durch zwei.

Stellt man die fraglichen Gruppen in den kanonischen Formen auf, welche Gordan l. c. angiebt und mit I—V numerirt, so kann man für Ω bez. folgende Ausdrücke wählen:

$$(1)\qquad \eta^n,$$

$$(2)\qquad \eta^n+\eta^{-n}$$

$$(3)\qquad \left(\frac{1-2\sqrt{-3}\,\eta^2-\eta^4}{1+2\sqrt{-3}\,\eta^2-\eta^4}\right)^3$$

$$(4)\qquad \frac{(1+14\eta^4+\eta^8)^3}{108\eta^4(1-\eta^4)^4}$$

$$(5)\qquad \frac{(-(\eta^{20}+1)+228(\eta^{15}-\eta^5)-494\eta^{10})^3}{1728\eta^5(\eta^{10}+11\eta^5-1)^5},$$

die speciell ich fortan als *Kreistheilungsfunction* ··· *Ikosaederfunction* benennen will. Es stimmen die Ausdrücke (3) ·· (5) mit denjenigen überein, die Schwarz in der Arbeit über die hypergeometrische Reihe (Borchardt's Journal, Bd. 75, p. 292 ff.) dem Studium des Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders zu Grunde legt. In meiner vorigen Note habe ich statt ihrer allgemeine Ausdrücke geschrieben, welche sich auf die Formensysteme des Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders beziehen; ich kehre hier zu den kanonischen Ausdrücken zurück, um die mitzutheilenden Formeln möglichst unmittelbar verständlich zu machen. Nur beim Ikosaeder werde ich gelegentlich $\eta(\eta^{10}+11\eta^5-1)$ durch f, die zugehörige Hesse'sche mit H, die Functionaldeterminante (f, H) mit T bezeichnen. Man hat dann:

$$T^2=12f^5-12^4H^3$$

und der Ausdruck (5) nimmt die Gestalt an:

$$1728\,\frac{H^3}{f^5}.$$

2. *Beziehungen zwischen den fünferlei Gruppen. — Wenn zwei endliche Gruppen a, b in der Beziehung stehen, dass a in b als Untergruppe enthalten ist, so ist Ω_b durch Ω_a rational ausdrückbar.* — Dieses folgt sofort, da Ω_b eine rationale Function von η ist, welche bei den Substitutionen von b und also auch bei den Substitutionen von a ungeändert bleibt. Auch kann man den Satz umkehren.

Die Ikosaedergruppe z. B. enthält bekanntlich 6 verschiedene Untergruppen, welche dem Kreistheilungstypus für $n=5$ angehören, und von diesen erscheint eine selbst in kanonischer Form, wenn man die Ikosaedergruppe kanonisch dargestellt hat. Daher ist die Ikosaederfunction, so wie sie eben angegeben wurde, rational in η^5. — Oder besser: Die Ikosaedergruppe enthält als Untergruppen fünf vom Tetraedertypus. Bei einer solchen Tetraedergruppe bleibt immer das Ikosaeder f und, doppeltzählend, ein gewisser Oktaeder t ungeändert. Man kann daher $\frac{t^2}{f}$ als zugehörige Function wählen, wenn es auch, auf die kanonische Form des Tetraeders transformirt, nicht mit der eben unter (3) angegebenen Tetraederfunction übereinstimmt, sondern eine lineare Function derselben ist. Dann muss die Ikosaederfunction rational in $\frac{t^2}{f}$ sein, und in der That hat man:

$$144\,\frac{T^2}{f^5} = 1728\left(1-1728\,\frac{H^3}{f^5}\right) = \frac{t^2}{f}\left(\frac{t^4}{f^2} - 10\,\frac{t^2}{f} + 45\right)^2,$$

wie ich in etwas anderer Gedankenverbindung p. 204 meiner Arbeit im IX. Bande angab. Ich werde auf diese Formel noch später zurückkommen.

3. *Die fünferlei Integralgleichungen.* Die Integralgleichungen, wie ich sie p. 117 der vorigen Note unten (1) $\cdots$ (5) angab, erwachsen, wenn man die fünf jetzt mit (1) $\cdots$ (5) bezeichneten Functionen gleichsetzt rationalen Functionen einer Veränderlichen x, die ich, im Anschlusse an die vorige Note, in den Fällen (1), (3), (4), (5) einfach mit $R(x)$ bezeichne, während ich sie im Falle (2) mit $4R(x)-2$ benenne. Die Bemerkungen der vorangehenden Nummer zeigen, dass diese Integralgleichungen gewisse Zusammenhänge aufweisen. So oft z. B. η^5 oder die (modificirte) Tetraederfunction $\frac{t^2}{f}$ gleich gesetzt wird einer rationalen Function von x, ist auch die Ikosaederfunction einer rationalen Function gleich. Dieselbe Gleichung zwischen η und x tritt also in verschiedenen Formen auf.

Es ist wünschenswerth, einer hieraus hervorgehenden Unbestimmtheit des Ausdrucks dadurch entgegengetreten, *dass für die Integralgleichungen ein für alle mal die Reihenfolge* (1), (2), (3), (4), (5) *festgesetzt wird, und nun jede in Betracht kommende Relation zwischen* η *und* x *der ersten Kategorie, bei welcher sie auftritt, zugerechnet wird.* Die analoge Festsetzung wird man bei den Gleichungen (1), (2) noch einmal treffen mit Bezug auf den Werth der Zahl n. — Dies vorausgesetzt, sind die Gleichungen zwischen η und x *irreducibel.*

4. *Einfluss der Integrationsconstanten.* Die allgemeinen Integralgleichungen erwachsen aus den eben angegebenen particulären, indem statt η beliebig $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ gesetzt wird. Nimmt man nun z. B. den Fall (1) und $n=1$, also:

$$\eta = R(x),$$

so kann man statt:

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} = R(x),$$

unter a, b, c, d irgendwelche Grössen verstanden auch schreiben

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\beta} = \frac{aR+b}{cR+d}.$$

Auf diese Weise ergiebt sich: *Die rationale Function von x, welche in der Integralgleichung auftritt, ist durch die Differentialgleichung in den Fällen* (2), (3), (4), (5) *vollkommen bestimmt, nur im Falle* (1) *enthält sie, wenn $n = 1$ ist, drei, und, für die übrigen Werthe von n, eine willkürliche Constante.* Dabei ist, wie im Folgenden immer, vorausgesetzt, dass man an der Verabredung der vorigen Nummer festhält.

5. *Die zu Grunde liegenden Differentialgleichungen.* Setzt man in die Integralgleichungen (1) $\cdots$ (5) statt $R(x)$ einfach x, so entstehen die zugehörigen Differentialgleichungen alle aus der bei Schwarz (Borchardt's Journal Bd. 75) discutirten:

$$[\eta] = \frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{x^2} + \frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{(1-x)^2} - \frac{\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2}}{x(1-x)},$$

indem man für λ, μ, ν bezüglich einträgt:

	λ	μ	ν
I	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	1
II	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2}$
III	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
IV	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
V	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

Ich will eine solche Gleichung eine *Elementargleichung* nennen mit den singulären Punkten 0, ∞, 1 und den zugehörigen Exponenten λ, μ, ν. Es ist mir weiterhin gelegentlich bequem, statt 0, ∞, 1 drei beliebige Werthe a, b, c (von denen keiner unendlich ist) als singuläre Werthe zu besitzen. Führt man zu diesem Zwecke statt x durch lineare Substitution ein geeignetes neues x ein, so nimmt die Differentialgleichung die symmetrische Gestalt an:

$$[\eta] = \frac{1}{x-a\cdot x-b\cdot x-c}\left\{(a-b)(a-c)\frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{x-a} + (b-c)(b-a)\frac{\frac{1-\mu^2}{2}}{x-b} + (c-a)(c-b)\frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{x-c}\right\}.$$

Dieses Resultat lässt sich, wenn man von der allgemeinen Theorie solcher Differentialgleichungen ausgeht*), von vornherein einsehen. Der Ausdruck rechter Hand muss $(-4)^{\text{ter}}$ *Dimension sein*, weil der Werth $x=\infty$ nicht singulär ist. Er muss ferner so beschaffen sein, dass bei Partialbruchzerlegung höchstens quadratische und lineare Glieder auftreten. Die betr. Nenner müssen $(x-a)^2$, $(x-b)^2$, $(x-c)^2$ bez. $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, die Zähler der quadratischen Glieder müssen $\frac{1-\lambda^2}{2}$, $\frac{1-\mu^2}{2}$, $\frac{1-\nu^2}{2}$ sein. Dadurch aber ist der Ausdruck vollkommen bestimmt.

6. *Ableitung der Differentialgleichungen aus den Integralgleichungen.* Dass die Elementargleichungen so, wie sie angegeben werden, zu den Integralgleichungen gehören, hatte ich, bei der das vorige Mal eingehaltenen Darstellung, der citirten Arbeit von Schwarz entnommen. Die betr. Rechnung, wie sie sich auf Grund der in Betracht kommenden algebraischen Formensysteme ergiebt, ist seitdem von Hrn. Brioschi in eleganter Weise entwickelt worden (Annalen IX, p. 111ff.). Aber es hat wohl Interesse zu bemerken, dass man dieselbe ganz sparen kann, wenn man von der Definition der Ausdrücke $\Omega(\eta)$ ausgeht. Betrachten wir z. B. die Ikosaedergleichung in der Form:

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}=\frac{Ax+B}{Cx+D},$$

wo ich die Constanten A, B, C, D so wählen will, dass $\frac{Ax+B}{Cx+D}$ für $x=a$, b, c bez. 0, ∞, 1 wird. *Aus einer Wurzel* η_0 *dieser Gleichung ergeben sich alle anderen durch* 59 *von vornherein bekannte lineare Substitutionen, deren Coefficienten numerisch sind.* Der Ausdruck $[\eta]$ ist aber so gebildet, dass er für η und ein beliebiges $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ identisch ausfällt. Daher nimmt im vorliegenden Falle $[\eta]$ für alle Wurzeln der Ikosaedergleichung denselben Werth an, ist also eine rationale Function von x. Mehrfache Wurzeln besitzt die Ikosaedergleichung nun für $x=a$, $x=b$, $x=c$ und zwar bez. lauter dreifache, fünffache, doppelte. Daher ist die betr. rationale Function vom $(-4)^{\text{ten}}$ Grade, sie wird für $x=a$, b, c im zweiten Grade unendlich und hat, auf diese Werthe bezüglich, die Exponenten $\lambda=3$, $\mu=5$, $\nu=2$.

7. *Einsetzung von* $R(x)$ *statt* (x). Setzt man in die Elementargleichungen der 5^{ten} Nummer statt x ein $R(x)$, so entstehen die allgemeinsten hier in Betracht kommenden Differentialgleichungen:

$$[\eta]=[R]+R'^2\left\{\frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{R^2}+\frac{\frac{1-\mu^2}{1}}{(1-R)^2}-\frac{\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2}}{R(1-R)}\right\}.$$

*) Vergl. hier und im Folgenden die einschlägigen Arbeiten von Fuchs, Schwarz u. A. in Borchardt's Journal.

Wir wollen den Ausdruck rechter Hand in Partialbrüche zerlegen und insonderheit auf die dabei auftretenden quadratischen Glieder achten. Sei $R = \frac{\varphi}{\psi}$, wo φ, ψ vom Grade n ohne gemeinsamen Theiler. Keine der Wurzeln von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi - \psi = 0$ oder der Functionaldeterminante $(\varphi, \psi) = 0$ soll unendlich angenommen werden. Ich nenne dann die Wurzeln von φ a_i, ihre Multiplicität α_i, analog bei φ und $\varphi - \psi$ die Wurzeln b_i, c_i, ihre Multiplicität β_i, γ_i. Die Functionaldeterminante (φ, ψ) hat die a_i, b_i, c_i zu $\alpha_i - 1$, $\beta_i - 1$, $\gamma_i - 1$-fachen Wurzeln; sie besitze ausserdem noch Wurzeln d_i je $\delta_i - 1$-fach. *Dann lauten die quadratischen Glieder der Partialbruchzerlegung:*

$$\sum \frac{\frac{1 - \alpha_i^2 \lambda^2}{2}}{(x - a_i)^2} + \sum \frac{\frac{1 - \beta_i^2 \mu^2}{2}}{(x - b_i)^2} + \sum \frac{\frac{1 - \gamma_i^2 \nu^2}{2}}{(x - c_i)^2} + \sum \frac{\frac{1 - \delta_i^2}{2}}{(x - d_i)^2},$$

wie man leicht durch functionentheoretische Ueberlegung oder auch durch directe Rechnung findet.

8. *Ausfallen gewisser Glieder der Partialbruchentwickelung.* In den fünferlei hier in Betracht kommenden Fällen sind λ, μ, ν Brüche mit dem Zähler 1. Es können also verschiedene Terme $\alpha_i = \frac{1}{\lambda}$, $\beta_i = \frac{1}{\mu}$, $\gamma_i = \frac{1}{\nu}$ werden. *Dann fällt das betreffende quadratische Glied der Partialbruchzerlegung weg.* Da wir es nun mit Differentialgleichungen zu thun haben, die durchaus algebraische Integrale besitzen, so folgt aus der allgemeinen Theorie, dass dann auch kein bez. lineares Glied in der Partialbruchentwickelung auftritt — wie die directe Rechnung bestätigt. *Der Punkt $x = a_i$ oder b_i oder c_i hört dann also auf, für die Differentialgleichung singulär zu sein.*

Erstes Beispiel. Ich will statt der Ikosaedergleichung:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = x$$

die folgende betrachten:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1728 \frac{H^3(x)}{f^5(x)}.$$

Dann ist $\varphi - \psi = -\frac{T^2(x)}{12}$. Man hat also statt x eine Function $R(x)$ gesetzt, welche für $R = 0, \infty, 1$ *lauter* dreifache, fünffache, doppelte Wurzeln besitzt. Ueberdies sind die Factoren der Functionaldeterminante (φ, ψ) durch H^2, f^4, T völlig absorbirt. Daher geht die zum Ikosaeder gehörige Elementargleichung jetzt einfach über in:

$$[\eta] = 0,$$

d. h. η ist eine lineare Function von x, wie von vornherein deutlich, da *alle* Wurzeln der Integralgleichung in dieser Form enthalten sind. — Man kann an diese Umformung, wie an die später anzuführenden, eine algebraische Folgerung knüpfen, die bemerkenswerth scheint. Wenn ich drei ganze Functionen habe, l, m, n, welche die Identität

$$l^3 - m^5 + n^2 = 0$$

befriedigen, wenn ferner die Functionaldeterminante (l^3, m^5) oder, was auf dasselbe hinauskommt, (l^3, n^2) resp. (m^5, n^2) durch $l^2 m^4 n$ ganz absorbirt ist*), so kann man hinsichtlich der Differentialgleichung denselben Schluss, wie soeben, machen, indem man statt x einsetzt $\frac{l^3}{m^5}$. Daher: *Es giebt keine anderen Functionen l, m, n, die den genannten Bedingungen genügen, als $12H$, f, $\frac{T}{\sqrt{12}}$.*

Zweites Beispiel. In der zweiten Nummer ist die Ikosaederfunction rational ausgedrückt worden durch die (modificirte) Tetraederfunction $\frac{t^2}{f}$. Ich will nun letztere $= x$ setzen, oder, der grösseren Deutlichkeit wegen, $= \frac{x_1}{x_2}$. So hat man, bis auf einen Proportionalitätsfactor:

$$\begin{aligned} 144\, T^2(\eta) &= x_1 (x_1^2 - 10 x_1 x_2 + 45 x_2^2)^2, \\ f^5(\eta) &= x_2^5, \\ 12^6 \cdot H^3(\eta) &= -(x_1^2 - 11 x_1 x_2 + 64 x_2^2)(x_1 - 3x_2)^3. \end{aligned}$$

Die Functionaldeterminante der rechts stehenden Ausdrücke ist

$$(x_1^2 - 10 x_1 x_2 + 45 x_2^2) \cdot x_2^4 \cdot (x_1 - 3 x_2)^2.$$

Daher: *Die Differentialgleichung des Ikosaeders weist nach der Substitution nur drei singuläre Stellen auf, nämlich $\frac{x_1}{x_2} = 0$ und die beiden Wurzeln der Gleichung $x_1^2 - 11 x_1 x_2 + 64 x_2^2 = 0$. Die zugehörigen Exponenten sind bez. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$.* Mit anderen Worten: wir haben, wie es von vornherein zu erwarten war, die Elementargleichung des Tetraeders erhalten. Transformirt man x in der Weise durch lineare Substitution, dass 0, ∞, 1 die singulären Werthe werden, so transformirt man gleichzeitig $\frac{t^2}{f}$ in die kanonische Form der Tetraederfunction.

9. *Bestimmung des $R(x)$ aus den quadratischen Gliedern der Partialbruchentwickelung.* Fragen wir, wie weit $R(x)$ durch die

---

*) Dieses heisst nichts anderes, als dass l^3, m^5, n^2 vom sechzigsten Grade sind.

quadratischen Glieder der Partialbruchzerlegung bestimmt ist. Ich will dabei, der Kürze wegen, allein den Fall des Ikosaeders in Betracht ziehen, wo also $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{5}$, $\nu = \frac{1}{2}$. Unter den Wurzeln von $\varphi = 0$ zunächst unterscheide man drei Kategorien, die als a_i, a_i', a_i'' bezeichnet sein sollen. Die ersteren haben eine Multiplicität α_i, welche keine durch 3 theilbare ganze Zahl ist. Die Multiplicität der a_i' sei gleich 3, die der a_i'' gleich $3\alpha_i''$, wo α_i'' eine von Eins verschiedene ganze Zahl. Eine analoge Unterscheidung treffe man bei den Wurzeln von ψ mit Rücksicht auf die Zahl 5, und bei den Wurzeln von $\varphi - \psi$ mit Rücksicht auf die Zahl 2. Dann erfährt man aus den quadratischen Gliedern der Partialbruchzerlegung, da 3, 5, 2 relative Primzahlen sind, unmittelbar den Factor $\Pi\,(x - a_i)^{\alpha_i}$ von φ, den Factor $(x - b_i)^{\beta_i}$ von ψ, den Factor $\Pi\,(x - c_i)^{\gamma_i}$ von $(\varphi - \psi)$, endlich das Factorenaggregat: $\Pi\,(x - a_i'')^{\alpha_i''}\,\Pi\,(x - b_i'')^{\beta_i''}\,\Pi\,(x - c_i'')^{\gamma_i''}\,\Pi\,(x - d_i)^{\delta_i}$. Unbekannt ist es zunächst, welche dieser Factoren, und zunächst auch, wie viele an φ, ψ, $\varphi - \psi$ abzugeben sind, resp. welche allein der Functionaldeterminante angehören. Aber da φ, ψ, $\varphi - \psi$ denselben Grad n haben sollen und die Functionaldeterminante den Grad $2n - 2$, so erweist sich in jedem Falle nur eine endliche Anzahl von Vertheilungsweisen als möglich und vor allen Dingen ist n nur unter einer endlichen Anzahl von Werthen auszusuchen.

Eine weitere Reihe von Relationen zur Bestimmung der in φ, ψ noch unbekannten Coefficienten erhält man dann aus der Identität:

$$(\varphi) - (\psi) = (\varphi - \psi),$$

wie in der folgenden Nummer an einem Beispiel ausgefürt ist.

10. *Beispiele für die die Bestimmung von $R(x)$.* Wenn eine Differentialgleichung der hier in Betracht kommenden Art nur drei singuläre Punkte hat, d. h. eine Elementargleichung ist, so ist sie durch die quadratischen Glieder der Partialbruchzerlegung völlig bestimmt und also muss sich auch $R(x)$ allein aus ihnen gewinnen lassen. Auf p. 323 der citirten Arbeit hat Hr. Schwarz eine Tabelle der in dem dort definirten Sinne einfachsten Elementargleichungen gegeben, welche durchaus algebraische Integrale besitzen und Hr. Brioschi hat für die grössere Zahl dieser Fälle den Werth der Function $R(x)$ abgeleitet (Annalen XI, p. 410). Ich will hier auf Grund der Auseinandersetzung der vorangehenden Nummer das Resultat angeben für die drei von Hrn. Brioschi nicht behandelten Fälle XII, XIV, XV der Schwarz'schen Tabelle. Betrachten wir vor Allem, des Beispiels wegen, den Fall XIV. Es handelt sich um die Elementargleichung, die ich in allgemeiner Form schreibe:

$$[\eta] = \frac{1}{x-a \cdot x-b \cdot x-c} \left\{ \frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{(x-a)^2}(a-b)(a-c) + \frac{\frac{1-\mu^2}{2}}{(x-b)^2}(b-c)(b-a) \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{(x-c)^2}(c-a)(c-b) \right\},$$

für die

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{2}{5}, \quad \nu = \frac{1}{2}.$$

Von vornherein ist klar, dass diese Differentialgleichung (da man weiss, dass sie durchaus algebraische Integrale hat) zum Ikosaedertypus gehört, weil die Nenner 3 und 5 gleichzeitig auftreten. Setzen wir also das Integral in der Form an:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \frac{\varphi}{\psi}.$$

Es muss dann φ neben dem einfachen Factor $(x-a)$ nur noch dreifache Factoren haben, ψ neben dem doppelten Factor $x-b$ nur noch fünffache Factoren, $\varphi-\psi$ neben dem einfachen Factor $x-c$ nur noch doppelte. Die Functionaldeterminante (φ, ψ) darf keine anderen Factoren besitzen, als die bereits in φ, ψ, $\varphi-\psi$ enthaltenen. Hieraus folgt vor Allem, dass φ, ψ vom *siebenten* Grade sind, und man hat folgenden Ansatz: *Unter* ϱ, σ, τ *Functionen vom Grade* 2, 1, 3 *mit nicht verschwindender Discriminante verstanden, soll man haben:*

$$(x-a)\varrho^3 - (x-b)^2\sigma^5 \equiv (x-c)\tau^2.$$

Da $R(x)$ im vorliegenden Falle durchaus bestimmt ist (n. 4.), so folgt: *Das so formulirte algebraische Problem hat eine und nur eine Lösung.* Ich habe zur Vereinfachung der Rechnung genommen $b=-1$, $c=0$ und die lineare Function $\sigma =$ Constans. Sei dann zunächst ϱ, bis auf eine Constante, $=x^2+Ax+B$. Die Function τ ist einfacher Factor der Functionaldeterminante von $(x-a)\varrho^3$ und $(x-b)\sigma^2$; sie ist also gleich zu setzen:

$$\tau = (x-2a-1)(x^2+Ax+B) - 3(x+1)(x-a)(2x+A)$$

und die zu erfüllende Identität lautet:

$$C(x-a)(x^2+Ax+B)^3 + \mu^2(x+1)^2$$
$$= x\left\{(x-2a-1)(x^2+Ax+B) - 3(x+1)(x-a)(2x+A)\right\}^2.$$

Durch die Betrachtung der Werthe $x=\infty$, 0 ergiebt sich:

$$C = 25, \quad \mu^2 = 25aB^3,$$

und die nun noch unbestimmten Coefficienten gewinne ich, indem ich verlange, dass die von (x^2+Ax+B) freien Glieder, zusammengezogen, wieder durch x^2+Ax+B theilbar sein sollen. Dies giebt eine überzählige Anzahl von Gleichungen, welche das eine Lösungssytem:

$$a = -\frac{27\cdot 7}{64}, \quad A = \frac{19\cdot 7}{64}, \quad B = \frac{49}{64}$$

besitzen. Also findet man, wenn man noch alle Glieder der Identität mit 64^4 multiplicirt, um Brüche zu vermeiden:

$$\begin{aligned}
\varphi &= 25(64x+7\cdot 27)(64x^2+7\cdot 19x+49)^3,\\
\psi &= 25\cdot 7^7\cdot 27\cdot (x+1)^2,\\
\varphi-\psi &= x\{2(32x+157)(64x^2+7\cdot 19x+49)\\
&\quad -3(x+1)(64x+7\cdot 27)(128x+7\cdot 19)\}^2.
\end{aligned}$$

Dabei sind als singuläre Werthe genommen:

$$a = -\frac{7\cdot 27}{64}, \quad b = -1, \quad c = 0.$$

Durch ähnlichen Aufsatz ergiebt sich bei XII:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{2}{3}, \quad \nu = \frac{1}{5},\\
\varphi &= x^3(x+5)^2(x+8),\\
\psi &= 64(3x-1),\\
\varphi-\psi &= (x^3+9x^2+12x-8)^2;
\end{aligned}$$

wo genommen ist:

$$a = -8, \quad b = -5, \quad c = \frac{1}{3};$$

und bei XV,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{3}{5}, \quad \nu = \frac{2}{5},\\
\varphi &= (10x-43)(250x^3+25x^2-400x-9\cdot 43)^3,\\
\psi &= 43\cdot 53^2\cdot 64000\cdot x^3(x+1)^2,\\
\varphi-\psi &= \{(40x^2-5\cdot 39x-3\cdot 43)(250x^3+25x^2-400x-9\cdot 43)\\
&\quad -150\cdot x\cdot (x+1)\cdot (10x-43)\cdot (15x^2+x-8)\}^2,
\end{aligned}$$

für

$$a = \frac{43}{10}, \quad b = 0, \quad c = -1.$$

11. *Geometrische Deutung des Satzes der neunten Nummer.* Die 59 verschiedenartigen Drehungen, welche ein Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, zerfallen in 3 Classen: in solche von der Periode 3, von der Periode 5, von der Periode 2 (vergl. die citirte Arbeit von Gordan). Die ersteren geschehen um Axen, welche zwei Ecken des Pentagondodekaeders mit einander verbinden; analog verbinden die Drehaxen, welche bei der 2ten und 3ten Kategorie auftreten, bez. zwei Ecken des Ikosaeders oder des Triakontaeders. — Aus diesen 59 Drehungen, denen man als sechszigste die Identität zufügen mag, kann man unendlich viele machen, wenn man ganze Umdrehungen in beliebiger

Multiplicität zulässt und mitzählt. Diese ganzen Umdrehungen können dann nicht nur um eine beliebige unter den dreierlei eben genannten Axen Statt finden, *sondern auch um irgend eine, zu der Figur des Ikosaeders in keiner nothwendigen Beziehung stehende Axe.* — Interpretiren wir jetzt das η, welches mit x durch die Differentialgleichung verbunden ist, in geeigneter Weise auf der Kugelfläche, lassen dann x einen singulären Punkt umkreisen, so wird die lineare Substitution, welche η dabei erfährt, vorgestellt durch eine Drehung der Kugelfläche, welche das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringt. Sei der Exponent des singulären Punktes mit k bezeichnet, so beträgt die Winkelgrösse der Drehung $2k\pi$. Daher, so lange k einen der Nenner 3, 5, 2 besitzt, geschieht die Drehung nothwendig um eine unter den dreierlei vorab unterschiedenen Axen. Wenn aber k eine ganze Zahl ist (die man > 1 annehmen kann, da $k = 1$ ohne Bedeutung ist), so ist von vornherein über die Richtung der Drehaxe gar Nichts bekannt.

12. *Primformen bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Die Lösungen η der Differentialgleichung:

$$[\eta] = P(x)$$

sind bekanntlich gleich den Quotienten $\frac{y_1}{y_2}$ zweier (beliebiger) Particularlösungen jeder linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \cdot \frac{dy}{dx} + q \cdot y = 0,$$

für welche:

$$2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx} = P(x).$$

Zur Kenntniss der für solche y_1, y_2 im Sinne des Hrn. Fuchs (Borchardt's Journal Bd. 81, p. 97 ff.) geltenden Primformen gelangt man in einfachster Weise, wenn man von der für η bestehenden Integralgleichung ausgeht, sie differentiirt und statt

$$\eta' = \frac{y_1' y_2 - y_2' y_1}{y_2^2}$$

nach einem bekannten Satze einträgt:

$$\eta' = \frac{C \cdot e^{-\int p\,dx}}{y_2^2}.$$

Hat man z. B. die Ikosaedergleichung:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = R(x),$$

so folgt:

$$1728 \frac{H^2(\eta)}{f^6(\eta)} \{3H'f - 5f'H\} \cdot \eta' = R'(x),$$

und da $3H'f - 5f'H$ bis auf einen Zahlenfactor mit T identisch ist:

$$C \cdot \frac{H^2(\eta)\cdot T(\eta)}{f^6(\eta)\cdot R'(x)} \cdot e^{-\int p\,dx} = y_2^2.$$

Hier nun multiplicire man beiderseits mit $\sqrt[6]{f(\eta)}$. So entsteht rechter Hand $\sqrt[6]{f(y_1, y_2)}$ (homogen in y_1, y_2 geschrieben), links:

$$C \cdot \left(\frac{H^3}{f^5}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{T^2}{f^5}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{-\int p\,dx}}{R'} = C\, \frac{R^{\frac{2}{3}}(1-R)^{\frac{1}{2}}}{R'} \cdot e^{-\int p\,dx}.$$

Mithin ist:

$$f(y_1, y_2) = C^6 \cdot \frac{R^4(1-R)^3}{R'^6} \cdot e^{-6\int p\,dx};$$

ist also z. B. $p = 0$, so ist, wie auch Hr. Brioschi angiebt (Annalen XI, p. 406), $f(y_1, y_2)$ rational.

In ähnlicher Weise erhält man für die verschiedenen Fälle:

I
$$y_1 = C e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{n+1}{2n}}}{R'},$$

$$y_2 = C \cdot e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{n-1}{2n}}}{R'},$$

II
$$y_1 y_2 = C e^{-\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{1}{2}}(R-1)^{\frac{1}{2}}}{R'},$$

$$y_1^n + y_2^n = 2C^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{n+2}{4}} \cdot (R-1)^{\frac{n}{4}}}{R'^{\frac{n}{2}}},$$

$$y_1^n - y_2^n = 2C^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{n}{4}}(R-1)^{\frac{n+2}{4}}}{R'^{\frac{n}{2}}}.$$

III
$$y_1^4 - 2\sqrt{-3}\,y_1^2 y_2^2 - y_2^4 = C^2\, e^{-2\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{5}{3}} \cdot (R-1)}{R'^2},$$

$$y_1^4 + 2\sqrt{-3}\,y_1^2 y_2^2 - y_2^4 = C^2\, e^{-2\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{4}{3}} \cdot (R-1)}{R'^2},$$

$$2\sqrt[4]{-27} \cdot y_1 y_2 (y_1^4 - y_2^4) = C^3\, e^{-3\int p\,dx} \cdot \frac{R^2(R-1)^2}{R'^2}.$$

IV
$$\sqrt[4]{108} \cdot y_1 y_2 (y_1^4 - y_2^4) = C^3\, e^{-3\int p\,dx} \cdot \frac{R^2(R-1)^{\frac{3}{2}}}{R'^3},$$

$$y_1^8 + 14 y_1^4 y_2^4 + y_2^8 = C^4 \cdot e^{-4\int p\,dx} \cdot \frac{R^3(R-1)^2}{R'^4},$$

$$y_1^{12} - 33 y_1^8 y_2^4 - 33 y_1^4 y_2^8 + y_2^{12} = C^6 \cdot e^{-6\int p\,dx} \cdot \frac{R^4(R-1)^{\frac{7}{2}}}{R'^6}.$$

$$\text{V} \qquad \sqrt[5]{12^3}\, y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10}) = C^6 \quad e^{-6\int p\,dx} \cdot \frac{R^4 (R-1)^3}{R'^6},$$

$$-(y_1^{20} + y_2^{20}) + 228 (y_2^{15} y_2^5 - y_1^5 y_2^{15}) - 494 y_1^{10} y_2^{10}$$
$$= C^{10} \cdot e^{-10\int p\,dx} \cdot \frac{R^7 (R-1)^5}{R'^{10}},$$

$$(y_1^{30} + y_2^{30}) - 522 (y_1^{25} y_2^5 - y_1^5 y_2^{25}) - 10005 (y_1^{20} y_2^{10} + y_1^{10} y_2^{20})$$
$$= C^{15} \quad e^{-15\int p\,dx} \cdot \frac{R^{10} (R-1)^8}{R'^{15}}.$$

Mit diesen Formeln scheinen die Fragen, welche man hinsichtlich der Existenz und Art der Primformen bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung stellen kann, vollkommen beantwortet*). Ich will hier noch diese Bemerkung zufügen. Wählt man statt $R(x)$ einfach x, so kann man bekanntlich y_1, y_2 ansehen als Particularlösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1) x}{x (1 - x)} \cdot \frac{d y}{d x} - \frac{\alpha \beta}{x (1 - x)} \cdot y = 0,$$

wo $(1-\gamma)^2$, $(\alpha - \beta)^2$, $(\gamma - \alpha - \beta)^2$ in irgend einer Reihenfolge gleich sein müssen den Exponentenquadraten λ^2, μ^2, ν^2. Nimmt man nun insbesondere, in Uebereinstimmung hiermit, in den fünferlei Fällen, α, β, γ bez. gleich:

I	$\frac{1}{n}$,	0,	$\frac{n+1}{n}$,
II	$\frac{1}{2n}$,	$-\frac{1}{2n}$,	$\frac{1}{2}$,
III	$\frac{1}{12}$,	$-\frac{1}{4}$,	$\frac{2}{3}$,
IV	$\frac{1}{24}$,	$-\frac{5}{24}$,	$\frac{2}{3}$,
V	$\frac{11}{60}$,	$-\frac{1}{60}$,	$\frac{2}{3}$,

so werden die Primformen:

$$y_1, \quad y_1 y_2, \quad y_1^4 + 2\sqrt{-3}\, y_1^2 y_2^2 - y_2^4, \quad y_1 y_2 (y_1^4 - y_2^4),$$
$$y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10})$$

einfach *constant* (vergl. auch Hrn. Brioschi's Note. Annalen XI, p. 407).

München, im April 1877.

---

*) Eine andere Seite der Frage ist in dem hier vorangehenden Aufsatze von Gordan erledigt.

Das Correspondenzprincip für Gruppen von n Punkten und von n Strahlen.

Von

H. Schubert in Hamburg.

Das Chasles'sche Correspondenzprincip, angewandt auf einen Ebenenbüschel, ergiebt ohne weiteres, dass die Anzahl ε derjenigen speciellen Punktepaare eines einstufigen Systems von Punktepaaren (c, d, g), bei denen die beiden Punkte c und d auf ihrem Verbindungsstrahle g unendlich nahe liegen, aus den einfachen Grundbedingungen des allgemeinen Punktepaars gewonnen werden kann. Bezeichnen nämlich

c und d auch *wieviel* Punktepaare des Systems ihren Punkt c resp. d auf einer gegebenen Ebene besitzen,

ferner g auch, *wieviel* Punktepaare des Systems ihren Verbindungsstrahl g eine gegebene Gerade schneiden lassen,

so besteht zwischen den 4 Zahlen c, d, g, ε die Gleichung:

$$c + d - g = \varepsilon \text{*)}. \tag{1}$$

Hat man nun statt des aus *zwei* Punkten bestehenden Gebildes ein Gebilde, welches aus n auf einer und derselben Geraden g liegenden Punkten

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots .\ c_n$$

besteht, und erzeugt dieses Gebilde, welches wir *Punktgruppe* nennen wollen, nicht ein *einstufiges*, sondern ein $(k-1)$-*stufiges* System, so wird ein solches System eine endliche Anzahl ε von Punktgruppen besitzen, bei denen gewisse k von den n Punkten, z. B.

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ c_k$$

in einem Punkte b ihres Verbindungsstrahls g coincidiren. Man kann

---

*) Aus dieser Formel entwickelt der Verfasser im IIIten Abschnitt seiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie" (Math. Ann. Bd. X, pag. 1 bis 112) *alle möglichen* Formeln zwischen den Grundbedingungen des *allgemeinen* Punktepaars einerseits und denen seiner *Coincidenz* andererseits, d. h. desjenigen speciellen Punktepaars, welches unendlich nahe Punkte enthält. Ebenso wird dort das Strahlenpaar behandelt. Damit sind dann alle Correspondenzprobleme erledigt, welche auf *nur zwei* Hauptelemente Bezug nehmen. Die eben citirte Abhandlung des Verfassers soll immer kurz „Beitr." genannt werden.

daher das Problem aufstellen, jene Zahl ε durch die $(k-1)$-fachen Grundbedingungen der Punktgruppe in ähnlicher Weise auszudrücken, wie dies die Formel (1) für $n=2$ und $k=2$ thut.

Dieses Problem und einige mit ihm verwandte, sowie die analogen Probleme für die Strahlengruppe sind im Folgenden gelöst.

Die bei der Behandlung der Punktgruppe gewonnenen Resultate sind dann namentlich zu einer *directen* Berechnung der Zahlen*) verwendet, welche sich auf die an einer oder mehreren Stellen zwei- oder mehrpunktig berührenden Tangenten einer Fläche $n$ter Ordnung beziehen. Dabei erscheint die Punktfläche als specieller Fall eines allgemeineren Gebildes, nämlich des vierstufigen Systems von Punktgruppen.

Das *liniengeometrische* Analogon dieser Anwendung führt zu Zahlen für gewisse Singularitäten des Complexes $n$ten Grades. Diese Zahlen, welche zum Theil schon durch die Arbeiten von Plücker, Clebsch, Klein, Voss bekannt sind, zum Theil aber bisher noch nicht bestimmt sind, habe ich in einer besonderen Abhandlung**) abgeleitet.

Bei der Ableitung der Correspondenzformeln für Punktgruppen und für Strahlengruppen werden ausser der Formel (1) und der Strahlenpaar-Formel erster Dimension (Beitr. § 20., I) nur die fundamentalen Formeln angewandt, welche die Grundbedingungen incidenter Hauptelemente***) mit einander verbinden. Diese Formeln sind im IIten Abschnitt der Beitr. (§ 9.) aus dem Princip von der Erhaltung der Anzahl (Beitr. § 7.) entwickelt.

Die Natur des hier behandelten Gegenstandes erforderte wieder die Benutzung der vom Verfasser eingeführten *Symbolik* (Beitr. Abschnitt I). Die Grundregeln dieser Symbolik sind auch in einer Abhandlung über die Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung (Math. Ann. Bd. X, pag. 322) und in einem Referate über die Beitr. (Königsb. Repert. Bd. I, pag. 349) auseinandergesetzt. Man erinnere sich namentlich an Folgendes.

1) Das Symbol einer einem Gebilde Γ auferlegten a-fachen Bedingung bedeutet zugleich auch die endliche *Anzahl* derjenigen Ge-

---

*) Man vergleiche § 27 der Beitr. oder des Verfassers Mittheilung in den Gött. Nachr. Februar 1876 oder Math. Ann. Bd. XI, (pag. 370) Formel (73) bis (77).

**) Sie folgt der vorliegenden unmittelbar.

***) Der Terminologie von Sturm, Hirst und Anderen gemäss heisse *incident:*

1) ein Punkt und ein Strahl, wenn der Punkt im Strahle liegt,

2) eine Ebene und ein Strahl, wenn der Strahl in der Ebene liegt,

3) ein Punkt und eine Ebene, wenn der Punkt in der Ebene liegt,

4) ein Strahl und ein Strahl, wenn beide sich schneiden,

und überhaupt:

5) ein Gebilde Γ und ein System von Gebilden Γ, wenn das Gebilde dem Systeme angehört.

bilde Γ, welche, einem hinzuzudenkenden, a-stufigen Systeme angehörig, diese Bedingung erfüllen.

2) Die aus den einzelnen Bedingungen $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ zusammengesetzte Bedingung wird wie das *Product* $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_n$ bezeichnet.

3) Desshalb darf jedem Gliede einer für *alle* a-stufigen Systeme gültigen Formel zwischen a-fachen Bedingungssymbolen ein und dasselbe, etwa b-fache, Bedingungssymbol als Factor hinzugesetzt werden, oder, wie wir sagen wollen, die Formel darf mit jeder b-fachen Bedingung *multiplicirt* werden. Dadurch wird die Dimension der Formel um b erhöht, die Stufe des hinzuzudenkenden Systems um b erniedrigt.

§ 1.

Coincidenz von k Punkten verschiedener Definition.

Das Gebilde, welches wir zu behandeln haben, besteht aus n Punkten, welche ein und dieselbe Gerade als *Träger* haben. Die Gerade heisse g, und die n auf ihr liegenden Punkte heissen:

$$c_1, c_2, c_3, \cdots c_n.$$

Demgemäss bezeichnen (Beitr. pag. 19 oben):

1) g zugleich die Bedingung, dass die Punktgruppe ihren Träger eine gegebene Gerade schneiden lässt;

2) c_i zugleich die Bedingung, dass die Punktgruppe ihren Punkt c_i auf einer gegebenen Ebene besitzt;

3) g_p, g_e, g_s, G bezüglich die Bedingungen, dass die Punktgruppe ihren Träger durch einen gegebenen Punkt schickt, in eine gegebene Ebene wirft, einem gegebenen Strahlbüschel zusendet, als gegeben besitzt;

4) das *Product* mehrerer dieser Bedingungssymbole, dass die Punktgruppe die von diesen Symbolen dargestellten Bedingungen *zugleich* erfüllt; z. B. $c_i^2 g_e$ bedeutet die vierfache, zusammengesetzte Bedingung, dass der Träger in einer gegebenen Ebene liegen soll, während der Punkt c_i auf zwei gegebenen Ebenen, d. h. auf einer gegebenen Geraden liegen soll.

Aus diesen Definitionen folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} &g^2 = g_p + g_e;\ gg_p = gg_e = \tfrac{1}{2}g^3 = g_s; \\ &g_e^2 = g_p^2 = g^2 g_p = g^2 g_e = \tfrac{1}{2}g^4 = G,\ g_p g_e = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Da ferner g und jeder Punkt c_i *incident* sind, so besteht zwischen den Grundbedingungen von c_i und von g die Gleichung (Beitr. § 9., I):

$$c_i g = c_i^2 + g_e, \tag{3}$$

welche man erhält, wenn man die durch die Bedingung g gegebene

Gerade in die durch die Bedingung c_i gegebene Ebene legt, und das Princip von der Erhaltung der Anzahl beachtet. Aus dieser Formel ergeben sich durch symbolische Multiplication bei Benutzung von 2):

(4) $$c_i^2 g = c_i^3 + c_i g_e,$$

(5) $$c_i g_p = c_i^3 + g_s,$$

(6) $$c_i^2 g_p = c_i g_s = c_i^3 g + G.$$

Wir bezeichnen nun mit ε_i diejenige speciellere Punktgruppe, bei welcher die i Punkte

$$c_1, c_2, c_3, \cdots c_i$$

auf dem Strahle g unendlich nahe liegen, und den *Coincidenzpunkt* jedes ε_i mit b. Unserer Symbolik gemäss bezeichnet dann $\varepsilon_i b^m z_a$, wo z_a eine der Punktgruppe auferlegte a-fache Bedingung bedeutet, die Zahl derjenigen speciellen Punktgruppen eines $(m + a + i - 1)$-stufigen Systems von Punktgruppen, welche die Punkte $c_1, c_2, c_3, \cdots c_i$ in einem und demselben Punkte b vereinigen, welche ferner diesen Coincidenzpunkt b auf $m (m < 4)$ gegebenen Ebenen besitzen, und dabei die Bedingung z_a erfüllen.

Da im Punkte b eines ε_i die i Punkte $c_1, c_2, c_3, \cdots c_i$ vereinigt liegen, so ist selbstverständlich:

(7) $$c_1 \varepsilon_i = c_2 \varepsilon_i = c_3 \varepsilon_i = \cdots = c_i \varepsilon_i = b \varepsilon_i.$$

Nach der in der Einleitung erwähnten, unmittelbar aus dem Chasles'schen Correspondenzprincipe fliessenden Punktepaar-Formel erster Dimension erhält man nun bei einem zu Grunde gelegten, einstufigen Systeme von Punktgruppen für die Zahl solcher Punktgruppen, auf denen die Punkte c_i und c_m coincidiren, die Formel:

$$c_i + c_m - g.$$

Speciell ist:

(8) $$c_1 + c_2 - g = \varepsilon_2.$$

Demnach bedeutet bei einem zu Grunde gelegten zweistufigen Systeme $\varepsilon_2 (c_1 + c_3 - g)$ die Zahl solcher Punktgruppen, bei denen ausser c_1 und c_2 auch c_1 und c_3 coincidiren, d. h. bei denen c_1, c_2, c_3 in einem und demselben Punkte coincidiren. Folglich ist:

(9) $$\varepsilon_2 (c_1 + c_3 - g) = \varepsilon_3.$$

Multipliciren wir also (8) mit $c_1 + c_3 - g$ und beachten Formel (9), so erhalten wir:

$$(c_1 + c_2 - g)(c_1 + c_3 - g) = \varepsilon_3.$$

Mit demselben Rechte ist natürlich auch:

$$(c_2 + c_1 - g)(c_2 + c_3 - g) = \varepsilon_3$$

und

$$(c_3 + c_1 - g)(c_3 + c_2 - g) = \varepsilon_3.$$

Aus allen 3 Formeln erhält man in der That ein und dieselbe, in den

c symmetrische Formel, sobald man nach Ausführung der Multiplication Formel (3) anwendet, nämlich:

(10) $$c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 - g(c_1 + c_2 + c_3) + g_p = \varepsilon_3.$$

Indem man den eben gemachten Schluss hinreichend oft wiederholt, gelangt man zu einem Ausdruck für die Zahl ε_k solcher Punktgruppen eines beliebigen $(k-1)$-stufigen Systems, bei denen die Punkte $c_1, c_2, \cdots c_k$ coincidiren, nämlich zu:

(11) $$(c_1 + c_2 - g)(c_1 + c_3 - g)(c_1 + c_4 - g) \cdots \cdot (c_1 + c_k - g) = \varepsilon_k.$$

Um hieraus eine in den c symmetrische Formel zu erhalten, führen wir die Multiplication der $k-1$ Factoren aus, und ordnen nach steigenden Potenzen von $c_1 - g$. Dann erhalten wir:

(12) $$\varepsilon_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}(c_1 - g) + \alpha_{k-3}(c_1 - g)^2 + \cdots \alpha_0 (c_1 - g)^{k-1},$$

wo zur Abkürzung:

$$\alpha_0 = 1, \; \alpha_1 = c_2 + c_3 + c_4 + \cdots \cdot c_k,$$

und überhaupt α_i

gleich der Summe der sämmtlichen $(k-1)_i$ Producte von je i verschiedenen der $k-1$ Symbole $c_2, c_3, c_4, \cdots c_i$ gesetzt ist. Wir beachten nun, dass wegen der Formeln (3), (4), (5), (6)

$$\begin{aligned} (c_1 - g)^2 &= -c_1 g + g_p, \\ (c_1 - g)^3 &= c_1 g_p, \\ (c_1 - g)^m &= 0 \text{ für } m > 3 \end{aligned}$$

gesetzt werden darf. Dadurch wird aus (12):

(13) $$\varepsilon_k = (\alpha_{k-1} + c_1 \alpha_{k-2}) - g(\alpha_{k-2} + c_1 \alpha_{k-3}) + g_p(\alpha_{k-3} + c_1 \alpha_{k-4}).$$

Jetzt sind aber die drei in Klammern eingeschlossenen Functionen in den c symmetrisch, da immer

$$\alpha_i + c_1 \alpha_{i-1}$$

gleich der Summe der sämmtlichen k_i Producte von je i verschiedenen der k Symbole $c_1, c_2, c_3 \ldots . c_k$ ist. *Setzen wir daher für diese Summe* β_i, so wird aus Formel (13) die *gesuchte Hauptformel:*

(14) $$\varepsilon_k = \beta_{k-1} - g\beta_{k-2} + g_p \beta_{k-3}.$$

Der Deutlichkeit halber specialisiren wir dieses Resultat, indem wir $k = 4$ setzen. Dann kommt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 = {} & c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 c_4 + c_1 c_3 c_4 + c_2 c_3 c_4 \\ & - g c_1 c_2 - g c_1 c_3 - g c_1 c_4 - g c_2 c_3 - g c_2 c_4 - g c_3 c_4 \\ & + g_p c_1 + g_p c_2 + g_p c_3 + g_p c_4. \end{aligned}$$

Durch Multiplication der Hauptformel (14) mit den Grundbedingungen g, g_p, g_e, g_s, G des Trägers g erhält man:

(15) $$g\beta_{k-1} - (g_e + g_p)\beta_{k-2} + g_s \beta_{k-3} = g\varepsilon_k,$$

(16) $$g_p \beta_{k-1} - g_s \beta_{k-2} + G\beta_{k-3} = g_p \varepsilon_k,$$

(17) $\qquad g_e\beta_{k-1} - g_s\beta_{k-2} \qquad = g_e\varepsilon_k,$

(18) $\qquad g_s\beta_{k-1} - G\beta_{k-2} \qquad = g_s\varepsilon_k,$

und endlich:

(19) $\qquad G\beta_{k-1} = G\varepsilon_k.$*)

Um eine Formel für $b\varepsilon_k$ zu erhalten, haben wir die Formel (14) mit irgend einer der k Bedingungen $c_1, c_2, \cdots c_k$ zu multipliciren. Es ergiebt sich nach Benutzung von (3), (4), (5), (6) bei allen k Multiplicationen ein und dieselbe *symmetrische* Formel, nämlich:

(20) $\qquad \beta_k - g_e\beta_{k-2} + g_s\beta_{k-3} = b\varepsilon_k,$

wo β_k natürlich das Product

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \cdots \cdot c_k$$

bedeutet. Die Specialisirung von (20) für $k = 4$ giebt:

$$c_1c_2c_3c_4 - g_ec_1c_2 - g_ec_1c_3 - g_ec_1c_4 - g_ec_2c_3 - g_ec_2c_4 - g_ec_3c_4$$
$$+ g_sc_1 + g_sc_2 + g_sc_3 + g_sc_1 = b\varepsilon_1.$$

Um $b^2\varepsilon_k$ zu berechnen, verfahren wir am kürzesten, wenn wir beachten, dass nach (3)

$$b^2\varepsilon_k = bg\varepsilon_k - g_e\varepsilon_k$$

ist. Wir haben also die Gleichung (17) von der mit g multiplicirten Gleichung (20) zu subtrahiren, und erhalten:

(21) $\qquad g\beta_k - g_e\beta_{k-1} + G\beta_{k-3} = b^2\varepsilon_k.$

Aehnlich verfahren wir, um $b^3\varepsilon_k$ zu bestimmen. Wir beachten, dass nach Formel (5)

$$b^3\varepsilon_k = bg_p\varepsilon_k - g_s\varepsilon_k,$$

und erhalten aus (18) und (20):

(22) $\qquad g_p\beta_k - g_s\beta_{k-1} + G\beta_{k-2} = b^3\varepsilon_k.$

Beispielsweise ergiebt (22) für $k = 3$ das Resultat, dass die Zahl $b^3\varepsilon_3$ derjenigen Punktgruppen eines fünfstufigen Systems, auf denen die Punkte, c_1, c_2, c_3 in einem *gegebenen* Punkte coincidiren, sich bestimmt durch:

$$b^3\varepsilon_3 = g_pc_1c_2c_3 - g_sc_1c_2 - g_sc_1c_3 - g_sc_2c_3 + Gc_1 + Gc_2 + Gc_3.$$

Hinsichtlich der *Deutung* der Coincidenzsymbole ist dasselbe zu bemerken, was in § 17. der Beitr. über die Eintheilung der Coincidenzen in *Gattungen* ausgesprochen ist. Danach wird z. B. das Symbol $\varepsilon_k g_p$ durch eine Punktgruppe erfüllt, wenn sie ihre k Punkte $c_1, c_2, c_3, \cdots c_k$ im Punkte b dergestalt vereinigt hält, dass *jede* durch b gelegte Gerade als Träger der Punktgruppe gelten darf.

Die oben gewonnenen Correspondenzformeln können noch auf

---

*) Die Formel (19) lässt den Träger g *gegeben* sein. Für diesen speciellen Fall des festliegenden Trägers hat schon Herr Saltel das Correspondenzprincip für Punktgruppen ausgesprochen (Nouv. Ann. (2), XII 565—570 und Mém. de Belg. 1875).

mannigfache Weise umgestaltet werden, namentlich dadurch, dass die auf den Träger bezüglichen Bedingungen, also g, g_p, g_e, g_s, G möglichst aus den Formeln entfernt, und durch die $2k$ Bedingungen c_i^2 und c_i^3 ersetzt werden, welche aussagen, dass die Punkte der Gruppe auf einer gegebenen Geraden liegen sollen resp. gegeben sein sollen. Beispielsweise formen wir so die Formel (16) für $k = 3$ um. Sie giebt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 g_p &= g_p (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3) - g_s (c_1 + c_2 + c_3) + G \\ &= \tfrac{1}{2} g_p [c_1 (c_2 + c_3) + c_2 (c_3 + c_1) + c_3 (c_1 + c_2)] \\ &\quad - \tfrac{1}{2} g_s [(c_2 + c_3) + (c_3 + c_1) + (c_1 + c_2)] + G\end{aligned}$$

für jedes $c_i g_p - g_s$ setzen wir nach (5) c_i^3 und erhalten:

$$(23) \quad \varepsilon_3 g_p = \tfrac{1}{2} (c_1^3 c_2 + c_1^3 c_3 + c_2^3 c_3 + c_2^3 c_1 + c_3^3 c_1 + c_3^3 c_2) + G.$$

Aus dieser Formel fliesst unmittelbar die Zahl

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$$

der *gemeinsamen Punkte dreier Flächen* F_1, F_2, F_3 von den Ordnungen f_1, f_2, f_3. Man fasse nämlich auf jeder der ∞^4 Geraden des Raums jeden der f_1 Schnittpunkte auf der Fläche F_1 mit jedem der f_2 Schnittpunkte auf F_2 und mit jedem der f_3 Schnittpunkte auf F_3 zu einem Punkttripel zusammen, und wende auf das erhaltene vierstufige System von Punkttripeln die Formel (23) an. Dann ist

$$G = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$$

zu setzen, weil auf einer gegebenen Geraden $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ Punkttripel liegen, und jedes der 6 Symbole von der Form $c_i^3 c_m$ gleich null zu setzen, da eine gegebene Fläche nicht einen *gegebenen* Punkt enthalten kann. Ferner wird das Coincidenzsymbol $\varepsilon_3 g_p$ durch jeden *Schnittpunkt* der drei Flächen erfüllt, weil die Verbindungslinie eines Schnittpunkts mit dem durch die Bedingung g_p beliebig gegebenen Punkte Träger eines Punkttripels mit coincidirenden Punkten ist. Damit ist der bekannte Bezout'sche Satz*) bewiesen. Man beachte dabei, dass dieser Satz specieller ist, als die Formel (23). Eine Fläche F von der Ordnung f ist nämlich ein vierstufiges System von Punktgruppen mit f Punkten, welches die besondere Specialität besitzt, dass seine ∞^4 Punkte ∞^2 Punkte werden, deren jeder ∞^2 mal zu rechnen ist. Diese Specialität ist der Grund, warum von den 7 Symbolen der rechten Seite der Formel (23) hier alle bis auf G verschwinden, und warum also die Zahl der gemeinsamen Punkte dreier Flächen gleich der Zahl ist, welche angiebt, wie oft man auf einer Geraden drei den drei Flächen angehörige Punkte combiniren kann.

*) Inzwischen hat der Verfasser die Sätze aufgestellt, welche den Bezout'schen Satz vertreten, wenn man statt des Punktes den Strahlbüschel und andere aus Punkten, Ebenen und Strahlen bestehende Gebilde als Raumelemente auffasst.

§ 2.

Coincidenz von k Punkten gleicher Definition an einer und an mehr Stellen.

Indem wir bei der Ableitung der Formeln (14) bis (23) die k Punkte, welche coincidiren sollten, mit *verschiedenen* Symbolen behafteten, berücksichtigten wir, dass diese k Punkte möglicher Weise *verschiedenen* Definitionen entspringen konnten. In diesem Paragraphen wollen wir jedoch die n Punkte der Gruppe als *gleichwerthig* voraussetzen, und irgend welche k von den n Punkten coincidiren lassen. Ferner wollen wir auch die Fälle betrachten, wo *nicht an einer Stelle*, sondern *an m Stellen* des Trägers Coincidenzen stattfinden, und zwar so, dass von den n Punkten an der ersten Stelle i_1, an der zweiten Stelle $i_2, \cdots$, an der m^{ten} Stelle i_m Punkte coincidiren.

Wir bestimmen zunächst in einem $(k-1)$-stufigen Systeme von Punktgruppen die Zahl ε_k derjenigen Punktgruppen, welche von ihren n Punkten k in einem und demselben Punkte b vereinigen.

Um die gesuchte Zahl ε_k zu finden, wenden wir die Hauptformel (14) an. Das erste Symbol ihrer rechten Seite, β_{k-1}, enthält k Summanden, welche in unserem Falle einander *gleich* werden, und von denen jeder die Bedingung giebt, *dass von den n Punkten $k-1$ verschiedene auf $k-1$ gegebenen Ebenen liegen*. Dieser Bedingung geben wir das Symbol γ_{k-1}. Der k^{te} Punkt kann nun jeder von den $n-k+1$ übrigen Punkten sein. Daher wird aus β_{k-1} in unserem Falle

$$k \cdot (n-k+1) \cdot \gamma_{k-1}.$$

Analoges gilt von den übrigen Symbolen β. Bezeichnet nämlich überhaupt γ_i *die Bedingung, dass von den n Punkten i verschiedene auf i gegebenen Ebenen liegen*, so wird immer:

$$(24)\quad \beta_i = k_i \cdot (n-i)(n-i-1)(n-i-2) \cdots (n-k+1) \cdot \gamma_i,$$

weil nach Aussonderung von i Punkten durch γ_i als $(i+1)$-ter jeder der $(n-i)$ sonstigen Punkte, als $(i+2)$-ter jeder der $n-i-1$ dann noch übrig gelassenen Punkte, u. s. w. gelten kann. Folglich bestimmt sich die gesuchte Zahl ε_k durch die Formel:

$$(25)\quad \begin{aligned}\varepsilon_k = k_1 \cdot (n-k+1) \cdot \gamma_{k-1} - k_2 \cdot (n-k+2)(n-k+1) \cdot \gamma_{k-2} g \\ + k_3 \cdot (n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) \cdot \gamma_{k-3} g_p.\end{aligned}$$

Speciell ist für $k=4$:

$$\varepsilon_4 = 4\,(n-3)\,\gamma_3 - 6\,(n-2)(n-3)\,\gamma_2 g + 4\,(n-1)(n-2)(n-3)\,\gamma_1 g_p.$$

Ebenso ergeben sich die Formeln für $g\varepsilon_k$, $g_p\varepsilon_k$, $g_e\varepsilon_k$, $g_s\varepsilon_k$, $G\varepsilon_k$, $b\varepsilon_k$, $b^2\varepsilon_k$, $b^3\varepsilon_k$ aus den Formeln (15) bis (22).

Es wird hinreichen, beispielsweise die Formel für $b\,\varepsilon_k$ hier anzuführen:

$$(26)\quad \begin{aligned} b\,\varepsilon_k = \gamma_k - k_2 \cdot (n-k+2)(n-k+1)\,\gamma_{k-2}g_e \\ + k_3 \cdot (n-k+3)(n-k+2)(n-k+1)\,\gamma_{k-3}g_s. \end{aligned}$$

Wir gehen zu den Fällen über, wo an *mehr als einer* Stelle des Trägers der Punktgruppe Coincidenzen stattfinden sollen.

Der Einfachheit wegen nehmen wir zunächst an, dass die Punkte der Gruppe verschiedene Symbole haben, und dass c_1, c_2, c_3 an einer Stelle, c_4 und c_5 an einer andern Stelle des Trägers coincidiren sollen. Dann hat man, ähnlich wie bei (9), für die Zahl der Punktgruppen, bei denen ausser c_1, c_2, c_3 auch noch c_4 und c_5 coincidiren sollen, die Formel:

$$\varepsilon_3 c_4 + \varepsilon_3 c_5 - \varepsilon_3 g.$$

Nun ist aber:

$$\varepsilon_3 = c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 - gc_1 - gc_2 - gc_3 + g_p.$$

Folglich ist die gesuchte Zahl gleich dem symbolischen Producte:

$$(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 - gc_1 - gc_2 - gc_3 + g_p)(c_4 + c_5 - g)$$

oder gleich:

$$\begin{aligned} &c_1c_2c_4 + c_1c_3c_4 + c_2c_3c_4 + c_1c_2c_5 + c_1c_3c_5 + c_2c_3c_5 \\ &- g(c_1c_2 + c_1c_3 + c_1c_4 + c_1c_5 + c_2c_3 + c_2c_4 + c_2c_5 + c_3c_4 + c_3c_5) \\ &+ g_p(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) + g_e(c_1 + c_2 + c_3) - g_s. \end{aligned}$$

Also allgemein:

Um eine Formel für die Zahl $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m}$ derjenigen Punktgruppen eines $(i_1 + i_2 + i_3 + \cdots i_m - m)$-stufigen Systems zu finden, bei denen sowohl gewisse i_1 Punkte, wie auch gewisse andere i_2 Punkte, $\cdots$, wie auch gewisse i_m Punkte coincidiren, stelle man nach Formel (14) *die Ausdrücke für die m einzelnen Coincidenzen auf, und multiplicire die so erhaltenen m Ausdrücke mit einander.*

Sind die n Punkte der Gruppe von *gleicher* Definition, so hat man Formel (25) anzuwenden, und die Coefficienten von γ richtig zu bestimmen. Ist z. B. die Zahl ε_{kl} derjenigen Punktgruppen eines $(k+l-2)$-stufigen Systems zu bestimmen, bei denen von den n Punkten der Gruppe k Punkte an irgend einer Stelle coincidiren, während zugleich l Punkte an einer andern Stelle coincidiren, so hat man zu beachten, dass als Factor von γ_{k+l-2} jetzt

$$(n-k-l+2) \cdot (n-k-l+1)$$

erscheint, weil als $(k+l-1)^{\text{ter}}$ Punkt jeder der $n-k-l+2$ übrigen Punkte, und als $(k+l)^{\text{ter}}$ Punkt jeder der dann noch vorhandenen $n-k-l+1$ Punkte erscheint. Analoges gilt für die Factoren von γ_{k+l-3}, γ_{k+l-4}, γ_{k+l-5}, γ_{k+l-6}. So resultirt schliesslich folgende Formel für ε_{kl}:

$$(27)\quad \varepsilon_{kl} = (n-k-l+1)(n-k-l+2)\cdot[k_1\cdot l_1\cdot\gamma_{k+l-2}$$
$$-(k_2\cdot l_1+k_1\cdot l_2)(n-k-l+3)\gamma_{k+l-3}\,g$$
$$+(k_3\cdot l_1+k_2\cdot l_2+k_1\cdot l_3)(n-k-l+3)(n-k-l+4)\gamma_{k+l-4}\,g_p$$
$$+k_2\cdot l_2\cdot(n-k-l+3)(n-k-l+4)\gamma_{k+l-4}\,g_e$$
$$-(k_3\cdot l_2+k_2\cdot l_3)(n-k-l+3)(n-k-l+4)\cdot(n-k-l+5)\gamma_{k+l-5}\,g_s$$
$$+k_3\cdot l_3(n-k-l+3)(n-k-l+4)(n-k-l+5)(n-k-l+6)\gamma_{k+l-6}\,G].$$

Hieraus wird ersichtlich sein, wie sich die Formeln für Punktgruppen mit mehr als 2 Coincidenzstellen gestalten.

Mit Rücksicht auf die in § 4. folgende Anwendung zur *directen* Berechnung gewisser Singularitäten-Zahlen der Fläche n^{ter} Ordnung, geben wir hier alle Formeln an, welche für ein *vierstufiges* System von Punktgruppen die Zahl derjenigen *singulären* Punktgruppen bestimmen, bei denen an einer oder mehr Stellen zwei oder mehr Punkte coincidiren.

$$(28)\quad \varepsilon_5 = (n-4)[5_1\cdot\gamma_4-5_2(n-3)\gamma_3 g+5_3\cdot(n-3)(n-2)\gamma_2 g_p],$$

$$(29)\quad \varepsilon_{12}=(n-5)(n-4)[4_1\cdot 2_1\cdot\gamma_4-(4_2\cdot 2_1+4_1\cdot 2_2)(n-3)\gamma_3 g$$
$$+(4_3\cdot 2_1+4_2\cdot 2_2)(n-3)(n-2)\gamma_2 g_p+4_2\cdot 2_2(n-3)(n-2)\gamma_2 g_e$$
$$-4_3\cdot 2_2(n-3)(n-2)(n-1)\gamma_1\cdot g_s],$$

$$(30)\quad 2!\,\varepsilon_{33}=(n-5)(n-4)[3_1\cdot 3_1\cdot\gamma_4-(3_2\cdot 3_1+3_1\cdot 3_2)(n-3)\gamma_3 g$$
$$+(3_3\cdot 3_1+3_2\cdot 3_2+3_1\cdot 3_3)(n-3)(n-2)\gamma_2 g_p+3_2\cdot 3_2(n-3)(n-2)\gamma_2 g_e$$
$$-(3_3\cdot 3_2+3_2\cdot 3_3)(n-3)(n-2)(n-1)\gamma_1 g_s$$
$$+3_3\cdot 3_3\cdot(n-3)(n-2)(n-1)\cdot n\cdot G],$$

$$(31)\quad 2!\,\varepsilon_{322}=(n-6)(n-5)(n-4)\cdot[3_1\cdot 2_1\cdot 2_1\gamma_4-(3_2\cdot 2_1\cdot 2_1+3_1\cdot 2_2\cdot 2_1$$
$$+3_1\cdot 2_1\cdot 2_2)(n-3)\gamma_3 g$$
$$+(3_3\cdot 2_1\cdot 2_1+3_2\cdot 2_1\cdot 2_2+3_2\cdot 2_2\cdot 2_1+3_1\cdot 2_2\cdot 2_2)(n-3)(n-2)\gamma_2 g_p$$
$$+(3_2\cdot 2_1\cdot 2_2+3_2\cdot 2_2\cdot 2_1+3_1\cdot 2_2\cdot 2_2)(n-3)(n-2)\gamma_2 g_e$$
$$-(3_3\cdot 2_2\cdot 2_1+3_3\cdot 2_1\cdot 2_2+2\cdot 3_2\cdot 2_2\cdot 2_2)(n-3)(n-2)(n-1)\gamma_1 g_s$$
$$+3_3\cdot 2_2\cdot 2_2\cdot(n-3)(n-2)(n-1)\cdot nG].$$

Bei der Formel für ε_{2222}, welche aus der Multiplication von *vier* Correspondenzformeln hervorgeht, fassen wir die Summen der Producte der Binomialcoefficienten in geeigneter Weise zusammen, und erhalten:

$$(32)\quad 4!\,\varepsilon_{2222}=(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)[2^4\cdot\gamma_4-4_1\cdot 2^3(n-3)\gamma_3 g$$
$$+4_2\cdot 2^2(n-3)(n-2)\gamma_2(g_p+g_e)$$
$$-4_3\cdot 2^1(n-3)(n-2)(n-1)\gamma_1\cdot(2g_s)$$
$$+4_4\cdot 2^0(n-3)(n-2)(n-1)\cdot n\cdot(2G)].$$

Der Factor 4! vor ε_{2222} in (32) erklärt sich dadurch, dass *jede* der *vier* Coincidenzstellen zwei Punkte der Punktgruppe vereinigt. Analoges gilt von dem Factor 2! bei (30) und (31).

Die Formeln (28) bis (32) liefern die Zahlen für die singulären

Punktgruppen eines vierstufigen Systems als Functionen von *nur sechs* auf die allgemeine Punktgruppe bezüglichen Zahlen, nämlich von:

$$\gamma_4, \gamma_3 g, \gamma_2 g_p, \gamma_2 g_e, \gamma_1 g_s, G,$$

welche wir als die *Stammzahlen* des vierstufigen Systems bezeichnen wollen.

Analog der eben gegebenen Ableitung für *vierstufige* Systeme ist die Ableitung der Coincidenzzahlen für Systeme von niederer und von höherer Stufe, sowie die Ableitung der Zahlen für singuläre Punktgruppen, die noch Grundbedingungen des Trägers oder der Coincidenzstelle erfüllen. Immer erhält man die gesuchten Zahlen schliesslich als Functionen von nur 6 *Stammzahlen.* Diese sind bei einem $i$stufigen Systeme:

$$\gamma_i, \gamma_{i-1} g, \gamma_{i-2} g_p, \gamma_{i-2} g_e, \gamma_{i-3} g_s, g_{i-4} G.$$

Es liegt nahe, die Probleme, welche oben für Gruppen von *n in gerader Linie* befindlichen Punkten gelöst sind, auf Gruppen von Punkten zu übertragen, welche *beliebige Lage* zu einander in einer Ebene oder im Raume haben. Setzen wir ein System von Gruppen voraus, deren jede n in beliebiger Lage befindliche Punkte c enthält, und betrachten wir solche Punktgruppen des Systems, bei denen von den n Punkten *k coincidiren.* Dann bemerken wir, dass eine solche Coincidenz jetzt in *mannigfacher Weise* stattfinden kann, je nachdem nämlich auch *Verbindungsgeraden* zweier Punkte oder *Verbindungsebenen* dreier Punkte coincidiren sollen oder nicht. Z. B. sind Coincidenzen denkbar, bei denen die $\frac{k(k-1)}{2}$ Verbindungsgeraden der k coincidirenden Punkte *möglichst* freie Lage zu einander haben, und auch solche, bei denen *eine einzige Gerade* als Verbindungsgerade je zweier der k coincidirenden Punkte aufzufassen ist. Damit ein System Punktgruppen der letzterwähnten Art enthalte, ist nöthig, dass die Stufe des Systems $< 3k - 5$ sei. Es lässt sich aber dann ε allein durch Grundbedingungen der allgemeinen Punktgruppe *nicht* ausdrücken. Dasselbe gilt von den singulären Punktgruppen mit andersgearteten Coincidenzen. Betrachten wir, der Einfachheit wegen, ein einstufiges System von Dreiecken, d. h. von Punktgruppen mit je 3 Punkten c. c bezeichne zugleich, dass eine Ecke des Dreiecks auf einer gegebenen Ebene liege, g, dass eine Seite eine gegebene Gerade schneide, μ, dass die Ebene des Dreiecks durch einen gegebenen Punkt gehe. Dann drückt nach der Punktepaar-Formel erster Dimension

$$4c - 2g$$

die Zahl aller hinlänglich oft gerechneten Punktgruppen aus, bei denen zwei der drei Ecken des Dreiecks coincidiren. Von derartigen singulären Punktgruppen giebt es aber schon *zwei verschiedene* Arten, nämlich:

1) solche, bei denen zwei Ecken coincidiren, die dritte Ecke von der Coincidenzstelle verschieden ist, und zwar so, dass sie *nicht* auf der Verbindungsgeraden der coincidirenden Ecken liegt;
2) solche, bei denen alle drei Ecken coincidiren, die drei Seiten aber drei *verschiedene*, von der Coincidenzstelle ausgehende Strahlen sind.

Die erstgenannte Ausartung des Dreiecks entspricht sich selbst dualistisch, der zweitgenannten entspricht dualistisch eine dritte Ausartung des Dreiecks.

Geht man nun weiter zu zwei- und dreistufigen Systemen, so sieht man, dass es nie gelingt, durch die aus c, g, μ zusammengesetzten Bedingungen eine Zahl auszudrücken, welche sich auf nur *eine* Sorte von Ausartungen bezieht.

Analog ist es bei ebenen und räumlichen n Ecken.

§ 3.

Anwendungen der Formeln für Punktgruppen.

Durch die Formeln (28) bis (32) habe ich die Anzahlen gewisser singulärer Punktgruppen eines *allgemeinen* vierstufigen Systems von Punktgruppen als Functionen der 6 *Stammzahlen*

$$\gamma_4,\ \gamma_3 g,\ \gamma_2 g_e,\ \gamma_2 g_p,\ \gamma_1 g_s,\ G$$

dieses Systems dargestellt. Damit sind gewissermassen Singularitäten eines Gebildes behandelt, von welchem die allgemeine Punktfläche F_n ein sehr *specieller* Fall ist. Eine solche erzeugt nämlich durch ihre n Schnittpunkte auf jeder der ∞^4 Geraden des Raumes eine Punktgruppe von n Punkten, und das so gebildete vierstufige System von Punktgruppen hat die schon oben erwähnte *besondere Eigenschaft*, dass seine ∞^4 Punkte nur ∞^2 Punkte sind, von denen jeder ∞^2 mal einer Punktgruppe angehört. Bei dem Interesse, welches die Algebraiker der allgemeinen Punktfläche zuwenden, wird es wünschenswerth erscheinen, die Formeln (28) bis (32) für dieses speciellere System zu particularisiren. Man erhält dann die vom Verfasser in den Beitr. § 27 und in den Gött. Nachr. (Februar 1876) berechneten Zahlen für die von Salmon in seiner Raumgeometrie (Salmon-Fiedler, II. Th. II. Aufl. Artikel 462) mit den Zeichen

$$\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta$$

eingeführten 5 Singularitäten der F_n.

Wir haben daher die 6 Stammzahlen für das speciellere System zu berechnen, und die erhaltenen Werthe in die Formeln (28) bis (32) einzusetzen. Ist die Fläche F_n, wie wir hier voraussetzen, *punkt-allgemein*, so sind die 6 Stammzahlen Functionen von n allein, und leicht mit Hilfe einer allgemeinen *Stammformel* durch n auszudrücken. Bezeichnet für ein einstufiges System, welches dem durch die F_n erzeugten vierstufigen Systeme von Punktgruppen angehört,

c die Bedingung, dass einer der n Punkte einer Gruppe auf einer gegebenen Ebene liegt,

g, wie immer, die Bedingung, dass der Träger eine gegebene Gerade schneidet,

so ist immer:

(33) $$n \cdot g = c,$$

weil die Regelfläche der Träger der ∞^1 Punktgruppen die F_n in einer Curve von der Ordnung $n \cdot g$ schneidet. Wir bezeichnen nun mit

$$c^{i, k, l, m,}$$

die Bedingung, dass von den n Punkten der Punktgruppe einer auf i gegebenen Ebene, ein zweiter auf k, ein dritter auf l, ein vierter auf m gegebenen Ebenen liegt. Dann ist selbstverständlich:

(34) $$c\, c^{i,k,l,} = c^{i+1,k,l,} + c^{i,k+1,l,} + c^{i,k,l+1,} + c^{i,k,l,1,}\text{*)}$$

Ferner folgt aus der Definition der F_n als eines zweistufigen Punktsystems, das auf jeder Geraden n Punkte besitzt:

(35) $$G = 1; \quad c^{2,}g_e = 0; \quad c^{2,}g_p = n;$$
$$c^{3,}g = 0; \quad c^{4,} = 0; \quad c^{2,2,} = n^2.$$

Desshalb ergiebt sich bei Benutzung der Stammformel (33) nach und nach:

(36) $$c^{1,}g_s = n \cdot g g_s = nG = n;$$

(37) $$c^{1,1,}g_e = n \cdot c^{1,}g_s - c^{2,}g_e = n^2 - 0 = n^2;$$

(38) $$c^{1,1,}g_p = n \cdot c^{1,}g_s - c^{2,}g_p = n^2 - n;\text{**)}$$
$$c^{2,1,}g = n \cdot c^{2,}(g_e + g_p) - c^{3,}g = n^2 - 0 = n^2;$$
$$c^{3,1,} = n \cdot c^{3,}g - c^{4,} = 0;$$

(39) $$c^{1,1,1,}g = n \cdot c^{1,1,}g^2 - 2 \cdot c^{2,1,}g = 2n^3 - n^2 - 2n^2 = 2n^3 - 3n^2\text{**)};$$
$$c^{2,1,1,} = n \cdot c^{2,1,}g - c^{3,1,} - c^{2,2,} = n^3 - n^2;$$

(40) $$c^{1,1,1,1,} = n \cdot c^{1,1,1,}g - 3 \cdot c^{2,1,1,} = 2n^4 - 3n^3 - 3(n^3 - n^2)$$
$$= 2n^4 - 6n^3 + 3n^2.\text{**)}$$

Die in den Formeln (36), (37), (38), (39), (40) berechneten Zahlen G, $c^{1,}g_s$, $c^{1,1,}g_p$, $c^{1,1,}g_e$, $c^{1,1,1,}g$, $c^{1,1,1,1,}$ sind bezüglich die gesuchten 6 Stammzahlen G, $\gamma_1 g_s$, $\gamma_2 g_p$, $\gamma_2 g_e$, $\gamma_3 g$, γ_4. Man erhält daher:

---

*) Man vergleiche das analoge Verfahren in § 11. meiner Beitr., pag. 38.

**) Diese Formeln habe ich auch in meinen „Tangentensingularitäten der F_n“ (Math. Ann. Bd. XI, pag. 323) angeführt, und zwar in den Nr. 5, 6, 7.

$$\begin{aligned}
\gamma_4 &= 2n^4 - 6n^3 + 3n^2,\\
(n-3)\,\gamma_3 g &= 2n^4 - 9n^3 + 9n^2,\\
(n-2)(n-3)\,\gamma_2 g_p &= n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n,\\
(n-2)(n-3)\,\gamma_2 g_e &= n^4 - 5n^3 + 6n^2,\\
(n-1)(n-2)(n-3)\,\gamma_1 g_s &= n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n,\\
n(n-1)(n-2)(n-3)\,G &= n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Formeln (28) bis (32) erhält man die schon früher von mir abgeleiteten Salmon'schen Singularitäten-Zahlen *direct*, nämlich:

Eine Fläche n^{ter} Ordnung besitzt:

(41) $$5n(n-4)(7n-12)$$

fünfpunktig berührende Tangenten,

(42) $$2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5)$$

vier-zweipunktig berührende Tangenten,

(43) $$\tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n^3+3n^2+29n-60)$$

drei-dreipunktig berührende Tangenten,

(44) $$\tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+9n^2+20n-60)$$

drei-zwei-zweipunktig berührende Tangenten,

(45) $$\tfrac{1}{12}n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3+6n^2+7n-30)$$

an vier Stellen zweipunktig berührende Tangenten.*)

In ähnlicher Weise ergeben sich direct aus den 6 Stammzahlen, und damit aus der Definition der F_n, die schon länger bekannten Zahlen für die in mehrstufiger Mannigfaltigkeit auf der F_n vorhandenen Singularitäten, z. B. die Ordnung der Curve der Berührungspunkte der dreifachen Tangenten.

Es liegt nahe, die eben gelösten Probleme dahin auszudehnen, dass man statt der F_n ein $a$stufiges *System* von Flächen n^{ter} Ordnung behandelt, indem man dieses als ein specielles $(4+a)$stufiges System von Punktgruppen auffasst. Die 6 Stammzahlen desselben:

$$\gamma_{4+a},\ \gamma_{3+a}g,\ \gamma_{2+a}g_p,\ \gamma_{2+a}g_e,\ \gamma_{1+a}g_s,\ \gamma_a G$$

hängen dann von gewissen Charakteristiken des Flächensystems ab. Unsere Formeln liefern dann z. B. die Zahl der Flächen mit $(5+a)$-punktig berührenden Tangenten, die Zahl der Flächen mit $(4+a)$-fachen Tangenten, die Ordnung der Curve der Berührungspunkte aller möglichen $(3+a)$-fachen Tangenten, etc. Diese Zahlen werden Reductionen erfahren, sobald das vorausgesetzte a stufige Flächen-

*) In der Liniengeometrie entsprechen diesen Zahlen gewisse auf den Complex n^{ten} Grades bezügliche, welche in der folgenden Abhandlung (pag. 202) abgeleitet sind.

system gewisse Ausartungen enthält, gerade so wie die oben in (41) bis (45) mitgetheilten Zahlen Reductionen erleiden, sobald die F_n eine Doppelcurve, Rückkehrcurve etc. besitzt. Abgesehen von der durch die Berücksichtigung der Ausartungen etwa entstehenden Schwierigkeit, handelt es sich also bei der Lösung dieser auf *Systeme* von Flächen bezüglichen Probleme wesentlich um die Bestimmung der 6 Stammzahlen. Mit solchen Problemen hat sich der Verfasser bis jetzt noch nicht beschäftigt, wohl aber mit den einfachsten von den auf *Curvensysteme* bezüglichen, *analogen* Problemen. Auf diese gehen wir jetzt ein.

Zunächst finden wir aus Formel (25) für $k = 3$ die Zahl der Stellen einer Plancurve n^{ter} Ordnung, in denen eine Gerade in drei coincidirenden Punkten schneiden kann, gleich

$$3n^2(n-2) - 3n(n-1)(n-2) = 3n(n-2),$$

da $\gamma_1 = n$, $\gamma_2 = n^2$ wird. Diese Stellen sind bei der punkt-allgemeinen Curve nur die $\varkappa'$ Wendepunkte. Bei der beliebigen Curve treten noch die δ Doppelpunkte und die $\varkappa$ Spitzen hinzu. Wir entnehmen den Plückerschen Formeln, dass jede Doppelpunktstangente *dreimal*, jede Rückkehrtangente *achtmal* als Gerade zählt, die in drei coincidirenden Punkten schneidet, indem ja:

$$3n(n-2) = \varkappa' + 2 \cdot 3 \cdot \delta + 8 \cdot \varkappa \tag{46}$$

ist. Wir gehen weiter zu einstufigen und zweistufigen Systemen von Plancurven. Es bezeichne:

μ die Bedingung, dass eine Plancurve ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicke;

ν, dass sie eine gegebene Gerade schneide;

ϱ, dass sie eine gegebene Ebene berühre;

P die zweifache Bedingung, dass sie durch einen gegebenen Punkt gehe;

w, p, q, dass sie bezüglich eine ihrer Wendetangenten, Doppelpunktstangenten, Rückkehrtangenten durch eine gegebene Gerade schicke;

v, b, c, dass sie bezüglich einen ihrer Wendepunkte, Doppelpunkte, Rückkehrpunkte in eine gegebene Ebene werfe;

w_e, p_e, q_e die zweifachen Bedingungen, dass sie bezüglich eine ihrer Wendetangenten, Doppelpunktstangenten, Rückkehrtangenten in eine gegebene Ebene werfe.

Jede Plancurve n^{ter} Ordnung erzeugt durch ihre n Schnittpunkte mit jeder in ihrer Ebene gelegenen Geraden eine Punktgruppe. Also erzeugt ein einstufiges System von Plancurven ein dreistufiges System von Punktgruppen; und auf dieses wollen wir die mit g multiplicirte Formel

(25) und die Formel (26) anwenden. Dann haben wir 5 Stammzahlen zu berechnen, nämlich:

$$\gamma_3, \gamma_2 g, \gamma_1 g_e, \gamma_1 g_p, g_s.$$

Für g_s haben wir μ zu setzen, weil durch den Scheitel des Strahlbüschels von g_s μ Curven des Systems gehen, deren jede auf der Ebene des Strahlbüschels eine Punktgruppe liefert. Ebenso ergiebt sich leicht

$$\gamma_1 g_p = n \cdot \mu; \quad \gamma_1 g_e = \nu.$$

Um $\gamma_2 g$ zu finden, legen wir die Gerade der Bedingung g in die erste der beiden durch γ_2 gegebenen Ebenen, und finden so durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl:

$$\gamma_2 g = \nu \cdot n + \nu (n - 1) = \nu (2n - 1).$$

Um γ_3 zu bestimmen, zeichnen wir eine der drei durch γ_3 gegebenen Ebenen vor den beiden andern aus. Auf ihr liefert jede Curve des Systems n Schnittpunkte und n^2 andere Punkte, deren jeder Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von zwei Curvenpunkten ist, die auf den beiden anderen Ebenen liegen. So entsteht auf der ausgezeichneten Ebene ein einstufiges System von Punktepaaren, auf welches wir die Formel 1) anwenden. Dann kommt für die Zahl der Coincidenzen:

$$\nu \cdot n^2 + (g \gamma_2) \cdot n - \mu \cdot n^3.$$

Die Coincidenzen werden aber nicht bloss von den γ_3 gesuchten Punktgruppen, sondern auch von den $2 \cdot \nu \cdot n$ Punktgruppen gebildet, die von den Schnittgeraden der ausgezeichneten Ebene mit den beiden andern Ebenen herrühren. Also ist:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \nu \cdot (2n - 1) \cdot n + \nu \cdot n^2 - \mu \cdot n^3 - 2\nu \cdot n \\ &= 3\nu \cdot (n^2 - n) - \mu \cdot n^3. \end{aligned}$$

Die Werthe der nunmehr bestimmten 5 Stammzahlen setzen wir in die mit g multiplicirte Formel (25) und in die Formel (26) ein. Dann kommt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 g &= 3\nu (2n - 1)(n - 2) - 3\nu (n - 1)(n - 2) \\ &\quad - 3\mu \cdot n (n - 1)(n - 2) + \mu \cdot n (n - 1)(n - 2) \\ &= 3\nu \cdot n (n - 2) - 2\mu \cdot n (n - 1)(n - 2) \\ \varepsilon_3 b &= 6\nu (n - 1) - \mu \cdot n (3n - 2). \end{aligned}$$

Die Coefficienten 1, 3, 8 in Formel (46) lehren, dass das Symbol $\varepsilon_3 g$ einmal durch jede Curve erfüllt wird, die eine Wendetangente, dreimal durch jede, welche eine Doppelpunktstangente, achtmal durch jede, welche eine Rückkehrtangente durch eine gegebene Gerade schickt. Analoges findet für $\varepsilon_3 b$ statt. Ausserdem aber können diese Symbole auch durch gewisse ausgeartete Curven des Systems erfüllt werden. Die unbekannte Zahl solcher hinlänglich oft gerechneten Ausartungen sei X resp. X'. Dann geben die obigen Formeln für $\varepsilon_3 g$ und $\varepsilon_3 b$ die Gleichungen:

$$(47)\quad 3\nu \cdot n(n-2) - 2\mu \cdot n(n-1)(n-2) = w + 3p + 8q + X,$$

$$(48)\quad 6\nu(n-1) - \mu \cdot n(3n-2) = v + 2 \cdot 3 \cdot b + 8c + X'.$$

Der Verfasser hat die Formeln (47) und (48) namentlich auf die von ihm eingehend studirten*) Systeme von cubischen Plancurven mit Spitze angewandt. Die *elementaren* Systeme solcher Curven können nur *eine* Ausartung σ besitzen, deren Punkte einen Kegelschnitt und eine ihn berührende Gerade bilden. Für solche Systeme kann man leicht die Formeln (47) und (48) verificiren, da für sie:

$$w = \tfrac{1}{3}(4\varrho - \nu); \qquad q = \tfrac{1}{6}(7\nu - \varrho - 9\mu);$$
$$v = \tfrac{1}{6}(7\varrho - \nu - 3\mu); \quad c = \tfrac{1}{3}(4\nu - \varrho - 6\mu);^{**)}$$

und die Anzahl der Ausartungen σ gleich

$$\tfrac{1}{2}(\nu + \varrho - 3\mu)^{**)}$$

ist. Man findet dabei, dass jede Curve σ das Symbol $\varepsilon_3 b$ *dreimal*, das Symbol $\varepsilon_3 g$ gar nicht erfüllt.

Um für ein *zweistufiges* System von Plancurven $\varepsilon_3 g_e$ zu berechnen, hat man die Stammzahlen $\gamma_2 g_e$ und $\gamma_1 g_s$ zu bestimmen. Man findet

$$\gamma_2 g_e = \nu^2 - P; \quad \gamma_1 g_s = \mu\nu.$$

Setzt man noch

$$P = \mu\nu - n \cdot \mu^2 \quad \text{(Beitr. pag. 33, letzte Zeile)},$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}(49)\quad \varepsilon_3 g_e &= 3(n-2)(\nu^2 - \mu\nu + n \cdot \mu^2) - 3\mu\nu(n-1)(n-2)\\ &= 3(n-2)\nu^2 - 3n(n-2)\mu\nu + 3n(n-2)\mu^2\\ &= w_e + 3p_e + 8q_e + X'',\end{aligned}$$

wo w_e, p_e, q_e oben definirt sind, und X'' wieder von den im Systeme vorhandenen Ausartungen abhängt.

§ 4.

Coincidenz von k Strahlen eines Strahlbüschels.

Wir behandeln jetzt die *Strahlengruppe* analog wie in § 1. und § 2. die Punktgruppe. Die Strahlengruppe ist ein Gebilde, welches aus n einem und demselben Strahlbüschel angehörigen Strahlen besteht. Der Scheitel des Strahlbüschels heisse c, seine Ebene μ, und die n ihm incidenten Strahlen

$$g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n.$$

Demgemäss (Beitr. pag. 19 oben) bezeichnet auch:

*) Man vergleiche des Verfassers Mittheilung in den Gött. Nachr. Mai 1875.

**) Ebenda, pag. 380 u. 381.

1) $\mu^\alpha c^\beta$ die Bedingung, dass die Strahlengruppe ihre Ebene durch α gegebene Punkte schickt, und zugleich ihren Scheitel auf β gegebenen Ebenen hat;

2) g_i, g_{ie}, g_{ip}, g_{is} und G_i bezüglich die Bedingungen, dass die Strahlengruppe ihren Strahl g_i bezüglich durch eine gegebene Gerade, in eine gegebene Ebene, durch einen gegebenen Punkt, in einen gegebenen Strahlbüschel schickt, und als gegeben besitzt;

3) das Product mehrerer dieser Bedingungssymbole, dass die Strahlengruppe die von diesen Symbolen dargestellten Bedingungen *zugleich* erfüllt; z. B. $\mu^2 c g_{ie}$ bedeutet die fünffache zusammengesetzte Bedingung, dass die Ebene der Strahlengruppe durch eine gegebene Gerade gehen soll, der Scheitel in einer gegebenen Ebene, und auch der Strahl g_i in einer gegebenen Ebene liegen soll.

Da jeder Strahl g_i sowohl dem Scheitel c, wie auch der Ebene μ *incident* ist, so bestehen zwischen den Grundbedingungen von g_i und von c, resp. von g_i und von μ die auf dem Princip von der Erhaltung der Anzahl beruhenden Gleichungen (Beitr. § 9, I u. II):

(50) $$c g_i = g_{ie} + c^2,$$

(51) $$\mu g_i = g_{ip} + \mu^2.$$

Aus ihnen folgt, wie dort, durch symbolische Multiplication:

(52) $$\begin{aligned} \mu c g_i &= g_{is} + \mu^3 + \mu c^2 \\ &= g_{is} + c^3 + \mu^2 c, \end{aligned}$$

(53) $$\begin{aligned} (\mu^2 c - \mu^3)\, g_i &= (\mu c^2 - c^3)\, g_i \\ &= G_i + \mu^3 c + \mu c^3 = G_i + \mu^2 c^2. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen nun, analog wie in § 1., mit ε_i diejenige speciellere Strahlengruppe, bei welcher die i Strahlen:

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \cdots,\ g_i$$

des Strahlbüschels (μ, c) in dem Coincidenzstrahle h_i unendlich nahe liegen. Dann bezeichnet, nach den Grundregeln meiner Symbolik, z. B. $\varepsilon_i h_s z_a$, wo z_a eine der Strahlengruppe auferlegte a-fache Bedingung bedeutet, die *Zahl* derjenigen speciellen Strahlengruppen eines $(i-1+3+a)$-stufigen Systems, welche ihre Strahlen $g_1, g_2, \cdots g_i$ in einem und demselben Strahle h vereinigen, diesen Coincidenzstrahl einem gegebenen Strahlbüschel zuschicken, und dabei die Bedingung z_a erfüllen. Jede solche Strahlengruppe ε_i nennen wir *singulär*. Da im Strahle h eines ε_i die i Strahlen $g_1, g_2, \cdots g_i$ vereinigt liegen, so ist selbstverständlich:

(54) $$h\varepsilon_i = g_1 \varepsilon_i = g_2 \varepsilon_i = g_3 \varepsilon_i = \cdots = g_i \varepsilon_i.$$

Nach der unmittelbar aus dem Chasles'schen Correspondenzprincipe fliessenden Formel erster Dimension für *Paare sich schneiden-*

der Strahlen, erhält man für die Zahl solcher singulärer Strahlengruppen, bei denen die Strahlen g_i und g_m coincidiren, den Ausdruck:

$$g_i + g_m - \mu - c.$$

Speciell ist:

$$g_1 + g_2 - \mu - c = \varepsilon_2.$$

Wiederholen wir nun die Ueberlegung, welche uns in § 1. durch Formel (9) und (10) zu Formel (11) führte, so bekommen wir:

$$(55)\quad \varepsilon_k = (g_1+g_2-\mu-c)(g_1+g_3-\mu-c)(g_1+g_4-\mu-c)\cdots(g_1+g_k-\mu-c).$$

Um aus dieser Formel, in welcher noch g_1 als bevorzugt erscheint, eine in den g symmetrische Formel zu erhalten, entwickeln wir die rechte Seite nach steigenden Potenzen von

$$g_1 - \mu - c,$$

und erhalten:

$$(56)\quad \varepsilon_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}\cdot(g_1-\mu-c) + \alpha_{k-3}\cdot(g_1-\mu-c)^2 + \cdots + \alpha_0\,(g_1-\mu-c)^{k-1},$$

wo jetzt:

$$\alpha_0 = 1; \quad \alpha_1 = g_2 + g_3 + g_4 + \cdots g_k;$$

und überhaupt α_i gleich der Summe der sämmtlichen $(k-1)_i$ Producte von je i verschiedenen der $k-1$ Symbole $g_2, g_3, g_4, \cdots g_i$ bedeutet. Wir beachten nun, dass wegen der Formeln (50), (51), (52), (53) für die Potenzen von $g_1 - \mu - c$ Folgendes gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned}
(g_1-\mu-c)^2 &= -g_1(\mu+c) - 2\mu c,\\
(g_1-\mu-c)^3 &= 2g_1\mu c - 2(\mu^2c-\mu^3),\\
(g_1-\mu-c)^4 &= -2g_1(\mu^2c-\mu^3),\\
(g_1-\mu-c)^m &= 0 \text{ für } m > 4.
\end{aligned}$$

Dadurch wird aus Formel (56):

$$(57)\quad \varepsilon_k = (\alpha_{k-1} + g_1\cdot\alpha_{k-2}) - (\mu+c)(\alpha_{k-2} + g_1\alpha_{k-3}) + 2\mu c(\alpha_{k-3} + g_1\alpha_{k-4}) - 2(\mu^2c-\mu^3)(\alpha_{k-4} + g_1\alpha_{k-5}).$$

Nun ist aber jeder der 4 Ausdrücke

$$\alpha_i + g_1\alpha_{i-1}$$

die Summe aller möglichen Producte von je i verschiedenen der k Symbole $g_1, g_2, g_3, \cdots g_k$. Schreiben wir für diese Summe β_i, so erhalten wir die gesuchte Hauptformel:

$$(58)\quad \varepsilon_k = \beta_{k-1} - (\mu+c)\,\beta_{k-2} + 2\mu c\beta_{k-3} - 2(\mu^2c-\mu^3)\,\beta_{k-4}.$$

Speciell ergiebt sich für die Zahl ε_4 derjenigen singulären Strahlengruppen eines dreistufigen Systems, auf denen die 4 Strahlen g_1, g_2, g_3, g_4 coincidiren:

$$(59)\quad \begin{aligned}\varepsilon_1 = & (g_1g_2g_3 + g_1g_2g_4 + g_1g_3g_4 + g_2g_3g_4) \\ & - (\mu + c)(g_1g_2 + g_1g_3 + g_1g_4 + g_2g_3 + g_2g_4 + g_3g_4) \\ & + 2\mu c(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) - 2(\mu^2 c - \mu^3).\end{aligned}$$

Durch die Multiplication der Formel (58) mit den Grundbedingungen

$$\mu,\, c;\ \mu^2,\, \mu c,\, c^2;\ \mu^3,\, \mu^2 c,\, \mu c^2,\, c^3;\ \mu^3 c,\, \mu^2 c^2,\, \mu c^3;\ \mu^3 c^2$$

des die Strahlengruppe tragenden Strahlbüschels erhalten wir die den Formeln (15) bis (19) analogen Formeln. Von diesen erwähnen wir beispielsweise:

$$(60)\quad \varepsilon_k \mu c = \mu c \beta_{k-1} - (\mu^2 c + \mu c^2)\beta_{k-2} + 2\mu^2 c^2 \beta_{k-3} - 2\mu^3 c^2 \beta_{k-4}.$$

Wir suchen jetzt eine Formel für $h\varepsilon_k$, d. h. für den Grad der Regelfläche der Coincidenzstrahlen aller derjenigen singulären Gruppen eines k-stufigen Systems von Strahlengruppen, auf welchen die k Strahlen $g_1, g_2, \cdots g_k$ coincidiren. Um eine solche Formel zu finden, können wir die Formel (58) mit jeder der k Bedingungen $g_1, g_2, \cdots g_k$ multipliciren, und erhalten bei hinreichender Benutzung der fundamentalen Formeln zwischen den Grundbedingungen incidenter Hauptelemente (50) bis (53), jedesmal ein und dieselbe *symmetrische* Formel, nämlich:

$$(61)\quad \varepsilon_k h = \beta_k - (\mu^2 + c^2)\beta_{k-2} + 2(\mu^3 + \mu c^2)\beta_{k-3} - 2\mu^2 c^2 \beta_{k-4},$$

wo wieder β_i die Summe aller möglichen k_i Producte von je i verschiedenen der k Symbole $g_1, g_2, \cdots g_k$ bedeutet. Speciell ist für $k=4$:

$$(62)\quad \begin{aligned}\varepsilon_4 h = & g_1g_2g_3g_4 - (\mu^2 + c^2)(g_1g_2 + g_1g_3 + g_1g_4 + g_2g_3 + g_2g_4 + g_3g_4) \\ & + 2(\mu^3 + \mu c^2)(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) - 2\mu^2 c^2.\end{aligned}$$

Aus den Formeln (58) und (62) kann man wegen der auf h angewandten Formeln (50) bis (53), die Ausdrücke für

$$\varepsilon_k h_p,\ \varepsilon_k h_e,\ \varepsilon_k h_s,\ \varepsilon_k H$$

durch blosse symbolische Multiplicationen mit den Grundbedingungen des Strahlbüschels erhalten. So bekommt man z. B. für $\varepsilon_k h_s$ wegen

$$\varepsilon_k h_s = \varepsilon_k \mu c h - \varepsilon_k \mu^3 - \varepsilon_k \mu c^2$$

die folgende Formel:

$$(63)\quad \varepsilon_k h_s = \mu c \beta_k - (\mu^3 + \mu c^2)\beta_{k-1} + \mu^2 c^2 \beta_{k-2}.$$

Die Formeln (58) und (62) entsprechen dualistisch *sich selbst.* Der in (58) vorkommende, scheinbar undualistische Ausdruck

$$\mu^2 c - \mu^3$$

ist nämlich *gleich* dem ihm dualistisch entsprechenden

$$\mu c^2 - c^3,$$

indem jeder dieser beiden Ausdrücke die Bedingung ausdrückt, dass die Ebene des Strahlbüschels durch eine gegebene Gerade geht, auf welcher zugleich sein Scheitel liegt. (Beitr. pag. 35, erste Zeile).

Ebenso ist der in (62) vorkommende Ausdruck $\mu^3 + \mu c^2$ gleich dem ihm dualistisch entsprechenden.

Wir gehen nun zu den strahlgeometrischen Problemen über, welche den in § 2. gelösten analog sind. Wir haben also eine Gruppe von n in einem Strahlbüschel (μ, c) liegenden Strahlen g *mit gemeinsamer Definition* vorauszusetzen. Ein von einer solchen Gruppe erzeugtes $(k-1)$-stufiges System enthält eine endliche Anzahl ε_k von singulären Gruppen, deren jede von ihren n Strahlen k in ein und demselben Strahle h vereinigt. Um diese Zahl ε_k zu finden, wenden wir die allgemeine Formel (58) an. Wir haben dann zu untersuchen, was in unserem Falle aus den Gliedern von der Form β_i wird. Jedes β_i enthält jetzt k_i *gleiche* Summanden, deren jeder die *Bedingung* γ_i *bezeichnet, dass von den* n *Strahlen* i *verschiedene* i *gegebene Gerade schneiden.* γ_i sondert aber dann von den n Strahlen i heraus, so dass nun als $(i+1)^{\text{ter}}$ Strahl jeder der sonstigen $n-i$ Strahlen aufgefasst werden kann, u. s. w. Endlich kann dann als k^{ter} Strahl jeder der zuletzt noch vorhandenen $n-k+1$ Strahlen aufgefasst werden. Desshalb wird hier, wie in (24):

$$(64)\quad \beta_i = k_i \cdot (n-i)(n-i-1)(n-i-2)\cdots\cdots(n-k+1)\cdot\gamma_i.$$

Setzt man nun die durch (64) gegebenen Werthe für β_{k-1}, β_{k-2}, β_{k-3}, β_{k-4} in Formel (58) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}(65)\quad \varepsilon_k = {} & k_1\cdot(n-k+1)\gamma_{k-1} - k_2\cdot(n-k+2)(n-k+1)(\mu+c)\gamma_{k-2}\\ & + k_3\cdot(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1)\cdot 2\mu c\gamma_{k-3}\\ & - k_4\cdot(n-k+4)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1)\cdot 2(\mu^2 c-\mu^3)\gamma_{k-4}.\end{aligned}$$

Analog ergiebt sich aus Formel (61):

$$\begin{aligned}(66)\quad \varepsilon_k h = {} & \gamma_k - k_2\cdot(n-k+2)(n-k+1)(\mu^2+c^2)\gamma_{k-2}\\ & + k_3\cdot(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1)\cdot 2\cdot(\mu^3+\mu c^2)\gamma_{k-3}\\ & - k_4\cdot(n-k+4)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1)2\mu^2c^2\gamma_{k-4}.\end{aligned}$$

Speciell giebt Formel (65) für $k=6$, und Formel (66) für $k=5$:

$$\begin{aligned}(67)\quad \varepsilon_6 = {} & 6(n-5)\gamma_5 - 15(n-4)(n-5)(\mu+c)\gamma_4 + 40(n-3)(n-4)(n-5)\mu c\gamma_3\\ & - 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(\mu^2 c-\mu^3)\gamma_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(68)\quad \varepsilon_5 h = {} & \gamma_5 - 10(n-3)(n-4)(\mu^2+c^2)\gamma_3 + 20(n-2)(n-3)(n-4)(\mu^3+\mu c^2)\gamma_2\\ & - 10(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mu^2c^2\gamma_1.\end{aligned}$$

Von den Formeln für $\varepsilon_k h_p$, $\varepsilon_k h_e$, $\varepsilon_k h_s$, $\varepsilon_k H$ erwähnen wir die für $\varepsilon_k h_s$, welche aus (63) hervorgeht:

$$\begin{aligned}(69)\quad \varepsilon_k h_s = {} & \mu c\gamma_k - k_1\cdot(n-k+1)(\mu^3+\mu c^2)\gamma_{k-1}\\ & + k_2\cdot(n-k+2)(n-k+1)\mu^2c^2\gamma_{k-2}.\end{aligned}$$

Um endlich die Analoga der Formeln (27) bis (32) zu finden, müsste man die gewonnenen Formeln durch geeignete Multiplicationen mit einander verbinden. Man erhielte dann die Erledigung der Fälle, wo bei einer Strahlengruppe an *mehreren* Stellen Coincidenzen stattfinden. Die *Coefficienten* der Bedingungssymbole würden sich genau so wie bei den Punktgruppen (man vergleiche die Formeln (27), (29), (30), (31), (32)) aus den Binomialcoefficienten zusammensetzen. Die *Bedingungssymbole selbst* können für die sämmtlichen auf ein i-stufiges System bezüglichen Anzahlen derartig singulärer Strahlgruppen, keine andern sein, als:

$$\gamma_i;\ \gamma_{i-1}\mu,\ \gamma_{i-1}c;\ \gamma_{i-1}\mu^2,\ \gamma_{i-1}\mu c,\ \gamma_{i-1}c^2;$$
$$\gamma_{i-2}\mu^3,\ \gamma_{i-2}\mu^2 c,\ \gamma_{i-2}\mu c^2,\ \gamma_{i-2}c^3;$$
$$\gamma_{i-3}\mu^3 c,\ \gamma_{i-3}\mu^2 c^2,\ \gamma_{i-3}\mu c^3;\ \gamma_{i-4}\mu^3 c^2;$$

wo wieder jedes γ_m die Bedingung bezeichnet, dass die Strahlengruppe von ihren n Strahlen m *verschiedene* durch m gegebene Gerade schickt. Die diesen Bedingungssymbolen zugehörigen 14 Zahlen sollen wieder die *Stammzahlen* des i-stufigen Systems von Strahlengruppen heissen. Sie repräsentiren übrigens immer höchstens 12 von einander unabhängige. Ist das zu Grunde gelegte i-stufige System das durch einen *Strahlencomplex* n^{ten} Grades auf den ∞^5 Strahlbüscheln des Raums erzeugte, specielle fünfstufige System, so lassen sich die 14 Stammzahlen leicht durch n ausdrücken, und liefern, in die eben besprochenen Formeln eingesetzt, *Zahlen-Resultate* für gewisse noch nicht studirte *Singularitäten des allgemeinen Complexes* n^{ten} *Grades*.

Diese Resultate entwickelt die folgende Abhandlung.

Hamburg, Februar 1877.

Singularitäten des Complexes n^{ten} Grades.

Von

H. Schubert in Hamburg.

In einer Abhandlung über Tangentensingularitäten der allgemeinen Punktfläche F_n (Math. Ann. Bd. XI, pag. 323) habe ich gezeigt, dass *allein* aus der Definition der F_n als einer Gesammtheit von ∞^2 Punkten, die auf jeder Geraden n Punkte besitzt, mit Hilfe des *Chasles'schen Correspondenzprincips oder seiner Umformungen* *) alle Zahlen abgeleitet werden können, welche sich auf die an einer oder mehr Stellen in zwei oder mehr Punkten berührenden Tangenten der F_n beziehen.**) *Hier soll nun das Analoge für den Strahlencomplex n^{ten} Grades C_n gezeigt werden.*

Der Complex C_n besitzt nämlich, seiner Definition gemäss, auf jedem der ∞^5 Strahlbüschel des Raumes n Strahlen, ist also, wie schon in der „Abh. über Gruppen" (§ 4.) hervorgehoben ist, als ein specielles fünfstufiges System von Strahlengruppen anzusehen, wenn man unter Strahlengruppe ein Gebilde versteht, das aus n einem Strahlbüschel angehörigen Strahlen besteht. Wir sagen nun, dass ein Strahlbüschel den Complex in dem Coincidenzstrahle h_i *i-strahlig berührt*, wenn von den n dem Strahlbüschel und dem Complexe gemeinsamen Strahlen i Strahlen in h_i *vereinigt* liegen. Demgemäss lassen sich die hier gelösten Probleme aussprechen, wie folgt:

Es werden alle Zahlen bestimmt, welche sich beziehen auf die den Complex in einem oder mehr Berührungsstrahlen zwei- oder mehrstrahlig

---

*) Wegen der Umformungen des Correspondenzprincips vergleiche man den III$^{\text{ten}}$ Abschnitt meiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie" (Math. Ann. Bd. X), einer Abhandlung, welche kurz „Beitr." genannt werden soll.

**) Diejenigen unter diesen Zahlen, welche bis dahin unbekannt waren (Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, II Th. II A. Art. 462), hatte ich schon früher durch die Gött. Nachr. (Februar 1876) und in § 27. der eben citirten Beitr. mitgetheilt. Als Beispiele sind diese Zahlen auch in der voranstehenden Abhandlung „über das Correspondenzprincip für Gruppen von n Punkten und von n Strahlen" erwähnt.

Diese oft citirte Abhandlung soll kurz „Abh. üb. Gruppen" genannt werden.

berührenden Strahlbüschel, auf deren Berührungsstrahlen, und auf deren sonstige Complexstrahlen.

Zur Ableitung dieser Zahlen aus der Definition des Complexes können *zwei Methoden* angewandt werden, welche wir als die *indirecte* und *directe* unterscheiden wollen.

Die indirecte Methode verfährt ebenso, wie die citirte Abhandlung über Tangententensingularitäten. Sie geht also von der Definition des Complexes C_n aus, findet daraus zunächst nur die Zahlen für die ∞^4 an einer Stelle zweistrahlig berührenden Strahlbüschel, bestimmt dann *aus diesen Zahlen* diejenigen, welche sich auf die in dreistufiger Mannigfaltigkeit vorhandenen, berührenden Strahlbüschel beziehen, u. s. w., und *steigt* so *allmählich auf* bis zu den in endlicher Anzahl vorhandenen, z. B. den sechsstrahlig berührenden Strahlbüscheln. Als Hilfsformeln werden dabei nur angewandt die Chasles'sche Correspondenzformel für den Strahlbüschel oder vielleicht Formeln, welche aus ihr durch symbolische Multiplication unmittelbar hervorgehen, namentlich Formel (59) in § 20. meiner Beitr. (Math. Ann. Bd. X, pag. 74).

Die directe Methode fasst den Complex C_n als speciellen Fall eines allgemeineren Gebildes, nämlich des fünfstufigen Systems von Strahlengruppen, und findet daher jede der gesuchten Zahlen aus einer der Strahlengruppen-Formeln, welche am Schluss der „Abh. üb. Gruppen" zwar nicht ausführlich aufgestellt, aber doch besprochen sind. Sie hat daher nur die für jene Formeln erforderlichen *Stammzahlen* als Functionen von n zu berechnen, und die erhaltenen Werthe in die Formeln einzusetzen. Bei dieser Methode ist also der bei der Besprechung der indirecten Methode erwähnte Process des allmählichen Aufsteigens zu höheren Singularitäten von vornherein den angewandten Formeln eingefügt.

Der Verfasser hat, der numerischen Controle wegen, die gesuchten Zahlen nach *beiden* Methoden bestimmt. Die in § 1. eingeführten Bezeichnungen sind dem Charakter dieser Methoden angepasst. § 2. entwickelt aus der Definition des Complexes die Zahlen, welche sich auf die ∞^5 im allgemeinen nicht berührenden Strahlbüschel beziehen, und findet damit auch die für die Anwendung der directen Methoden erforderlichen Stammzahlen. Die dort bestimmte Stammzahl γ_5 giebt für $n = 4$ das *liniengeometrische Analogon der 27 in einer cubischen Punktfläche liegenden Geraden.* In § 3. ist die Ableitung der gesuchten Zahlen nach beiden Methoden durch Beispiele erläutert. Endlich stellt § 4. die Werthe der gefundenen 82 Singularitäten-Zahlen zusammen. Von diesen ist ein Theil schon durch die vom algebraischen Standpunkte ausgehenden Arbeiten von Plücker, Clebsch, Klein und Voss*)

*) Voss' eingehende Abhandlung „Ueber Complexe und Congruenzen" (Math. Ann. Bd. IX, pag. 55 bis 162) enthält wohl alle im Folgenden bestimmten und *nicht* neuen Zahlen. Desshalb ist in § 4. nur Voss citirt.

bekannt, z. B. die Singularitäten-Zahlen der Plücker'schen Complexfläche. Die auf höhere Singularitäten bezüglichen Zahlen aber waren bisher noch nicht bestimmt.

§ 1.

Bezeichnungen.

Der feste Complex n^{ten} Grades C_n besitzt auf jedem der ∞^5 Strahlbüschel des Raums n Strahlen, erzeugt also ein *fünfstufiges System* Σ von Strahlengruppen. Für eine solche Strahlengruppe bezeichnet immer μ ihre Ebene, c ihren Scheitel, g irgend einen ihrer n Strahlen. Gemäss der Symbolik des Verfassers (Beitr. Abschn. I) bedeutet dann z. B. $\mu^2 c g$ die vierfache *Bedingung*, dass eine Strahlengruppe ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schickt, ihren Scheitel auf einer gegebenen Ebene besitzt, und einen ihrer n Strahlen durch eine gegebene Gerade schickt; dasselbe Symbol bezeichnet dann aber auch die *Zahl* derjenigen Strahlengruppen eines Σ angehörigen vierstufigen Systems, welche jene vierfache Bedingung erfüllen.

Ferner bezeichnet für die Strahlengruppe das Symbol

$$g^{i, k, l, m\, q},$$

wo i, k, l, m, q nur geschrieben wird, wenn es grösser als null ist, die Bedingung, dass einer der n Strahlen die i-fache Grundbedingung, ein zweiter die k-fache, ein dritter die l-fache, ein vierter die m-fache, ein fünfter die q-fache Grundbedingung erfüllt. Dabei ist bekanntlich (Beitr. § 5.) unter *einfacher* Grundbedingung für einen Strahl zu verstehen, dass derselbe eine gegebene Gerade schneide, unter *dreifacher*, dass er einem gegebenen Strahlbüschel angehöre, unter *vierfacher*, dass er gegeben sei. Da der Strahl *zwei zweifache* Grundbedingungen besitzt, nämlich erstens die, dass er in einer gegebenen Ebene liegen soll, und zweitens die, dass er durch einen gegebenen Punkt gehen soll, so haben wir diese beiden Grundbedingungen von einander zu unterscheiden. Wir thun dies dadurch, dass wir die erstgenannte Grundbedingung durch eine arabische 2, die zweite durch eine römische II andeuten.

Beispiele für die bisher eingeführten Bezeichnungen:

1) $g^{2, \mathrm{II}, 1}$, bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen von Σ, welche einen ihrer n Strahlen in einer gegebenen Ebene besitzen, einen zweiten durch einen gegebenen Punkt schicken, und einen dritten eine gegebene Gerade schneiden lassen;

2) $\mu g^{3, 1}$, bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen von Σ, welche einen ihrer n Strahlen einem gegebenen Strahlbüschel zuschicken, einen zweiten Strahl eine gegebene Gerade schneiden lassen, und ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken;

3) $g^{1,1,1,1,1,}$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen von Σ_1 welche von ihren n Strahlen fünf verschiedene fünf gegebene Gerade schneiden lassen.

Hiernach kann man für den Complex n^{ten} Grades nach folgenden Zahlen fragen, die auf *nicht-berührende* Strahlbüschel Bezug nehmen:

(1)
$$\mu^3 c^2,\ \mu^2 c g^{2,},\ \mu^2 c g^{\mathrm{II},},\ \mu c g^{3,},$$
$$\mu g^{2,2,},\ \mu g^{2,\mathrm{II},},\ \mu g^{\mathrm{II},\mathrm{II},},\ g^{3,2,};$$

(2)
$$\mu^3 c g^{1,},\ \mu^2 c^2 g^{1,},\ \mu^3 g^{1,1},\ \mu^2 c g^{1,1,},$$
$$\mu^2 g^{2,1,},\ \mu^2 g^{\mathrm{II},1,},\ \mu c g^{2,1,},\ \mu g^{3,1,},$$
$$\mu^2 g^{1,1,1,},\ \mu c g^{1,1,1,},\ \mu g^{2,1,1,},\ \mu g^{\mathrm{II},1,1,},$$
$$g^{2,2,1,},\ g^{2,\mathrm{II},1,},\ g^{3,1,1,},$$
$$\mu g^{1,1,1,1,},\ g^{2,1,1,1,},\ g^{1,1,1,1,1,};$$

ferner nach den hierzu reciproken Zahlen. Ausgelassen sind dann nur diejenigen Zahlen, welche selbstverständlich null sind, wie z. B. $g^{4,1,}$, $\mu^3 g^{\mathrm{II},}$ etc.

Für die Symbole
$$g^{1,},\ g^{1,1,},\ g^{1,1,1,},\ g^{1,1,1,1,},\ g^{1,1,1,1,1,}$$
schreiben wir im Anschluss an die Bezeichnung γ_i in Formel (64) u. f. der „Abh. üb. Gruppen“ bezüglich:
$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5.$$

Die eben zusammengestellten Zahlen sind in § 2. *sämmtlich berechnet.*

Wir gehen zu den Bezeichnungen über, welche sich auf die den Complex C_n *berührenden* Strahlbüschel beziehen. Wieder im Anschluss an die Bezeichnung in § 4. der „Abh. üb. Gruppen“ soll bedeuten:
$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_m}, \text{ wo } i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots i_m \text{ grösser als 1 ist,}$$
jede solche Strahlengruppe in Σ, auf welcher in m Strahlen *Coincidenzen* stattfinden, und zwar dergestalt, dass von den n Strahlen der Gruppe im ersten Strahle i_1, im zweiten Strahle i_2, $\cdots\cdot$, im m^{ten} Strahle i_m Strahlen coincidiren. Z. B. ε_{43} bedeutet eine Strahlengruppe, auf welcher von den n Strahlen in einem Strahle 4 Strahlen, in einem zweiten 3 Strahlen coincidiren. Demgemäss besitzt unser fünfstufiges System Σ die folgenden 18 Arten von Coincidenz-Strahlengruppen:

1) ∞^4 Gruppen ε_2,
2) ∞^3 Gruppen ε_3, ε_{22},
3) ∞^2 Gruppen ε_4, ε_{32}, ε_{222},
4) ∞^1 Gruppen ε_5, ε_{42}, ε_{33}, ε_{322}, ε_{2222},
5) eine endliche Anzahl von Gruppen:
$$\varepsilon_6,\ \varepsilon_{52},\ \varepsilon_{43},\ \varepsilon_{422},\ \varepsilon_{332},\ \varepsilon_{3222},\ \varepsilon_{22222}.$$

Jeden Coincidenzstrahl eines ε, in welchem i Strahlen coincidiren, bezeichnen wir mit h_i, mit h_1 dagegen jeden der Strahlen eines ε, in dem *keine* Coincidenz stattfindet.

Nach des Verfassers Symbolik bezeichnet jedes Symbol $z\,\varepsilon_{i_1\,i_2\,i_3\ldots\ldots i_m}$ zugleich die *Anzahl* derjenigen durch das nämliche Symbol dargestellten Coincidenz-Gruppen, welche einem in Σ liegenden, $(i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_m - m)$-stufigen Systeme angehören, und zugleich die Bedingung z erfüllen. In unseren Fällen kann sich z zusammensetzen aus den Bedingungen μ und c des Strahlbüschels, der ε trägt, und aus den auf h_i bezüglichen Grundbedingungen. Diese sind h_i, h_{ip}, h_{ie}, h_{is}, H_i und bedeuten also bei einem ε, dass sein Strahl h_i bezüglich eine gegebene Gerade schneiden, durch einen gegebenen Punkt gehen, in einer gegebenen Ebene liegen, einem gegebenen Strahl angehören, gegeben sein soll. Ferner sollen a identische Factoren h_i bei einem ε andeuten, dass dieses ε von seinen Strahlen h_i a verschiedene durch a gegebene Gerade schickt.

Beispiele für die Bezeichnungen, welche sich auf die Coincidenz-Strahlengruppen beziehen.

1) $\mu^3\varepsilon_3$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen in Σ, welche in einer gegebenen Ebene liegen, und dabei einen Strahl besitzen, in welchem von den n Strahlen 3 coincidiren, m. a. W., die Zahl der Wendetangenten einer dem Complexe C_n angehörigen Complexcurve;

2) $\mu^2\varepsilon_{222}$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen in Σ, welche ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, und dabei 3 Strahlen besitzen, deren jeder von den n Strahlen zwei in sich vereinigt, m. a. W. die Zahl der dreifachen Punkte der Doppelcurve einer dem Complexe C_n angehörigen Complexfläche;

3) $\varepsilon_4 h_{4p}$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen in Σ, welche einen Strahl enthalten, der von den n Strahlen vier in sich vereinigt, und welche dabei diesen Coincidenzstrahl durch einen gegebenen Punkt schicken; m. a. W. die Ordnung der Congruenz der Undulationskanten, welche den Complexkegeln von C_n angehören;

4) $\varepsilon_{22} h_2 h_1 h_1$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen, welche zwei verschiedene Strahlen besitzen, in denen von den n Strahlen zwei coincidiren, welche ferner irgend einen dieser Coincidenzstrahlen durch zwei gegebene Gerade schicken, und von den übrigen $n - 4$ Strahlen zwei verschiedene durch zwei gegebene Gerade schicken;

5) $\varepsilon_{22} c h_2 h_2$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen, welche zwei verschiedene Strahlen besitzen, in denen von den n Strahlen zwei coincidiren, welche ferner jeden dieser beiden Coincidenzstrahlen durch je eine gegebene Gerade schicken, und dabei ihren Scheitel auf einer gegebenen Ebene haben.

Von den Zahlen ε hat man nur diejenigen zu berechnen, welche die einfachen Grundbedingungen ihrer Strahlen h enthalten, da aus diesen alle andern durch die fundamentalen Formeln gewonnen werden können, welche *die Grundbedingungen incidenter Hauptelemente mit einander verbinden* (Beitr. § 9, I u. II, Abh. üb. Gruppen (50) bis (53)). Liegen nämlich a Strahlen f in der Ebene μ und gehen sie zugleich durch den Punkt c, so erhält man durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl die folgenden Gleichungen zwischen den Grundbedingungen der Strahlen f, der Ebene μ und des Punktes c:

$$(1) \qquad \begin{aligned} f_e &= cf - a \cdot c^2, \\ f_p &= \mu f - a \cdot \mu^2, \end{aligned}$$

und aus ihnen durch symbolische Multiplication:

$$(1) \qquad \begin{aligned} f_s &= \mu c f - a \cdot (\mu^3 + \mu c^2) = \mu c f - a \cdot (c^3 + \mu^2 c), \\ F &= (\mu^2 c - \mu^3) f - a \cdot \mu^2 c^2 = (\mu c^2 - c^3) f - a \cdot \mu^2 c^2. \end{aligned}$$

Hiernach ist z. B.

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 h_{3s} &= \varepsilon_3 \mu c h_3 - \varepsilon_3 \mu^3 - \varepsilon_3 \mu c^2, \\ \varepsilon_{23} h_{1e} &= \varepsilon_{23} c h_1 - (n-5)\, \varepsilon_{23} c^2. \end{aligned}$$

In der folgenden *Tabelle* der zu berechnenden Zahlen ε sind daher alle Zahlen fortgelassen, welche durch die Formeln (1) aus angegebenen Zahlen hervorgehen. Ferner ist von zwei sich dualistisch entsprechenden Zahlen immer nur die eine angeführt.

Tabelle der zu berechnenden Zahlen ε.

I 1) $\varepsilon_2 \mu^3 c$, 2) $\varepsilon_2 \mu^2 c^2$, 3) $\varepsilon_2 \mu^3 h_2$, 4) $\varepsilon_2 \mu^2 c h_2$,
5) $\varepsilon_2 \mu^3 h_1$, 6) $\varepsilon_2 \mu^2 c h_1$, 7) $\varepsilon_2 \mu^2 h_2 h_1$, 8) $\varepsilon_2 \mu c h_2 h_1$,
9) $\varepsilon_2 \mu^2 h_1 h_1$, 10) $\varepsilon_2 \mu c h_1 h_1$, 11) $\varepsilon_2 \mu h_2 h_1 h_1$,
12) $\varepsilon_2 \mu h_1 h_1 h_1$, 13) $\varepsilon_2 h_2 h_1 h_1 h_1$, 14) $\varepsilon_2 h_1 h_1 h_1 h_1$;

II 1) $\varepsilon_3 \mu^3$, 2) $\varepsilon_3 \mu^2 c$, 3) $\varepsilon_3 \mu^2 h_3$, 4) $\varepsilon_3 \mu c h_3$,
5) $\varepsilon_3 \mu^2 h_1$, 6) $\varepsilon_3 \mu c h_1$, 7) $\varepsilon_3 \mu h_3 h_1$, 8) $\varepsilon_3 \mu h_1 h_1$,
9) $\varepsilon_3 h_3 h_1 h_1$, 10) $\varepsilon_3 h_1 h_1 h_1$;

III 1) $\varepsilon_{22} \mu^3$, 2) $\varepsilon_{22} \mu^2 c$, 3) $\varepsilon_{22} \mu^2 h_2$, 4) $\varepsilon_{22} \mu c h_2$,
5) $\varepsilon_{22} \mu^2 h_1$, 6) $\varepsilon_{22} \mu c h_1$, 7) $\varepsilon_{22} \mu h_2 h_2$, 8) $\varepsilon_{22} \mu h_2 h_1$,
9) $\varepsilon_{22} \mu h_1 h_1$, 10) $\varepsilon_{22} h_2 h_2 h_1$, 11) $\varepsilon_{22} h_2 h_1 h_1$,
12) $\varepsilon_{22} h_1 h_1 h_1$;

IV 1) $\varepsilon_4 \mu^2$, 2) $\varepsilon_4 \mu c$, 3) $\varepsilon_4 \mu h_4$, 4) $\varepsilon_4 \mu h_1$,
5) $\varepsilon_4 h_4 h_1$, 6) $\varepsilon_4 h_1 h_1$;

V 1) $\varepsilon_{32}\mu^2$, 2) $\varepsilon_{32}\mu c$, 3) $\varepsilon_{32}\mu h_3$, 4) $\varepsilon_{32}\mu h_2$,
5) $\varepsilon_{32}\mu h_1$, 6) $\varepsilon_{32}h_3h_2$, 7) $\varepsilon_{32}h_3h_1$,
8) $\varepsilon_{32}h_2h_1$, 9) $\varepsilon_{32}h_1h_1$;

VI 1) $\varepsilon_{222}\mu^2$, 2) $\varepsilon_{222}\mu c$, 3) $\varepsilon_{222}\mu h_2$, 4) $\varepsilon_{222}\mu h_1$,
5) $\varepsilon_{222}h_2h_2$, 6) $\varepsilon_{222}h_2h_1$, 7) $\varepsilon_{222}h_1h_1$;

VII 1) $\varepsilon_5\mu$, 2) ε_5h_3, 3) ε_5h_1;

VIII 1) $\varepsilon_{42}\mu$, 2) $\varepsilon_{42}h_4$, 3) $\varepsilon_{42}h_2$, 4) $\varepsilon_{42}h_1$;

IX 1) $\varepsilon_{33}\mu$, 2) $\varepsilon_{33}h_3$, 3) $\varepsilon_{33}h_1$;

X 1) $\varepsilon_{322}\mu$, 2) $\varepsilon_{322}h_3$, 3) $\varepsilon_{322}h_2$, 4) $\varepsilon_{322}h_1$;

XI 1) $\varepsilon_{2222}\mu$, 2) $\varepsilon_{2222}h_2$, 3) $\varepsilon_{2222}h_1$;

XII ε_6; XIII ε_{52}; XIV ε_{43}; XV ε_{422};

XVI ε_{332}; XVII ε_{3222}; XVIII ε_{22222}.

Die hier zusammengestellten 82 Zahlen für die den Complex C_n berührenden Strahlbüschel sind in § 4. durch n ausgedrückt.

§ 2.

Die Zahlen für die ∞^5 den Complex nicht berührenden Strahlbüschel.

Aus der in § 1. angegebenen Bezeichnung

$$g^{i,\,k,\,l,\,m,\,q,}$$

ergiebt sich unmittelbar:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &g g^{1,} = g^{2,} + g^{\mathrm{II},} + g^{1,1,},\\ &g g^{2,} = g^{3,} + g^{2,1}, \; g g^{\mathrm{II},} = g^{3,} + g^{\mathrm{II},1,},\\ &g g^{3,} = g^{4,} + g^{3,1,},\\ &g g^{\mathrm{II},1,1,} = g^{3,1,1,} + 2g^{\mathrm{II},2,1,} + 2g^{\mathrm{II},\mathrm{II},1,} + g^{\mathrm{II},1,1,1,},\\ &g g^{1,1,1,1,} = 4g^{2,1,1,1,} + 4g^{\mathrm{II},1,1,1,} + g^{1,1,1,1,1,};\text{*)} \end{aligned}$$

und so fort.

Diese Identitäten verbinden wir mit der Anwendung einer gewissen *Stammformel*, welche der Formel 33) in der „Abh. üb. Gruppen“ analog ist, und auf den Productensätzen des Strahls (Beitr. § 26.) beruht. Die Stammformel gewinnen wir durch folgende Ueberlegung. Wenn eine Gesammtheit von ∞^1 Strahlbüschel von ihren ∞^1 Scheiteln c in einer gegebenen Ebene besitzt, und von ihren ∞^1 Ebenen μ durch einen gegebenen Punkt schickt, so hat die von ihren ∞^2 Strahlen ge-

*) Analog in den Beitr. pag. 38 und in Formel (34) der „Abh. üb. Gruppen“.

bildete Congruenz die Gradzahlen c und μ_* hat also mit dem Complex b_n ∞^1 Strahlen gemein, von denen:

$$\mu \cdot n + c \cdot n$$

eine gegebene Gerade schneiden. Desshalb ist für jedes einstufige System von Strahlengruppen, welches dem fünfstufigen Systeme Σ angehört:

$$(3) \qquad n\,(\mu + c) = g.$$

Hieraus folgt z. B.

$$n\,(\mu + c)\,\mu^2 c g^{1,} = \mu^2 c g g^{1,}.$$

Für $\mu^2 c g g^{1,}$ kann man aber wegen der Identitäten (2) setzen:

$$\mu^2 c g^{2,} + \mu^2 c g^{\mathrm{II},} + \mu^2 c g^{1,\,1,};$$

also lässt sich $\mu^2 c g^{1,\,1,}$ aus $\mu^3 c g^{1,}$, $\mu^2 c^2 g^{1,}$, $\mu^2 c g^{2,}$, $\mu^2 c g^{\mathrm{II},}$ berechnen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mu^2 c g^{1,\,1,} &= n\,(\mu^3 c g^{1,} + \mu^2 c^2 g^{1,}) - \mu^2 c g^{2,} - \mu^2 c g^{\mathrm{II},} \\ &= n\,(n + 2n) - n - n = n\,(3n - 2). \end{aligned}$$

So ergeben sich durch die Stammformel (3) allmählich *alle* Zahlen, die hier bestimmt werden sollen, *aus einigen wenigen* Zahlen, welche die aus der Definition des Complexes unmittelbar ersichtlichen Werthe 0, 1, n oder n^2 haben. Es sind dies:

$$\begin{gathered} \mu^3 c^2 = 1;\ \mu^3 g^{2,} = 0;\ \mu^3 g^{\mathrm{II},} = 0;\ \mu^2 c g^{2,} = n;\ \mu^2 c g^{\mathrm{II},} = n; \\ \mu^2 g^{3,} = 0;\ \mu c g^{3,} = n;\ \mu g^{4,} = 0;\ \mu g^{2,\,2,} = n^2;\ \mu g^{2,\,\mathrm{II}} = n^2; \\ \mu g^{\mathrm{II},\,\mathrm{II},} = n^2;\ g^{3,\,2,} = n^2; \text{ und die hierzu reciproken.} \end{gathered}$$

Hieraus folgt durch 2) und 3) nach und nach:

$$\begin{gathered} \mu^3 c g^{1,} = n;\ \mu^2 c^2 g^{1,} = 2n;\ \mu^3 g^{1,\,1,} = n^2;\ \mu^2 c g^{1,\,1,} = 3n^2 - 2n; \\ \mu^2 g^{2,\,1,} = n^2;\ \mu^2 g^{\mathrm{II},\,1,} = n^2;\ \mu c g^{2,\,1,} = 2n^2 - n;\ \mu g^{3,\,1,} = n^2; \\ \mu^2 g^{1,\,1,\,1,} = 4n^3 - 6n^2;\ \mu c g^{1,\,1,\,1,} = 6n^3 - 12n^2 + 4n; \\ \mu g^{2,\,1,\,1,} = 3n^3 - 4n^2;\ \mu g^{\mathrm{II},\,1,\,1,} = 3n^3 - 4n^2; \\ g^{2,\,2,\,1,} = 2n^3 - 2n^2;\ g^{2,\,\mathrm{II},\,1,} = 2n^3 - 2n^2;\ g^{3,\,1,\,1,} = 2n^3 - 2n^2; \\ \mu g^{1,\,1,\,1,\,1,} = 10n^4 - 36n^3 + 28n^2;\ g^{2,\,1,\,1,\,1,} = 6n^4 - 18n^3 + 10n^2; \\ g^{1,\,1,\,1,\,1,\,1,} = 20n^5 - 120n^4 + 200n^3 - 80n^2. \end{gathered}$$

Für die Symbole:

$$g^{1,}\ \ g^{1,\,1,}\ \ g^{1,\,1,\,1,}\ \ g^{1,\,1,\,1,\,1,}\ \ g^{1,\,1,\,1,\,1,\,1,}$$

wollten wir wegen der Bezeichnung in § 4. der „Abh. üb. Gruppen" bezüglich die Zeichen:

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5$$

benutzen. Diese geben, mit den Grundbedingungen des Strahlbüschels zusammengesetzt, die für die Ableitung der Zahlen ε wichtigen *Stammzahlen*. Die Werthe derselben entnehmen wir den obigen Formeln, und stellen sie hier zusammen.

Tabelle der Stammzahlen.

$$
(4) \quad \begin{aligned}
&\mu^3 c^2 = 1;\\
&\mu^3 c \gamma_1 = n,\ \mu^2 c^2 \gamma_1 = 2n;\\
&\mu^3 \gamma_2 = n^2,\ \mu^2 c \gamma_2 = n(3n-2);\\
&\mu^2 \gamma_3 = 2n^2(2n-3),\ \mu c \gamma_3 = 2n(3n^2-6n+2);\\
&\mu \gamma_4 = 2n^2(5n^2-18n+14);\\
&\gamma_5 = 20n^2(n-2)(n^2-4n+2).
\end{aligned}
$$

und die hierzu reciproken.

Beachtenswerth ist, dass diese Ausdrücke der γ_i enthaltenden Symbole für $i = n - 1$ *nicht null* werden. Z. B. γ_4 giebt für $n = 3$ den Werth 90; d. h. es giebt Strahlbüschel, welche *vier* verschiedene Strahlen aus einem Complexe *dritten* Grades enthalten, von denen jeder durch je eine willkürlich gegebene Gerade geht. Folglich muss *jeder* Strahl eines solchen Strahlbüschels dem Complexe angehören. Unser Resultat $\mu\gamma_4 = 90$ für $n = 3$ sagt uns also, dass der Complex dritten Grades ∞^1 Strahlbüschel besitzt, deren sämmtliche Strahlen dem Complexe angehören, dass die Ebenen dieser Strahlbüschel eine Torse 90^ter Klasse einhüllen, und reciprok, dass die Scheitel dieser Strahlbüschel eine Raumcurve 90^ter Ordnung bilden. Analoges kann man auch aus den andern Stammzahlen schliessen. Um diese Schlüsse bequem aussprechen zu können, sagen wir von einem solchen Strahlbüschel, dessen sämmtliche Strahlen dem Complexe angehören, dass er in dem Complexe *liege*.

1) Aus $\mu^3\gamma_2 = c^3\gamma_2 = 1$ und $\mu^2 c\gamma_2 = \mu c^2\gamma_2 = 1$ für $n = 1$ folgt das selbstverständliche Resultat:
In dem Complex *ersten* Grades liegen ∞^3 Strahlbüschel so, dass in jeder gegebenen Ebene *einer* liegt; die Scheitel derjenigen unter diesen Strahlbüscheln, welche ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, bilden eine Curve *ersten* Grades; und reciprok.

2) Aus $\mu^2\gamma_3 = c^2\gamma_3 = 8$ und $\mu c\gamma_3 = 8$ für $n = 2$ folgt:
In dem Complex *zweiten* Grades liegen ∞^2 Strahlbüschel. Ihre Scheitel bilden eine Fläche 8^ter Ordnung;*) die Scheitel derjenigen unter ihnen, welche ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken, bilden eine Raumcurve 8^ter Ordnung; und reciprok.

3) Aus $\mu\gamma_4 = c\gamma_4 = 90$ für $n = 3$ folgt:

*) Die doppelt gezählte Kummersche Fläche, *doppelt* gezählt, weil jeder ihrer Punkte Scheitel *zweier* in dem Complexe zweiten Grades liegender Strahlbüschel ist.

In dem Complex *dritten* Grades liegen ∞^1 Strahlbüschel. Ihre Scheitel bilden eine Curve 90^{ter} Ordnung;*) und reciprok.

4) Aus $\gamma_5 = 20 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 2 = 1280$ für $n = 4$ folgt:
In dem Complex *vierten* Grades liegen 1280 Strahlbüschel.**)

§ 3.

Ableitung der 82 Zahlen ε.

In der Einleitung ist hervorgehoben, dass wir die in § 1. definirten 82 Zahlen ε durch *zwei* Methoden gewinnen können, welche wir die directe und die indirecte Methode genannt haben.

Directe Methode.

Indem man die allgemeinen Formeln benutzt, welche der Verfasser in § 4. der „Abh. üb. Gruppen" für Systeme von Strahlengruppen aufgestellt hat, gelangt man zu Ausdrücken, welche *jede* der gesuchten 82 Zahlen ε als Function der in § 2. berechneten *Stammzahlen:*

$$\gamma_5, \; \gamma_4\mu, \; \gamma_4 c, \; \gamma_3\mu^2, \; \gamma_3\mu c, \; \gamma_3 c^2, \; \gamma_2\mu^3, \; \gamma_2\mu^2 c, \; \gamma_2\mu c^2, \; \gamma_2 c^3,$$
$$\gamma_1\mu^3 c, \; \gamma_1\mu^2 c^2, \; \gamma_1\mu c^3, \; \mu^3 c^2,$$

darstellen. Einige beliebig ausgewählte Beispiele werden genügen, um diese Methode der Ableitung aus den Stammzahlen klar zu legen.

Erstes Beispiel.

Um die in § 1. unter IV, 6) genannte Zahl $\varepsilon_4 h_1 h_1$ zu berechnen, gehen wir von der für $k = 4$ specialisirten Formel 65) in der „Abh. üb. Gruppen" aus, und beachten, dass die Hinzufügung des Factors $h_1 h_1$ γ_3 in γ_5, γ_2 in γ_4, γ_1 in γ_3, γ_0 in γ_2 und jeden Coefficienten $n-i$ in $n-i-2$ verwandelt. So erhalten wir:

$$\varepsilon_4 h_1 h_1 = 4\gamma_5(n-5) - 6(\mu+c)\gamma_4(n-5)(n-4)$$
$$+8\mu c\gamma_3(n-5)(n-4)(n-3) - 2(\mu^2 c - \mu^3)\gamma_2(n-5)(n-4)(n-3)(n-2),$$

und hieraus durch Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen (§ 2., Formeln 4):

$$\varepsilon_4 h_1 h_1 = 4n(n-5)(n^4 + 10n^3 - 31n^2 - 38n + 72).$$

Zweites Beispiel.

Um die in § 1. unter XII genannte Zahl ε_6 zu berechnen, wenden wir die Formel 67) der „Abh. üb. Gruppen" an, und erhalten unmittelbar:

$$\varepsilon_6 = 6\gamma_5(n-5) - 15(\mu+c)\gamma_4(n-5)(n-4)$$
$$+40\mu c\gamma_3(n-5)(n-4)(n-3) - 30(\mu^2 c - \mu^3)\gamma_2(n-5)(n-4)(n-3)(n-2),$$

*) Voss (Math. Ann. Bd. IX), pag. 158.

**) Dieses liniengeometrische Analogon der 27 auf einer Punktfläche dritter Ordnung liegenden Geraden ist wohl noch nicht bemerkt.

und hieraus durch Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen:

$$\varepsilon_6 = 20n(n-5)(17n^2-50n+24).$$

Drittes Beispiel.

Um die in § 1. unter V 1) genannte Zahl $\mu^2\varepsilon_{32}$ zu berechnen, hat man die Formel 65) „der Abh. üb. Gruppen" für $k=3$ und für $k=2$ zu specialisiren, die erhaltenen specielleren Formeln mit einander symbolisch zu multipliciren, dann jedem Bedingungssymbole μ^2 als Factor hinzusetzen, und namentlich zu beachten, dass nun als Coefficient von γ_i

$$(n-i)(n-i-1)\cdot\cdot\cdot\cdot(n-4)$$

auftreten muss, analog wie bei Formel 27) in der „Abh. üb. Gruppen". Man erhält so:

$$\mu^2\varepsilon_{32} = (n-4)(n-3)[6\gamma_3\mu^2 - 9\gamma_2(\mu^3+\mu^2c)(n-2) + 10\gamma_1\mu^3c(n-2)(n-1)$$
$$+3\gamma_1\mu^2c^2(n-2)(n-1) - 2\mu^3c^2(n-2)(n-1)\cdot n],$$

und hieraus durch Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen:

$$\mu^2\varepsilon_{32} = 2n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4).$$

Viertes Beispiel.

Um die in § 1. unter VII 2) genannte Zahl $\varepsilon_5 h_5$ zu berechnen, hat man aus der „Abh. üb. Gruppen" die Formel 68) anzuwenden. Diese heisst:

$$\begin{aligned}\varepsilon_5 h_5 = \gamma_5 &- 10(n-3)(n-4)(\mu^2+c^2)\gamma_3\\ &+ 20(n-2)(n-3)(n-4)(\mu^3+\mu c^2)\gamma_2\\ &- 10(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mu^2c^2\gamma_1,\end{aligned}$$

und giebt nach Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen:

$$\varepsilon_5 h_5 = 20n(7n^2-30n+24).$$

Fünftes Beispiel.

Um die in § 1. unter XVIII genannte Zahl ε_{22222} zu berechnen, hat man die gewöhnliche Strahlenpaarformel

$$\varepsilon = 2g - \mu - c$$

mit 5 zu *potenziren*, und dabei zu beachten, dass jedes g^i zu γ_i wird, und dass als Coefficient bei γ_i zu setzen ist:

$$(n-i)(n-i-1)\cdot\cdot\cdot\cdot(n-9),$$

weil nach Aussonderung von i Strahlen durch γ_i als $(i+1)^{\text{ter}}$ jeder der $n-i$ übrigen Strahlen zu betrachten ist, und so fort bis zum 10^{ten} Strahle. So erhält man das liniengeometrische Analogon der Formel 32) in der „Abh. üb. Gruppen":

$$5!\,\varepsilon_{22222} = (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)[5_0 \cdot 2^5 \cdot \gamma_5 - 5_1 \cdot 2^4 \cdot (n-4)(\mu+c)\gamma_4$$
$$+ 5_2 \cdot 2^3 (n-4)(n-3)(\mu+c)^2 \gamma_3 - 5_3 \cdot 2^2 (n-4)(n-3)(n-2)(\mu+c)^3 \gamma_2$$
$$+ 5_4 \cdot 2^1 (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)(\mu+c)^4 \gamma_1$$
$$- 5_5 \cdot 2^0 \cdot (n-4)(n-3)(n-2)(n-1) \cdot n (\mu+c)^5].$$

Hieraus erhält man nach Ausrechnung der Potenzen von $\mu + c$, und Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen:

$$\varepsilon_{22222} = \tfrac{1}{6}\, n\, (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-2)(n^3+8n^2+19n-12).$$

Wir bemerken noch einmal, dass die in den obigen 5 Beispielen angegebenen Formeln für ε, bei denen die Werthe der Stammzahlen *noch nicht* eingesetzt sind, Singularitäten-Zahlen für das *allgemeine* fünfstufige System von Zahlengruppen, d. h. für ein Gebilde ausdrücken, welches den Complex n^{ten} Grades als *speciellen* Fall enthält.

Indirecte Methode.

Hier wenden wir keine andern Correspondenzformeln an, als zwei von denjenigen Formeln, welche auf *Paare* sich schneidender Strahlen Bezug nehmen. Es ist nämlich immer für zwei in einem Strahlbüschel (μ, c) liegende Strahlen g_i und g_m die Zahl ε solcher Paare eines einstufigen Systems, bei denen g_i und g_m im Strahle h coincidiren:

(5) $\qquad \varepsilon = g_i + g_m - \mu - c,$ (Beitr. § 20, F. 56)

und

(6) $\qquad \varepsilon h = g_i g_m - \mu^2 - c^2$ (Beitr. § 20, F. 59).

Mit Hilfe dieser Formeln kann man aus den Zahlen des § 2., welche sich auf nicht berührende Strahlbüschel beziehen, leicht die Zahlen ε_2 finden, welche auf Strahlbüschel Bezug nehmen, die den Complex an einer Stelle zweistrahlig berühren. Man wende z. B. die Correspondenzformel (5) auf das einstufige System derjenigen Strahlenpaare an, welche von je zwei der $n-2$ Strahlen gebildet werden, die einer die Bedingung $\mu^2\gamma_2$ erfüllenden Strahlengruppe auf Σ angehören, und von den durch γ_2 ausgesonderten Strahlen verschieden sind. Dann hat man für g_i und für g_m

$$\mu^2\gamma_3\,(n-3),$$

und für das $\mu + c$ der Formel (5)

$$\mu^2\,(\mu + c)\,\gamma_2\,(n-2)\,(n-3)$$

zu setzen, und erhält so:

$$\varepsilon_2 \mu^2 h_1 h_1 = 2\mu^2\gamma_3\,(n-3) - (\mu^3 + \mu^2 c)\,\gamma_2\,(n-2)\,(n-3),$$

und nach Einsetzung der aus § 2. bekannten Werthe für die Symbole der rechten Seite:

$$\varepsilon_2 \mu^2 h_1 h_1 = 2n\,(n-3)\,(2n^2 - n - 2).$$

In derselben Weise kann man aus den Stammzahlen des § 2. jede der

14 in § 1. angeführten Zahlen ε_2 erhalten. Schliesslich erhält man noch Controlen der Berechnung durch die Stammformel (3). Nach dieser Formel ist z. B.

$$n \cdot \varepsilon_2 \mu h_1 h_1 (\mu + c) = 2 \varepsilon_2 \mu h_2 h_1 h_1 + \varepsilon_2 \mu h_{2e} h_1 \\ + \varepsilon_2 \mu h_{2p} h_1 + \varepsilon_2 \mu h_1 h_{2e} + \varepsilon_2 \mu h_1 h_{2p} + \varepsilon_2 \mu h_1 h_1 h_1,$$

woraus man nach Benutzung der Formeln (1) eine Identität erhält.

Hat man die 14 Zahlen ε_2 berechnet, so gewinnt man aus diesen in ähnlicher Weise jede der 10 Zahlen ε_3. Wir wählen als Beispiel eine auf einer Anwendung der Formel (6) beruhende Ableitung, nämlich die von $\varepsilon_3 \mu c h_3$. Hierfür müssen wir das zweistufige System von Strahlenpaaren zu Grunde legen, welche von dem Coincidenzstrahle und einem der $n - 2$ andern Strahlen auf jeder Strahlengruppe ε_2 gebildet werden, die die Bedingung μc erfüllt. Dann ist das Symbol $g_i g_m$ der Formel (6) gleich $\varepsilon_2 \mu c h_2 h_1$, und das $\mu^2 + c^2$ der Formel (6) gleich $\varepsilon_2 \mu c (\mu^2 + c^2)(n - 2)$ zu setzen. So erhält man:

$$\varepsilon_3 \mu c h_3 = \varepsilon_2 \mu c h_2 h_1 - \varepsilon_2 \mu c (\mu^2 + c^2)(n - 2) \\ = 2n^2 (2n - 3) - 2n (n - 1)(n - 2) = 2n (n^2 - 2).$$

Aus den 14 Zahlen ε_2 folgt auch jede der 12 Zahlen ε_{22}.

Aus den letzteren kann man dann sowohl jede der 6 Zahlen ε_4, wie auch jede der 9 Zahlen ε_{32}, wie auch jede der 7 Zahlen ε_{222} berechnen, indem man immer nur die obigen Correspondenzformeln (5) und (6) anwendet. So erhält man überhaupt aus den Zahlen der in der folgenden Uebersicht links stehenden Symbole die sämmtlichen Zahlen jedes der rechts stehenden Symbole.

Uebersicht der allmählichen Ableitung.

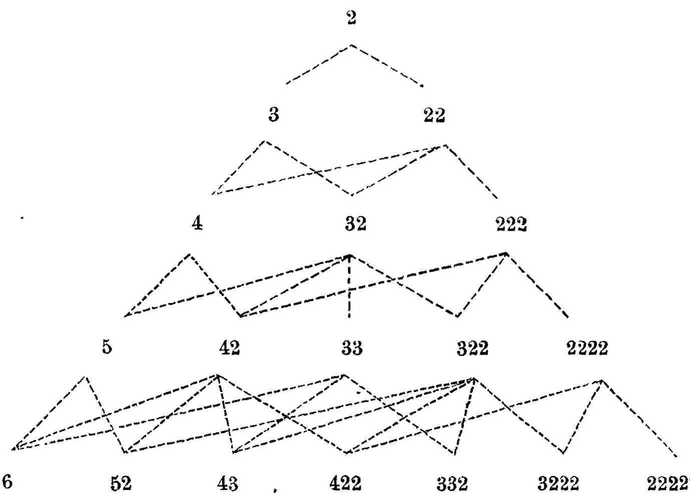
Aus	folgen
den Stammzahlen	ε_2;
ε_2	ε_3, ε_{22};
ε_3	ε_4, ε_{32},
ε_{22}	ε_1, ε_{32}, ε_{222};
ε_4	ε_5, ε_{42},
ε_{32}	ε_5, ε_{42}, ε_{33}, ε_{322},
ε_{222}	ε_{42}, ε_{322}, ε_{2222};
ε_5	ε_6, ε_{52},
ε_{42}	ε_6, ε_{52}, ε_{13}, ε_{422},
ε_{33}	ε_6, ε_{43}, ε_{332},
ε_{322}	ε_{52}, ε_{43}, ε_{422}, ε_{332}, ε_{3222},
ε_{2222}	ε_{422}, ε_{3222}, ε_{22222}.

Also umgekehrt:

Es folgen	aus	Es folgen	aus
ε_2	den Stammzahlen;	ε_{322}	ε_{32} u. ε_{222}
ε_3	ε_2,	ε_{2222}	ε_{222};
ε_{22}	ε_2;	ε_6	ε_{52} u. ε_{42} u. ε_{33},
ε_4	ε_3 u. ε_{22},	ε_{52}	ε_5 u. ε_{42} u. ε_{322},
ε_{32}	ε_3 u. ε_{22},	ε_{43}	ε_{42} u. ε_{33} u. ε_{322},
ε_{222}	ε_{22};	ε_{422}	ε_{42} u. ε_{322} u. ε_{2222},
ε_5	ε_4 u. ε_{32},	ε_{332}	ε_{33} u. ε_{322},
ε_{42}	ε_4 u. ε_{32} u. ε_{222},	ε_{3222}	ε_{322} u. ε_{2222},
ε_{33}	ε_{32},	ε_{22222}	ε_{2222}.

Dies giebt folgenden *Stammbaum,* in welchem nur die Indices der ε geschrieben sind.

Stammzahlen



Man sieht, dass die manchen Symbolen ε angehörigen Zahlen auf *zweifache* oder *dreifache* Weise gewonnen werden können, was für die Controle der Berechnung sehr nützlich ist.

Zur Erläuterung mögen hier noch einige beliebig ausgewählte Formeln für die Berechnung folgen:

1) $\varepsilon_{32}\mu h_2$ aus ε_{22} durch:

$$\varepsilon_{22}\,[\mu h_2 h_2\,(n-4) + \mu h_2 h_1 - (\mu^2 h_2 + \mu c h_2)\,(n-4)] = \varepsilon_{32}\,\mu\,h_2\,;$$

2) $\varepsilon_{32}\,\mu h_2$ aus ε_3 durch:

$$\varepsilon_3\,[\mu h_1 h_1 - (\mu^3 + \mu c^2)\,(n-3)\,(n-4)] = \varepsilon_{32}\mu h_2;$$

3) $\varepsilon_5 h_1$ aus ε_4 durch:
$$\varepsilon_4 [h_4 h_1 (n-5) + h_1 h_1 - (\mu + c) h_1 (n-5)] = \varepsilon_5 h_1;$$
4) $\varepsilon_5 h_1$ aus ε_{32} durch:
$$\varepsilon_{32} [h_3 h_1 + h_2 h_1 - (\mu + c) h_1] = \varepsilon_5 h_1;$$
5) $\varepsilon_{33}\mu$ aus ε_{32} durch:
$$\varepsilon_{32} [\mu h_2 (n-5) + \mu h_1 - (\mu^2 + \mu c)(n-5)] = 2\varepsilon_{33};$$
6) ε_{43} aus ε_{42} durch:
$$\varepsilon_{42} [h_2 (n-6) + h_1 - (\mu + c)(n-6)] = \varepsilon_{43};$$
7) ε_{43} aus ε_{33} durch:
$$\varepsilon_{33} [h_3 (n-6) + 2h_1 - (\mu + c) \cdot 2(n-6)] = \varepsilon_{43};$$
8) ε_{43} aus ε_{322} durch:
$$\varepsilon_{322} [h_2 + h_2 - 2(\mu + c)] = \varepsilon_{43};$$
9) ε_{22222} aus ε_{2222} durch:
$$\varepsilon_{2222} [h_1 (n-8) + h_1 (n-9) - (\mu + c)(n-8)(n-9)] = 5\varepsilon_{22222}.$$
So hat der Verfasser die sämmtlichen 82 Zahlen ε mit vielen Bestätigungen gefunden, und in § 4. *tabellarisch zusammengestellt.* Weitere Bestätigungen kann man, wie schon erwähnt ist, durch die Formel (3) erhalten, gerade so wie solche in den „Tangentensingularitäten der Punktfläche" durch das Hilfsmittel II (Math. Ann. Bd. XI, pag. 349 oben) gewonnen werden. Z. B.
$$n(\mu + c)\varepsilon_{42} = 4 \cdot \varepsilon_{42} h_4 + 2 \cdot \varepsilon_{42} h_2 + \varepsilon_{42} h_1,$$
$$n(\mu + c) h_2 \varepsilon_{222} = 2 \cdot h_{2p} \varepsilon_{222} + 2 \cdot h_{2e} \varepsilon_{222} + 2 \cdot 2 \cdot h_2 h_2 \varepsilon_{222} + h_2 h_1 \varepsilon_{222}.$$
Die Werthe der Symbole, welche h_{ip}, h_{ie}, h_{is} enthalten, gewinnt man aus den übrigen durch die Formeln (1). Z. B.
$$\varepsilon_4 h_{1p} = \mu \varepsilon_4 h_4 - \mu^2 \varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_{222} h_{2e} = c \varepsilon_{222} h_2 - 3c^2 \varepsilon_{222},$$
$$\varepsilon_3 h_{1s} = \mu c \varepsilon_3 h_1 - (n-3)(\mu c^2 + \mu^3) \varepsilon_3.$$

§ 4.

Zusammenstellung der Werthe für die 82 Zahlen ε.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen die Ableitung aller 82 Zahlen ε durch verschiedene Methoden gezeigt haben, stellen wir hier ihre Werthe mit den Nummern und Bezeichnungen des § 1. zusammen:

I) ε_2.

1) $\mu^3 c = n(n-1)$,
2) $\mu^2 c^2 = 2n(n-1)$,
3) $\mu^3 h_2 = n$,

4) $\mu^2 c h_2 = n(2n-1)$,
5) $\mu^3 h_1 = n(n-2)(n+1)$,
6) $\mu^2 c h_1 = n(n-2)(3n-1)$,
7) $\mu^2 h_1 h_2 = 2n(n^2-2)$,
8) $\mu c h_1 h_2 = 2n^2(2n-3)$,
9) $\mu^2 h_1 h_1 = 2n(n-3)(2n^2-n-2)$,
10) $\mu c h_1 h_1 = 2n^2(n-3)(3n-4)$,
11) $\mu h_2 h_1 h_1 = 2n(3n^3-7n^2-3n+6)$,
12) $\mu h_1 h_1 h_1 = 2n(n-4)(5n^3-12n^2-n+6)$,
13) $h_2 h_1 h_1 h_1 = 4n^2(3n^3-13n^2+5n+16)$,
14) $h_1 h_1 h_1 h_1 = 4n^2(n-5)(5n^3-22n^2+14n+16)$.

II) ε_3.

1) $\mu^3 = 3n(n-2)$
2) $\mu^2 c = n(n-2)(2n+1)$,
3) $\mu^2 h_3 = 2n(3n-4)$,
4) $\mu c h_3 = 2n(n^2-2)$,
5) $\mu^2 h_1 = 2n(n-3)(n-1)(n+4)$,
6) $\mu c h_1 = 4n(n-3)(n-1)(n+1)$,
7) $\mu h_1 h_3 = 2n(n^3+3n^2-15n+6)$,
8) $\mu h_1 h_1 = 2n(n-4)(3n^3+n^2-17n+6)$,
9) $h_3 h_1 h_1 = 4n(n^4+2n^3-24n^2+14n+24)$,
10) $h_1 h_1 h_1 = 4n(n-5)(3n^4-3n^3-28n^2+22n+24)$.

III) ε_{22}.

1) $\mu^3 = \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$,
2) $\mu^2 c = \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(3n+1)$,
3) $\mu^2 h_2 = 2n(n-3)(n^2+2n-4)$,
4) $\mu c h_2 = 2n(n-3)(2n^2-n-2)$,
5) $\mu^2 h_1 = 2n(n-1)(n-3)(n-4)(n+2)$,
6) $\mu c h_1 = n(n-1)(n-3)(n-4)(3n+2)$,
7) $\mu h_2 h_2 = 2n(2n^3-2n^2-9n+6)$,
8) $\mu h_1 h_2 = 2n(n-4)(3n^3-2n^2-13n+6)$,
9) $\mu h_1 h_1 = n(n-4)(n-5)(5n^3-4n^2-15n+6)$,
10) $h_2 h_2 h_1 = 4n(2n^4-6n^3-5n^2+2n+24)$,
11) $h_2 h_1 h_1 = 4n(n-5)(3n^4-7n^3-15n^2+14n+24)$,
12) $h_1 h_1 h_1 = 2n(n-5)(n-6)(5n^1-12n^3-19n^2+22n+24)$.

IV) ε_4.

1) $\mu^2 = 4n(n-3)(3n-2)$,
2) $\mu c = 2n(n-3)(n^2+3n-2)$,
3) $\mu h_4 = 2n(6n^2-11n-6)$,
4) $\mu h_1 = 2n(n-4)(n^3+10n^2-17n-6)$,
5) $h_1 h_4 = 4n(6n^3-11n^2-50n+72)$,
6) $h_1 h_1 = 4n(n-5)(n^4+10n^3-31n^2-38n+72)$.

V) ε_{32}.

1) $\mu^2 = 2n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$,
2) $\mu c = 2n(n-3)(n-4)(2n^2+3n-2)$,
3) $\mu h_3 = 2n(n-4)(n^3+6n^2-15n-6)$,
4) $\mu h_2 = 2n(n-4)(2n^3+4n^2-13n-6)$,
5) $\mu h_1 = 2n(n-4)(n-5)(3n^3+8n^2-19n-6)$,
6) $h_3 h_2 = 4n(n^4-n^3+n^2-50n+72)$,
7) $h_3 h_1 = 4n(n-5)(n^4+5n^3-21n^2-38n+72)$,
8) $h_2 h_1 = 4n(n-5)(2n^4+n^3-15n^2-42n+72)$,
9) $h_1 h_1 = 4n(n-5)(n-6)(3n^4+5n^3-35n^2-30n+72)$.

VI) ε_{222}.

1) $\mu^2 = \frac{2}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)$,
2) $\mu c = \frac{1}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(3n^2+3n-2)$,
3) $\mu h_2 = n(n-4)(n-5)(3n^3+4n^2-17n-6)$,
4) $\mu h_1 = \frac{1}{3}n(n-4)(n-5)(n-6)(5n^3+6n^2-21n-6)$,
5) $h_2 h_2 = 4n(n-5)(2n^4-2n^3-9n^2-38n+72)$,
6) $h_1 h_2 = 2n(n-5)(n-6)(3n^4-25n^2-30n+72)$,
7) $h_1 h_1 = \frac{2}{3}n(n-5)(n-6)(n-7)(5n^4-39n^2-22n+72)$.

VII) ε_5.

1) $\mu = 10n(n-4)(n+2)(2n-3)$,
2) $h_5 = 20n(7n^2-30n+24)$,
3) $h_1 = 20n(n-5)(2n^3+3n^2-30n+24)$.

VIII) ε_{42}.

1) $\mu = 2n(n-4)(n-5)(n^3+14n^2-n-30)$,
2) $h_4 = 4n(n-5)(6n^3+13n^2-138n+120)$,
3) $h_2 = 4n(n-5)(n^4+4n^3+15n^2-138n+120)$,
4) $h_1 = 4n(n-5)(n-6)(n^4+14n^3-5n^2-138n+120)$.

IX) ε_{33}.

1) $\mu = n(n-4)(n-5)(2n^3 + 12n^2 + n - 30)$,
2) $h_3 = 4n(n-5)(n^1 + 2n^3 + 19n^2 - 142n + 120)$,
3) $h_1 = 2n(n-5)(n-6)(2n^4 + 10n^3 + n^2 - 142n + 120)$.

X) ε_{322}.

1) $\mu = n(n-4)(n-5)(n-6)(3n^3 + 16n^2 - 5n - 30)$,
2) $h_3 = 2n(n-5)(n-6)(n^1 + 8n^3 - 3n^2 - 130n + 120)$,
3) $h_2 = 4n(n-5)(n-6)(2n^4 + 6n^3 - n^2 - 130n + 120)$,
4) $h_1 = 2n(n-5)(n-6)(n-7)(3n^1 + 14n^3 - 19n^2 - 130n + 120)$.

XI) ε_{2222}.

1) $\mu = \frac{1}{12} n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(5n^3 + 18n^2 - 9n - 30)$,
2) $h_2 = \frac{2}{3} n(n-5)(n-6)(n-7)(3n^4 + 8n^3 - 17n^2 - 122n + 120)$,
3) $h_1 = \frac{1}{6} n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(5n^4 + 14n^3 - 33n^2 - 122n + 120)$.

XII) ε_6.

$\varepsilon_6 \quad = 20n(n-5)(17n^2 - 50n + 24)$.

XIII) ε_{52}.

$\varepsilon_{52} \quad = 20n(n-5)(n-6)(2n^3 + 13n^2 - 50n + 24)$.

XIV) ε_{43}.

$\varepsilon_{13} \quad = 4n(n-5)(n-6)(n^4 + 8n^3 + 67n^2 - 250n + 120)$.

XV) ε_{422}.

$\varepsilon_{122} \quad = 2n(n-5)(n-6)(n-7)(n^4 + 18n^3 + 47n^2 - 250n + 120)$.

XVI) ε_{332}.

$\varepsilon_{332} \quad = 2n(n-5)(n-6)(n-7)(2n^4 + 16n^3 + 49n^2 - 250n + 120)$.

XVII) ε_{3222}.

$\varepsilon_{3222} = \frac{2}{3} n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(3n^4 + 24n^3 + 31n^2 - 250n + 120)$.

XVIII) ε_{22222}.

$\varepsilon_{22222} = \frac{1}{6} n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-2)(n^3 + 8n^2 + 19n - 12)$.

Die hier nicht angegebenen Zahlen der h_{ip}, h_{ie}, h_{is} enthaltenden Symbole können aus den angegebenen 82 Zahlen durch die Formeln (1) leicht bestimmt werden. Von diesen abgeleiteten Zahlen fügen wir noch einige beispielsweise hinzu:

II) 11) $\varepsilon_3 h_{3s} = \varepsilon_3(\mu c h_3 - \mu^3 - \mu c^2) = 4n$,

III) 13) $\varepsilon_{22} h_{2s} = \varepsilon_{22}(\mu c h_2 - 2\mu^3 - 2\mu c^2) = 2n(n-3)(n+2)$,

IV) 7) $\varepsilon_4 h_{4p} = \varepsilon_4 (\mu h_4 - \mu^2) = 2n(11n - 18)$,

V) 10) $\varepsilon_{32} h_{3p} = \varepsilon_{32} (\mu h_3 - \mu^2) = 2n(n-4)(3n^2 + 7n - 18)$,

V) 11) $\varepsilon_{32} h_{2p} = \varepsilon_{32} (\mu h_2 - \mu^2) = 2n(n-4)(n^3 + n^2 + 9n - 18)$,

VI) 8) $\varepsilon_{222} h_{2p} = \varepsilon_{222} (\mu h_2 - 3\mu^2) = n(n-4)(n-5)(n^3 + 4n^2 + 5n - 18)$.

Gewisse Zahlen ε geben für $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ *Bestätigungen* der in § 2. erhaltenen Resultate über die *in einem Complexe liegenden Strahlbüschel.* Z. B. erhält man die Zahl 1280 der in einem Complexe vierten Grades liegenden Strahlbüschel durch Einsetzung von $n = 4$ in die Formeln für $\varepsilon_2 h_2 h_1 h_1 h_1$, für $\varepsilon_3 h_3 h_1 h_1$, für $\varepsilon_{22} h_2 h_2 h_1$, für $\varepsilon_4 h_4 h_1$, für $\varepsilon_{32} h_3 h_2$, und für $\varepsilon_5 h_5$.

Die wichtigsten der Zahlen, welche durch unsere Symbole ε_2, ε_3, ε_{22}, ε_4, ε_{32}, ε_{222} dargestellt werden, sind bekannt. Sie finden sich in Voss' Abhandlung „Ueber Complexe und Congruenzen" (Math. Ann. Bd. IX, pag. 55 bis 162) berechnet. Wir stellen hier diese Zahlen mit Angabe der Seiten zusammen, auf denen sie dort zu finden sind.

1) $\varepsilon_3 h_{3s} = 4n$, (p. 63); d. h. durch jeden Complexstrahl gehen 4 Wendeebenen. (Analogon der 2 Haupttangenten in jedem Punkt einer Punktfläche).

2) $\varepsilon_3 (\mu^2 c - \mu^3) = 2n(n-1)(n-2)$, (p. 72), $\mu^2 c - \mu^3$ drückt nämlich für einen Strahlbüschel mit dem Scheitel μ und der Ebene c die Bedingung aus, dass der Scheitel auf einer Geraden liege, durch welche zugleich die Ebene des Strahlbüschels geht.

3) $\varepsilon_3 \mu h_e = n(3n-2)$, (p. 72).

4) $\varepsilon_3 \mu h_p = n(3n-2)$, (p. 73).

5) $\varepsilon_4 c^2 = 4n(n-3)(3n-2)$, (p. 74); dies ist die Ordnung der Fläche, welche von den Scheiteln derjenigen Complexkegel gebildet wird, die Undulationskanten besitzen.

6) $\varepsilon_4 h_{4p} = 2n(11n - 18)$. (p 74).

7) $\varepsilon_{22} h_{2s} = 2n(n+2)(n-3)$. (p. 75).

8) $\varepsilon_{22} (\mu^2 c - \mu^3) = n(n-1)(n-2)(n-3)$. (p. 75).

Die Singularitäten der *Plückerschen Complexfläche* sind durch diejenigen unserer Symbole ε ausgedrückt, welche die Bedingung μ^2 enthalten. Wir lassen die wichtigsten hier folgen.

9) $\varepsilon_2 \mu^2 c^2 = 2n(n-1)$, (Voss, p. 139).

10) $\varepsilon_3 \mu^2 c = n(n-2)(2n+1)$, (p. 139).

11) $\varepsilon_{22} \mu^2 c = \frac{1}{2} n(n-2)(n-3)(3n+1)$, (p. 139).

12) $\varepsilon_4 \mu^2 = 4n(n-3)(3n-2)$, (p. 141). (Zahl der stationären Punkte der Rückkehrcurve.)

13) $\varepsilon_{32}\mu^2 = 2n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$, (p. 76 u. 141).

14) $\varepsilon_{222}\mu^2 = \frac{2}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)$, (p. 76 u. 141).

Auch die Berechnung der Singularitäten der sogenannten *singulären Fläche* des Complexes, d. h. der Fläche der Scheitel aller mit *Doppelkanten* behafteten Complexkegel ist nach des Verfassers Methoden leicht zu bewerkstelligen; sie gehört aber nicht in den Rahmen der hier gelösten Probleme, ebensowenig, wie in den Rahmen der in § 27. der Beitr. gelösten Probleme die Berechnung der Singularitäten gehörte, welche auf die ∞^2 Tangentialebenen der Punktfläche F_n Bezug nehmen, d. h. der Ebenen der auf F_n liegenden und mit *Doppelpunkten* behafteten Plancurven.

Hamburg, Februar 1877.

Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre.

Von H. Grassmann in Stettin.

Es giebt wohl kaum ein Gebiet, auf welchem sich die Unentbehrlichkeit der in meiner Ausdehnungslehre (von 1844 und 1862) dargestellten Kalküls so schlagend erwiese wie in der Mechanik. Man kann sagen, jeder einfache mechanische Begriff sei zugleich ein einfacher Verknüpfungsbegriff jenes Kalküls. Und in der That hat sich mir diese ganze Rechnungsmethode, nachdem nur einmal die erste Idee derselben erfasst war, an der Hand der Mechanik am schnellsten und fruchtreichsten weiter entwickelt. Die Methoden, welche ich in diesem Aufsatze verwende, und die Gleichungen, zu denen ich durch sie gelange, habe ich (abgesehen von der hier und da geänderten Bezeichnung) ohne Ausnahme schon in einer Arbeit über die Theorie der Ebbe und Fluth, welche ich zu Pfingsten 1840 als Prüfungsarbeit bei der wissenschaftlichen Prüfungscommission in Berlin eingereicht habe, dargelegt. Nur weniges davon ist in meine Ausdehnungslehre von 1844 übergegangen. Die neueren Lehrbücher und Aufsätze über Mechanik, namentlich auch G. Kirchhoff's Vorlesungen (1875, 1876) zeigen mir, dass die Darstellung dieser Methoden noch heute ebenso förderlich sein werde, als sie es vor 37 Jahren gewesen wäre, wenn ich damals zu ihrer Veröffentlichung Zeit und Gelegenheit gefunden hätte. In einem späteren Aufsatze denke ich dann die hauptsächlichsten der hier noch nicht berührten Probleme der Mechanik durch neue, gleichfalls der Ausdehnungslehre entnommene Methoden zu lösen.

§ 1.

Begriffe und Gesetze der Ausdehnungslehre, die hier benutzt werden sollen.

Der Deutlichkeit wegen gebe ich hier eine Uebersicht über den Kalkül, so weit er in diesem Aufsatze zur Anwendung kommen soll, verweise aber in Bezug auf die nähere Begründung auf meine Ausdehnungslehren von 1844 und 1862, welche ich im Folgenden mit $\mathfrak{A}_1$

und $\mathfrak{A}_2$ bezeichne. Ich lege den Begriff der *Strecke* zu Grunde. Ich verstehe darunter eine begrenzte gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung, d. h. ich setze zwei Strecken als solche dann und nur dann gleich, wenn sie gleich lang und gleichgerichtet sind. Strecken werden *addirt*, indem man sie stetig aneinanderlegt, dann ist die Strecke vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkt der letzten ihre *Summe* ($\mathfrak{A}_1$ § 15—18, $\mathfrak{A}_2$ 220). Die *Subtraction* führt auf die Addition zurück, da man statt eine von dem Punkte A nach B gehende Strecke zu subtrahiren, die von B nach A gehende addiren kann. Der Begriff der *Vervielfachung* oder *Theilung* durch eine Zahl ergiebt sich aus dem allgemeinen Begriffe dieser Verknüpfungen unmittelbar. Dass für alle diese Verknüpfungen die gewöhnlichen Rechnungsgesetze derselben vollständig gelten, ist in der Ausdehnungslehre bewiesen.

Das *äussere Product* der Strecken a und b, geschrieben $[ab]$, wird formell dadurch definirt, dass erstens wie bei jedem Product die Beziehung zur Addition gilt, d. h. $[a(b+c)] = [ab] + [ac]$ und $[(a+b)c] = [ac] + [bc]$ ist, und zweitens das äussere Product gleicher Strecken null ist, $[aa] = 0$, begrifflich aber dadurch, dass wenn a die Strecke von dem Punkt A nach B, b die Strecke von B nach C oder von A nach D ist, dann $[ab]$ der *Flächenraum* des Parallelogramms $ABCD$ ist, und zwar in dem Sinne, dass zwei Flächenräume als solche dann und nur dann gleich sind, wenn sie in parallelen Ebenen liegen, gleichen Inhalt haben und der Umfang in beiden nach derselben Seite (rechts oder links) hin umläuft ($\mathfrak{A}_1$ § 28—30, 37, $\mathfrak{A}_2$ 239 ff.). Die Addition der Flächenräume, auch wenn sie nicht in parallelen Ebenen liegen, ist durch die Formel $[ab]+[ac]=[a(b+c)]$ vollkommen bestimmt. Aus der Formel $[(a+b)(a+b)] = 0$ ergiebt sich sogleich das zweite wichtige Gesetz der äusseren Multiplication, nämlich $[ab] = -[ba]$.

Das äussere Product dreier Strecken a, b, c oder eines Flächenraums $[ab]$ und einer Strecke c, wird formell dadurch definirt, dass $[abb] = 0$ und also auch $[abc] = -[acb]$ ist, begrifflich bei gehöriger Zeichenbestimmung als Inhalt eines Spates (Parallelepipedons), was a, b, c zu aneinander stossenden Seiten hat. Es wird null, wenn die drei Strecken in Einer Ebene liegen. Ferner ist $[abc]=[bca]=[cab]$ $= -[acb] = -[cba] = -[bac]$. ($\mathfrak{A}_1$ § 37, $\mathfrak{A}_2$ 240 ff.).

Unter dem *inneren Producte* $[a \mid b]$ zweier Strecken a und b, deren Längen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind, und die den Winkel $\angle\, ab$ einschliessen, verstehe ich das Product $[a|b] = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\cos \angle\, ab$, und für $[a|a]$ schreibe ich der Kürze wegen a^2 und nenne dies das innere Quadrat der Strecke a ($\mathfrak{A}_1$ XI, $\mathfrak{A}_2$ 179). Ich will den Verein dreier Strecken e_1, e_2, e_3, die zu einander senkrecht sind, und deren Längen und deren äusseres Product $[e_1 e_2 e_3]$ gleich Eins sind, einen Normalverein nennen. Die Gesetze der inneren Multiplication ergeben sich dann unmittelbar aus dem Begriff; namentlich $[a \mid b] = [b \mid a]$; $[a \mid b] = 0$, wenn a auf b senkrecht; $a^2 = \mathfrak{a}^2$, wenn $\mathfrak{a}$ die Länge von a, $[a \mid b] = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3$, wenn $a = \mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3$, $b = \mathfrak{b}_1 e_1 + \mathfrak{b}_2 e_2 + \mathfrak{b}_3 e_3$ ist und e_1, e_2, e_3 einen Normalverein bilden. Will man eine Einheit eines Normalvereins als Vielfachensumme von den Einheiten eines andern ausdrücken, so ergeben sich die Coefficienten unmittelbar als innere Producte dieser letzteren drei Einheiten in die erstgenannte z. B. $e_1 = [e_1 \mid \varepsilon_1]\, \varepsilon_1 + [e_1 \mid \varepsilon_2]\, \varepsilon_2 + [e_1 \mid \varepsilon_3]\, \varepsilon_3$. In der That setzt man $e_1 = x \varepsilon_1 + y \varepsilon_2 + z \varepsilon_3$, so erhält man durch innere Multiplication mit ε_1 unmittelbar $[e_1 \mid \varepsilon_1] = x$, da $[\varepsilon_2 \mid \varepsilon_1]$, $[\varepsilon_3 \mid \varepsilon_1] = 0$ und $\varepsilon_1{}^2 = 1$ ist, und ebenso $[e_1 \mid \varepsilon_2] = y$, $[e_1 \mid \varepsilon_3] = z$ also $e_1 = [e_1 \mid \varepsilon_1]\, \varepsilon_1 + [e_1 \mid \varepsilon_2]\, \varepsilon_2 + [e_1 \mid \varepsilon_3]\, \varepsilon_3$.

Es hat nicht die geringsten Schwierigkeiten, die durch diesen Kalkül erhaltenen Gleichungen in algebraische Gleichungen zu verwandeln. Man hat dann nur ein beliebiges Coordinatensystem zu Grunde zu legen, auf den drei Coordinatenachsen drei Strecken e_1, e_2, e_3 anzunehmen und jede in einer Gleichung vorkommende Strecke als Vielfachensumme von e_1, e_1, e_3, also in der Form $\mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3$, und jeden darin vorkommenden Flächenraum in der Form $\mathfrak{a}_1 [e_2 e_3] + \mathfrak{a}_2 [e_3 e_1] + \mathfrak{a}_3 [e_1 e_2]$ darzustellen, wobei die Zahlen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ die Coordinaten dort der Strecke, hier des Flächenraums heissen mögen, so erhält man schliesslich Gleichungen, in welchen entweder gar keine geometrischen Grössen mehr vorkommen, oder welche in den Formen $\mathfrak{B}_1 e_1 + \mathfrak{B}_2 e_2 + \mathfrak{B}_3 e_3 = 0$ oder $\mathfrak{B}_1 [e_2 e_3] + \mathfrak{B}_2 [e_3 e_1] + \mathfrak{B}_3 [e_1 e_2] = 0$ erscheinen, wo die $\mathfrak{B}$ nur Functionen der Coordinaten sind. Aus jeder solchen Gleichung entspringen dann die drei Gleichungen $\mathfrak{B}_1 = 0$, $\mathfrak{B}_2 = 0$, $\mathfrak{B}_3 = 0$.

Für das Differentiiren und Integriren reichen die gewöhnlichen Definitionen aus. In der Mechanik kommen als unabhängige Veränderliche ausser der Zeit t nur Raumgrössen vor. Es ist äusserst bequem hiernach die Differentiale verschieden zu bezeichnen. Ich bezeichne den Differentialquotienten nach der Zeit, wobei nur diejenigen Grössen als constant betrachtet werden, welche ausdrücklich als in der Zeit sich nicht ändernd festgesetzt sind, mit δ, so dass, wenn z. B. die Strecke x in einer echten Reihe ($\mathfrak{A}_2$ 454), $x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ dargestellt ist, in welcher a_0, a_1, a_2, $\cdots$ Strecken sind, die sich in der Zeit nicht ändern, $\delta x = a_1 + 2 a_2 t + \cdots$ ist.

Dagegen bezeichne ich die Differentiale von Functionen räumlicher Grössen, bei welchen die Zeit als constant gesetzt wird, im Allgemeinen mit d. Auch der Begriff der partiellen Differentialquotienten der Functionen räumlicher Grössen lässt sich (wie es in $\mathfrak{A}_2$ 436 ff. geschehen ist) genau ebenso feststellen, wie für die Functionen algebraischer Grössen. Doch wähle ich den zwar etwas umständlicheren, aber, wie ich glaube, den Lesern leichter zugänglichen Weg der Reduction auf partielle Differentialquotienten von Functionen algebraischer Grössen. Ich lege einen Normalverein e_1, e_2, e_3 zu Grunde und drücke die Strecken x, y, $\cdots$, von denen eine algebraische Function f abhängen soll, in Coordinaten durch die Strecken jenes Vereins aus, nämlich $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$, u. s. w., so wird f eine Function dieser Coordinaten x_1, x_2, u. s. w. Sind nun $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ u. s. w. die zu dem Verein sämmtlicher Coordinaten gehörigen partiellen Differentialquotienten ($\mathfrak{A}_2$ 436), so verstehe ich unter dem partiellen Differentialquotienten von f nach der Strecke x, geschrieben $\frac{\partial}{\partial x} f$, die Strecke

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} e_3 .$$

Es folgt hieraus sogleich, dass

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} f \mid dx\right] = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

sei. Es bleibt aber nun zu zeigen, dass $\frac{\partial}{\partial x} f$, dessen Begriff hier an den Normalverein e_1, e_2, e_3 geknüpft war, ganz unverändert bleibt, wennn man statt des letzteren einen beliebigen andern Normalverein ε_1, ε_2, ε_3 zu Grunde legt. Es sei $x = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3$, also

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3 .$$

Multiplicirt man diese Gleichung innerlich mit e_1, so erhält man

$$x_1 = \xi_1 [\varepsilon_1 \mid e_1] + \xi_2 [\varepsilon_2 \mid \varepsilon_1] + \xi_3 [\varepsilon_3 \mid e_1],$$

da $e^2_1 = 1$, $[e_1 \mid e_2] = [e_1 \mid e_3] = 0$ ist; und hieraus erhält man die Werthe für x_2 und x_3, indem man statt e_1 beziehlich e_2 und e_3 setzt. Somit wird $\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} = [\varepsilon_1 \mid e_1]$, überhaupt $\frac{x_r}{\sigma \xi_s} = [\varepsilon_s \mid e_r]$. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}[\varepsilon_1 \mid e_1] + \frac{\partial f}{\partial x_2}[\varepsilon_1 \mid e_2] + \frac{\partial f}{\partial x_3}[\varepsilon_1 \mid e_3],\end{aligned}$$

und hieraus erhält man $\frac{\partial f}{\partial \xi_2}$, $\frac{\partial f}{\partial \xi_3}$ indem man ε_2 und ε_3 statt ε_1 setzt; also wird

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}\varepsilon_3 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}([\varepsilon_1|e_1]\varepsilon_1 + [\varepsilon_2|e_1]\varepsilon_2 + [\varepsilon_3|e_1]\varepsilon_3) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_2}([\varepsilon_1|e_2]\varepsilon_1 + [\varepsilon_2|e_2]\varepsilon_2 + [\varepsilon_3|e_2]\varepsilon_3) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_3}([\varepsilon_1|e_3]\varepsilon_1 + [\varepsilon_2|e_3]\varepsilon_2 + [\varepsilon_3|e_3]\varepsilon_3) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} e_3\end{aligned}$$

nach dem für die Umwandlung der Normalvereine erwiesenen Satze, d. h. der Werth des partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial x} f$ ist unabhängig von dem zu Grunde gelegten Normalvereine.

§ 2.

Grundgesetz der Mechanik.

Wenn x die Strecke bezeichnet, die von einem festen Punkte nach dem sich bewegenden Punkte gezogen ist, so ist unmittelbar klar, dass δx die Geschwindigkeit dieses Punktes ihrer Grösse und Richtung nach, und $\delta^2 x$ in gleicher Weise die Beschleunigung oder Bewegungsänderung desselben darstellt*). Nach dem Beharrungsgesetz muss jede Aenderung in der Bewegung eines materiellen Punktes einer auf ihn einwirkenden *Ursache* zugeschrieben werden. Es sei die Einwirkung dieser Ursache gleich der Strecke p, so haben wir die Gleichung

$$\delta^2 x = p. \tag{1}$$

Ist z. B. diese Einwirkung constant gleich der Strecke g, so erhalten wir durch Integration der Gleichung $\delta^2 x = g$ unmittelbar $\delta x = c + gt$, wo c eine willkürliche constante Strecke (die Anfangsgeschwindigkeit) ist, und durch abermalige Integration $x = b + ct + \frac{1}{2} g t^2$, wo b abermals eine constante Strecke (der Anfangswerth von x) ist. Diese Gleichungen enthalten die gewöhnlichen Wurfgesetze in allgemeinster Form.

Das sogenannte Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte lässt sich so ausdrücken: Wenn die Einwirkungen mehrerer Ursachen auf den Punkt x einzeln genommen gleich den Strecken $p_1, p_2, \cdots$ sind, so ist die gleichzeitige Einwirkung p aller jener Ursachen gleich der Summe dieser Strecke, $p = p_1 + p_2 + \cdots$ Es gilt also die Gleichung (1) auch noch, wenn p die Summe aller Einwirkungen ist, welche verschiedene Ursachen gleichzeitig auf den bewegten Punkt üben.

Einfache Kraft nenne ich eine Ursache, welche in einem materiellen Punkte in der Art ihren Sitz hat, dass die Einwirkung dieser Ursache auf einen andern materiellen Punkt nur von der gegenseitigen Lage dieser Punkte abhängt, hingegen von dem umgebenden Raume ganz unabhängig ist. Wenn also ein materieller Punkt A auf einen andern B die Einwirkung BC übt, und man die Figur ABC beliebig im Raume nach $A_1 B_1 C_1$ verlegt, so aber, dass ABC congruent mit $A_1 B_1 C_1$ bleibt, so muss $B_1 C_1$ die Einwirkung von A_1 auf B_1 bleiben. Hieraus folgt, dass BC in der unendlichen geraden Linie AB liegen muss.

---

*) Noch einfacher wäre es, x unmittelbar als den sich bewegenden Punkt zu setzen. Doch verspare ich dies auf einen späteren Aufsatz, in welchem die Rechnung mit Punkten dargestellt werden soll.

Denn wäre dies nicht der Fall, sondern bildeten A, B, C ein Dreieck, und man drehte dies um die Axe AB um beliebigen Winkel in die Lage ABC_1, so müsste A auf B die Einwirkung BC_1 üben, was mit der Einwirkung BC in Widerspruch ist, also kann die Kraft nur anziehend oder abstossend wirken. Aber noch mehr, wenn die Punkte A und B von ganz gleicher Beschaffenheit sind, so muss man auch A mit B vertauschen können, ohne die Wirkung zu ändern. Uebt nun A auf B die (anziehende oder abstossende) Wirkung BC, und man dreht ABC um den Mittelpunkt von AB in die Lage A_1B_1, so dass A_1 auf B und B_1 auf A fällt, und sei C_1 der Punkt, auf den dann C fällt, so muss B_1C_1 d. h. AC_1 nicht bloss als Einwirkung des Punktes A_1 auf B_1 sondern auch des Punktes B auf A aufgefasst werden können, d. h. die Einwirkung muss gegenseitig und die beiden Einwirkungen müssen einander entgegengesetzt gleich sein. Auch kann die Grösse dieser Einwirkungen, wenn die materiellen Punkte dieselbe Beschaffenheit beibehalten, nur eine Function der gegenseitigen Entfernung sein*). Wenn nun A und B zwar nicht ganz gleiche Beschaffenheit haben, aber doch A auf B die entgegengesetzt gleiche Wirkung übt wie B auf A, so nennen wir A und B an *Masse* gleich. Welche Masse wir als Einheit der Massen zu Grunde legen, ist an sich gleichgültig. Nachdem aber diese Einheit festgesetzt ist, so setzen wir die Kraft der Beschleunigung gleich, welche sie der Masse 1 mittheilt. Daher können wir in der Gleichung (1) den Endpunkt von x als einen Punkt von der Masse 1 setzen und p als die Kraft oder als die Summe der Kräfte, die auf ihn wirken. In diesem Sinne können wir die Gleichung (1) als die Grundgleichung der Mechanik setzen.

§ 3.

Bewegung eines freibeweglichen Vereins materieller Punkte.

Ich unterscheide *innere* und *äussere* Kräfte in Bezug auf den Verein. Innere Kräfte sind solche, mit denen ein Punkt des Vereins auf einen andern Punkt desselben Vereins wirkt, äussere die übrigen. Ich nehme zuerst alle Punkte des Vereins als von gleicher Masse und zwar von der Masse 1 an. Nun seien $x_1, \cdots x_m$ die von dem festen Punkte nach den beweglichen Punkten des Vereins gezogenen Strecken, p_1 die Summe aller Kräfte, die auf den ersten Punkt wirken, u. s. w. so hat man nach (1) die m Gleichungen $\delta^2 x_1 = p_1, \cdots \delta^2 x_m = p_m$, diese addirt geben

$$\delta^2 x_1 + \cdots + \delta^2 x_m = p_1 + \cdots + p_m.$$

Die inneren Kräfte, da sie paarweise entgegengesetzt gleich sind, heben

*) Es liegt hierin schon, dass ich die Kräfte, mit welcher die in elektrischen Strömen bewegten Elektricitäten wirken, nicht für einfache Kräfte halten kann.

sich bei der Addition weg, folglich können wir hier $p_1, \cdots p_m$ als äussere Kräfte betrachten. Nun sei s die Strecke, die von dem festen Punkte nach dem Schwerpunkte des Vereins gezogen ist, und $y_1, \cdots y_m$ die Strecken, die von dem Schwerpunkt nach den Punkten des Vereins gezogen sind, so ist nach der Definition des Schwerpunktes $y_1 + \cdots + y_m = 0$ Nun ist aber $x_1 = s + y_1, \cdots x_m = s + y_m$, also $x_1 + \cdots x_m = ms$, worin zugleich die Construction des Schwerpunktes liegt, also

$$\delta^2 x_1 + \cdots \delta^2 x_m = \delta^2(x_1 + \cdots x_m) = m\delta^2 s,$$

und so erhält man aus obiger Gleichung

$$\delta^2 s = \frac{1}{m} p, \tag{2}$$

wo p die Summe aller äusseren Kräfte und m die Masse des Vereins ist. Dies ist die Gleichung der Bewegung des Schwerpunktes. Sie kann uns zugleich als Gleichung für die Bewegung eines Punktes von der Masse m gelten und wir könnten von nun an auch Punkte von ungleicher Masse annehmen, doch behalten wir der Einfachheit wegen, ohne an Allgemeinheit etwas einzubüssen, auch jetzt Punkte von der Masse 1 bei. Führen wir in die Gleichung für die Bewegung des ersten Punktes statt x_1 seinen Werth $s + y_1$, statt $\delta^2 x_1$ also $\delta^2 s + \delta^2 y_1$ und statt $\delta^2 s$ den aus (2) gefundenen Werth ein, so erhalten wir

$$\delta^2 y_1 = p_1 - \frac{1}{m} p, \qquad \text{u. s. w.} \quad \delta^2 y_m = p_m - \frac{1}{m} p \tag{3}$$

als Gleichungen für die relativen Bewegungen eines beliebigen Vereins in Bezug auf den Schwerpunkt des Vereins.

Multiplicirt man die Gleichung $\delta^2 x_1 = p_1$ äusserlich mit x_1, so erhält man links $[x_1 \delta^2 x_1]$, dies ist aber das Zeitdifferential von $[x_1 \delta x_1]$, da bei der Differentiation das andere Glied $[\delta x_1 \delta x_1]$ nach den Gesetzen der äusseren Multiplication null ist. Also erhält man $\delta [x_1 \delta x_1] = [x_1 p_1]$. Bildet man dieselben Gleichungen für die andern Punkte und addirt, so erhält man mit Anwendung der Summenbezeichnung

$$\delta \Sigma [x \delta x] = \Sigma [xp]. \tag{4}$$

Auch hier heben sich die inneren Kräfte weg; denn es sei z. B. $\lambda(x_2 - x_1)$ die Kraft, mit der der erste Punkt auf den zweiten wirkt, so ist die Wirkung, die dieser auf jenen übt, die entgegengesetzte, also $\lambda(x_1 - x_2)$, also in der Summe auf der rechten Seite $[x_1 \lambda(x_2 - x_1)] + [x_2 \lambda(x_1 - x_2)] = \lambda[x_1 x_2] + \lambda[x_2 x_1] = 0$, da $[x_2 x_1] = -[x_1 x_2]$ ist. Also heben sich alle inneren Kräfte weg. Ebenso auch die nach dem Anfangspunkt der x gerichteten Kräfte. Denn ist λx_1 eine solche auf den ersten Punkt wirkende Kraft, so wird $[x_1 \lambda x_1] = 0$. Wirken daher keine andern äusseren Kräfte ein, als solche, die nach dem Anfangspunkt der x gerichtet sind, so sagt die Gleichung (4) die Unveränderlichkeit der gesammten Flächenbewegung $\Sigma x \delta x$ aus.

Multiplicirt man in gleicher Weise die Gleichungen (3) äusserlich mit y_1 u. s. w. und addirt, so erhält man, da $\sum \left[y \frac{p}{m}\right] = \frac{1}{m} [\Sigma y \cdot p]$ vermöge der Eigenschaft des Schwerpunktes null ist,

$$(5) \qquad \delta\, \Sigma[y\delta y] = \Sigma[yp]$$

d. h. die Flächengleichung (4) gilt auch, wenn man statt des festen Anfangspunktes der x den beweglichen Schwerpunkt setzt.

Endlich multipliciren wir die Gleichung $\delta^2 x_1 = p_1$ innerlich mit δx_1, so erhalten wir, da $\delta[\delta x_1]^2 = 2[\delta^2 x_1 \mid dx_1]$ ist, $\frac{1}{2}\delta[\delta x_1]^2 = [p_1 \mid \delta x_1]$, oder auf alle Punkte des Vereins angewandt

$$(6) \qquad \delta\, \Sigma \tfrac{1}{2}(\delta x)^2 = \Sigma[p \mid \delta x]$$

d. h. die Zunahme der lebendigen Kraft $\Sigma \frac{1}{2}(\delta x)^2$ während einer Zeit ist gleich der Arbeit $\Sigma[p \mid \delta x]$ aller Kräfte während derselben Zeit.

Es ist für die weitere Entwickelung der Gleichung (6) sehr förderlich, die gesammte Kraft p, mit welcher mehrere Punkte auf den Punkt x_1 wirken, als partiellen Differentialquotienten nach x_1 von einer algebraischen Function aller dieser Punkte aufzufassen, so dass also, wenn U diese Function ist, $p = \frac{\partial}{\partial x_1} U$ sei. Man kann dann sagen, dass die Kraft p_1 dem Streben*) entspringe, die Function U zu vergrössern. Die Vergrösserung nämlich, welche U durch eine unendlich kleine Verschiebung dx_1 erfährt, ist $\left[\frac{\partial}{\partial x_1} U \mid dx_1\right]$; diese Vergrösserung ist, wenn dx_1 dieselbe Länge beibehält, am grössten, wenn dx_1 die Richtung des ersten Factors hat, wie unmittelbar aus der Formel $[a \mid b] = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cos \angle\, ab$ folgt, d. h. die durch die Kraft p_1 bewirkte Bewegung nimmt diejenige Richtung an, in welcher die Function U am meisten vergrössert d. h. das Streben am vollkommensten erfüllt wird. Ebenso wenn der Punkt x_1 seine Lage verändert, dx_1 aber stets dieselbe Länge behält, und die Richtung die des ersten Factors $\frac{\partial}{\partial x_1} U$ bleibt, so verhält sich die Kraft wie die Vergrösserung von U d. h. wie die Erreichung des Zieles, welches sie erstrebt. Man kann daher in der That die Kraft p_1 als Aeusserung des Strebens, die Function U zu vergrössern auffassen. Bekanntlich wird U das Potential genannt. U zu finden, hat keine Schwierigkeit. Betrachten wir zuerst die Kraft p_{21}, mit der ein Punkt x_2 auf einen andern x_1 wirkt. Diese Kraft lässt sich nach § 2. als Function ihrer Entfernung auffassen, also als $f(r)$. Aber um die Richtung mit darzustellen, schreiben wir sie

$$p_{21} = \frac{1}{r} f(r)\,(x_1 - x_2).$$

*) Diese Idee des Strebens (der Tendenz) habe ich in der vorher genannten Arbeit vom Jahre 1840 zu Grunde gelegt.

Hier ist r die Länge von $x_1 - x_2$, d. h. $r^2 = (x_1 - x_2)^2$, also differentiirt:

$$r\,dr = [(x_1 - x_2) \mid (dx_1 - dx_2)] \text{ oder } dr = \frac{1}{r}(x_1 - x_2) \mid (dx_1 - dx_2),$$

also

$$f(r)\,dr = \frac{1}{r} f(r)\,[(x_1 - x_2)\,(dx_1 - dx_2)]$$
$$= [p_{21} \mid (dx_1 - dx_2)].$$

Nun sei

$\int fr \cdot dr = U_{12}$ so ist $d\,U_{12} = [p_{21}\,(dx_1 - dx_2)]$ also $\frac{\partial}{\partial x_1} U_{12} = p_{21}$ und so auch $\frac{\partial}{\partial x_2} U_{12} = p_{12}$. Hat man nun auf gleiche Weise zwischen je 2 Punkten einer Schaar die Grössen $U_{r,s}$ aufgestellt, so wird ihre Summe U eine Function dieser Punkte, und die Kraft, welche auf einen Punkt x_1 dieser Schaar die übrigen Punkte üben, ist dann $= \frac{\partial}{\partial x_1} U$.

Für die Einführung dieses Potentiales in Gleichung (6) ist gleichfalls die Unterscheidung in äussere und innere Kräfte wichtig. Es sei V das vollständige innere Potential d. h. die Summe der Potentiale zwischen je 2 Punkten des Vereins, und U das gesammte äussere Potential, d. h. die Summe der Potentiale zwischen je einem äusseren und inneren Punkte, so lassen die ersteren in der Gleichung (6) eine vollständige Integration zu, die letzteren nur, insofern die äusseren Punkte in der Zeit unveränderlich sind. In der That betrachtet man in der Summe $\Sigma\,[p \mid \delta x]$ der Gleichung (6) die Kräfte p_{12} und p_{21}, mit denen die ersten beiden Punkte aufeinander wirken und das zugehörige Potential U_{12}, so ist $[p_{12} \mid \delta x_2] + [p_{21} \mid \delta x_1]$ der zugehörige Theil jener Summe, also $= \left[\frac{\partial}{\partial x_2} U_{12} \mid \delta x_2\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} U_{12} \mid \delta x_1\right] = \delta\,U_{12}$ und dies auf alle inneren Kräfte ausgedehnt, wird der daraus entspringende Theil jener Summe $= \delta V$ und die Gleichung (6) nimmt die Gestalt an:

$$\tag{7} \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(\delta x)^2 = V + \int \sum \left(\frac{\partial}{\partial x} U \mid \delta x\right) \cdot \;.$$

§ 4.

Bewegung eines beschränkt beweglichen Vereins.

Die Beschränkung in der Bewegung eines Vereins wird am einfachsten durch Bedingungs-Gleichungen dargestellt, welchen die bewegten Punkte unterworfen sind. Allein durch diese Gleichungen ist die Bewegung noch nicht bestimmt. Vielmehr muss man Kräfte annehmen, welche auf die Punkte des Vereins wirken, sobald sich diese auch nur unendlich wenig aus der Lage, die den Gleichungen entspricht, herausbewegen, und die sie unwiderstehlich in eine Lage zurücktreibt, welche diesen Gleichungen genügt. Auf die nähere Bestimmung dieser Kräfte kommt es an. Es sei $L = 0$ eine solche Bedingungsgleichung, so wollen wir die daraus entspringenden Kräfte dem Streben zuschreiben, jene Gleichung $L = 0$ zu erhalten, d. h. einem Potential, welches gleich L oder einer beliebigen Function von L etwa gleich $f(L)$ ist. Dies vorausgesetzt ist die Kraft, welche jenes Streben $L = 0$ zu erhalten, auf den P. x_1 hervorruft $= \frac{\partial}{\partial x_1} f(L)$ $= f' L \frac{\partial}{\partial x_1} L$, wenn $f' L$ die abgeleitete Function von $f L$ ist, oder bezeichnen wir mit λ diese abgeleitete Function, so ist die Kraft, die der Punkt x_1 vermöge jenes Strebens erleidet, $\lambda \frac{\partial}{\partial x_1} L$, die Kraft, die der P. x_2 dadurch erleidet $\lambda \frac{\partial}{\partial x_2} L$ u. s. w. Sind nun ausser jener Bedingungsgleichung $L = 0$ noch andere $M = 0$ u. s. w., so entspringen daraus die Kräfte $\mu \frac{\partial}{\partial x_1} M$, $\mu \frac{\partial}{\partial x_2} M$, u. s. w., und die Gleichungen der Bewegung werden nach dem Grundgesetz (1)

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} \delta^2 x_1 = p_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} L + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} M + \cdots \\ \delta^2 x_2 = p_2 + \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} L + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} M + \cdots \end{cases}$$

wo

$$L = 0, \quad M = 0, \cdots$$

hinreichen um die Unbekannten λ, μ zu bestimmen.

Nun seien dx_1, dx_2, $\cdots$ beliebige Verschiebungen der Punkte x_1, x_2, $\cdots$, welche aber den Gleichungen $dL = 0$, $dM = 0$, u. s. w. genügen. Man multiplicire obige Gleichungen innerlich mit dx_1, dx_2, u. s. w. und addire, so fallen, da

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} L \mid dx_1\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} L \mid dx_2\right] + \cdots = dL = 0$$

ist, die Glieder mit λ, μ, $\cdots$ weg und man erhält

$$\text{(9)} \quad \sum [(\delta^2 x - p) \mid dx] = 0,$$

welche für alle Verschiebungen gilt, die den Gleichungen $dL = 0$, $dM = 0$, $\cdots$ genügen.

§ 5.

Gleichgewicht und mittlere Bewegung.

Wenn die Kräfte, welche auf einen Verein wirken, nur von der Lage der Punkte des Vereins und nicht zugleich anderweitig von der Zeit abhängen, so ist Gleichgewicht möglich, und die Formeln für das Gleichgewicht sind dann in den obigen Gleichungen enthalten, wenn man nur die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten aller Punkte des Vereins null setzt, wodurch dann Gleichungen zwischen den Kräften bedingt sind. Sind diese Gleichungen erfüllt, so kann dennoch die Anfangslage der Punkte des Vereins oder ihre Anfangsgeschwindigkeit von der Art sein, dass kein Gleichgewicht entsteht, und dass insbesondere bei sehr geringen Abweichungen des Anfangszustandes von dem Zustande eines sicheren Gleichgewichts Schwingungen um diesen Zustand stattfinden. Diesen Eigenschaften des Gleichgewichtes und seiner Störung durch unendlich kleine Schwingungen entspricht nur für den Fall, dass die Kräfte von der Zeit als solcher abhängen, ein Zustand der *mittleren Bewegung*, um welchen wieder, wenn dieser Zustand der mittleren Bewegung ein sicherer ist, kleine Schwingungen stattfinden können, die auch im Laufe der Zeit ein gewisses Maximum nicht überschreiten.

Mittlere Bewegung eines Vereins, der von gegebenen (in der Zeit veränderlichen) Kräften getrieben wird, nenne ich diejenige Bewegung, bei welcher unter allen von den verschiedenen Anfangszuständen abhängigen Bewegungen die kleinste Beweglichkeit stattfindet, oder genauer ausgedrückt, bei welcher die Summe der während einer hinreichend grossen Zeit thätigen lebendigen Kräfte ein Minimum ist. Ist $T = \frac{1}{2}\Sigma(\delta x)^2$ (immer die Punkte des Vereins an Masse gleich gedacht) die lebendige Kraft, also $T\partial t$ die während des Zeitelementes ∂t thätige lebendige Kraft, so ist $\int T dt$ zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = t$ die während dieser Zeit thätige gesammte lebendige Kraft. Für die mittlere Bewegung soll also jenes Integral, bei hinreichend grossem t, kleiner sein als für jede andre Bewegung des Systems, und auch kleiner bleiben als solche, wenn t von da ab beliebig wächst. Für lineäre Gleichungen der Bewegung knüpfe ich den Begriff der mittleren Bewegung an den der *mittleren Integration* lineärer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, wähle jedoch als Beispiel lineäre Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es seien n Zahlgrössen $u_1, \cdots u_n$, abhängig gedacht von einer unabhängigen Zahlgrösse t, und seien die Differentiale jener Grössen nach t mit δ bezeichnet, und sei jene Abhängigkeit partiell bestimmt durch die n Gleichungen

$$(10)^* \begin{cases} \delta^2 u_1 + a_{1,1}\delta u_1 + \cdots + a_{1,n}\delta u_n + b_{1,1}u_1 + \cdots + b_{1,n}u_n = f_1 t \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \delta^2 u_n + a_{n,1}\delta u_1 + \cdots + a_{n,n}\delta u_n + b_{n,1}u_1 + \cdots \quad b_{n,n}u_n = f_n t \end{cases}$$

wo die a und b constante Zahlgrössen sind.

Die allgemeine Integration dieser Gleichungen ist bekannt. Doch wird es für die klare Aussonderung der mittleren Integration nothwendig sein, die allgemeine Integration übersichtlich darzustellen. Zunächst ist klar, dass man die ft in beliebige Glieder zerlegen, die allgemeinen Integrale in Bezug auf diese Glieder einzeln nehmen und die so erhaltenen Integrale addiren kann. Ich zerlege die ft in Exponentialglieder, deren Exponenten der Zeit proportional sind, und setze daher als die zu integrirenden Gleichungen zunächst

$$(10)\quad \begin{cases} \delta^2 u_1 + a_{1,1}\delta u_1 + \cdots + a_{1,n}\delta u_n + b_{1,1}u_1 + \cdots + b_{1,n}u_n = g_1 e^{\varkappa t} \\ \vdots \\ \delta^2 u_n + a_{n,1}\delta u_1 + \cdots + a_{n,n}\delta u_n + b_{n,1}u_1 + \cdots + b_{n,n}u_n = g_n e^{\varkappa t} \end{cases}$$

wo $g_1, \cdots g_n$ constant sind. Man denke sich auch die u in solchen Gliedern dargestellt. Dann treten sogleich 2 Arten dieser Glieder hervor, nämlich solche mit der Exponentialgrösse $e^{\varkappa t}$ und solche mit $e^{\lambda t}$, wo λ von $\varkappa$ verschieden, aber noch zu suchen ist. Die erstgenannten Glieder bilden das mittlere Integral und lassen sich unmittelbar finden, die letztgenannten hängen von der Lösung einer Gleichung des $2n^{\text{ten}}$ Grades ab. Die mittlere Integration giebt $u_1 = y_1 e^{\varkappa t}, \cdots, u_n = y_n e^{\varkappa t}$, wo die $y_1 \cdots y_n$ durch die n Gleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} \varkappa^2 y_1 + \varkappa a_{1,1}y_1 + \cdots + \varkappa a_{1,n}y_n + b_{1,1}y_1 + \cdots + b_{1,n}y_n = g_1 \\ \vdots \\ \varkappa^2 y_n + \varkappa a_{n,1}y_1 + \cdots + \varkappa a_{n,n}y_n + b_{n,1}y_1 + \cdots + b_{n,n}y_n = g_n \end{cases}$$

genau bestimmt sind, falls nicht, was unten zu besprechen ist, die Determinante der Coefficienten der $y_1, \cdots y_n$ null sein sollte. Setzt man hingegen $u_1 = z_1 e^{\lambda t}, \cdots u_n = z_n e^{\lambda t}$, wo λ nicht gleich $\varkappa$ ist, so ergiebt sich ein entsprechendes Gleichungssystem wie das obige (11), mit dem Unterschiede, dass λ, z statt $\varkappa$, y eintritt und die rechten Seiten null sind. Daraus folgt, dass die Determinante der Coefficienten von $z_1, \cdots z_n$ null sein muss. Das giebt für λ die oben angedeutete Gleichung des $2n^{\text{ten}}$ Grades. Für jeden der $2n$ Werthe $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}$, welche dieser Gleichung des $2n^{\text{ten}}$ Grades genügen, sind dann die zugehörigen Verhältnisse der z bestimmt, und dadurch ist dann die allgemeine Integration vollendet. Nur wenn $\varkappa$ *einem der* $2n$ Werthe $\lambda_1, \cdots \lambda_{2n}$ gleich wird, tritt der oben erwähnte Fall ein, dass die $y_1 \cdots y_n$ der mittleren Integration unendlich oder unbestimmt werden; in diesem Falle kann man $\varkappa$ zunächst unendlich wenig von jenem Werthe λ verschieden setzen und in Bezug auf dieses $\varkappa$ die mittlere Integration bestimmen. Immer bleibt die mittlere Integration von der Lösung jener Gleichung des $2n^{\text{ten}}$ Grades unabhängig. Um aber zu den Gleichungen der Bewegung übergehen zu können, müssen wir den Gleichungen (10) noch eine andere Form geben. Denn da die Glieder $ge^{\varkappa t}$, welche die Kräfte darstellen sollen, bei reellem $\varkappa$ mit t unendlich werden, so entsprechen sie unter dieser Voraussetzung nicht dem Fall der Natur. Man setze daher statt $ge^{\varkappa t}$ die zwei Glieder $c \cos \varkappa t + c' \sin \varkappa t$ d. h. $\frac{c - c'i}{2} e^{i\varkappa t} + \frac{c + c'i}{2} e^{-i\varkappa t}$. Diese beiden Glieder unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von $i = \sqrt{-1}$. Setzt man nun in (10) zunächst statt $g_1 e^{\varkappa t}$ ein $\frac{c_1 - c'_1 i}{2} e^{i\varkappa t}$ u. s. w., so hat man in (11) statt g_1 zu setzen $\frac{c_1 - c'_1 i}{2}$ u. s. w, ferner $i\varkappa$ statt $\varkappa$ und $-\varkappa^2$ statt $\varkappa^2$, und es werden dann die durch (11) bestimmten y imaginär, sie seien $v + wi$, so wird $u_1 = (v_1 + w_1 i)\, e^{i\varkappa t}, \cdots u_n = (v_n + w_n i)\, e^{i\varkappa t}$. Setzt man dann zweitens in (10) $\frac{c + c'i}{2} e^{-i\varkappa t}$ statt g, so gehen daraus Werthe hervor, die sich von den obigen für $u_1, \cdots u_n$ nur durch das Vorzeichen von i unterscheiden, sie seien mit $u_1', \cdots u_n'$ bezeichnet, also $u_1' = (v_1 - w_1 i)\, e^{-i\varkappa t}, \cdots u_n' = (v_n - w_n i)\, e^{-i\varkappa t}$; also wird $u_1 + u'_1 = 2v_1 \cos \varkappa t - 2w_1 \sin \varkappa t = a_1 \cos \varkappa t + b_1 \sin \varkappa t$, wenn $2v_1 = a_1$ und $-2w_1 = b_1$ gesetzt wird.

Es ist nun nachzuweisen, dass bei der Bewegung, die durch lineäre Gleichungen der Form (10) bestimmt ist, die mittlere Integration zugleich die mittlere Bewegung liefert, wie sie oben definirt ist. Bei der Bewegung eines Vereins von m gleich schweren Punkten im Raume wird das n der Gleichungen (10) und (11) gleich $3m$, die Gleichung in λ also vom $6m^{\text{ten}}$ Grade. Wir nehmen senkrechte Coordinatenaxen an. Dann wird die gesammte lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \Sigma \delta u^2$, also $\int T dt = \frac{1}{2} \Sigma \int \delta u^2 dt$, wo sich die Summe auf $u_1, \cdots u_{3m}$ bezieht. Nun besteht u_1 bei der allgemeinen Integration theils aus den Gliedern der mittleren Integration, welche von der Form $a_1 \cos \varkappa t + b_1 \sin \varkappa t$ sind, und aus $6m$ Gliedern der Form $z e^{\lambda_1 t}$; also δu_1 enthält dann Glieder der Form $\varkappa b_1 \cos \varkappa t - \varkappa a_1 \sin \varkappa t$ und der Form $\lambda_1 z e^{\lambda_1 t}$, und $\delta u_1{}^2$ enthält dann die Quadrate dieser Glieder und die doppelten Producte je zweier. Man sieht sogleich, dass die Glieder der Form $\lambda_1 z e^{\lambda_1 t}$ bei reellem λ_1 mit unendlichem t selbst unendlich werden, also $\sqrt{T dt}$ gewiss kleiner ist, wenn diese Glieder fehlen, als wenn sie vorhanden sind. Wir können also für den Nachweis der mittleren Bewegung diese Gieder weglassen, dasselbe gilt, wenn $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ist, und α nicht null ist. Es sind also nur die Glieder zu berücksichtigen, wo $\lambda_1 = \beta i$ ist; dann ist ein anderer Werth von λ etwa $\lambda_2 = -\beta i$ und die hieraus entspringenden reellen Glieder in u_1 werden von der Form $p \cos \beta t + q \sin \beta t$, also in δu_1 von der Form $\beta\,(q \cos \beta t - p \sin \beta t)$, also von entsprechender Form, wie die Glieder der mittleren Integration. Betrachten wir zuerst die Quadrate z. B. $(\varkappa b_1 \cos \varkappa t - \varkappa a_1 \sin \varkappa t)^2$, also in $T dt$ das Glied $\frac{1}{2} \varkappa^2\, (b_1 \cos \varkappa t - a_1 \sin \varkappa t)^2\, dt$, so giebt dies $\frac{1}{4} \varkappa^2\, [b_1{}^2 (1 + \cos 2\varkappa t)\, dt + a_1{}^2\, (1 - \cos 2\varkappa t)\, dt - 2a_1 b_1 \sin 2\varkappa t dt]$. Dies giebt integrirt $\frac{1}{4} \varkappa^2\, (a_1{}^2 + b_1{}^2)\, t + P$, wo P lauter endliche periodische Glieder liefert. Ferner betrachten wir das doppelte Product zweier solcher Glieder z. B. $\varkappa\, (b_1 \cos \varkappa t - a_1 \sin \varkappa t)$ und $\beta\, (q \cos \beta t - p \sin \beta t)$, so giebt das in $T dt$ das Glied $\varkappa \beta dt\, (b_1 q \cos \varkappa t \cos \beta t +$

$a_1 p \sin \varkappa t \sin \beta t - b_1 p \cos \varkappa t \sin \beta t - a_1 q \sin \varkappa t \cos \beta t) = \varkappa \beta dt \Big[\frac{b_1 q + a_1 p}{2} \cos(\varkappa + \beta) t + \frac{b_1 q - a_1 p}{2} \cos(\varkappa - \beta) t - \frac{b_1 p + a_1 q}{2} \sin(\varkappa + \beta) t - \frac{b_1 p - a_1 q}{2} \sin(\varkappa - \beta) t\Big]$ also wenn $\varkappa$ nicht gleich β ist, so liefert dies lauter endliche periodische Glieder. Nun können wir t so gross annehmen, dass die periodischen Glieder gegen die Glieder der Form $\frac{1}{4}\varkappa^2 (a_1^2 + b_1^2) t$ u. s. w. verschwinden; dann wird $\int T dt = \frac{1}{4}\Sigma \varkappa^2 (a^2 + b^2) t + \frac{1}{4}\Sigma \beta^2 (p^2 + q^2) t$, wo die erste Summe sich auf alle Glieder der mittleren Integration bezieht, die letzte auf die übrigen. Hier sind die a und b von unveränderlichem Werth, hingegen p und q können null sein, also wird für hinlänglich grosses t das Integral $\int T dt$ am kleinsten, wenn die p, q sämmtlich null sind, d. h. das Integral das mittlere ist. Es ist dadurch nachgewiesen, dass bei lineären Differentialgleichungen der Bewegung die mittlere Integration zugleich die mittlere Bewegung liefert.

Ich nenne ein Glied von der Form $a \cos \varkappa t + b \sin \varkappa t$, wo $\varkappa$ positiv ist, mögen nun a und b Zahlen oder Strecken sein, ein *elliptisches Glied* und $\varkappa$ seinen Zeiger. In der That, sind hier a und b Strecken von ungleicher Richtung und wird $a \cos \varkappa t + b \sin \varkappa t$ als Strecke r dargestellt, die von einem festen Punkte ausgeht, so beschreibt der Endpunkt in der Zeit $\frac{2\pi}{\varkappa}$ eine Ellipse, und zwar so, dass die Strecke r selbst in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibt, nämlich in der Zeit dt den Raum $\frac{1}{2}[ab]\varkappa dt$; die Strecken a und b sind conjugirte Halbmesser der Ellipse. In der That, setzt man $\cos \varkappa t = u$, $\sin \varkappa t = v$ so wird jener Radius $r = ua + vb$ und $u^2 + v^2 = 1$, was die Gleichung der Ellipse mit den conjugirten Halbmessern a und b ist. Ferner beschreibt der Endpunkt von r im Zeitelemente dt die Strecke $\delta r \cdot dt$ d. h. $(b \cos \varkappa t - a \sin \varkappa t)\, \varkappa dt$ und r selbst den Flächenraum $\frac{1}{2}[r \delta r] dt$ d. h. $\frac{1}{2}[(a \cos \varkappa t + b \sin \varkappa t)\ (b \cos \varkappa t - a \sin \varkappa t)]\, \varkappa dt$; das eingeschlossene äussere Product giebt, da $[aa] = [bb] = 0$, $[ab] = -[ba]$ und $\cos^2 \varkappa t + \sin^2 \varkappa t$ gleich 1 ist, den Werth $[ab]$, also ist der im Zeitelemente dt beschriebene Flächenraum $= \frac{1}{2}[ab]\varkappa dt$.

Wir können nun das Gesetz der mittlern Bewegung für unsern Fall so aussprechen: Wenn die Bewegung eines Vereins von Punkten durch lineäre Differentialgleichungen dargestellt wird, so entsprechen den elliptischen Gliedern, welche in dem Ausdruck der Kraft vorkommen, elliptische Glieder von denselben Zeigern in allen Strecken, welche von einem festen Punkte nach den beweglichen Punkten gezogen sind, und zwar sind die Coefficienten dieser Glieder durch die gegebenen Gleichungen vollkommen bestimmt, und ausser diesen Gliedern treten bei der mittleren Bewegung keine andern hervor.

Ich bemerke noch, dass sich die Sicherheit oder Unsicherheit der mittleren Bewegung aus den oben entwickelten Principien aufs leichteste ableiten lässt.

§ 6.

Anwendung auf die Theorie der Ebbe und Fluth.

Wir betrachten auch hier das der Ebbe und Fluth unterworfene System zunächst als einen Verein von m Punkten, deren Massen 1 sind. Dann gilt für die relative Bewegung in Bezug auf den Schwerpunkt die Gleichung (3) in § 3., nämlich $\delta^2 y_1 = p_1 + q_1 - \frac{1}{m} p$ u. s. w. $\delta^2 y_m = p_m + q_m - \frac{1}{m} p$, indem ich nämlich die inneren Kräfte q_1 u. s. w. von den äussseren p_1 u. s. w. gesondert und $p_1 + \cdot\cdot p_m = p$ gesetzt habe. Nun sei das System einer gleichförmigen Rotation um eine feste durch den Schwerpunkt gehende Axe unterworfen und angenommen, wie es bei der Theorie der Ebbe und Fluth in der hier nur berücksichtigten ersten Annäherung gestattet ist, dass sich die Punkte nur unendlich wenig von der Lage, die sie bei jener gleichförmigen Rotation annehmen würden, entfernen. Ferner sei n die Winkelgeschwindigkeit bei jener Drehung, also nt die Drehung während der Zeit t. Es sei eine in der Drehungsebene (also senkrecht gegen die Drehungsaxe) gelegene Strecke a angenommen, so verwandelt sie sich durch die Drehung um den Winkel nt in $a \cos nt + a' \sin nt$, wo a' senkrecht gegen a in der Drehungsebene nach der positiven Drehungsseite liegt und mit a gleich lang ist. Wir bezeichnen nach bekannter Analogie diese Strecke a' mit ai, wo i die planimetrische Darstellung der $\sqrt{-1}$ ist. Dann verwandelt sich also a in $a\ (\cos nt + i \sin t) = ae^{int}$, und es wird dann $\delta a e^{int} = ae^{int} \cdot in$. Nun sei $in = \alpha$ gesetzt, wo α die Winkelgeschwindigkeit ihrer Grösse und Richtung nach darstellt. Dann verwandelt sich also a durch jene Drehung in $ae^{\alpha t}$, und $\delta ae^{\alpha t}$ wird $ae^{\alpha t}\alpha$, $\delta^2 ae^{\alpha t} = ae^{\alpha t}\,\alpha^2$, wo übrigens $\alpha^2 = -n^2$ wird. Dieselbe Bezeichnung wende ich auch an, wenn a nicht in der Drehungsebene liegt, nämlich in der Art, dass, wenn a die Richtung der Drehungsaxe hat, $ae^{\alpha t} = a$ und $a\alpha = 0$ ist. Dies vorausgesetzt drückt dann, wenn a beliebige Richtung hat, $ae^{\alpha t}$ die Strecke aus, in die a übergeht, wenn sich das ganze System um den Winkel αt dreht und es bleibt dann $\delta ae^{\alpha t} = ae^{\alpha t}\alpha$, $\delta^2 ae^{\alpha t} = ae^{\alpha t}\alpha^2$, wo man aber statt α^2 nicht ohne Weiteres $-n^2$ zu setzen hat. In diesem Sinne sei nun $y_1 = (x_1 + u_1)\,e^{\alpha t}$, wo x_1 in der Zeit unveränderlich und u_1 unendlich klein ist. Dann wird $\delta y_1 = \delta u_1 e^{\alpha t} + (x_1 + u_1)e^{\alpha t}\alpha$, $\delta^2 y_1 = \delta^2 u_1 e^{\alpha t} + 2\delta u_1 e^{\alpha t}\alpha + (x_1 + u_1)e^{\alpha t}\alpha^2 = [\delta^2 u_1 + 2\delta u_1 \alpha + (x_1 + u_1)\alpha^2]\,e^{\alpha t}$. Aber wenn sich das ganze System um αt dreht, so drehen sich auch die inneren Kräfte um denselben Winkel, und wir können also statt

q_1 schreiben $q_1' e^{\alpha t}$. Somit erhalten wir, wenn man noch mit $e^{-\alpha t}$ multiplicirt, die Gleichung

$$\delta^2 u_1 + 2\delta u_1 \alpha + (x_1 + u_1)\alpha^2 = q'_1 + \left(p_1 - \frac{1}{m} p\right) e^{-\alpha t}.$$

Nun hängt aber q_1' von der gegenseitigen Entfernung der Punkte, also hier von $x_1 + u_1 - (x_r + u_r)$ d. h. von $x_1 - x_r + (u_1 - u_r)$ ab, wo $u_1 - u_r$ gegen $x_1 - x_r$ unendlich klein ist. Somit sondert sich q_1' in zwei Glieder, von denen das eine die u nicht enthält, das andere eine lineäre Function der u ist. Jenes sei mit q_1'' bezeichnet, dieses mit φ_1, so können wir die obigen Gleichungen in je 2 Gleichungen sondern, nämlich

(12) $$x_1 \alpha^2 = q_1'', \cdots, x_m \alpha^2 = q_m''$$

die den Gleichgewichtszustand bestimmen, und

(13) $$\begin{cases} \delta^2 u_1 + 2\delta u_1 \alpha + u_1 \alpha^2 - \varphi_1 = \left(p_1 - \frac{1}{m} p\right) e^{-\alpha t} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \delta^2 u_m + 2\delta u_m \alpha + u_m \alpha^2 - \varphi_m = \left(p_m - \frac{1}{m} p\right) e^{-\alpha t}, \end{cases}$$

welche ganz die Form der im § 5. behandelten Gleichungen haben, und ihre mittlere Integration liefert dann die Bewegung der Ebbe und Fluth. Es kommt nur noch darauf an, die rechten Seiten dieser Gleichungen (13) in elliptischen Gliedern zu entwickeln. Wir nehmen zuerst nur *ein* Gestirn an, und zwar sei dasselbe nahe kugelförmig und die Entfernung seines Mittelpunktes von dem Schwerpunkte des Systems unendlich gross gegen die Dimensionen des Systems. Die Anziehung, welche eine Kugel durch ihre Gravitation auf einen äusseren Punkt übt, ist dieselbe, als ob alle ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Es sei L diese Anziehung in der Entfernung 1, so ist sie in der Entfernung e gleich $\frac{L}{e^2}$. Nun sei r die Strecke vom Schwerpunkt des Systems zum Mittelpunkt der Kugel zur Zeit $t = 0$ und sei ϱ die Länge von r, so ist zu dieser Zeit p_1 mit Uebergehung der Glieder von höherem Grade der Kleinheit der Grösse und Richtung nach $= \frac{L(r - x_1)}{(r - x_1)^3}$ oder $= \frac{L(r - x_1)}{(r^2 - 2[r|x_1])^{\frac{3}{2}}}$. Das giebt entwickelt

$$p_1 = \frac{L}{\varrho^3}\left(r - x_1 + \frac{3[r|x_1]}{\varrho^2} r\right).$$

Dann erhält man, da die x vom Schwerpunkt des Systems aus genommen sind und also $\Sigma x = 0$ ist $\frac{1}{m} p = \frac{L}{\varrho^3} r$. Folglich wird zur Zeit $t = 0$ die rechte Seite der Gleichung (13) gleich $\frac{L}{\varrho^3}\left(\frac{3[r\ x_1]}{\varrho^2} r - x_1\right)$.

Nun sei während der Dauer eines Tages die Entfernung des Gestirnes und seine Declination als constant angenommen, während sich seine Rectascension in der Zeit t um βt ändere, so ist zur Zeit t erstens r

in $r e^{\beta t}$, zweitens x_1 in $x_1 e^{\alpha t}$ übergegangen, und die rechte Seite der Gleichung (13) wird $\frac{L}{\varrho^3}\left(\frac{3[r e^{\beta t} \mid x_1 e^{\alpha t}]}{\varrho^2} r e^{\beta t} - x_1 e^{\alpha t}\right) e^{-\alpha t}$. Nun ändert sich nach dem Begriff des inneren Productes der Werth desselben nicht, wenn die beiden Factoren sich um gleiche Axe und um gleichen Winkel z. B. um den Winkel $-\beta t$ drehen und man erhält, wenn $\alpha - \beta = \gamma$ gesetzt wird, die rechte Seite der Gleichung (13) gleich

$$\frac{L}{\varrho^3}\left(\frac{3[r \mid x_1 e^{\gamma t}]}{\varrho^2} r e^{-\gamma t} - x_1\right).$$

Es sei die Länge von x_1 gleich $\mu\varrho$, so wird $[r \mid x_1 e^{\gamma t}] = \mu \varrho^2 \cos\varphi$, wo φ der Winkel zwischen r und $x_1 e^{\gamma t}$ ist. Es sei η der Winkel, den die Axe a mit r, und ϑ der Winkel, den sie mit x_1 bildet, und sei ω_1 der Winkel, den die Ebene ar mit der Ebene ax_1, also $\omega_1 + \gamma t$ der Winkel, den die Ebene ar mit der Ebene $ax_1 e^{\gamma t}$ bildet, so ist $\cos\varphi = \cos\eta \cos\vartheta + \sin\eta \sin\vartheta \cos(\omega_1 + \gamma t)$, also erhalten wir obigen Ausdruck $= \frac{L}{\varrho^3}\left\{3\mu[\cos\eta\cos\vartheta + \sin\eta\sin\vartheta\cos(\omega_1+\gamma t)] r e^{-\gamma t} - x_1\right\}$ wo man noch statt r setzen kann $r_1 + r_2$, indem r_1 in der Axe r_2 im Aequator liegt, also statt $r e^{-\gamma t}$ setzen kann $r_1 + r_2 e^{-\gamma t}$. Setzt man dann auch noch statt $\cos(\omega_1 + \gamma t)$ seinen Werth $\frac{e^{i(\omega_1+\gamma t)} - e^{-i(\omega_1+\gamma t)}}{2}$ so übersieht man auf der Stelle, dass der ganze Ausdruck aus 3 elliptischen Gliedern mit den Zeigern 0, γ und 2γ besteht, wo γ die scheinbare Winkelgeschwindigkeit des Gestirns, also $\frac{2\pi}{\gamma}$ seine scheinbare Umlaufszeit ist. Tritt nun noch, wie es bei der Ebbe und Fluth der Fall ist, ein zweites Gestirn hinzu, welches auf die Bewegung Einfluss hat, und dessen scheinbare Umlaufszeit $\frac{2\pi}{\gamma'}$ ist, so treten noch zwei elliptische Glieder mit den Zeigern γ' und $2\gamma'$ hinzu. Bezeichnen wir diese 5 elliptischen Glieder für den ersten Punkt mit $p_{1,0}$, $p_{1,\gamma}$, $p_{1,2\gamma}$, $p_{1,\gamma'}$, $p_{1,2\gamma'}$, so wird die erste der Gleichungen (13)

(14) $\delta^2 u_1 + 2\delta u_1 \alpha + u_1 \alpha^2 - \varphi_1 = p_{1,0} + p_{1,\gamma} + p_{1,2\gamma} + p_{1,\gamma'} + p_{1,2\gamma'}$.

Daraus ergiebt sich, da bei der Ebbe und Fluth nur die mittlere Bewegung ins Auge gefasst wird, für u_1 gleichfalls eine Summe von fünf elliptischen Gliedern mit denselben Zeigern, also

(15) $$u_1 = u_{1,0} + u_{1,\gamma} + u_{1,2\gamma} + u_{1,\gamma'} + u_{1,2\gamma'}$$

wenn $u_{1,0}$, $u_{1,\gamma}$ u. s. w. elliptische Glieder mit den Zeigern 0, γ, u. s. w. darstellen. Entsprechend sind die Gleichungen für jeden andern Punkt. Das erste Glied $u_{1,0}$ giebt an, um welche Strecke die durch die Gestirne bedingte mittlere Lage des ersten Punktes von seiner Gleichgewichtslage abweicht. Die andern 4 Glieder geben die Bewegung des Punktes um seine mittlere Lage an. Es ergiebt sich daraus der Hauptsatz für die Theorie der Ebbe und Fluth:

„Die Bewegung, welche jeder Punkt des Meeres bei der Ebbe und Fluth vollendet, ergiebt sich durch die Interferenz von vier elliptischen Bewegungen, von denen zwei dieselbe Umlaufszeit haben, wie die scheinbare Umlaufszeit der Sonne und des Mondes beträgt, und die zwei andern eine halb so grosse Umlaufszeit.“

Jedes elliptische Glied enthält vermöge seiner Form $a \cos \gamma t + b \sin \gamma t$, wo a und b Strecken sind, sechs algebraische Constanten, also die vier elliptischen Glieder zusammen 24. Sind diese 24 Constanten für einen Punkt des Meeres durch Beobachtung gefunden, so ist dann die Bewegung des Punktes genau bestimmt. Soll aber nur die Höhe, also nur das Sinken und Steigen bestimmt werden, so hat man nur die Projectionen jener Strecken a, b u. s. w. auf die verticale Linie zu beachten, man erhält also dann 8 Constante in Uebereinstimmung mit La Place méc. cél. IV, 3. Jene 24 Constanten sind an sich durch die inneren Kräfte (Gravitation und Elasticität) bedingt und also nur dann theoretisch zu bestimmen, wenn die Beschaffenheit des Systems vollständig gegeben ist.

Nimmt man statt der m Punkte eine im Raume stetig verbreitete Materie an, so hat man in den Gleichungen (12) statt $x_1, \cdots x_m$ eine variable Strecke x im Raume zu setzen, und die Gleichung wird

$$x\alpha^2 = q'', \tag{12*}$$

wo q'' eine Function von x ist. Diese Gleichung bestimmt das Gleichgewicht des Systems. Dann wird in den Gleichungen (13) und (14) statt $u_1, \cdots u_m$ die von x abhängige Grösse u gesetzt werden müssen und die Gleichung (14) wird

$$\delta^2 u + 2\delta u \cdot \alpha + u \cdot \alpha^2 - \varphi = p_0 + p_\gamma + p_{2\gamma} + p_{\gamma'} + p_{2\gamma'}, \tag{14*}$$

wo u, p_0, $p_\gamma \cdots$ Functionen von x sind und φ eine in Bezug auf u lineäre Function von x und u ist. Die Gleichung (15) wird dann

$$u = u_0 + u_\gamma + u_{2\gamma} + u_{\gamma'} + u_{2\gamma'}, \tag{15*}$$

wo die elliptischen Glieder zugleich Functionen von x sind, also z. B. $u_\gamma = a_x \cos \gamma t + b_x \sin \gamma t$ ist, wo a_x, b_x Functionen von x sind.

Will man die Oberfläche des Meeres haben, wie sie sich durch die Ebbe und Fluth zu jeder Zeit gestaltet, so hat man x auf die Punkte der Oberfläche zu beschränken. Dann wird die Gleichung (12*) die Gleichung der Oberfläche beim Gleichgewicht (die äusseren Kräfte null gesetzt). Wir können diese Gleichung in der Form dargestellt denken, dass x eine Function ihrer Richtung ξ wird, d. h. Function einer Strecke ξ, die mit x gleiche Richtung hat, aber deren Länge 1 ist.

Dies ist die wesentliche Idee der Polarcoordinaten. Die Gleichung der Oberfläche zur Zeit t ergiebt sich dann leicht, da $y = x + u$ war und u gefunden ist. Erhebt man diese Gleichung aufs (innere) Quadrat, so erhält man $y^2 = x^2 + 2[x \mid u]$, da wir das letzte Glied u^2 als von höherer Ordnung der Kleinheit weglassen können. Ist nun z die Projection von u auf x (oder auf ξ), so erhält man

$$y^2 = x^2 + 2xz \tag{16}$$

als Gleichung der Oberfläche zur Zeit t. Hier besteht z aus 5 elliptischen Gliedern mit den Zeigern $0, \gamma, 2\gamma, \gamma', 2\gamma'$, aber diese elliptischen Glieder haben hier die Form, dass ihre Coefficienten nicht Strecken, sondern Zahlengrössen sind, welche von ξ abhängen.

Es ist in dem Obigen die Ebbe und Fluth nur in der ersten Annäherung bestimmt. Will man eine höhere Annäherung erzielen, so muss man dennoch die hier entwickelte Theorie zur Grundlage nehmen, und dann die zweite Annäherung in entsprechender Weise behandeln, wie dies in der Theorie der seculären Störungen der Planeten geschieht.

Stettin, den 31. März 1877.

Bemerkungen zum analytischen Beweise des cubischen Reciprocitätsgesetzes.

Von V. Dantscher in Wien.

In der Abhandlung „Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante"*), welche die bekannten schönen Beweise des quadratischen und biquadratischen Reciprocitätsgesetzes durch periodische Functionen enthält, bemerkt Herr Eisenstein, dass auch das cubische Reciprocitätsgesetz nach derselben Methode bewiesen werden könne; indessen hat die Ausführung dieses Gedankens doch manches Eigenthümliche für sich, so dass eine kurze Darstellung vielleicht nicht ungerechtfertigt erscheint**), umsomehr, als dieselbe Gelegenheit bietet zu zeigen, dass die Theilbarkeit der Coefficienten der Theilungsgleichung durch einen eingliedrigen Primzahltheiler (worauf sich der Irreductibilitätsbeweis stützt) auch in den Ausnahmefällen ohne umständliche Reihenentwickelungen leicht erschlossen werden kann.

I.

Die Theorie der cubischen Reste erfordert die Einführung der complexen Zahlen $a+b\,\varrho$***) (a und b reale ganze Zahlen, $\varrho^2+\varrho+1=0$). Die Eigenschaften dieses Zahlensystemes lassen sich nach Analogie jener der gemeinen complexen Zahlen leicht entwickeln und sind, so weit es für den vorliegenden Zweck erforderlich ist, in der Eisenstein'schen Abhandlung „Beweis des Reciprocitätssatzes für die cubischen Reste u. s. w." Crelle's J. XXVII, oder in den Vorlesungen „Die Lehre von der Kreistheilung" von H. Prof. Dr. Paul Bachmann, Leipzig 1872, zusammengestellt.

Bedeutet m eine Primzahl ($1-\varrho$ ausgenommen), μ deren Norm, z eine durch m nicht theilbare Zahl, so ist der cubische Charakter von z in Beziehung auf die Primzahl m, den Eisenstein mit dem

*) Mathm. Abh. von Dr. G. Eisenstein, Berlin 1847, p. 127.

**) In der Jenaer Doctordissertation des H. Paul Hübler (1871), die mir leider erst während der Correctur zur Kenntniss gekommen ist, wird der Beweis des cubischen Reciprocitätsgesetzes (der mir übrigens p. 33 bez. des Nachweises, dass die Coeff. M_μ u. N_μ *ganze* complexe Zahlen seien, nicht vollständig zu sein scheint) nicht durch die Symmetrie der analytischen Darstellung von $\left(\frac{n}{m}\right)$ in Beziehung auf m und n geliefert, und werden ausserdem die oben erwähnten Ausnahmefälle nicht behandelt.

***) Gauss' Werke, Bd. II. theoria resid. biqu. commentatio II. Anm. p. 102.

Symbole $\left[\frac{z}{m}\right]$ bezeichnet, definirt durch die Congruenz $\left[\frac{z}{m}\right] \equiv z^{\frac{\mu-1}{3}}$ mod m. Bilden die Zahlen $r_1, r_2, \cdots r_{\frac{\mu-1}{3}}$ ein Drittelrestsystem mod m, so bilden auch die Zahlen $zr_1, zr_2, \cdots zr_{\frac{\mu-1}{3}}$ ein solches, und ist daher $zr_h \equiv \varrho^i r_k$ mod m; erhält dabei i α mal den Werth 0, β mal den Werth 1, γ mal den Werth 2, so ist $z^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varrho^{\beta+2\gamma}$ mod m, also kann man geradezu setzen:

$$\left[\frac{z}{m}\right] = \varrho^{\beta+2\gamma}. \tag{1}$$

An dieses Lemma knüpft nun die analytische Behandlung an. Sie beruht einerseits auf der Existenz einer doppelt periodischen Function pu, welche ein primitives Periodenpaar 2ω, $2\omega\varrho$ besitzt, andererseits auf der sogenannten complexen Multiplication derselben in der Art, dass $p(\varrho u) = \varrho pu$ ist. Ist $z = z' + (\alpha + \beta\varrho)m \equiv z'$ mod m, so ist dann

$$p\left(\frac{z 2\omega}{m}\right) = p\left(\frac{z' 2\omega}{m} + 2\alpha\omega + 2\beta\omega\varrho\right) = p\left(\frac{z' 2\omega}{m}\right)$$

d. h. die Congruenz $z \equiv z'$ mod m ersetzt durch die Gleichung $p\left(\frac{z 2\omega}{m}\right) = p\left(\frac{z' 2\omega}{m}\right)$, und umgekehrt.

Ist ferner $zr_h \equiv \varrho^i r_k$, so ist $p\left(\frac{zr_h 2\omega}{m}\right) = \varrho^i p\left(\frac{r_k 2\omega}{m}\right)$, woraus der Ausdruck von ϱ^i durch den Quotienten $p\left(\frac{zr_h 2\omega}{m}\right) : p\left(\frac{r_k 2\omega}{m}\right)$ folgt; das cubische Symbol lässt sich also darstellen in der Form

$$\left[\frac{z}{m}\right] = \prod_r \frac{p\left(\frac{zr2\omega}{m}\right)}{p\left(\frac{r2\omega}{m}\right)}, \tag{2}$$

wobei r ein Drittelrestsystem mod m durchläuft.

Eine Function pu mit den verlangten Eigenschaften ist nun nach der Theorie des Herrn Weierstrass die specielle p Function $p(u; 0, g_3)$, in der man überdiess noch zur Vereinfachung $g_3 = 1$ setzen kann; im Folgenden wird $p(u; 0, 1)$ kurz mit pu oder p bezeichnet.

Die für die allgemeine Function $p(u; g_2, g_3)$ bestehende Relation $p(mu; m^{-4}g_2, m^{-6}g_3) = \frac{1}{m^2}\, p(u; g_2, g_3)$ ergiebt für $g_2 = 0$ und $m = \varrho$ $p(\varrho u) = \varrho pu$, und das Additionstheorem für $p(u; 0, 1)$

$$p(u+v) = \frac{2pu \cdot pv\,(pu+pv) - 1 - p'u \cdot p'v}{2(pu-pv)^2}$$

lässt mit Rücksicht darauf, dass die Entwickelung von pu in der Umgebung des Nullpunktes mit $\frac{1}{u^2}$ anfängt, unmittelbar erkennen, dass $2\omega\varrho$ eine primitive Periode von pu ist, wenn 2ω eine solche ist.

Um nun in dem Falle, wo z und m zwei ungerade primäre*) Primzahlen P und Q sind, die Beziehung zwischen $\left[\frac{Q}{P}\right]$ und $\left[\frac{P}{Q}\right]$, d. h. das Reciprocitätsgesetz unmittelbar aus der analytischen Darstellung zu ersehen, muss die complexe Multiplication der Function pu durch einen ungeraden primären Multiplicator $m = -1 + 3\alpha + 3\beta\varrho$ genauer ausgeführt werden.

Aus dem Additionstheoreme folgt zunächst, dass sich $p(mu)$ rational durch pu ausdrücken lässt; angenommen nämlich, es sei für einen bestimmten Multiplicator n, der eine ganze complexe Zahl von der Form $a + b\varrho$ ist, $p(nu) = R(pu)$, so ist auch $p[(n \pm \varrho^i)u]$ (wegen $p(\pm \varrho^i u) = \varrho^i pu$, $p'(nu) = \frac{1}{n} R'(pu) p'u$ und $p'^2 u = 4pu^3 - 1$) eine rationale Function von pu.

Für $n = 1 - \varrho$ und $n = 2$ findet man aber unmittelbar:

$$(3a)\quad p[(1-\varrho)u] = \frac{p^3u - 1}{(1-\varrho)^2 p^2 u}; \qquad (3b)\quad \frac{p(2u)}{pu} = \frac{p^3u + 2}{4p^3u - 1}.$$

Die erstere dieser Gleichungen lässt in den Grössen $\frac{2\omega}{1-\varrho} = \frac{2+\varrho}{3} 2\omega$ und $\frac{1+\varrho}{1-\varrho} 2\omega = \frac{1+2\varrho}{3} 2\omega$, den Dreitheilungspunkten der Diagonale 2ω, $2\omega\varrho$ des Periodenparallelogrammes, die Nullwerthe von pu erkennen.

Setzen wir also

$$(4.)\qquad \frac{p(mu)}{pu} = \frac{\Phi(pu)}{F(pu)},$$

mit Φ und F ganze Functionen ohne gemeinsamen Theiler bezeichnend, so lässt sich zunächst Folgendes aussagen: die linke Seite bleibt zufolge der Gleichung $p(\varrho u) = \varrho pu$ ungeändert, wenn ϱu an die Stelle von u tritt, und erhält für $u = 0$, wofür pu ∞ wird, den Werth $\frac{1}{m^2}$; also sind Φ und F ganze Functionen desselben Grades von p^3u und ist der Coefficient der höchsten Potenz in Φ gleich 1, wenn er in F m^2 ist.

Zur Darstellung der rationalen Function $\frac{\Phi}{F}$ dient nun die Function

*) Jede durch $1-\varrho$ nicht theilbare Zahl $a + b\varrho$ lässt sich durch Multiplication mit einer Einheit $(-1)^\sigma \varrho^\tau$ auf die Form $-1 + 3\alpha + 3\beta\varrho$ bringen und zwar ist, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die kleinsten positiven Reste von a und b mod 3 bezeichnen, $\sigma \equiv \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \bmod 2$, $\tau \equiv \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^\sigma\right)(\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} + 1) + \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^\sigma\right)(2\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 1) \bmod 3$

$\frac{\sigma(mu)}{\sigma^\mu u}$, *) welche für ein ungerades, durch $1-\varrho$ nicht theilbares m, eine ganze Function von $p^3 u$ ist, in pu vom Grade $\frac{\mu-1}{2}$, gegeben in der Form:

$$\frac{\sigma(mu)}{\sigma^\mu u} = \Psi(pu) = m \prod_s \left[pu - p\left(\frac{s2\omega}{m}\right)\right] = m \prod_{\mathfrak{m}} \left[p^3 u - p^3\left(\frac{\mathfrak{m}2\omega}{m}\right)\right], \tag{5}$$

wobei s ein halbes Restsystem, $\mathfrak{m}$ ein Sechstelrestsystem mod m durchläuft.

Insbesondere ergiebt sich für $m = 1-\varrho$ $\frac{\sigma(\overline{1-\varrho v})}{\sigma^3 u} = (1-\varrho) pu$.

Die Grössen $\pm \frac{s2\omega}{m}$ bilden ein vollständiges System incongruenter Unendlichkeitswerthe von $\frac{p(mu)}{pu}$, welche sämmtlich die Ordnungszahl 2 haben, also müssen sie zugleich Nullwerthe von $F(pu)$ sein mit der Ordnungszahl 2. Da m als ungerade vorausgesetzt ist, so ist jeder Werth $\frac{s2\omega}{m}$ verschieden von einer Halbperiode und verschwindet daher $\Psi(pu)$ für ihn nur in der ersten Ordnung; $\Psi^2(pu)$ verschwindet also für jede Wurzel von $F(pu)$ in derselben Ordnung, die beiden Functionen $\mu-1^{\text{ten}}$ Grades haben gleiche Coefficienten der höchsten Glieder, also ist

$$F(pu) = \Psi^2(pu) = m^2 \prod_{\mathfrak{m}} [p^3 u - p^3 v_{\mathfrak{m}}]^2 \tag{6}$$

wobei $\frac{\mathfrak{m}2\omega}{m}$ zur Abkürzung mit $v_{\mathfrak{m}}$ bezeichnet ist.

Denselben Schluss kann man auch mit Benutzung der bekannten Relation $pu = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}$ machen; durch sie ergiebt sich aus (5):

$$\frac{p(mu)}{pu} = \frac{\mu\Psi^2 + (4p^3u - 1)[\Psi'^2 - \Psi\Psi'']\,\overline{pu}^{1} - 6\Psi\Psi'\,pu}{m^2\Psi^2}; \tag{7}$$

allein diese Darstellung ist zum Beweise des Reciprocitätsgesetzes nicht geeignet.

Eine andere, für den gegenwärtigen Zweck entscheidende Einsicht in den Zusammenhang zwischen den Functionen Φ und Ψ verschaffen die aus dem Additionstheoreme erfliessenden Formeln:

$$p\left(u - \frac{2\omega}{1-\varrho}\right) p\left(u + \frac{2\omega}{1-\varrho}\right) = \frac{1}{pu}; \tag{8a}$$

$$p\left(u - \frac{2\omega}{1-\varrho}\right) + p\left(u + \frac{2\omega}{1-\varrho}\right) = -\frac{1}{p^2 u}. \tag{8b}$$

Aus ihnen folgt wegen $m \equiv -1 \bmod 1-\varrho$:

---

*) Weierstrass in seinen Vorlesungen; vergl. auch Kiepert, Crelle's J. B. 76. „Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication u. s. w.“

$$\frac{p\left[m\left(u-\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)\right]p\left[m\left(u+\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)\right]}{p\left(u-\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)p\left(u+\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)}$$

$$=\frac{pu}{p(mu)}=\frac{\Phi\left[p\left(u-\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)\right]\ \Phi\left[p\left(u+\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)\right]}{m^4\prod\limits_{\mathrm{m}}\left[p^3\left(u-\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)-p^3v_{\mathrm{m}}\right]^2\left[p^3\left(u+\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)-p^3v_{\mathrm{m}}\right]^2};$$

nach (8a) und (8b) ist:

$$\left[p^3\left(u-\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)-p^3v_{\mathrm{m}}\right]\left[p^3\left(u+\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)-p^3v_{\mathrm{m}}\right]$$
$$=\frac{1}{p^6u}\left[p^6v_{\mathrm{m}}p^6u-3p^3v_{\mathrm{m}}p^3u+p^3u+p^3v_{\mathrm{m}}\right],$$

somit ergiebt sich:

$$\frac{p(mu)}{pu}=m^4\frac{\prod\limits_{\mathrm{m}}\left[p^6v_{\mathrm{m}}p^6u-3p^3v_{\mathrm{m}}p^3u+p^3u+p^3v_{\mathrm{m}}\right]^2}{p^{2\mu-2}u\ \Phi\left[p\left(u-\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)\right]\ \Phi\left[p\left(u+\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)\right]}.$$

Die Function $\prod\limits_{\mathrm{m}}\left[p^6v_{\mathrm{m}}p^6u-3p^3v_{\mathrm{m}}p^3u+p^3u+p^3v_{\mathrm{m}}\right]$ verschwindet für jede der $\mu-1$ von einander verschiedenen Wurzeln von $\Phi(pu)$, ist also mit Rücksicht auf die Grade und ersten Coefficienten gleich $\prod\limits_{\mathrm{m}}p^6v_{\mathrm{m}}\ \Phi(pu)$.

Nach dieser Darstellung des Zählers $\Phi(pu)$ erhält $\frac{p(mu)}{pu}$ die Form:

$$(9)\qquad \frac{(pmu)}{pu}=\frac{1}{m^2\prod\limits_{\mathrm{m}}p^6v_{\mathrm{m}}}\prod_{m}\frac{p^6v_{\mathrm{m}}p^6u-3p^3v_{\mathrm{m}}p^3u+p^3u+p^3v_{\mathrm{m}}}{\left[p^3u-p^3v_{\mathrm{m}}\right]^2}.$$

Mit Hilfe der bekannten Gleichung:

$$(10)\qquad \sigma(u+2\nu\omega+2\nu'\omega')=(-1)^{\nu\nu'+\nu+\nu'}e^{2(\nu\eta+\nu'\eta')(u+\nu\omega+\nu'\omega')}\sigma u$$

und der Gleichung $\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{\pi}{2}i$, aus welcher hier wegen $\eta'=\varrho^2\eta$

$$(11)\qquad \eta\omega=\eta'\omega'=\frac{\pi i}{2(1+2\varrho)}$$

hervorgeht, zeigt man nun leicht, dass $m^2\prod\limits_{\mathrm{m}}p^6v_{\mathrm{m}}$ den Werth 1 hat.

Aus (5) folgt nämlich zunächst $\frac{\sigma\left(m\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)}{\sigma^{\mu}\left(\frac{2\omega}{1-\varrho}\right)}=(-1)^{\frac{\mu-1}{6}}m\prod\limits_{\mathrm{m}}p^3v_{\mathrm{m}};$

nach (10) ist $\dfrac{\sigma\left(m\dfrac{2\omega}{1-\varrho}\right)}{\sigma\left(\dfrac{2\omega}{1-\varrho}\right)} = -(-1)^{\alpha(\beta+1)+\beta}\, e^{2\left[\frac{\mu-1}{3}+\beta(1+2\varrho)\right]\eta\omega} = -e^{2\frac{\mu-1}{3}\eta\omega}$,

denn nach der Voraussetzung, dass $m = -1 + 3\alpha + 3\beta\varrho$ ungerade ist, ist $\alpha(\beta+1)$ sicher gerade.

Um $\sigma^{\mu-1}\left(\dfrac{2\omega}{1-\varrho}\right)$ zu berechnen dient die Gleichung $\dfrac{\sigma\,(\overline{1-\varrho u})}{\sigma^3 u} = (1-\varrho)pu$; aus ihr folgt, mit Rücksicht auf $\sigma'(2\omega) = -e^{2\eta\omega}$, $p'^2\left(\dfrac{2\omega}{1-\varrho}\right) = -1$, für $u = \dfrac{2\omega}{1-\varrho}$, $\sigma^6\left(\dfrac{2\omega}{1-\varrho}\right) = -e^{4\eta\omega}$, also $\sigma^{\mu-1}\left(\dfrac{2\omega}{1-\varrho}\right) = (-1)^{\frac{\mu-1}{6}}\, e^{2\frac{\mu-1}{3}\eta\omega}$; und somit ist

$$m\prod_{\mathrm{m}} p^3 v_{\mathrm{m}} = -1. \tag{12}$$

Aus (9) erhalten wir demnach die gesuchte Darstellung von $\dfrac{p\,(mu)}{pu}$ in der Form:

$$\frac{p\,(mu)}{pu} = \prod_{\mathrm{m}} \frac{p^6 v_{\mathrm{m}}\, p^6 u - 3p^3 v_{\mathrm{m}}\, p^3 u + p^3 u + p^3 v_{\mathrm{m}}}{[p^3 u - p^3 v_{\mathrm{m}}]^2}, \tag{13}$$

welche nun zum Beweise des Reciprocitätsgesetzes völlig geeignet ist.

Sind nämlich P und Q zwei ungerade primäre Primzahlen, bezeichnen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ beziehungsweise Sechstelrestsysteme mod P und mod Q, und setzt man zur Abkürzung $\dfrac{\mathfrak{p}\,2\omega}{P} = \omega_{\mathfrak{p}}$, $\dfrac{\mathfrak{q}\,2\omega}{Q} = \omega_{\mathfrak{q}}$, so ist nach (2):

$$\left[\frac{Q}{P}\right] = \prod_{\mathfrak{p}} \left[\frac{p\,(Q\omega_{\mathfrak{p}})}{p\,\omega_{\mathfrak{p}}}\right]^2, \quad \left[\frac{P}{Q}\right] = \prod_{\mathfrak{q}} \left[\frac{p\,(P\omega_{\mathfrak{q}})}{p\,\omega_{\mathfrak{q}}}\right]^2.$$

Benützen wir nun für $\dfrac{p\,(Q\omega_{\mathfrak{p}})}{p\,\omega_{\mathfrak{p}}}$ die obige Darstellung von $\dfrac{p\,(mu)}{pu}$, so ergiebt sich:

$$\left[\frac{Q}{P}\right] = \prod_{\mathfrak{p}}\prod_{\mathfrak{q}} \left\{\frac{p^6\omega_{\mathfrak{q}}\, p^6\omega_{\mathfrak{p}} - 3p^3\omega_{\mathfrak{q}}\, p^3\omega_{\mathfrak{p}} + p^3\omega_{\mathfrak{q}} + p^3\omega_{\mathfrak{p}}}{(p^3\omega_{\mathfrak{p}} - p^3\omega_{\mathfrak{q}})^2}\right\}^2;$$

nun ist aber der Ausdruck rechts vollkommen symmetrisch in Beziehung auf $\omega_{\mathfrak{p}}$ und $\omega_{\mathfrak{q}}$, folglich ist das cubische Reciprocitätsgesetz für zwei ungerade primäre Primzahlen P und Q ausgedrückt durch die Formel

$$\left[\frac{Q}{P}\right] = \left[\frac{P}{Q}\right].$$

Nach der Annahme über P und Q ist die Primzahl 2 ausgeschlossen; es ist aber leicht zu zeigen, dass auch $\left[\dfrac{2}{P}\right] = \left[\dfrac{P}{2}\right]$ ist. Die Zahl 1 bildet ein Drittelrestsystem mod 2, also ist nach (2) $\left[\dfrac{P}{2}\right] = \dfrac{p\,(P\omega)}{p\,\omega}$; benützt man für den Ausdruck rechts wieder die Darstellung (13) und bemerkt, dass $4p^3\omega = 1$, $\frac{p^3\omega_\mathfrak{p} + 2}{4p^3\omega_\mathfrak{p} - 1} = \frac{p(2\omega_\mathfrak{p})}{p\omega_\mathfrak{p}}$ ist [(36)], so erhält man:

$$\left[\frac{P}{2}\right] = \prod_\mathfrak{p} \frac{p^2(2\omega_\mathfrak{p})}{p^2\omega_\mathfrak{p}} = \left[\frac{2}{P}\right].$$

Auch die Bestimmung von $\left[\frac{1-\varrho}{P}\right]$ lässt sich aus den entwickelten Formeln, wie folgt, treffen.

Nach (2) und (3a) ist

$$\left[\frac{1-\varrho}{P}\right] = \prod_\mathfrak{p} \frac{p^2(\overline{1-\varrho\,\omega_\mathfrak{p}})}{p^2\omega_\mathfrak{p}} = \prod_\mathfrak{p} \left[\frac{p^3\omega\mathfrak{p} - 1}{(1-\varrho)^2 p^3\omega_\mathfrak{p}}\right]^2;$$

nach (12) ist $\prod_\mathfrak{p} p^6\omega_\mathfrak{p} = \frac{1}{P^2}$; bezeichnet man ferner $N(P)$ mit π und bemerkt $(1-\varrho)^{2\frac{\pi-1}{3}} = 3^{\frac{\pi-1}{3}}\varrho^{\frac{\pi-1}{3}}$, so ergiebt sich:

$$\left[\frac{1-\varrho}{P}\right] = 3^{-\frac{\pi-1}{3}}\varrho^{-\frac{\pi-1}{3}} P^2 \prod_\mathfrak{p} [p^3\omega_\mathfrak{p} - 1]^2.$$

Da nun $p^3\left(\frac{2\omega}{3}\right) = 1$ ist, wie man aus (3a) erschliesst, so kann man setzen:

$$P^2\prod_\mathfrak{p} [p^3\omega_\mathfrak{p} - 1]^2 = P^2\prod_\mathfrak{p}\left[p^3\omega_\mathfrak{p} - p^3\left(\frac{2\omega}{3}\right)\right]^2 = \frac{\sigma^2\left(\frac{P\,2\omega}{3}\right)}{\sigma^{2\pi}\left(\frac{2\omega}{3}\right)} \quad [(5)].$$

Nach (10) und (11) ist $\dfrac{\sigma^2\left(\frac{P\,2\omega}{3}\right)}{\sigma^2\left(\frac{2\omega}{3}\right)} = e^{4\frac{\pi-1}{9}\eta\omega}\varrho^\beta$; um $\sigma^{2\pi-2}\left(\frac{2\omega}{3}\right)$ zu bestimmen benützen wir die auch für beliebige Invarianten g_2, g_3 giltige Gleichung $\sigma(2u) = -\sigma^4 u\cdot p'u$, und bemerken:

$$\sigma\left(\frac{4\omega}{3}\right) = \sigma\left(-\frac{2\omega}{3} + 2\omega\right) = e^{\frac{2\eta\omega}{3}}\sigma\left(\frac{2\omega}{3}\right),\quad p'^2\left(\frac{2\omega}{3}\right) = 3;$$

also ist

$$(9)\qquad \sigma^{-2\pi+2}\left(\frac{2\omega}{3}\right) = 3^{\frac{\pi-1}{3}} e^{-4\frac{\pi-1}{9}\eta\omega}, \text{ und somit } \frac{\sigma^2\left(\frac{P\,2\omega}{3}\right)}{\sigma^{2\pi}\left(\frac{2\omega}{3}\right)} = 3^{\frac{\pi-1}{3}}\varrho^\beta.$$

Damit ergiebt sich nun

$$\left[\frac{1-\varrho}{P}\right] = \varrho^{\beta - \frac{\pi-1}{3}} = \varrho^{2\alpha},$$

denn $\frac{\pi-1}{3} \equiv \alpha + \beta \mod 3$.

Ist also P eine primäre Primzahl $A + B\varrho$, so ist der cubische Charakter von $1 - \varrho$ in Beziehung auf P gegeben durch die Formel

$$\left[\frac{1-\varrho}{P}\right] = \varrho^{\frac{2}{3}(A+1)},$$

die offenbar auch für $P = 2$ gilt.

II.

Der Nachweis, dass die Coefficienten der Function

$$\Psi(pu) = m\,pu^{\frac{\mu-1}{2}} + c_1\,pu^{\frac{\mu-r}{2}} + \cdots + c_{\frac{\mu-1}{6}},$$

welche gleich Null gesetzt die Theilungsgleichung darstellt, ganze complexe Zahlen von der Form $a + b\varrho$ sind, und zwar, wenn m eine ungerade primäre Primzahl ist, mit Ausnahme des letzten, für den wir bereits den Werth $(-1)^{\frac{\mu+5}{6}}$ gefunden haben, sämmtlich durch m theilbar sind (worauf sich der Irreductibilitätsbeweis stützt), lässt sich ganz ähnlich so, wie bei der Lemniscatentheilungsgleichung führen.

Um zunächst zu beweisen, dass die Coefficienten ganze Zahlen sind, nehme ich an, dass für ein bestimmtes ungerades primäres m in $\frac{p(mu)}{pu} = \frac{\Phi(pu)}{\Psi^2(pu)}$ Φ eine ganzzahlige Function sei, in welcher der Coefficient von $pu^{\mu-1}$ 1 ist, Ψ eine eben solche Function sei, in welcher der Coefficient von $pu^{\frac{\mu-1}{2}}$ m ist.

Nun ist $p'(mu) = \frac{\Phi\Psi + (\Phi'\Psi - 2\Phi\Psi')p}{m\Psi^3}\,p'$; halten wir damit zusammen die Gleichung $p'(mu)^2 = 4p^3(mu) - 1$, so folgt

$$(4p^3 - 1)\,\frac{[\Phi\Psi + (\Phi'\Psi - 2\Phi\Psi')p]^2}{m^2\Psi^6} = \frac{4p^3\Phi^3 - \Psi^6}{\Psi^6},$$

oder

$$[\Phi\Psi + (\Phi'\Psi - 2\Phi\Psi')p]^2 = m^2\,\frac{4p^3\Phi^3 - \Psi^6}{4p^3 - 1};$$

hieraus erschliesst man sofort, dass die Coefficienten von

$$\Phi\Psi + (\Phi'\Psi - 2\Phi\Psi')p \tag{1}$$

durch m theilbare ganze Zahlen sind.

Es ist leicht zu sehen, dass man von m aus durch Schritte ± 3 und $\pm 3\varrho$, stets ungerade primäre Zahlen passirend, zu jeder andern Zahl m_1 dieser Art gelangen kann; es genügt also zu zeigen, dass die angenommene Form der Darstellung von $\frac{p(mu)}{pu}$ auch für $\frac{p(\overline{m\pm 3}\,u)}{pu}$ und für $\frac{p(\overline{m\pm 3\varrho}\,u)}{pu}$ stattfindet.

Bezeichnen wir $\frac{p(\overline{m\pm 3}\,u)}{pu}=\frac{\Phi_{m\pm 3}(pu)}{\Psi^2_{m\pm 3}(pu)}$, $\frac{p(\overline{m\pm 3\varrho}\,u)}{pu}=\frac{\Phi_{m\pm 3\varrho}(pu)}{\Psi^2_{m\pm 3\varrho}(pu)}$,

$$p(3u)=\frac{p^9+24p^6+3p^3-1}{3^2p^2(p^3-2)}=\frac{\varphi}{\psi^2},$$

$$p'(3u)=\frac{(p^9-57p^6+3p^3-1)(p^3+2)}{3^3p^3(p^3-1)^3}\,p'=\frac{\chi}{\psi^3}\,p'$$

so ergiebt das Additionstheorem:

$$(2)\quad p[\overline{m\pm 3}\,u]=\frac{2p\varphi\Phi(p\Phi\psi^2+\varphi\Psi^2)-\psi^4\Psi^4\mp\psi\Psi\frac{1}{m}[\Psi(\Phi+p\Phi')-2\Phi\Psi'p](4p^3-1)}{2[p\Phi\psi^2-\Psi^2\varphi]^2}.$$

Hierbei sind Zähler und Nenner mit Rücksicht auf (1) ganzzahlige Functionen. Betrachten wir zunächst den Ausdruck $\Psi^2\varphi-p\Phi\psi^2$, der im Nenner auftritt; er muss sowohl Ψ_{m+3} als Ψ_{m-3} als Factor enthalten, und, da diese beiden Functionen zu einander prim sind, wie gleich gezeigt werden soll, auch das Product $\Psi_{m+3}\,\Psi_{m-3}$.

Die Zahlen $m+3$ und $m-3$ sind nämlich nach der Annahme über m offenbar prim; die Wurzeln von Ψ_{m+3} und Ψ_{m-3} sind beziehungsweise dargestellt durch $p\left(\frac{s\,2\omega}{m+3}\right)$ und $p\left(\frac{r\,2\omega}{m-3}\right)$, wenn s und r halbe Restsysteme mod $m+3$ und mod $m-3$ bedeuten; soll nun sein $p\left(\frac{r\,2\omega}{m-3}\right)=p\left(\frac{s\,2\omega}{m+3}\right)$, so müsste $\frac{r}{m-3}\mp\frac{s}{m+3}$ eine ganze Zahl sein, was nicht möglich ist, da der Werth 0 für r und s ausgeschlossen ist.

Vergleicht man Grade und Anfangscoefficienten, so ergiebt sich:

$$\Psi^2\varphi-p\Phi\psi^2=\Psi_{m+3}\Psi_{m-3}.$$

Bemerken wir ferner, dass das constante Glied in $\Psi^2\varphi-p\Phi\psi^2$ gleich -1 ist, so können wir nach dem bekannten Satze (Gauss, disq. arithm. 42) sofort erschliessen, dass Ψ_{m+3} und Ψ_{m-3} ganzzahlige Functionen sind, deren constantes Glied den Werth ± 1 hat, und durch Vergleichung mit $\frac{\sigma(\overline{m\pm 3}\,u)}{\sigma^{N(m\pm 3)}u}$, dass die Coefficienten der höchsten Glieder in Ψ_{m+3}, Ψ_{m-3} beziehungsweise $m+3$, $m-3$ sind.

Ferner ist leicht zu zeigen, dass der Zähler in (2) den Factor 2 hat. Setzen wir für einen Augenblick: $p(\overline{m-3}u)=\frac{Z}{2N}$, $p(\overline{m+3}u)=\frac{Z'}{2N'}$, so ist der Ausdruck rechts in (2) für das obere Zeichen $\frac{Z'N}{2NN'}$, für das untere $\frac{ZN'}{2NN'}$; die aus dem Additionstheoreme erfliessenden Formeln:

$$p\,(u+v)+p\,(u-v)=\frac{2pu\cdot pv\,(pu+pv)-1}{[pu-pv]^2}$$

und

$$p\,(u+v)\,p\,(u-v)=\frac{p^2u\cdot p^2v+pu+pv}{[pu-pv]^2}$$

zeigen aber, dass ZZ' durch 4 und $ZN'+Z'N$ durch 2 theilbar sind; nachdem nun die constanten Glieder in N und $N'\pm 1$ sind, so ist nothwendig sowohl Z als Z' durch 2 theilbar.

Nach der Division durch 2 ist nun der Zähler in (2) $\Phi_{m\pm3}\,\Psi^2_{m\mp3}$ und zwar eine ganzzahlige Function.

Da in $\Psi^2_{m\mp3}$ das constante Glied 1 ist, so erschliesst man nach dem Hilfssatze I, Serret, Algebra, dtsch v. Wertheim, Bd. I. p. 194, leicht, dass auch $\Phi_{m\pm3}$ eine ganzzahlige Function, deren erster Coefficient 1 sein muss, da der entsprechende Coefficient im Nenner $(m\mp3)^2$ ist.

In der Darstellung von $\frac{p(\overline{m\pm3u}}{pu}$ sind demnach genau dieselben Bedingungen erfüllt, welche für die von $\frac{p\,(mu)}{pu}$ angenommen werden; dasselbe lässt sich bezüglich $\frac{p(\overline{m\pm3\varrho u})}{pu}$ behaupten, wobei nur $\varrho\psi$ an die Stelle von ψ tritt.

Nun besteht aber die vorausgesetzte Form für $m=-1-3\varrho$, wo sich ergiebt:

$$(3)\quad p\,[\overline{-1-3\varrho u}]=\frac{p^6u+(-1-3\varrho)\,(2-3\varrho)\,p^3u-(-1-3\varrho)}{[(-1-3\varrho)\,p^3+1]^2}\,pu,$$

folglich besteht sie für jeden ungeraden primären Multiplicator m und sind die Coefficienten von $\Psi\,(pu)$ ganze Zahlen.

Dass diese Coefficienten mit Ausnahme von $c_{\frac{\mu-1}{6}}$, wenn m eine Primzahl ist, durch m theilbar sind, wird für zweigliedrige Primzahlen vollständig aus dem Umstande erklärt, dass die Coefficienten von $\Phi\Psi+(\Phi'\Psi-2\Phi\Psi')\,p$ sämmtlich durch m theilbar sind.

Zuvörderst bemerke ich noch, dass das constante Glied in Φ gleich $-m$ ist, wie man leicht aus $\frac{p\,(mu)}{pu}=\frac{\Phi}{\Psi^2}$ ersieht, wenn man u den Werth $\frac{2\omega}{1-\varrho}$ ertheilt.

Setzen wir also:

$$(4)\quad \Phi=p^{\mu-1}+b_1p^{\mu-4}+\cdots+b_hp^{\mu-1-3h}+\cdots-m$$

$$(5)\quad \Psi=mp^{\frac{\mu-1}{2}}+c_1p^{\frac{\mu-7}{2}}+\cdots+c_\varkappa p^{\frac{\mu-6\varkappa-1}{2}}+\cdots+(-1)^{\frac{\mu+5}{6}},$$

und nehmen an, dass die Coefficienten $b_{h+1}, b_{h+2}, \cdots b_{\frac{\mu-1}{3}}$ und c_0,

$c_1, \cdots c_{\varkappa-1}$ durch m theilbar seien, so sind aus dem angegebenen Grunde auch alle Coefficienten des Ausdrucks

$$\left[c_\varkappa p^{\frac{\mu-6\varkappa-1}{2}} + \cdots + (-1)^{\frac{\mu+5}{6}}\right]\left[(\mu-3)\, b_1 p^{3h-3} + \cdots (\mu-3h)\, b_h\right]$$
$$-\left[p^{3h} + \cdots b_h\right]\left[(\mu-6\varkappa-1) c_\varkappa p^{\frac{\mu-6\varkappa-1}{2}} + \cdots + 6 c_{\frac{\mu-7}{6}}\, p^3\right]$$

durch m theilbar.

Das constante Glied ergiebt demnach:

(6) $$(\mu - 3h)\, b_h \equiv 0 \bmod m$$

Ist nun m eine zweigliedrige Primzahl, so ist $\mu - 3h$, wenn $0 < h < \mu$ ist, nicht durch m theilbar, folglich ist $b_h \equiv 0 \bmod m$, nun wissen wir aber: $b_{\frac{\mu-1}{3}}$ ist gleich $-m$, also sind $b_1, b_2, \cdots b_{\frac{\mu-1}{3}}$ sämmtlich durch m theilbar.

Der Coefficient der höchsten Potenz ergiebt:

(7) $$(\mu - 6\varkappa - 1)\, c_\varkappa \equiv 0 \bmod m;$$

hier gilt dasselbe: wenn $\varkappa$ kleiner ist als $\frac{\mu-1}{6}$, so muss $c_\varkappa \equiv 0 \bmod m$ sein; c_0 ist aber gleich m, also sind $c_0, c_1, \cdots c_{\frac{\mu-7}{6}}$ sämmtlich durch m theilbar.

Anders aber verhält sich die Sache, wenn m eine eingliedrige Primzahl n (von der Form $6\nu + 5$) ist; dann ist $\mu - 3h$ für die $\frac{n-2}{3}$ Werthe $n, 2n, \cdots \frac{n-2}{3} n$ von h, und $n^2 - 6\varkappa - 1$ für die $\frac{n-5}{6}$ Werthe $\frac{5n-1}{6}, \frac{11n-1}{6}, \cdots \frac{n^2-6n-1}{6}$ Werthe von $\varkappa$ durch n theilbar und kann daher die Theilbarkeit der betreffenden Coefficienten b_h und $c_\varkappa$ aus den obigen Congruenzen nicht erschlossen werden.

Aber auch in diesen Ausnahmefällen bleibt die genannte Eigenschaft jener Coefficienten bestehen und lässt sich der Nachweis dafür aus dem bisher Erhobenen ziemlich einfach herstellen; hierzu dient die Bemerkung, dass, mit Rücksicht auf die nachgewiesene Form der rationalen Function $\frac{\Phi}{\Psi^2}$, in der Gleichung (7) I. die Coefficienten von $(4p^3 - 1)\,[\Psi'^2 - \Psi\Psi''] - 6p^2\Psi\Psi'$ sämmtlich durch n^2 theilbar sein müssen.

Aus derselben Gleichung ergiebt sich auch, wenn man im Zähler rechts das constante Glied, welches gleich $-m^3$ sein muss, bestimmt, für $c_{\frac{\mu-7}{6}}$ der Werth $m\frac{m^2+m'}{6}$, wobei m' die zu m conjugirte Zahl bezeichnet; also ist:

$$(8)\quad \Psi = np^{\frac{n^2-1}{2}} + c_1 p^{\frac{n^2-7}{2}} + \cdots + c_\varkappa p^{\frac{n^2-6\varkappa-1}{2}} + \cdots + n^2 \frac{n+1}{6} p^3 - 1.$$

Wenn nun $6\varkappa + 1 \equiv 0 \bmod n$ ist, so sind die $n-1$ Nachbarcoefficienten nach rechts und links sicher durch n theilbar.

Nimmt man an, es sei $\varkappa$ $\left(\text{natürlich kleiner als } \frac{n^2-1}{6}\right)$ der grösste Index, für den die vorstehende Congruenz erfüllt ist, und berechnet den Coefficienten von $p^{\frac{n^2-1}{2}-3\varkappa-2}$ in der Function $(4p^3-1)[\Psi'^2-\Psi\Psi'']$ $-6p^2\Psi\Psi''$, und zwar nur mod n^2, so erhält man dafür den Ausdruck $(6\varkappa+6)(6\varkappa+7)c_{\varkappa+1} - \frac{1}{4}(6\varkappa+1)(6\varkappa+3)c_\varkappa$, der, wie man sich leicht überzeugt, seine Bedeutung auch für alle grösseren Werthe von $\varkappa$ und gewiss auch für die Werthe $\varkappa-1, \varkappa-2, \cdots \varkappa - \frac{n-2}{3}$ behält.

Die Congruenz:

$$(9)\quad 4(6\varkappa+6)(6\varkappa+7)c_{\varkappa+1} - (6\varkappa+1)(6\varkappa+3)c_\varkappa \equiv 0 \bmod n^2,$$

welche sich daraus ergiebt, scheint indess auf den ersten Anblick wenig zu nützen, denn um zu erschliessen, dass $c_\varkappa$ durch n theilbar ist, müsste man zeigen können, dass $c_{\varkappa+1}$ durch n^2 theilbar ist; eine etwas eingehendere Betrachtung zeigt jedoch, dass dies in der That der Fall ist.

Setzen wir in (9) für $\varkappa$ die Werthe $\varkappa+1, \varkappa+2, \cdots \varkappa+\frac{n-5}{6}$, schreiben zur besseren Uebersicht für $6\varkappa+1$ K, und bilden die Congruenzen:

$$(10)\quad \left.\begin{array}{l} 4(K+5)(K+6)c_{\varkappa+1} - K(K+2)c_\varkappa \equiv 0 \\ 4(K+11)(K+12)c_{\varkappa+2} - (K+6)(K+8)c_{\varkappa+1} \equiv 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ 4(K+n)(K+n+1)c_{\varkappa+\frac{n+1}{6}} - (K+n-5)(K+n-3)c_{\varkappa+\frac{n-5}{6}} \equiv 0, \end{array}\right\} \bmod n^2$$

so sind die in denselben auftretenden Zahlen $K+\lambda$, mit Ausnahme von K und $K+n$, nicht durch n theilbar, die Coefficienten $c_{\varkappa+1}$, $c_{\varkappa+2}, \cdots c_{\varkappa+\frac{n+1}{6}}$ dagegen, wie bereits angedeutet wurde, sicher durch n theilbar.

Aus der letzten Congruenz folgt nun, dass $c_{\varkappa+\frac{n-5}{6}}$ durch n^2 theilbar ist, aus der vorletzten, dass $c_{\varkappa+\frac{n-11}{6}}$ durch n^2 theilbar ist, u. s. w.; aus der zweiten, dass $c_{\varkappa+1}$ durch n^2 theilbar ist, aus der ersten endlich, dass $c_\varkappa$ durch n theilbar ist.

Denselben Schluss kann man machen, indem man die den Werthen $\varkappa - 1,\ \varkappa - 2, \cdots \varkappa - \frac{n+1}{3}$ entsprechenden Congruenzen:

$$\left.\begin{array}{r} 4(K-1)Kc_k - (K-6)(K-4)c_{\varkappa-1} \equiv 0 \\ 4(K-7)(K-6)c_{k-1} - (K-12)(K-10)c_{\varkappa-2} \equiv 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ 4(K-2n+3)(K-2n+4)c_{\varkappa-\frac{n-2}{3}} - (K-2n-2)(K-2n)c_{\varkappa-\frac{n+1}{3}} \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod n^2$$

aus (9) bildet. Hierbei sind wiederum die Zahlen $K - \lambda'$, mit Ausnahme von K und $K - 2n$, nicht durch n theilbar, dagegen die Coefficienten $c_{\varkappa-1}, \cdots c_{\varkappa-\frac{n-2}{3}}$ sämmtlich durch n theilbar; also sind die Coefficienten $c_{\varkappa-\frac{n-2}{3}}, c_{\varkappa-\frac{n-5}{3}}, \cdots c_{\varkappa-1}$ durch n^2, und $c_\varkappa$ durch n theilbar.

Das Resultat ist daher das folgende: auch wenn $6\varkappa + 1 \equiv 0 \bmod n$ ist, ist $c_\varkappa$ durch n theilbar (ausgenommen $c_{\frac{n^2-1}{6}}$); überdiess sind seine $\frac{n+1}{6}$ Nachbarn nach rechts und $\frac{n-2}{3}$ Nachbarn nach links durch n^2 theilbar.

Dass auch die Coefficienten b_h durch n theilbar sind, wenn $h \equiv 0 \bmod n$, folgt schon aus der in I. angegebenen zweiten Entstehung von Φ aus Ψ.

Wien, am 27. März 1877.

Ueber correlative oder reciproke Bündel.

Von Rud. Sturm in Darmstadt.

In den Bänden I, VI, X dieser Annalen habe ich nach einander die Probleme der ebenen, der räumlichen Projectivität und der Collineation behandelt. Es waren dies folgende Probleme:

1) In einer Ebene (oder in zwei verschiedenen) sind zwei Gruppen von entsprechenden (homologen) Punkten gegeben; solche Paare von entsprechenden (correspondirenden, associirten) Punkten zu finden, aus denen die beiden Gruppen durch projective Strahlbüschel projicirt werden.
2) Die beiden Gruppen von Punkten befinden sich im Raume (oder, wenn man lieber will, in zwei Räumen); solche Paare von correspondirenden Axen zu finden, aus denen die beiden Gruppen durch projective Ebenenbüschel*) projicirt werden.
3) Für die beiden Punktgruppen im Raume solche Paare von associirten Punkten zu finden, aus welchen sie durch collineare Strahlenbündel projicirt werden.

Herr Hirst hat in den letzten Jahren sich mit verwandten Untersuchungen beschäftigt. In seiner Abhandlung on Correlation of two Planes**) stellt er zunächst fest, dass die Correlation (reciproke Beziehung) zweier ebenen Systeme durch 8 einfache Bedingungen bestimmt sei. Er nimmt nun die sogenannten elementaren Bedingungen an; und zwar 1) einfache: zwei gegebene Punkte in den beiden Systemen sind conjugirt d. h. jeder liegt auf der entsprechenden Geraden (Polare) des andern; oder zwei gegebene Geraden sind conjugirt, d. h. jede geht durch den entsprechenden Punkt (Pol) der andern; und 2) dop-

---

*) Die Anwendung des Wortes „Ebenenwurf" in der betreffenden Abhandlung erscheint mir heute nicht mehr ganz berechtigt. — In Bezug auf meinen Vorschlag, „projectiv" statt „projectivisch" zu sagen, erlaube ich mir die weitere Bemerkung, dass Plücker's Autorität für das erstere angeführt werden kann (z. B. System der anal. Geom. Berlin 1835, S. 67).

**) Proceed. London Math. Soc. Bd. V, S. 40; Annali di Matematica Ser. II Bd. VI S. 260. (1874.)

pelte: ein gegebener Punkt des ersten oder zweiten Systems entspricht einer gegebenen Geraden des andern.

Sind blos 7 Bedingungen gegeben, so erhält man ein System von Correlationen*) (Reciprocitäten, reciproken Beziehungen); in diesem befinden sich eine endliche Zahl von exceptionellen Correlationen (Ausartungen), deren es zwei Arten giebt, — die eine mit einem Paar von singulären Punkten, die andere mit einem Paare von singulären Geraden —, ferner eine endliche Zahl von Correlationen, für die noch ein gegebenes Paar von Punkten, oder ein gegebenes Paar von Geraden conjugirt ist. Zwischen diesen vier Zahlen π, λ, μ, ν, von denen — nach Analogie der Theorie von Kegelschnitt-Systemen — die letzteren die Charakteristiken des Correlations-Systemes heissen, findet nun Herr Hirst zwei Relationen, welche genau dieselbe Gestalt haben, wie bei Kegelschnitt-Systemen.

In den 13 Paaren zu einander dualer „fundamentaler" Systeme, welche durch ε doppelte und $7-2\varepsilon$ einfache elementare Bedingungen bestimmt sind, ermittelt er darauf je die Zahlen π, λ der Ausartungen direct, berechnet daraus die Charakteristiken μ, ν und findet damit die Zahlen der Correlationen, welche ε doppelten und $8-2\varepsilon$ einfachen Elementarbedingungen genügen, in den Fällen, wo $\varepsilon < 4$; indem sie für die 3 andern Fälle bekannt oder leicht zu erhalten sind**).

Herr Hirst hat dann weiter die Untersuchung auf den Raum ausgedehnt und einstweilen in einer kurzen Note on Correlation in Space***) die Hauptgesichtspunkte mitgetheilt. 15 einfache Bedingungen bestimmen eine endliche Zahl von Correlationen zwischen zwei Räumen, 14 demnach ein System; in diesem giebt es drei Ausartungen †), von denen eine in jedem Raume einen singulären Punkt, die zweite eine singuläre Ebene, die dritte eine singuläre Gerade hat, und eine endliche Zahl von Correlationen, bei denen noch zwei gegebene Punkte oder zwei gegebene Ebenen oder zwei gegebene Geraden conjugirt sind.

---

*) Wegen des Anschlusses an Herrn Hirst's Untersuchungen ziehe ich dieses Wort vor; auch scheint es mir bequemer und leichter auszusprechen als die beiden andern.

**) Die vier Fälle, wo in dem einen Systeme nur Punkte gegeben sind, denen in dem andern 3, 2, 1, 0 Gerade entsprechen und 2, 4, 6, 8 Punkte conjugirt sind, also — nach Hirst's bald zu erläuternder Bezeichnung — die vier Signaturen [3020], [2040], [1060], [0080] hat Herr Schröter 1862 in seiner Habilitationsschrift über die Construction einer Fläche 2. Grades durch gegebene Punkte (Borchardt's J. Bd. 62, S. 215), besonders in constructiver Beziehung, eingehend behandelt. Ich komme in einem Anhange auf dieselbe zurück.

***) Proc. London Math. Soc. Bd. VI S. 7. (1875).

†) Ueber die Ausartungen sehe man auch Herrn Fiedler's darstellende Geometrie 2. Aufl (1875) Art. 22, 23, 163, 167, sowie eine Stelle der Vorrede, in welcher Herr Fiedler mittheilt, dass sie ihm schon länger bekannt sind.

Zwischen den Zahlen π, ω, χ der Ausartungen und den Zahlen μ, ϱ, ν, der letzteren Correlationen — den Charakteristiken des Systems — ergeben sich genau dieselben Gleichungen wie zwischen den Ausartungen und Charakteristiken eines Systems von Flächen 2. Grades.

Es kommt also hier wiederum auf die Ermittelung der Zahlen π, ω, χ an, wobei ebenfalls für das System nur elementare (einfache bis vierfache) Bedingungen angenommen werden.

Bei den Ausartungen der dritten Art kommt die Correlation auf die Projectivität der Ebenenbüschel um die beiden singulären Axen hinaus, die Zahlen χ können also aus meinen Resultaten im Probleme der räumlichen Projectivität direct oder indirect entnommen werden. Bei den Ausartungen der ersten und zweiten Art — die zu einander dual sind — geht die Correlation der Räume über in diejenige von zwei Bündeln, deren Scheitel die singulären Punkte sind, bez. in die von zwei ebenen Systemen in den singulären Ebenen.

Herr Hirst schlug mir nun vor, das Problem der Bündel-Collineation, wie ich es in dem letzten der drei oben erwähnten Aufsätze behandelt habe, durch das der Bündel-*Correlation* zu ersetzen und zu erweitern, d. h. folgendes Problem zu behandeln:

Gegeben sind in dem einen von zwei Räumen A, B *k Punkte* A_i, *l Gerade* a_i, *m Punkte* $\mathfrak{A}_i$, *n Gerade* $\mathfrak{a}_i$; *in dem andern, ihnen entsprechend (homolog), k Gerade* b_i, *l Punkte* B_i, *m Punkte* $\mathfrak{B}_i$, *n Gerade* $\mathfrak{b}_i$. Wie Herr Hirst nenne ich $[klmn]$ die *Signatur* des so bestimmten Systems der fundamentalen oder Grundelemente.*)

Zwei Punkte A, B *in den beiden Räumen* A, B *sollen nun correspondirend oder associirt heissen, wenn zwischen den Bündeln, deren Scheitel sie sind, eine derartige Correlation statt hat, dass* (1) *den k Strahlen* AA_i *die k Ebenen* Bb_i; (2) *den l Ebenen* Aa_i *die l Strahlen* BB_i *entsprechen;* (3) *jeder der beiden Strahlen* $A\mathfrak{A}_i$, $B\mathfrak{B}_i$ *in der dem andern entsprechenden Ebene liegt;* (4) *jede der beiden Ebenen* $A\mathfrak{a}_i$, $B\mathfrak{b}_i$ *durch den der andern entsprechenden Strahl geht; oder mit andern Worten, dass die m Strahlenpaare* $A\mathfrak{A}_i$, $B\mathfrak{B}_i$ *und die n Ebenenpaare* $A\mathfrak{a}_i$, $B\mathfrak{b}_i$ *conjugirt sind.*

Die Bedingungen (1) und (2) sind doppelte, (3) und (4) hingegen einfache Bedingungen; man ersieht bald, dass, wenn zwei Punkte $\mathfrak{A}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$ sich vereinigen, an Stelle von 2 einfachen Bedingungen (3) eine Doppelbedingung (1) oder (2) tritt. Die Identität zweier Geraden $\mathfrak{a}_i$ oder $\mathfrak{b}_i$ führt, vorausgesetzt, dass nicht beide Scheitel A, B fest sind, nicht zu einem analogen Resultate.

---

*) Jedoch sowohl in der Bezeichnung der Grundelemente, als in der ihrer Zahlen bin ich in der obigen Weise von Herrn Hirst abgewichen; sie befindet sich mehr in Uebereinstimmung mit meinen früheren Arbeiten.

Als ich die Untersuchung zuerst in Angriff nahm, schienen mir durch die Annahme, dass unter den Grundelementen sich auch conjugirte Geraden $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ befinden, also $n > 0$, wesentliche Schwierigkeiten zu entstehen; auch ergaben sich bei einigen Proben die verschiedenartigsten Zahlen, während die Signaturen, bei denen $n = 0$, im Allgemeinen zu homogenen Resultaten führten. Ich schloss daher die conjugirten Geraden bei meinen ersten Untersuchungen aus; was ich für dieses enger begrenzte Problem gefunden, habe ich in einem Auszuge in den Proceedings der London Mathematical Society Bd. VII S. 175 „On correlative pencils" — welcher künftig mit C. P. citirt werden wird — veröffentlicht.

Eine erneute Inangriffnahme der Untersuchung zeigte jedoch, dass, wenn auf dieses Problem ebenfalls die Charakteristikentheorie angewandt wird, indem für die vorkommenden Correlationssysteme, wie von Hirst, Gleichungen zwischen den Ausartungszahlen und gewissen als Charakteristiken zu benennenden Correlationszahlen aufgestellt werden, die Annahme conjugirter Geraden $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ keine Schwierigkeit mehr hat; die Zahlen haben sich freilich, wie schon oben bemerkt, im Allgemeinen viel grösser und unhomogener ergeben; die einfacheren Resultate bei den Signaturen $n=0$ gestatteten es deshalb auch, die Untersuchung noch etwas weiter zu führen. Diese Resultate sind nun auf anderem Wege erhalten als früher, so dass dadurch eine wünschenswerthe Controlle erzielt ist.

Im Laufe der Untersuchungen hat natürlich eine häufige Correspondenz zwischen meinem Freunde Hirst und mir stattgefunden, so dass mehrere Resultate früher von Hirst gefunden und dann durch mich bestätigt wurden, ja die später (Nr. 16.) zu besprechende Idee der Zurückführung der Ausartungen vom ersten Typus auf die des zweiten Typus ganz demselben zu verdanken ist.

I.

Allgemeine Eigenschaften.

1. *Wenn $\sigma = 2k + 2l + m + n = 8$, so ist im Allgemeinen zu jedem Punkte A des einen Raums* A *jeder beliebige Punkt B des andern* B *associirt*, wie sich aus Herrn Hirst's Abhandlung (Proceed. Bd. V) über die Correlation zweier Ebenen durch Dualisirung ergiebt. *Wie viele Correlationen möglich sind*, ergiebt die Tabelle in Nr. 42. dieser Abhandlung*); es ist bemerkenswerth, dass *wenn $n = 0$ ist, diese Zahl durchweg* 1 *ist, mit einziger Ausnahme der Signatur*

*) Es sind die Zahlen ξ_8 in der Tabelle 1) von Nr. 40. meines vorliegenden Aufsatzes. — Auf die genannte Abhandlung beziehen sich alle meine Citate von Hirst.

$$[2200] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 a_2 \\ b_1 b_2 B_1 B_2, \end{matrix}$$

wo sie 0 *ist.* Diese Ausnahme hat überhaupt einen auch die Homogeneität der Resultate für $n = 0$ störenden Einfluss. In diesem Falle ist deshalb im Allgemeinen keine Correlation möglich, weil, wenn α', β' die Ebene AA_1A_2, BB_1B_2, a' und b' die Geraden $\overline{Aa_1a_2}$, $\overline{Bb_1b_2}$ sind, im Allgemeinen der Strahlbüschel $(A\alpha')$ (A_1, A_2, a_1, a_2) d. h. welcher A zum Scheitel, α' zur Trägerebene hat und dessen 4 Strahlen durch A_1, A_2 gehen und a_1, a_2 treffen*), oder, was dasselbe, der Ebenenbüschel a' (A_1, A_2, a_1, a_2) nicht mit dem Ebenenbüschel b' (b_1, b_2, B_1, B_2) oder, was dasselbe, dem Strahlbüschel $(B\beta')$ (b_1, b_2, B_1, B_2) projectiv ist. (Hirst, Nr. 43.)

Jedem Punkte B jedoch ist jeder beliebige Punkt A einer Fläche 2. Gr. α^2 associirt, welche durch $A_1\,A_2\,a_1\,a_2$ geht und deren Punkte A so sind, dass $a'(A_1\,A_2\,a_1\,a_2) \barwedge b'(b_1\,b_2\,B_1\,B_2)$. Zwischen dem Bündel B und dem, dessen Scheitel irgend ein Punkt A auf α^2 ist, finden nun aber einfach unendlich viele Correlationen statt; denn wenn wir z. B. in die Ebene Aa_2 oder Bb_2 einen Strahl legen, den wir zu BB_2, bez. AA_2 conjugirt, oder wenn wir durch AA_2 oder durch BB_2 eine Ebene legen, die wir zu Bb_2 oder Aa_2 conjugirt sein lassen; so entsprechen wegen der Projectivität auch Aa_2, BB_2, bez. AA_2, Bb_2. Die Signatur geht dann über in [2110], [1210], [1201], [2101] und alle unendlich vielen Lösungen sind auch Correlationen für [2200]. Wir können also noch eine einfache Bedingung, also ein Paar conjugirter Punkte oder Geraden hinzufügen: $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, so dass sich [2210], bez. [2201], wo $\sigma = 9$, ergiebt.

Man ersieht, dass *jedem Punkte B für* [2210], [2201] *dieselbe Fläche 2. Grades α^2 associirt ist, wie für* [2200], und zwar einfach, da die Signaturen, die durch Hinzufügung von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ aus [2110] u. s. f. entstehen, nämlich [2120], [2111] u. s. f. nur eine Correlation zulassen (Hirst, Nr. 42.). (C. P. Nr. 2.)

2. Wie hier ergiebt sich offenbar *für alle Signaturen, bei denen* $\sigma = 9$, dass *einem Punkte B sämmtliche Punkte einer Fläche associirt sind, also bei $\sigma = 10$ eine Curve, bei $\sigma = 11$ eine endliche Zahl von Punkten. Für $\sigma > 11$ correspondirt im Allgemeinen kein Punkt mehr einem beliebig gegebenen Punkte.* Wir werden aber *bei $\sigma = 12, 13, 14$ bez. eine Fläche, eine Curve, eine endliche Zahl von Punkten haben,*

*) Ich werde künftighin häufig das nach meiner Erfahrung für die Abkürzung sehr bequeme, von mir auch schon anderweitig benutzte, von H. Grassmann eingeführte Wort „incident“ gebrauchen für zwei Elemente, von denen eins in das andere fällt, sowie für 2 Gerade in derselben Ebene. Mit Anwendung dieses Worts konnte oben gesagt werden: „dessen 4 Strahlen mit A_1, A_2, a_1, a_2 incident sind“.

welche correspondirende besitzen. Ferner wird mit einer Geraden bei $\sigma = 10, 11$, *mit einer Ebene bei* $\sigma = 11, 12$ *eine Fläche, bez. eine Curve associirt sein* (C. P. Nr. 3.).

Vertauscht man die beiden Räume, so werden im Allgemeinen die Zahlen sich ändern; ausser, wenn $k = l$ ist. Wir entnehmen aber Hirst (Nr. 33.), dass für $\sigma = 8$ die Zahl der Correlationen zwischen festen Bündeln A und B durch Vertauschung nicht geändert wird. Ebenso wird bei $\sigma = 10$ die Fläche, welche einer Geraden associirt ist, dieselbe Ordnung haben, ob diese Gerade in A oder in B liegt; denn diese Ordnung ist nichts anders als die Zahl der Paare associirter Punkte, von denen der eine auf einer Geraden a in A, der andere auf einer Geraden b in B liegt. Ferner ist die Ordnung der Curve der Punkte, die bei $\sigma = 12$ associirte in einer gegebenen Ebene haben, dieselbe, gleichviel, in welchem der beiden Räume diese Ebene liegt; und die Zahl der Punkte, welche für $\sigma = 14$ associirte besitzen, ist auch in beiden Räumen dieselbe.

Es wird sich zeigen, dass bei den Signaturen, für welche $n = 0$, mit wenigen Ausnahmen die Vertauschung der Räume keine Aenderung hervorbringt.

3. *Die Vielfachheit der Punkte* $\mathfrak{A}_i$ *und der Geraden* a_i *und* $\mathfrak{a}_i$ *auf jeder der vier Flächen, welche, bei* $\sigma = 9, 10, 11, 12$, *beziehlich einem Punkte* B, *einer Geraden* b, *einer Ebene* β, *dem ganzen Raume* B *correspondiren*, ist leicht zu finden.

Lassen wir A in $\mathfrak{A}_1$ fallen, so wird die Bedingung, dass $A\mathfrak{A}_1$, $B\mathfrak{B}_1$ conjugirt seien, von selbst erfüllt; bei $\sigma = 9$ ist also die Vielfachheit eines Punktes $\mathfrak{A}_1$ gleich der Zahl der Correlationen zwischen den festen Bündeln $\mathfrak{A}_1$, B für $[k, l, m-1, n]_8$, wo eben $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ entfernt ist, oder, wie man auch schreiben kann, für $\left[9, -\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}\right]_8$ (Hirst, Nr. 42.). Hingegen bei $\sigma = 10, 11, 12$ ist sie gleich der Zahl der Punkte B, die dem $\mathfrak{A}_1$ für $[k, l, m-1, n]$ auf b, β, in B associirt sind, also, wenn wir, um zugleich uns der gewöhnlichen Betrachtungsweise anzuschliessen, die Räume vertauschen, gleich der Ordnung der Fläche oder der Curve, oder der Zahl der Punkte, die mit B für $[l, k, m-1, n]$ associirt sind.*)

Sei zweitens a_1 eine der Geraden a_i, $\mathfrak{A}_1'$ ein beliebiger, aber fester Punkt auf derselben; die Punkte B, welche einem A auf a_1 — der von $\mathfrak{A}_1'$ verschieden ist — für $[klmn]$ associirt sind, sind dieselben als diejenigen, welche ihm für $[k, l-1, m+1, n]$ associirt sind, wo $a_1 B_1$ ersetzt ist durch $\mathfrak{A}_1' B_1$; weil die dem BB_1 entsprechende Ebene in

*) Oder, um Herrn Schubert's Ausdrucksweise (Math. Annalen Bd. X S. 14) anzuwenden, gleich dem Grad des Punktorts 2., 1., 0. Stufe, der dem Punkte B für $[l, k, m-1, n]$ associirt ist.

A, wenn sie durch $\mathfrak{A}_1'$ geht, die ganze a_1 enthält. Also ist die Vielfachheit von a_1 auf unsern Flächen beziehlich gleich der Zahl der Correlationen für $[k, l-1, m+1, n]$ oder $[l-1, k, m+1, n]$ mit festen Scheiteln, und, nachdem wieder die Räume vertauscht sind, gleich dem Grade des Punktorts 2., 1., 0. Stufe, welcher dem B für $[l-1, k, m+1, n]$ associirt ist.

Wird drittens A auf $\mathfrak{a}_1$ gelegt, so wird die Bedingung, dass $A\mathfrak{a}_1$, $B\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind, ebenfalls von selbst erfüllt; die Vielfachheit einer $\mathfrak{a}_i$ auf unsern Flächen ist also bez. gleich der Zahl der Correlationen für $[k, l, m, n-1]$ oder $[l, k, m, n-1]$ bei festen Scheiteln, ferner gleich dem Grade des einem B für $[l, k, m, n-1]$ associirten Punktorts 2., 1., 0. Stufe.

4. In gleicher Weise kann man *den Grad der Vielfachheit eines Punktes A_i auf und die Zahl der Schnittpunkte einer Graden a_i oder $\mathfrak{a}_i$ mit der Curve* ermitteln, *welche für* $\sigma = 10, 11, 12, 13$ *mit* B, b, β, B *associirt ist.*

Der Grad der Vielfachheit von A_i ist, weil, wenn A nach A_i fällt, die Bedingung des Entsprechens von AA_i und Bb_i von selbst erfüllt wird, resp. gleich der Zahl der Correlationen für $[k-1, l, m, n]$ oder $[l, k-1, m, n]$ bei festen Scheiteln, ferner gleich dem Grade des Punktorts 2., 1., 0. Stufe, der für $[l, k-1, m, n]$ einem B associirt ist.

Unsere Curven haben so viele Schnittpunkte mit einer Geraden a_i, als die ebenfalls zu B, b, β, B, jedoch für $[k, l-1, m+1, n]$ associirten Flächen mit einer durch einen $\mathfrak{A}_i$ gehenden Geraden ausserdem noch Schnittpunkte besitzen.

Endlich ist die Zahl der Schnittpunkte unserer Curven mit einer Geraden $\mathfrak{a}_i$ gleich derjenigen der ebenfalls mit B, b, β, B, jedoch für $[k, l, m, n-1]$ associirten Flächen mit einer beliebigen Geraden.

Die Punkte $\mathfrak{A}_i$ liegen im Allgemeinen nicht auf diesen Curven; während anderseits die Vielfachheit der A_i auf den vorigen Flächen auf diesem Wege nicht zu ermitteln ist.

Man sieht leicht, dass man auf ähnliche Weise den Grad der Vielfachheit der Grundelemente auf Gebilden ermitteln kann, die durch *exceptionelle* Correlationen correspondiren. (C. P. Nr. 4.)

5. Aus der eben gemachten Betrachtung geht auch hervor, dass die Punkte $\mathfrak{A}_i$, diejenigen einer Geraden a_i oder $\mathfrak{a}_i$ für $\sigma = 8$ mit B durch einfach unendlich viele Correlationen, bei $\sigma = 9$ mit allen Punkten des Raums, bei $\sigma = 10, 11, 12$ mit allen Punkten eines Punktorts 2., 1., 0. Stufe associirt sind, dessen Grad leicht zu ermitteln ist. Ebenso sind die Punkte A_i bei $\sigma = 8, 9, 10$ mit jedem Punkte durch ein Correlationssystem 2., 1., 0. Stufe, bei $\sigma = 11, 12, 13$ je mit einem Punktorte 2., 1., 0. Stufe associirt, dessen Grad derjenige des Punktorts ist,

welcher einem beliebigen A für $[k-1, l, m, n]$ oder B für $[l, k-1, m, n]$ correspondirt.

II.

Beschreibung der exceptionellen Correlationen vom 1. Typus und Zurückführung der allgemeinen Correlationen auf dieselben.

6. Bevor wir weiter gehen, scheint eine Beschreibung *der beiden exceptionellen Bündel-Correlationen* nothwendig. Sie ergiebt sich durch Dualisirung oder Projection derjenigen von Hirst (Nr. 17.).

a) *Die Correlation mit zwei singulären Axen* (oder Strahlen), in jedem Bündel eine, kurzweg Axen-Correlation genannt, durch Dualisirung aus der Correlation zweier Ebenen mit zwei singulären Geraden, durch Projection aber aus der mit zwei singulären Punkten entstehend, hat folgende Eigenschaften:

Jeder Ebene des einen Bündels, die nicht durch dessen singuläre Axe geht, entspricht die singuläre Axe des andern.

Jeder Ebene aber des einen Bündels, welche durch dessen singuläre Axe geht, entsprechen alle Strahlen des andern Bündels in einer gewissen durch dessen Axe gehenden Ebene.

Dadurch sind die Ebenen des Büschels um die eine Axe auf die Ebenen des Büschels um die andere bezogen und zwar projectiv.

Jedem vom singulären Strahle verschiedenen Strahle des einen Bündels entspricht diejenige Ebene durch die singuläre Axe des andern, welche in der eben erwähnten Ebenenbüschel-Projectivität der den Strahl mit der Axe seines Bündels verbindenden Ebene homolog ist.

Dem singulären Strahle selbst eines jeden Bündels entspricht jede nicht mit dem singulären Strahle des andern incidente Ebene desselben.

Die Axen-Correlation ist also eine Ebenenbüschel-Projectivität.

Eine Verschiebung der Scheitel zweier axen-correlativer Bündel auf den Axen hebt die Correlation nicht auf.

Es kann demnach einem Punkte B niemals eine endliche Zahl von Punkten A durch Axen-Correlation associirt sein.

b) Für *die exceptionelle Correlation zweier Bündel, bei der in jedem eine singuläre Ebene ist,* gilt Folgendes:

Jedem Strahle des einen Bündels, der nicht in dessen singulärer Ebene liegt, entspricht die singuläre Ebene des andern.

Jedem Strahle des einen Bündels in dessen singulärer Ebene entsprechen alle Ebenen des andern um einen gewissen Strahl desselben in der singulären Ebene.

Dadurch sind die Strahlen der Büschel, welche durch die singulären Ebenen aus den Bündeln herausgeschnitten werden, auf einander und zwar projectiv bezogen.

Jeder nicht mit der singulären Ebene eines Bündels identischen

Ebene desselben entspricht derjenige Strahl der singulären Ebene des andern, der dem Schnittstrahle jener Ebene mit der singulären ihres Bündels in der eben erwähnten Strahlbüschel-Projectivität homolog ist.

Der singulären Ebene selbst eines jeden Bündels entspricht jeder nicht mit der des andern incidente Strahl desselben.

Die Correlation mit singulären Ebenen ist demnach eine Strahlbüschel-Projectivität.

7. Wir stellen uns jetzt irgend eine Signatur vor, für welche $\sigma = 8$. B sei ein fester Punkt, A ein beliebiger Punkt; ζ_8 die Zahl der Correlationen, die für die Signatur zwischen den Bündeln A, B möglich sind: die Zahlen von Hirst Nr. 42. Wir bewegen A auf einer Geraden a und fügen noch das eine Mal das Paar $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1$, das andere Mal das Paar $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1$ zu. Es ergiebt sich ein System (1. Stufe) von Correlationen. Seien π_{8B}, λ_{8B} die Zahlen der exceptionellen unter ihnen mit singulären Axen, bez. Ebenen, μ_8, ν_8 (genauer μ_{8B}, ν_{8B}, doch wohl wegen der vorübergehenden Benutzung der Bezeichnung unnöthig) die Zahl derjenigen, bei denen auch die Strahlen nach $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, bez. die Ebenen nach $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind (oder kurz, bei denen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, bez. $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind); letztere Zahlen sind die Charakteristiken*) des Systems.

a) Also zunächst sei $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1$ zugefügt; seien $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ zwei beliebige durch $\mathfrak{B}_1$ gezogene (oder was hier, wo B fest ist, genügt, den Strahl $B\mathfrak{B}_1$ treffende) Geraden, so dass $B\mathfrak{B}_1$ der Schnitt der Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ ist.

Für jede Lage von A auf a und jede der dann möglichen ζ_8 Correlationen construiren wir den Strahl, der der Ebene $B\mathfrak{b}'$ entspricht. Es sei $\mathfrak{a}'$ eine beliebige Gerade, so leuchtet ein, dass dieser Strahl die $\mathfrak{a}'$ ν_8 mal trifft, weil es ν_8 Correlationen giebt, für welche auch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ conjugirt sind. Also beschreibt der Strahl eine Regelfläche vom Grade ν_8; desgleichen der Strahl, der der Ebene $B\mathfrak{b}''$ entspricht. Diese beiden Regelflächen sind also hinsichtlich ihrer Erzeugenden eindeutig auf einander bezogen und zwei entsprechende schneiden sich je auf a; um die Klasse des durch ihre Verbindungsebenen entstehenden Torsus zu ermitteln, schneiden wir beide Flächen durch dieselbe Ebene und erhalten so zwei eindeutig auf einander bezogene Curven; die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen den Schnitt des Torsus. Gäbe es nun nicht sich selbst entsprechende Punkte auf den beiden Curven, so würde die Klasse dieses Schnitts und also auch des Torsus

*) Es ist dies Wort von Hirst und mir nach Analogie der Charakteristikentheorie für Kegelschnittsysteme gebraucht worden; ob es der scharfen Definition entspricht, welche Schubert a. a. O. S. 10 giebt, wonach die Charakteristiken diejenigen Bedingungszahlen sind, durch welche alle übrigen Bedingungszahlen auszudrücken sind, muss dahingestellt bleiben; die Untersuchung wäre auch unserm Zwecke fremd.

$2\nu_8$ sein. In jeder der π_{8B} Axen-Correlationen des Systems aber entspricht, da die Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ bei der Beliebigkeit von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ nicht gerade mit der Axe des B-Bündels incident sind, beiden die Axe des A-Bündels, und deren Spur giebt uns in der Schnittebene zwei vereinigte entsprechende Punkte. Ferner schneiden sich ersichtlich in der Spur von a selbst ζ_8 Paare entsprechender Geraden, also repräsentirt sie ζ_8 vereinigte Punkte, und der erzeugte Torsus ist demnach nur von der Klasse $2\nu_8 - \pi_{8B} - \zeta_8$. Anderseits ist aber, da seine einhüllenden Ebenen in den verschiedenen Correlationen dem Schnitt-Strahle $B\mathfrak{B}_1$ entsprechen und es μ_8 Correlationen giebt, in denen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ conjugirt sind, also diese Ebene durch $\mathfrak{A}_1$ geht, diese Klasse μ_8. Wir haben demnach:

$$2\nu_8 - \pi_{8B} - \zeta_8 = \mu_8$$

oder

$$2\nu_8 = \mu_8 + \pi_{8B} + \zeta_8. \tag{1a}$$

b) Wir fügen nun $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ hinzu; auf $\mathfrak{b}_1$ legen wir $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ und construiren in den verschiedenen Correlationen die Ebenen, welche dem Strahle $B\mathfrak{B}'$ entsprechen; da es μ_8 Correlationen giebt, für welche auch $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ conjugirt sind, wenn $\mathfrak{A}'$ ein beliebiger Punkt ist, so umhüllen die Ebenen einen Torsus von der Klasse μ_8 und desgleichen die dem Strahle $B\mathfrak{B}''$ entsprechenden. In den λ_{8B} Correlationen mit singulären Ebenen befinden sich die Strahlen $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$ nicht gerade in der singulären Ebene des B-Bündels, also vereinigen sich die entsprechenden Ebenen in die singuläre Ebene des A-Bündels. Das Erzeugniss der Schnittlinien der entsprechenden Ebenen der beiden Torsen ist demnach von dem Grade $2\mu_8 - \lambda_{8B}$, diese Schnittlinien entsprechen aber der Ebene $B\mathfrak{b}_1$, folglich werden ν_8 die Gerade $\mathfrak{a}_1$ treffen. Mithin ist

$$2\mu_8 - \lambda_{8B} = \nu_8$$

oder

$$2\mu_8 = \nu_8 + \lambda_{8B}. \tag{1b}$$

Durch diese beiden Formeln gewinnen wir, da ζ_8 bekannt ist, wenn wir noch zwei der vier Zahlen π_{8B}, λ_{8B}, μ_8, ν_8 ermitteln, die beiden andern durch Rechnung. Wir werden die Ausartungzahlen π_{8B}, λ_{B8} zu ermitteln suchen.

Die Formeln sind auch für die Signatur [2200] richtig; denn auch dort giebt es unendlich viele Correlationen, die zwar nicht durch die unendlich vielen Lagen von A auf a, sondern durch zwei bestimmte Lagen entstehen, deren jede aber statt einer endlichen Zahl unendlich viele Correlationen [2200] oder [2110] u. s. f. liefert, auf welche letzteren die Formeln von Hirst (Nr. 20.) anzuwenden sind. Da aber in diesem Falle $\zeta_8 = 0$ ist, so führen unsere Formeln zu den (wegen der 2 Lagen) mit 2 multiplicirten Hirst'schen.

Die μ_8, ν_8 *geben uns die Ordnung der Fläche der Punkte* A, *die dem* B *für alle Signaturen associirt sind, bei denen* $\sigma = 9$ *ist.* War die ursprüngliche Signatur für $\sigma = 8$ $[k l m n]$, so giebt μ_8 die Ordnung für die Signatur $[k, l, m+1, n]$, ν_8 für die Signatur $[k, l, m, n+1]$. Für die Signatur $[k, l, m-1, n+1]$ ist dann das eben gefundene ν_8 zum μ_8 geworden, so dass sich auf diese Weise eine Reihe von Zahlen doppelt ergeben. Aehnliches wird für die höheren Werthe von σ gelten und also da nicht wiederholt werden.

Auch die Zahlen π_{8B}, λ_{8B} *sind Flächenordnungen*; *erstere ist offenbar der Grad der Regelfläche, welche durch die singulären Axen* (*in* A) *der Axen-Correlationen, in welchen sich der feste Bündel* B *für die Signatur* $[k l m n]_{\sigma=8}$ *mit* A-*Bündeln befinden kann, erzeugt wird.* Dieselbe zerfällt in den meisten Fällen, wie an einigen Beispielen gezeigt werden wird. Man kann π_{8B} auch so definiren: *sie ist die Zahl der Axen-Correlationen zwischen* A- *und* B-*Bündeln, bei denen die eine Axe mit einer Geraden* a, *die andere mit* B *incident ist.* Hingegen λ_{8B} *ist die Ordnung der Fläche der Punkte* A, *zwischen deren Bündel und dem festen Bündel* B *für dieselbe Signatur Correlation mit singulären Ebenen statt hat.* Auch diese zerfällt meistens, wie ebenfalls einige Beispiele zeigen werden.

8. In dem Vorhergehenden ist also die Ordnung der Fläche gefunden, die einem festen B bezüglich einer Signatur $[k l m n]_{\sigma=9}$ associirt ist; wir wollen sie ζ_{9B} nennen, hingegen ζ_{9A}, wenn der Punkt im Raume A liegt. Wir gehen zur Ermittelung der Ordnung der Curve, welche dem B bezüglich einer Signatur, bei der $\sigma = 10$ ist, associirt ist. Wir stellen uns wieder eine Signatur $[k l m n]_{\sigma=9}$ vor, und durchschneiden die Fläche ζ_{9B} ter Ordnung, die dem B associirt ist, mit der Ebene α, in der wir die Zahl der dem B für $\sigma = 10$ associirten Punkte suchen wollen. A lassen wir sich auf der entstehenden ebenen Curve von der Ordnung ζ_{9B} bewegen; jeder Lage von A entspricht eine Correlation der Bündel A, B.

In dem entstehenden Correlationssysteme seien π_{9B}, λ_{9B} die Zahl der Correlationen mit singulären Axen, bez. singulären Ebenen, μ_9, ν_9 die Zahl der Correlationen, in welchen noch ein gegebenes Paar von Punkten, bez. von Geraden conjugirt sind.

a) Wir fügen wieder $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ zu und legen $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ so, dass sie $B\mathfrak{B}_1$ treffen; die Strahlen in den Bündeln A, welche der Ebene $B\mathfrak{b}'$ entsprechen, erzeugen wiederum eine Regelfläche vom Grade ν_9, desgl. die der Ebene $B\mathfrak{b}''$ entsprechenden. Machen wir wieder einen beliebigen ebenen Schnitt, so dass wir zwei eindeutig bezogene Curven erhalten; so finden wir als vereinigte entsprechende Punkte die Spuren der Axen der π_{9B} Axen-Correlationen und die ζ_{9B} Schnitte der ebenen Curve in α, auf der sich A bewegt, mit der Schnittebene. Demnach

(2a) $$2\nu_9 = \mu_9 + \pi_{9B} + \zeta_{9B}.$$

b) Auf ganz analoge Weise wie oben ergiebt sich

(2b) $$2\mu_9 = \nu_9 + \lambda_{9B}.$$

Die μ_9, ν_9 *geben also die Ordnung der Curve, welche für die Signaturen, bei denen* $\sigma = 10$ *und* m, n *nicht beide* 0 *sind, dem festen* B *associirt ist*; nennen wir sie ζ_{10B}.

π_{9B} *ist die Zahl der Axen-Correlationen, in welchen Bündel in* A *für die Signatur* $[k\,l\,m\,n]_9$ *zum festen Bündel* B *sich befinden können, oder die Zahl der Axen-Correlationen zwischen* A- *und* B-*Bündeln, bei denen die Axe im zweiten Raume durch* B *geht.*

Es erhellt hieraus, dass *es bei den Signaturen* $[k\,l\,m\,n]_{10}$ *im Allgemeinen nicht möglich ist, dass der beliebige feste Punkt* B *mit Punkten* A *durch Axen-Correlation associirt ist*; also $\pi_{10B} = 0$.

λ_{9B} *ist die Ordnung der Curve der Punkte* A, *welche dem festen* B *für* $[k\,l\,m\,n]_9$ *durch exceptionelle Correlation mit singulären Ebenen correspondirt.*

Jene Axen zerfallen im Allgemeinen in mehrere Gruppen, diese Curve in mehrere Curven.

9. Wir nehmen jetzt zwei Gerade a, b an; jedem Punkte B auf b sind für $[k\,l\,m\,n]_9$ ζ_{9B} Punkte auf a, jedem A auf a ζ_{9A} Punkte auf b je durch eine Correlation associirt. Freie Beweglichkeit von beiden Punkten A, B auf a, b führt also zu einem System 1. Stufe von Correlationen; π_9', λ_9' seien die Zahlen der exceptionellen unter ihnen mit singulären Axen, bez. Ebenen; μ_9', ν_9' die derjenigen, für welche noch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, bez. $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind.

Wegen der Beweglichkeit von B auf b müssen jetzt $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen werden, damit $B\mathfrak{B}_1$ für alle Lagen von B Schnitt der Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ sei. Durch die Strahlen in den zu B-Bündeln correlativen A-Bündeln, welche den Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ homolog sind, werden wieder zwei Flächen vom Grade ν_9' erzeugt; die Schnittcurven derselben mit einer beliebigen Ebene entsprechen sich Punkt für Punkt und haben vereinigte Punkte 1) in den π_9' Spuren der Axen der Axen-Correlationen in den A-Bündeln, 2) ζ_{9A} vereinigte Punkte in der Spur der Geraden a in der Schnittebene, weil derselben so viel Punkte B auf b correspondiren, also so viele Paare entsprechender Geraden der beiden Flächen ν_9^{ten} Grades sich in der genannten Spur treffen; 3) aber noch vereinigen sich für denjenigen Punkt B auf b, der in der Ebene $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$ liegt, die beiden Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$, also auch ihre entsprechenden Strahlen in den ζ_{9B} zugehörigen Correlationen, folglich auch deren Spuren in der Schnittebene. Wir haben deshalb:

(3a) $$2\nu_9' = \mu_9' + \pi_9' + \zeta_{9A} + \zeta_{9B}.$$

Die andere Betrachtung giebt wieder ohne Schwierigkeit:

(3b) $$2\mu_9' = \nu_9' + \lambda_9'.$$

Formel (3a) giebt deutlich zu erkennen, dass eine Vertauschung von A und B ohne Einfluss ist.

Die Zahlen μ_9', ν_9' geben die Ordnung der Fläche, welche einer Geraden b oder a für eine Signatur $[k\,l\,m\,n]_{10}$, bei der m, n nicht beide 0 sind, correspondirt; nennen wir diese Ordnung ζ_{10}'.

π_9' ist der Grad der Regelfläche der Axen von Axen-Correlationen, in denen A-Bündel (B-Bündel) für $[k\,l\,m\,n]_9$ zu Bündeln, deren Scheitel auf b (a) liegt, sich befinden; oder die Zahl derjenigen Axen-Correlationen zwischen A- und B-Bündeln, bei denen die eine Axe mit a, die andere mit b incident ist.

λ_9' ist die Ordnung der Fläche der Punkte A oder B, die für $[k\,l\,m\,n]_9$ mit Punkten B (oder A) auf b (oder a) durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind.

10. Wir stellen uns jetzt eine Signatur $[k\,l\,m\,n]_{10}$ vor. Einem festen B ist, wie in Nr. 8. gefunden wurde, eine Curve von der Ordnung $\zeta_{10\,B}$ associirt; auf dieser wird A bewegt, wodurch sich wieder ein System von Correlationen ergiebt. Sei $\lambda_{10\,B}$ die Zahl der exceptionellen Correlationen desselben mit singulären Ebenen; $\pi_{10\,B} = 0$ wie in Nr. 8. gefunden; μ_{10}, ν_{10} seien die Charakteristiken.

Wir erhalten hier die beiden Formeln

(4a) $$2\nu_{10} = \mu_{10} + \zeta_{10\,B},$$

(4b) $$2\mu_{10} = \nu_{10} + \lambda_{10\,B}.$$

Die μ_{10}, ν_{10} geben uns die Zahl der Punkte A, welche bei den Signaturen $[k\,l\,m\,n]_{11}$ einem festen B associirt sind; wir nennen diese Zahl $\zeta_{11\,B}$.

$\lambda_{10\,B}$ ist die Zahl der — im Allgemeinen mehrere Gruppen bildenden — *Punkte A, die für $[k\,l\,m\,n]_{10}$ dem festen B durch Correlation mit singulären Ebenen correspondiren.*

11. Wir nehmen jetzt wieder unter Voraussetzung einer Signatur $[k\,l\,m\,n]_{10}$ eine Gerade b in B, eine Ebene α in A an; letztere durchschneidet die Fläche $\zeta_{10}'^{\text{ter}}$ Ordnung, die der b associirt ist, in einer Curve derselben Ordnung. Auf dieser bewegen wir A. Seien in dem entstehenden Correlationssysteme $\pi_{10\,B}'$, $\lambda_{10\,B}'$, μ_{10}', ν_{10}' bez. die Zahlen der Correlationen mit singulären Axen, singulären Ebenen, bei denen noch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind.

Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ müssen hier wie in Nr. 9. durch $\mathfrak{B}_1$ geführt werden; wir erhalten wieder zwei Flächen vom Grade ν_{10}', erzeugt durch die den Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ entsprechenden Strahlen, und durch Schnitt mit einer Ebene zwei Curven, deren Punkte sich eindeutig entsprechen. Vereinigte entsprechende Punkte ergeben sich: 1) $\pi_{10\,B}'$ in den Spuren der Axen der A-Bündel in den Axen-Correlationen;

2) in den ζ_{10}' Schnitten der Curve, auf welcher sich A bewegt, mit der Schnittebene, 3) ζ_{10B}, herrührend von den Punkten in α, welche dem Schnitte $(b, \mathfrak{b}'\mathfrak{b}'')$ associirt sind, für welchen sich die Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ vereinigen, also auch deren entsprechende Strahlen und die Spuren derselben in der Schnittebene. Wir haben:

(5a) $$2\nu_{10}' = \mu_{10}' + \pi_{10A}' + \zeta_{10}' + \zeta_{10B}.$$

Und durch die andere Betrachtung:

(5b) $$2\mu_{10}' = \nu_{10}' + \lambda_{10B}'.$$

Die μ_{10}', ν_{10}' geben die Ordnung der Curve, welche für die Signaturen $|klmn|_{11}$ einer Geraden b associirt ist; nennen wir diese Zahl ζ_{11B}', hingegen die Ordnung der Fläche, die einer Ebene β associirt ist, ζ_{11B}'', woraus sich die Bedeutung von ζ_{11A}' und ζ_{11A}'' ergiebt, so leuchtet unmittelbar ein, dass

$$\zeta_{11A}'' = \zeta_{11B}', \; \zeta_{11B}'' = \zeta_{11A}';$$

denn z. B. die Zahlen der ersten Gleichung sind eben die Zahl der Paare von $[klmn]_{11}$ associirten Punkte A, B, von denen A in α, B auf b liegt.

π_{10B}' ist die Zahl der Axen-Correlationen für $|klmn|_{10}$ zwischen A- und B-Bündeln, bei denen die Axe im zweiten Bündel die Gerade b trifft.

$\lambda_{10B}' = \lambda_{10A}''$ ist die Ordnung der Curve von Punkten A, welche für $[klmn]_{10}$ mit Punkten B auf b, oder die Ordnung der Fläche der Punkte B, die mit Punkten A auf α, oder kurz die Zahl der Punkte A auf α, B auf b, welche durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind.

Wird noch eine Bedingung hinzugefügt, so dass sich $[klmn]_{11}$ ergiebt; so erhellt wiederum, dass *es keine Axen-Correlation zwischen A- und B-Bündeln giebt, bei denen die Axe im letzteren die b trifft.*

12. Wir stellen uns jetzt eine Signatur $[klmn]_{11}$ vor und in B eine Gerade b. Ihr correspondirt in A eine Curve von der Ordnung ζ_{11B}'. Auf dieser bewegt sich nun A, während B die b durchläuft; so dass wir wieder ein Correlationssystem haben. Die Zahl der Axen-Correlationen in demselben ist 0, wie oben gesagt; sei λ_{11B} die der Correlationen mit singulären Ebenen, μ_{11}, ν_{11} die Charakteristiken.

Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ sind wieder durch $\mathfrak{B}_1$ zu ziehen. Wir erhalten zwei Regelflächen vom Grade ν_{11}; ihre Schnitte mit einer Ebene sind eindeutig bezogen und vereinigte entsprechende Punkte sind die Spuren der Curve von der Ordnung ζ_{11B}' in der Schnittebene und die Spuren der ζ_{11B} Strahlen, welche den identischen Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ entsprechen, die zum Punkt $(b, \mathfrak{b}'\mathfrak{b}'') = B$ gehören, der ja ζ_{11B} — natürlich auf unserer Curve von der Ordnung ζ_{11B}' gelegene — associirte Punkte hat. Wir erhalten daher:

(6a) $$2\nu_{11} = \mu_{11} + \zeta_{11B}' + \zeta_{11B};$$

und durch die andere Betrachtung:

(6 b) $$2\mu_{11} = \nu_{11} + \lambda_{11B}.$$

Die Zahlen μ_{11}, ν_{11} *geben uns die Ordnung der Fläche der Punkte* B, *welche für die Signaturen* $[klmn]_{12}$, *bei denen* m, n *nicht beide* 0 *sind, associirte Punkte* A *besitzen*; nennen wir diese Ordnung ζ_{12B}.

Es hat ersichtlich jeder dieser Punkte im Allgemeinen nur einen correspondirenden; denn es wird nur für einen von den ζ_{11B}, die ihm für $[klmn]_{11}$ associirt sind, auch noch das zugefügte Paar $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ conjugirt sein.

λ_{11B} *ist die Ordnung der Fläche der Punkte* B, *denen für* $[klmn]_{11}$ *Punkte* A *durch Correlation mit singulären Ebenen entsprechen.*

13. Wir bleiben noch bei der Signatur $[klmn]_{11}$ und nehmen zwei Ebenen α, β an; der ersteren entspricht eine Fläche von der Ordnung $\zeta''_{11A} = \zeta'_{11B}$, aus der die Ebene β eine Curve von derselben Ordnung ζ'_{11B} ausschneidet. Ebenso findet sich in α eine Curve von Ordnung ζ'_{11A}. Auf diesen beiden Curven bewegen sich also associirte Punkte A, B und sind dies die einzigen associirten Punkte, welche bez. in α, β liegen; wir erhalten ein Correlationssystem. Es seien π'_{11}, λ'_{11} die Zahlen der exceptionellen Correlationen, μ'_{11}, ν'_{11} die Charakteristiken desselben; die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ werden wieder durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen, und auf den beiden eindeutig bezogenen Curven von der Ordnung ν'_{11}, welche durch eine beliebige Ebene aus den beiden Regelflächen gleicher Ordnung ausgeschnitten werden, erhalten wir als vereinigte entsprechende Punkte: 1) die Spuren der Axen der A-Bündel in den π'_{11} Axen-Correlationen, 2) die ζ'_{11A} Spuren der ebenen Curve von α, 3) die Spuren der Strahlen, welche von den ζ'_{11B} Schnitten der ebenen Curve von β mit der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$) herrühren und der Ebene $B\mathfrak{b}' = B\mathfrak{b}''$ homolog sind: an und für sich hat jeder dieser Punkte (oder der unter 2) vorkommenden) wohl ζ_{11B} (oder ζ_{11A}) associirte, aber in der Ebene α (oder β) im Allgemeinen nur einen. Es ergiebt sich also:

(7 a) $$2\nu'_{11} = \mu'_{11} + \pi'_{11} + \zeta'_{11A} + \zeta'_{11B}$$

und durch die andere Betrachtung:

(7 b) $$2\mu'_{11} = \nu'_{11} + \lambda'_{11}.$$

Die μ'_{11}, ν'_{11} *liefern die Ordnung* ζ'_{12} *der Curve der Punkte* B *oder* A, *welche in Bezug auf* $[klmn]_{12}$, *wo* m, n *nicht beide* 0 *sind, associirte Punkte in einer Ebene* α *oder* β *haben,* also auf deren Schnitt mit der Fläche von der Ordnung ζ_{12A} oder ζ_{12B}.

π'_{11} *ist die Zahl der Axen-Correlationen zwischen* A- *und* B-*Bündeln für* $[klmn]_{11}$, *wo den Axen gar keine Bedingung auferlegt ist.*

Es erhellt daraus, dass in Signaturen mit höheren Werthen von σ *keine Axen-Correlationen mehr möglich sind.*

λ'_{11} *ist die Ordnung der Curve der Punkte* A *oder* B, *welche für*

$[klmn]_{11}$ *durch eine Correlation mit singulären Ebenen Punkten einer Ebene* β *oder* α *correspondiren.*

14. Wir betrachten nun eine Signatur $[klmn]_{12}$. Eine beliebige Ebene β schneidet die in Nr. 12. gefundene Fläche von der Ordnung ζ_{12B} in einer Curve derselben Ordnung. Auf dieser bewegen wir B, sein associirter A durchläuft dann, wie eben erhalten, eine Curve von der Ordnung ζ'_{12} auf der Fläche von der Ordnung ζ_{12A}. In dem entstehenden Correlationssysteme gebe es λ_{12B} Correlationen mit singulären Ebenen, μ_{12}, ν_{12} seien die Charakteristiken. Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ werden wieder durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen, und wir erhalten als vereinigte Punkte 1) die Spuren der Curve $\zeta'_{12}{}^{\text{ter}}$ Ordnung in der beliebigen Schnittebene und 2) die Spuren der Strahlen, welche in den Bündeln der den Schnittpunkten B der ebenen Curve $\zeta_{12B}{}^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$ associirten Punkte den identischen Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ homolog sind. Also:

(8a) $$2\nu_{12} = \mu_{12} + \zeta_{12B} + \zeta'_{12},$$

und durch die andere Betrachtung:

(8b) $$2\mu_{12} = \nu_{12} + \lambda_{12B}.$$

Die Zahlen μ_{12}, ν_{12} *geben die Ordnung der Curve der Punkte* B, *welche für* $[klmn]_{13}$ *associirte Punkte besitzen*; wir nennen diese Zahl ζ_{13B}.

λ_{12B} *ist die Ordnung der Curve der Punkte* B, *denen für* $[klmn]_{12}$ *durch Correlation mit singulären Ebenen Punkte* A *correspondiren.*

15. Wir nehmen endlich eine Signatur $[klmn]_{13}$ an; die Punkte A und B, welche sich associirt sind, bewegen sich auf zwei Curven von den Ordnungen ζ_{13A}, ζ_{13B}; seien die Charakteristiken des entstehenden Correlationssystems μ_{13}, ν_{13}, die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen λ_{13}. Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ werden ebenfalls durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen und auf den beiden eindeutig bezogenen Curven erhalten wir vereinigte entsprechende Punkte 1) durch die Schnitte der Curve $\zeta_{13A}{}^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Ebene dieser beiden Curven, 2) durch Veranlassung der Schnitte der Curve $\zeta_{13B}{}^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$. Wir haben:

(9a) $$2\nu_{13} = \mu_{13} + \zeta_{13A} + \zeta_{13B},$$

und durch die andere Betrachtung:

(9b) $$2\mu_{13} = \nu_{13} + \lambda_{13}.$$

Die μ_{13}, ν_{13} *ergeben die Zahl der Paare von Punkten* A, B, *welche für* $[klmn]_{14}$, *wenn* m, n *nicht beide* 0 *sind, zu einander associirt sind*; wir nennen diese Zahl ζ_{14}.

λ_{13} *ist ähnlich die Zahl der Paare von Punkten* A, B, *die sich für* $[klmn]_{13}$ *durch exceptionelle Correlation mit singulären Ebenen correspondiren.*

III.
Beschreibung der exceptionellen Correlation vom 2. Typus und Zurückführung der beiden vom 1. Typus auf dieselbe.

16. Diese 9 Paare von Formeln habe ich zuerst in folgender Weise benutzt: ich kannte durch die früheren Untersuchungen (C. P.) die Werthe der Zahlen ζ, ζ' für die Signaturen, wo $n = 0$ ist; ich ermittelte nun direct mit Hilfe meiner Sätze über „räumliche Projectivität", wie ich später an einigen Beispielen zeigen werde, sämmtliche Zahlen π, π'. Die Abhängigkeit von diesem Probleme lässt ebenfalls erkennen, warum bei $\sigma > 11$ keine Axen-Correlationen mehr möglich sind.

Die Formeln gaben nun zunächst, indem die bekannten Zahlen ζ, ζ' als μ, μ' für Signaturen: $n = 0$ angenommen wurden, die zugehörigen Zahlen ν, ν', welche für Signaturen: $n = 1$ wieder μ, μ' wurden u. s. f. Ausserdem wurden die Zahlen λ, λ' berechnet. Mehrere der letzteren, insbesondere alle für die Signaturen $n = 0$, ferner alle für $\sigma = 8$, fast alle λ für $\sigma = 9$ habe ich meistens mit Hilfe von Sätzen meiner „ebenen Projectivität" direct ermittelt und werde ich auch davon einige Beispiele geben. Doch stellten sich die Berechnungen der π, π' schon sehr mühsam dar, die der λ, λ', die freilich nur zur Controle dienten, als nicht durchweg ausführbar; so dass ich einen im October 1876 mir von Hirst gegebenen Gedanken sehr begrüsste, nämlich *ebenso wie die Zahlen der allgemeinen Correlationen vermittelst der obigen Formelpaare* (1) *bis* (9) *durch die der Ausartungen vom* 1. *Typus* — wie Hirst*) sagt — *ausgedrückt werden, so nach Relationen zu suchen, durch welche die Zahlen der Ausartungen vom* 1. *Typus auf die der Ausartung vom* 2. *Typus zurückgeführt werden.*

17. Auf *die Ausartung vom* 2. *Typus* kommt Hirst schon bei der Correlation zweier (festen) Ebenen zu sprechen (Nr. 16.): sie hat in jeder Ebene eine singuläre Gerade und einen mit ihr incidenten singulären Punkt und führt zu dem Linien-Punkt-Paar, wenn die Correlation involutorisch wird. Für die Correlation zweier Bündel ergiebt sie sich durch Dualisirung oder Projection; sie hat in jedem Bündel einen singulären Strahl, durch den eine singuläre Ebene geht.

Beide Ausartungen vom 1. *Typus haben sie zu ihrer Ausartung,* d. h. in jedem Systeme 1. Stufe von Ausartungen jeder der beiden Arten vom 1. Typus wird sich im Allgemeinen eine endliche Zahl von Ausartungen des 2. Typus befinden, und der 2. Typus bildet den Uebergang zwischen den beiden Arten des 1. Typus.

---

*) Für Hirst sind die allgemeinen Correlationen selbst schon Ausartungen vom 1. Typus (vgl. die Einleitung), also unsere vom 1. Typus schon vom 2. Typus u. s. w. Hirst hat unterdessen auch bei der Correlation zweier Ebenen die Ausartungen des 1. Typus auf die vom 2. zurückgeführt und schneller ermittelt. Cf. Transunti dell' Accademia dei Lincei Ser. III F. I (4. März 1877).

Lassen wir die Projectivität der (singulären) Ebenenbüschel zweier Axen-Correlationen entarten*): so entsprechen alle Ebenen jedes der beiden Büschel, die von einer gewissen, der singulären, Ebene verschieden sind, einer und derselben festen Ebene des andern Büschels, der singulären desselben, und der singulären Ebene des ersten entspricht jede beliebige des andern.

Lassen wir ebenso die Projectivität der (singulären) ebenen Strahlbüschel zweier Correlationen mit singulären Ebenen entarten: allen Strahlen des einen Büschels, die von einem gewissen, dem singulären, Strahle verschieden sind, entspricht derselbe feste Strahl im andern, der singuläre Strahl desselben, und dem singulären Strahle des ersten entspricht jeder beliebige im zweiten.

Das Entsprechen der übrigen Elemente folgt hieraus nach den allgemeinen Gesetzen der beiden Ausartungen vom 1. Typus und alles in allem erhält man *folgende Correspondenzen* in beiden Fällen *als Eigenschaften der Ausartung des 2. Typus*:

1) Jeder Ebene jedes der beiden Bündel, die nicht durch die singuläre Axe desselben geht, entspricht die singuläre Axe des andern Bündels (allg. Corr. mit sing. Axen).
2) Jeder Ebene durch die singuläre Axe des einen Bündels entsprechen alle Strahlen des andern in der singulären Ebene (Ausartung der Corr. mit sing. Axen).
3) Der singulären Ebene des einen Bündels entspricht jeder beliebige Strahl des andern, der nicht in dessen singulärer Ebene liegt (allg. Corr. mit sing. Eb.).
4) Jedem Strahl des einen Bündels, der nicht in dessen singulärer Ebene liegt, entspricht die andere singuläre Ebene (allg. Corr. mit sing. Eb.).
5) Jedem Strahl in der singulären Ebene des einen Bündels entsprechen alle Ebenen durch die singuläre Axe des andern (Ausartung der Corr. mit sing. Eb.).
6) Der singulären Axe des einen Büschels entspricht jede beliebige nicht mit der des andern incidente Ebene desselben (allg. Corr. mit sing. Axen).

Wie bei der allgemeinen Correlation mit singulären Axen, *so hebt auch hier die Verschiebung des Scheitels auf der singulären Axe die Correlation nicht auf.*

Aus der Beschreibung geht hervor, dass in dieser Ausartung des 2. Typus — Axen-Ebenen-Correlation — nur *Lagen*-Bedingungen zu erfüllen sind, nicht mehr Projectivitäts-Bedingungen; was die Ermittelung der Zahlen solcher Ausartungen ganz bedeutend erleichtert.

*) Vgl. Steiner-Schröter's Vorlesungen § 19. Anfang.

18. Die am Ende von Nr. 16. erwähnten Relationen werden im Allgemeinen auf ähnliche Weise gefunden, wie die 9 früheren Formelpaare. Die Ausartungszahlen π, λ; π', λ' für eine Signatur $[klmn]_\sigma$ werden als Charakteristiken von Systemen von Ausartungen 1. Gattung von der einen oder der andern Art für eine Signatur $[k, l, m-1, n]_{\sigma-1}$, oder $[k, l, m, n-1]_{\sigma-1}$ aufgefasst.

Wir werden im Folgenden bei der Ableitung der neuen Relationen nur das vom Früheren Abweichende besonders hervorheben.

Um π_{8B}, λ_{8B} (Nr. 7.) zu finden, müssen wir demnach zu Signaturen zurückgehen, bei denen $\sigma = 7$ ist.

19. Es sei also $[klmn]_7$ eine solche Signatur: B wieder ein fester Punkt; a eine Gerade. Jeder Punkt A derselben ist dem B durch ein System von Correlationen associirt, in dem sich π_7 Correlationen mit singulären Axen, λ_7 mit singulären Ebenen befinden; es sind dies die Zahlen π, λ bei Hirst, Nr. 41.*) Wir fassen zuerst nur die Correlationen mit singulären Axen ins Auge, und bewegen A auf a; so erhalten wir ein System von solchen Correlationen. In demselben seien Θ_{7B} vom 2. Typus, ferner $\dot{\pi}_7$, $\bar{\pi}_7$ solche, bei denen noch ein gegebenes Paar von Punkten, bez. von Geraden conjugirt sind; $\dot{\pi}_7$, $\bar{\pi}_7$ also die Charakteristiken des Systems. **) Wir fügen $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ zu; und nehmen auf $\mathfrak{b}_1$ die Punkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ an. Die Ebenen, welche in den verschiedenen Correlationen dem Strahle $B\mathfrak{B}'$ entsprechen, umhüllen einen Torsus von der Klasse $\dot{\pi}_7$; ebenso die dem Strahle $B\mathfrak{B}''$ entsprechenden. Beide sind eindeutig auf einander bezogen, und die entsprechenden Ebenen schneiden sich in den verschiedenen Axen der A-Bündel, denn da $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$ im Allgemeinen nicht mit der Axe der B-Bündel identisch sind, so müssen beide entsprechende Ebenen durch die des A-Bündels gehen; oder die Schnittlinie der beiden Ebenen entspricht je der Verbindungsebene der beiden Strahlen $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$, d. i. der Ebene $B\mathfrak{b}_1$; dieser aber muss, da sie im Allgemeinen nicht die Axe des B-Bündels enthält, die Axe des A-Bündels entsprechen.

In den $\bar{\pi}_7$ Fällen, wo $\mathfrak{a}_1$ zu $\mathfrak{b}_1$ conjugirt ist, muss die Axe des A-Bündels als entsprechend der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ in der Ebene $A\mathfrak{a}_1$ liegen, also $\mathfrak{a}_1$ treffen; d. h. $\bar{\pi}_7$ ist der Grad des Erzeugnisses der Axen der A-Bündel. Die entsprechenden Ebenen der beiden obigen Torsen $\dot{\pi}_7$ ter Klasse vereinigen sich aber für die Θ_{7B} Correlationen des 2. Typus, weil da den beiden nicht in der singulären Ebene des B-Bündels liegenden Strahlen $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$ die singuläre Ebene des A-Bündels entspricht,

*) Die π_7 werden hier nicht gebraucht, die λ_7 stehen in der Tabelle I. Nr. 33.

**) Diese Bezeichnungen rühren von Herrn Hirst her.

und nur für diese. Folglich ist das Erzeugniss der beiden Torsen vom Grade $2\dot{\pi}_7 - \Theta_{7B}$. Wir haben also

$$(\mathrm{I\,a}) \qquad 2\dot{\pi}_7 = \bar{\pi}_7 + \Theta_{7B}\ ^{*)}.$$

Fügen wir $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zu und ziehen wieder 2 Gerade $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$, welche $B\mathfrak{B}_1$ treffen; so vereinigen sich, da die beiden Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ nicht durch die singuläre Axe des B-Bündels gehen, die entsprechenden Strahlen in der singulären Axe des andern, und wir bekommen nicht wie früher zwei verschiedene Regelflächen vom Grade $\bar{\pi}_7$, sondern nur eine: die eben betrachtete Axenfläche. Also wird die der früheren derartigen Betrachtung analoge hier illusorisch.

20. Wir fassen jetzt die Correlationen mit singulären Ebenen zwischen den Bündeln, deren einer Scheitel B fest ist, während der andere A auf a sich bewegt, ins Auge. Die Zahl der Ausartungen des 2. Typus ist, wie oben, Θ_{7B}; $\dot{\lambda}_7$, $\bar{\lambda}_7$ seien die Zahlen derjenigen, wo noch ein gegebenes Paar von Punkten, bez. von Geraden conjugirt ist.

Fügen wir wiederum zunächst $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ zu und legen auf $\mathfrak{b}_1$ die Punkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$; so vereinigen sich, da die Strahlen $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$ im Allgemeinen nicht mit der singulären Ebene des B-Bündels incident sind, ihre entsprechenden Ebenen im A-Bündel für jede Correlation in der singulären Ebene desselben; also die beiden Torsen — offenbar $\dot{\lambda}_7^{\text{ter}}$ Klasse — fallen in den von den singulären Ebenen der A-Bündel eingehüllten Torsus zusammen; die oben an diese Torsen geknüpfte Betrachtung wird illusorisch. Hingegen führt nun die andere zum Ziel, bei der $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ hinzugefügt und $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$ durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen werden (oder so lange B fest ist, allgemeiner so, dass sie $B\mathfrak{B}_1$ treffen). Den Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ entsprechen in den verschiedenen Correlationen Strahlen, welche je eine Regelfläche vom Grade $\bar{\lambda}_7$ erzeugen, die Verbindungsebene zweier entsprechender Strahlen dieser beiden Flächen, die sich ja stets in A auf a schneiden, ist die betreffende singuläre Ebene, da ja beide Strahlen in ihr liegen müssen, weil $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ im Allgemeinen nicht mit der des Bündels B identisch sind, oder da der Schnittstrahl $B\mathfrak{B}_1$ dieser beiden Ebenen, der ja zur Verbindungsebene homolog ist, im Allgemeinen nicht in der singulären Ebene von B liegt, und erzeugt, wie eben gesagt, einen Torsus von der Klasse $\dot{\lambda}_7$. Diese Klasse muss sich aber auch aus dem Umstande ableiten lassen, dass die einhüllende Ebene eben Verbindungsebene entsprechender Erzeugenden zweier eindeutig bezogener Regelflächen vom Grade $\bar{\lambda}_7$ ist. Wir machen wieder einen Schnitt, wodurch wir eindeutig bezogene Curven von der Ordnung

*) Die Relationen I bis IX hat Hirst gleichzeitig mit mir gefunden.

$\overline{\lambda}_7$ erhalten. Dieselben haben vereinigte entsprechende Punkte, nämlich 1) die Spuren der Axen der Θ_{7B} Axen-Ebenen-Correlationen, denn diese Axen sind sowohl zu $B\mathfrak{b}'$ wie zu $B\mathfrak{b}''$ homolog, und 2) die Spur von α in der Schnittebene, welche aber λ_7 vereinigte Punkte repräsentirt, weil es λ_7 Correlationen mit singulären Ebenen giebt, wenn die Scheitel fest sind. Wir erhalten mithin für die Klasse des Torsus auch $2\overline{\lambda}_7 - \Theta_{7B} - \lambda_7$, also ist

$$2\overline{\lambda}_7 = \dot{\lambda}_7 + \Theta_{7B} + \lambda_7. \tag{1b}$$

Wir erhalten also für jedes System von Ausartungen des 1. Typus nur eine Gleichung: (Ia) für die Correlationen mit singulären Axen, (Ib) für die mit singulären Ebenen. *Wir bedürfen mithin ausser der Kenntniss der Θ_{7B},* die direct zu ermitteln nicht schwer ist, *noch je die Kenntniss der $\dot{\pi}_7$, $\dot{\lambda}_7$ d. i. der π_{8B}, λ_{8B} für $[k, l, m+1, n]_8$*; *also müssen die π_{8B}, λ_{8B} für diejenigen Signaturen, wo $\sigma = 8$ und $n = 0$ ist, (und unter ihnen auch die, bei denen $m = n = 0$ ist) direct ermittelt werden;* für die übrigen ergeben sie sich durch die eben gewonnenen Formeln, da $\overline{\pi}_7$, $\overline{\lambda}_7$ für $[klmn]_7$ wieder für $[k, l, m-1, n+1]_7$ $\dot{\pi}_7$, $\dot{\lambda}_7$ sind. Analoges wird bei den Signaturen mit grösserem σ gelten.

Θ_{7B} *ist wieder der Grad der singulären Axen von A-Bündeln, die mit dem festen B-Bündel in Axen-Ebenen-Correlation für $[klmn]_7$ sich befinden, oder die Zahl der Axen-Ebenen-Correlationen für $[klmn]_7$, bei denen die eine Axe mit a, die andere mit B incident ist.*

21. Wir nehmen nun eine Signatur $[klmn]_8$ an, ferner wieder den festen Punkt B und die Ebene α an. Die Fläche der Punkte A, welche dem B durch Axen-Correlationen associirt sind, hat die Ordnung π_{8B} (Nr. 7.), und auf der Curve, in der sie durch α geschnitten wird, lassen wir A sich bewegen. Die Zahl der Ausartungen des 2. Typus in dem entstehenden System von Axen-Correlationen sei Θ_{8B}; $\dot{\pi}_8$, $\overline{\pi}_8$ seien wieder die Charakteristiken. Durch ähnliche Betrachtungen, wie in Nr. 19., erhalten wir:

$$2\dot{\pi}_8 = \overline{\pi}_8 + \Theta_{8B}. \tag{IIa}$$

Die Fläche der Punkte A, die dem B durch Correlationen mit singulären Ebenen entsprechen, ist von der Ordnung λ_{8B} (Nr. 7.). A bewege sich nun auf der Curve, in der sie von α geschnitten wird.

Θ_{8B} ist die Anzahl der Axen-Ebenen-Correlationen für $[klmn]_8$, bei denen die Axe im zweiten Raume durch B geht, wobei die Bedingung, dass irgend ein Scheitel A in α liege, jedesmal von selbst erfüllt wird; demnach ist die Zahl der Ausartungen vom 2. Typus in dem oben entstehenden Systeme von Correlationen mit singulären Ebenen ebenfalls Θ_{8B}. Die Charakteristiken seien $\dot{\lambda}_8$, λ_8. Man erhält hier:

(IIb) $$2\overline{\lambda}_8 = \dot{\lambda}_8 + \Theta_{8B} + \lambda_{8B},$$

indem die vereinigten entsprechenden Punkte wieder 1) die Spuren der Axen der Axen-Ebenen-Correlationen und 2) die der in α befindlichen Curve λ_{8B}ter Ordnung in der Ebene der betrachteten eindeutig bezogenen Curven sind.

Unter Voraussetzung, dass π_{9B}, λ_{9B} (Nr. 8.) für die Signaturen $n=0$ direct ermittelt werden, geben uns die $\overline{\pi}_8$, $\overline{\lambda}_8$ die übrigen.

22. Zu der Signatur $[klmn]_8$ werden a, b gefügt. Jedem Punkt B auf b sind π_{8B}, λ_{8B} Punkte A auf a, jedem dieser π_{8A}, λ_{8A} Punkte B auf b durch Correlation mit singulären Axen, bez. Ebenen associirt. Wir erhalten ein System von jeder Art; in jedem befinden sich Θ_8' Axen-Ebenen-Correlationen, wenn *dies die Zahl dieser Correlationen ist für* $[klmn]_8$, *bei denen die eine Axe mit* a, *die andere mit* b *incident ist, oder der Grad der Fläche der Axen von A-Bündeln (B-Bündeln), die mit B-Bündeln (A-Bündeln), deren Scheitel auf* b (a) *liegt, axen-ebenen-correlativ sind.*

Seien wieder $\dot{\pi}_8'$, π_8'; $\dot{\lambda}_8'$, $\overline{\lambda}_8'$ die Charakteristiken der beiden Systeme, *welche zu den Zahlen* π_9', λ_9' (Nr. 9.) *führen, wenn diejenigen für* $n=0$ *bekannt sind.* Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ werden durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen, und wir erhalten

(IIIa) $$2\dot{\pi}_8' = \overline{\pi}_8' + \Theta_8',$$

(IIIb) $$2\overline{\lambda}_8' = \dot{\lambda}_8' + \Theta_8' + \lambda_{8B} + \lambda_{8A},$$

wobei die beiden letzten Summanden auf der rechten Seite herrühren von der Spur der Geraden a in der Ebene der eindeutig bezogenen Curven und der Spur der Geraden b in der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$.

23. Wir nehmen eine Signatur $[klmn]_9$ an und einen festen Punkt B. Es ist oben gefunden, dass $\pi_{10B}=0$ ist, also gilt dies auch für $\dot{\pi}_{9B}$, $\overline{\pi}_{9B}$ und für die Ausartungszahl Θ_{9B}. In der That giebt es einerseits nur eine endliche Zahl (π_{9B}) von Axen-Correlationen, bei denen die eine Axe durch B geht, also erhalten wir kein System mehr und also auch keine Charakteristiken, anderseits haben wir für $[klmn]_8$ eben (Nr. 21.) für einen festen Punkt B nur noch eine endliche Zahl von Ebenen-Axen-Correlationen gefunden, also führt die Hinzufügung einer neuen Bedingung zur Unmöglichkeit. Die Formel (IVa) fällt deshalb aus. Dem festen Punkte B entspricht aber eine Curve der Ordnung λ_{9B}, deren Punkte A ihm durch Correlationen mit singulären Ebenen correspondiren. Wir erhalten also durch Bewegung von A auf derselben das Correlationssystem; Ausartungen vom 2. Typus enthält es, wie eben gefunden, nicht. $\dot{\lambda}_9$, $\overline{\lambda}_9$ seien seine Charakteristiken, welche uns die Zahlen λ_{10B} (Nr. 10.) geben, wenn die für $n=0$ bekannt sind. Es ergiebt sich:

(IV b) $$2\overline{\lambda}_9 = \dot{\lambda}_9 + \lambda_{9B},$$

wo der letzte Summand von der Spur der Curve λ_{9B} ter Ordnung in der Ebene der eindeutig bezogenen Curven herrührt.

24. Zu derselben Signatur $[klmn]_9$ fügen wir die Gerade b und die Ebene α. Der Geraden b ist eine Fläche von der Ordnung π_9', λ_9' associirt, deren Punkte Punkten auf b durch Correlation mit singulären Axen, bez. Ebenen correspondiren. Beide schneiden wir mit α und indem wir A auf dieser Schnittcurve bewegen, erhalten wir die beiden Systeme von Ausartungen der einen und der andern Art. In jedem giebt es Θ'_{9B} Ausartungen des 2. Typus, wenn *das die Anzahl der Axen-Ebenen-Correlationen ist, bei denen die eine Axe die b zu treffen hat*; denn ein Punkt der andern Axe und somit der Scheitel eines axen-ebenen-correlativen Bündels fällt von selbst in α. Wir sehen wieder voraus, dass *diese Anzahl null wird, wenn σ wächst.* Die Charakteristiken unserer beiden Systeme seien $\dot{\pi}_9'$, $\overline{\pi}_9'$; $\dot{\lambda}_9'$, $\overline{\lambda}_9'$, welche unter der mehrfach genannten Voraussetzung die π'_{10B}, λ'_{10B} (Nr. 11.) geben. Man bekommt:

(V a) $$2\overline{\pi}_9' = \dot{\pi}_9' + \Theta'_{9B};$$

(V b) $$2\overline{\lambda}_9' = \dot{\lambda}_9' + \Theta'_{9B} + \lambda_{9B} + \lambda_9',$$

worin die beiden letzten Summanden rechts herrühren 1) von der Spur der Geraden b in der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$, welcher λ_{9B} Punkte auf α associirt sind; 2) von den Schnittpunkten der ebenen Curve λ_9' ter Ordnung, auf der sich A bewegt, mit der Ebene der beiden eindeutig bezogenen Curven.

25. Es werde nun eine Signatur $[klmn]_{10}$ vorausgesetzt; wir fügen wieder die Gerade b zu. Axen-Correlationen, bei denen die eine Axe die b trifft, sind nur in endlicher Zahl (π'_{10B}) vorhanden; also giebt es kein System, mithin auch keine Charakteristiken und auch keine Ausartungen vom 2. Typus; in der That ist einerseits früher erkannt, dass $\pi_{11B} = 0$ ist, andererseits das letztere schon in der vorigen Nr. erwähnt. Die Formel (VIa) fällt demnach wieder aus. Dagegen erhalten wir eine Curve der Ordnung λ'_{10B} von Punkten A, die den Punkten B auf b durch Correlation mit singulären Ebenen correspondiren.

In dem entstehenden Systeme solcher Correlationen giebt es also keine Ausartung vom 2. Typus; die Charakteristiken seien $\dot{\lambda}_{10}$, $\overline{\lambda}_{10}$ und geben λ_{11B} (Nr. 12). Es ergiebt sich

(VI b) $$2\overline{\lambda}_{10} = \dot{\lambda}_{10} + \lambda_{10B} + \lambda'_{10B},$$

worin die beiden letzten Summanden herkommen 1) von der Spur der Geraden b in der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$, welcher λ_{10B} Punkte auf der Curve

λ'_{10B} ter Ordnung entsprechen, 2) von den Spuren dieser Curve in der Ebene der beiden eindeutig bezogenen Curven.

26. Zu der Signatur $[klmn]_{10}$ werden jetzt die Ebenen α, β gefügt. Es giebt π'_{10B} Axen-Correlationen, bei denen die eine Axe eine Gerade b trifft; mithin auch in der Ebene α so viele Scheitel A von Bündeln, welche zu Bündeln B, deren Scheitel auf b liegen, axen-correlativ sind. Demnach erzeugen die Punkte B, welche zu Punkten A durch Axen-Correlation associirt sind, oder, was dasselbe, die Axen in ihren Bündeln eine Fläche vom Grade π'_{10B}, die von β in einer Curve von dieser Ordnung geschnitten wird. Die in α befindlichen associirten Punkte der Punkte dieser Curve erzeugen eine Curve π'_{10A} ter Ordnung aus analogen Gründen. Weil ferner die Curve von Punkten A, welche den Punkten einer Geraden b durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind, die Ordnung λ'_{10B} hat, so bilden die Punkte B, welche den Punkten auf α auf diese Weise entsprechen, eine Fläche von der Ordnung λ'_{10B}, welche also von β in einer Curve derselben Ordnung geschnitten wird. Die in α befindlichen associirten Punkte A der Punkte B dieser Curve erzeugen eine Curve von der Ordnung λ'_{10A}.

Durch diese Punktepaare erhalten wir unsere Correlationssysteme von beiden Arten. Ist Θ'_{10} *die Zahl der Axen-Ebenen-Correlationen für* $[klmn]_{10}$ (ohne weitere Bedingung; das Liegen von Scheiteln in α, β wird von selbst erfüllt), so ist dies die gemeinsame Zahl der Ausartungen vom 2. Typus in beiden Systemen. Die Charakteristiken seien wiederum $\dot{\pi}'_{10}$, $\overline{\pi}'_{10}$; $\dot{\lambda}'_{10}$, $\overline{\lambda}'_{10}$ und führen zu π'_{11}, λ'_{11} (Nr. 13.). Die Relationen sind:

(VIIa) $$2\dot{\pi}'_{10} = \overline{\pi}'_{10} + \Theta'_{10},$$

(VIIb) $$\overline{\lambda}'_{10} = \dot{\lambda}'_{10} + \Theta'_{10} + \lambda'_{10B} + \lambda'_{10A},$$

wobei die letzten beiden Summanden sich herschreiben 1) von den Schnittpunkten der Curven λ'_{10B} ter Ordnung in β mit der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$, 2) von denen der Curve λ'_{10A} ter Ordnung in α mit der Ebene der eindeutig bezogenen Curven.

Aus der Definition von Θ'_{10} ergiebt sich, dass für *höhere σ keine Axen-Ebenen-Correlationen mehr möglich sind;* anderseits ist von früher schon bekannt, dass die Zahlen π bei $\sigma = 12$ und 13 null geworden sind. Also fallen die auf Axen-Correlationen bezüglichen Relationen von nun an aus.

27. Es werde nun eine Signatur $[klmn]_{11}$ vorausgesetzt. In der vorletzten Nr. ist die Zahl λ_{11B} gewonnen, d. i. die Ordnung der Fläche der Punkte B, welchen Punkte A durch Correlation mit singulären Ebenen entsprechen. Wir schneiden diese Fläche mit einer Ebene β; so entspricht der ausgeschnittenen Curve λ_{11B} ter Ordnung eine Curve λ'_{11} ter Ordnung, wie sie die vorige Nr. ergeben hat.

Durch die Association der Punkte dieser beiden Curven erhalten wir das Correlationssystem; die Charakteristiken desselben, welche die λ_{12B} liefern (Nr. 14.), seien $\dot{\lambda}_{11}$, $\overline{\lambda}_{11}$. Es ergiebt sich die Relation:

(VIII b) $$2\overline{\lambda}_{11} = \dot{\lambda}_{11} + \lambda_{11B} + \lambda'_{11},$$

wo die beiden letzten Summanden resultiren 1) aus den Spuren der Curve λ_{11B}ter Ordnung in der Ebene ($\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$), 2) aus denen der Curve λ'_{11}ter Ordnung in der Ebene der eindeutig bezogenen Curven.

28. Endlich sei $[klmn]_{12}$ angenommen. Da haben wir zwei Curven λ_{12A}ter Ordnung und λ_{12B}ter Ordnung, welche bez. die durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte A, B enthalten. Das System, zu dem sie führen, habe die Charakteristiken $\dot{\lambda}_{12}$, λ_{12}, welche uns λ_{13} (Nr. 15.) geben; die Relation ist:

(IX b) $$2\overline{\lambda}_{12} = \dot{\lambda}_{12} + \lambda_{12A} + \lambda_{12B},$$

worin die beiden letzten Summanden rechts von den Spuren der Curven dieser Ordnungen in den mehrfach genannten Ebenen herrühren.

29. Es hat sich gezeigt, dass die directe Ermittelung der Zahlen $\dot{\pi}$, $\dot{\pi}'$, $\dot{\lambda}$, $\dot{\lambda}'$ oder, was dasselbe, der Zahlen π, π', λ, λ' für die Signaturen $n = 0$ nothwendig ist. Einige allgemeine Sätze, durch welche man das Nullsein mehrerer dieser Zahlen gleich von vornherein erkennen kann, mögen deshalb angegeben werden.

Bei den *Correlationen mit singulären Axen*, die wir stets mit a', b' bezeichnen wollen, haben diese in den 9 verschiedenen Fällen, die uns vorliegen, zunächst folgende Bedingung zu erfüllen, wo der Doppelpunkt das Zeichen der Incidenz sein soll:

1) $\sigma = 8$; $a' : a$, $b' : B$;	4) $\sigma = 10$; $b' : B$;	7) $\sigma = 11$;
2) $\sigma = 9$; $b' : B$;	5) $\sigma = 10$; $b' : b$;	8) $\sigma = 12$;
3) $\sigma = 9$; $a' : a$, $b' : b$;	6) $\sigma = 11$; $b' : b$;	9) $\sigma = 13$;

also zusammen bez. 3, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0 Bedingungen, wobei die Bedingung der Incidenz mit einem Punkte eben doppelt gerechnet ist.

Nehmen wir weiter an, dass a' mit k' Punkten A_i, l' Geraden a_i, n' Geraden $\mathfrak{a}_i$ incident sei; die Ebene, welche dem singulären Strahle a' von A, einem beliebigen Punkte auf a', nach einem dieser A_i homolog ist, ist jede beliebige im zweiten Bündel, also giebt es auch eine solche, welche durch die homologe b_i geht. Zweitens jeder der l' durch a' gehenden Ebenen Aa_i entspricht ein ganzer Büschel von Strahlen in der Ebene durch b', die jener in der Projectivität der Ebenenbüschel um a', b' homolog ist; es ist also dafür zu sorgen, dass die Ebenen $a'a_i$ und $b'B_i$ homolog sind. Drittens jeder der n' Ebenen $A\mathfrak{a}_i$, welche durch a' gehen, entspricht ebenfalls ein ganzer Strahlbüschel, von welcher also einer die $\mathfrak{b}_i$ trifft, womit der Bedingung genügt ist. Dem Strahle von A nach einem der $k - k'$ nicht mit a' incidenten A_i muss eine mit b' incidente Ebene entsprechen; es muss also b' die $k - k'$ Geraden b_i treffen und die $k - k'$ Ebenen $b'b_i$ müssen den $k - k'$ Ebenen $a'A_i$ homolog sein. Den Ebenen von A nach den $l - l'$ nicht mit a' incidenten a_i muss der singuläre Strahl b' entsprechen, also muss derselbe durch $l - l'$ Punkte B_i geben. Der Ebene von A nach einer der $n - n'$ nicht mit a' incidenten $\mathfrak{a}_i$ entspricht der Strahl b', anderseits soll dieser Strahl in einer Ebene durch die conjugirte $\mathfrak{b}_i$ liegen, also muss b' dieselbe treffen. Ferner muss dem Strahl, der nach einem der m Punkte $\mathfrak{A}_i$ geht, eine durch b' und $\mathfrak{B}_i$ gehende Ebene entsprechen, die der Ebene $a'\mathfrak{A}_i$ in der Projectivität der Ebenenbüschel homolog ist.

Wir gewinnen also zunächst die Sätze:

Je nachdem bei einer Axen-Correlation die eine Axe a' mit einem Elemente A_i, a_i, $\mathfrak{a}_i$ incident oder nicht incident ist, ist b' mit dem homologen b_i, B_i, $\mathfrak{b}_i$ nicht incident oder incident.

Und der Ebenenbüschel von a' nach den nicht incidenten A_i, den incidenten a_i und den $\mathfrak{A}_i$ ist dem Ebenenbüschel von b' nach den homologen Elementen projectiv.

Ferner ersieht man, dass den beiden Geraden a', b' ausser den obigen Bedingungen noch $2k' + l' + n' + k - k' + 2(l - l') + n - n'$ Lagen- oder Incidenz-Bedingungen, und, da jeder der eben genannten Ebenenbüschel $k - k' + l' + m$ Ebenen hat, noch $k - k' + l' + m - 3$ Projectivitäts-Bedingungen, wenn diese Zahl nicht < 0 ist, oder, wenn dies der Fall ist, keine Projectivitäts-Bedingungen auferlegt sind. Im ersten Falle ergiebt sich, indem für $\sigma = 2k + 2l + m + n$ der Werth eingesetzt wird, als Gesammtzahl der von a', b' zu erfüllenden Bedingungen in den 9 Fällen 8, 8, 8, 9, 8, 9, 8, 9, 10, so dass die schon früher (Nr. 8., 10., 11., 13.) erkannte Unmöglichkeit in 4 Fällen sich nochmals zeigt.

Ist aber $k - k' + l' + m < 3$, dann ist in die eben erhaltene Summe der negative Summand $k - k' + l' + m - 3$ aufgenommen, welcher nicht aufzunehmen ist; also wächst die Zahl um $-(k - k' + l' + m - 3)$; mithin über 8 durchweg.

Der günstigste Fall ist noch, wenn $k' = 0$, $l' = l$ ist; wenn aber auch $k + l + m < 3$, so ist bei dieser Signatur durchweg Unmöglichkeit.

Wir erhalten also folgendes Resultat:

Bei allen Signaturen, wo $k + l + m < 3$, sind die π bez. π' gleich 0.

Am meisten wird dies bei hohen Werthen von n eintreten.

30. Bei den *Correlationen mit singulären Ebenen*, die wir durchweg α', β' nennen wollen, muss β' in den beiden ersten und im vierten Falle durch B gehen.

Nehmen wir wiederum an, dass α' mit k' Punkten A_i, l' Geraden a_i, m' Punkten $\mathfrak{A}_i$ incident sei. Jedem der k' Strahlen AA_i entsprechen die unendlich vielen Ebenen um den Strahl des Büschels (B, β'), der dem AA_i in der Projectivität der Büschel (A, α'), (B, β') homolog ist. Soll also eine Ebene durch die homologe b_i gehen, so muss b_i diese treffen; also muss dafür gesorgt werden, dass die mit A_i und b_i incidenten Strahlen der beiden Strahlbüschel homolog seien. Die Ebene von A nach einer in α' liegenden a_i ist α' selbst, also entspricht ihr jeder beliebige, mithin auch ein durch den homologen B_i gehender Strahl. Dem Strahle von A nach einem in α' liegenden $\mathfrak{A}_i$ entspricht, wie eben gesagt, ein ganzer Büschel von Ebenen, so dass eine durch den conjugirten $\mathfrak{B}_i$ geht.

Dem Strahle von A nach den $k - k'$ nicht in α' liegenden A_i entspricht β' und muss also die $k - k'$ homologen b_i enthalten. Der Ebene von A nach einer der $l - l'$ nicht in α' befindlichen Geraden a_i entspricht der anderseits durch den homologen B_i gehende Strahl in β', der in der Projectivität der beiden Strahlbüschel dem mit der a_i incidenten homolog ist; folglich muss erstens β' durch diese $l - l'$ Punkte B_i gehen und für diese Projectivität gesorgt werden. Dem Strahle von A nach einem nicht in α' befindlichen $\mathfrak{A}_i$ ist β' homolog, die also durch den conjugirten $\mathfrak{B}_i$ gehen muss.

Die Strahlen der beiden projectiven Büschel, die mit conjugirten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ incident sind, müssen ebenfalls homolog sein; damit der Strahl, der der Ebene $A\mathfrak{a}_i$ (oder $B\mathfrak{b}_i$) entspricht und in β' (oder α') liegt, die $\mathfrak{b}_i$ (oder $\mathfrak{a}_i$) treffen kann.

Wir haben also die zwei Sätze:

Je nachdem α' mit einem Elemente A_i, a_i, $\mathfrak{A}_i$ incident oder nicht incident ist, ist β' mit dem homologen b_i, B_i, $\mathfrak{B}_i$ nicht incident oder incident. Und:

In den beiden projectiven Strahlbüscheln $(A\alpha')$, $(B\beta')$ entsprechen die Strahlen, welche mit den in α' befindlichen Punkten A_i, mit den nicht in α' liegenden Geraden a_i und mit den Geraden $\mathfrak{a}_i$ incident sind, den mit den homologen Elementen incidenten Strahlen.

Ferner werden den beiden Ebenen α', β' ausser den obigen $1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0$ noch $k' + 2l' + m' + 2(k - k') + l - l' + m - m'$ weitere Incidenz-Bedingungen auferlegt. Die Zahl der Elemente jedes der projectiven Strahlbüschel ist $k' + l - l' + n$.

Hier muss aber noch auf die Beweglichkeit der Scheitel A und B in den Ebenen α', β' Rücksicht genommen werden, und damit verhält es sich so:

1) $\sigma = 8$; B gegeben; $A = \alpha' a$;
2) $\sigma = 9$; B gegeben; A beweglich auf $\alpha' \alpha$;
3) $\sigma = 9$; $B = \beta' b$; $A = \alpha' a$;

4) $\sigma = 10$; B gegeben; A beweglich in α'.
5) $\sigma = 10$; $B = \beta' b$; A beweglich auf $\alpha'\alpha$.
6) $\sigma = 11$; $B = \beta' b$; A beweglich in α'.
7) $\sigma = 11$; B beweglich auf $\beta'\beta$, A auf $\alpha'\alpha$.
8) $\sigma = 12$; B beweglich auf $\beta'\beta$, A in α'.
9) $\sigma = 13$; B beweglich in β', A in α'.

Der Grad der Beweglichkeit ist demnach bez. 0, 1, 0, 2, 1, 2, 2, 3, 4. Durch die Strahlbüschel-Projectivität werden mithin den Ebenen α', β' $k' + l - l' + n - 3 - 0, 1, 0, 2, 1, 2, 2, 3, 4$ Bedingungen auferlegt, wofern diese Zahl nicht unter 0 kommt, sonst keine. Im ersteren Falle ergiebt sich als die Gesammtzahl der Bedingungen durchweg 6, also gleich der doppelten Zahl der Bedingungen, die eine Ebene erfüllen kann. Tritt aber der andere Fall ein, so steigt die Zahl über 6. Der günstigste Fall ist $k' = k$, $l' = 0$.

Wenn demnach $k + l + n < 3, 4, 3, 5, 4, 5, 5, 6, 7$ *ist, so sind die Zahlen* λ, λ' *gleich* 0; z. B. wenn $\sigma = 13$, so ist $k + l < 7$; ist nun noch $n = 0$, so ist $\lambda_{13} = 0$; ebenso $\lambda_{12} = 0$, wenn $n = 0$, $m > 0$.

31. Es ist in beiden Fällen nicht gesagt, dass das Nullwerden nicht auch ausserdem noch eintreten kann; z. B. die 8 den a', b' zusammen auferlegten Bedingungen können ja so sein, dass eine der beiden Geraden allein schon mehr als 4 zu erfüllen hat.

Hätten wir a' mit einem $\mathfrak{A}_i$, bez. α' mit einer $\mathfrak{a}_i$ incident sein lassen, wodurch dann die auf dieses Grundelement bezügliche Bedingung auf unendlich viele Weisen erfüllbar wäre, so würde die Gesammtzahl der Bedingungen für a', b', bez. α', β' über 8, bez. 6 gestiegen sein.

32. *Die in Nr.* 29. *und* 30. *gefundenen Sätze über Incidenzen und Nichtincidenzen von* a', b', *bez.* α', β' *bestehen zugleich bei den Axen-Ebenen-Correlationen.*

Zu einer ausgearteten Projectivität kann man nur 2 Paare entsprechender Elemente geben; also eine ausgeartete Projectivität bei z Paaren aufstellen, hat den Werth von $z - 2$ Bedingungen. Fassen wir mithin die Axen-Ebenen-Correlation als ausgeartete Axen-Correlation auf, so unterwerfen wir die Axen a', b' wie oben zuerst 3, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, dann $2k' + l' + n' + k - k' + 2(l - l') + n - n'$ Incidenz-Bedingungen und zuletzt noch $k - k' + l' + m - 2$ Projectivitätsbedingungen — die freilich hier auch Incidenzbedingungen werden —, wofern die letztere Zahl nicht < 0 ist, andernfalls keiner Projectivitätsbedingung. Da aber hier in den 9 verschiedenen Fällen, σ je um 1 kleiner ist, als in Nr. 29., 30., so ergeben sich dieselben Zahlen wie in Nr. 29., wenn $k - k' + l' + m$ nicht < 2 ist. Ist dies aber der Fall, so tritt Unmöglichkeit ein; indem wir wieder den günstigsten Fall annehmen, erhalten wir:

Wenn $k + l + m < 2$, so ist Θ, *bez.* Θ' *gleich* 0.

In ähnlicher Weise führt die Betrachtung der Axen-Ebenen-Correlation als ausgeartete Correlation mit singulären Ebenen zu dem Satze:

Wenn in den 9 verschiedenen Fällen (I bis IX) $k + l + n < 2, 3, 2, 4, 3, 4, 4, 5, 6$ *ist, so ist* Θ, *bez.* Θ' *gleich* 0.

Specielle Untersuchungen.

IV. $\sigma = 9$.

33. Wir gehen nun an die Ermittelung der Zahlen selbst und wenden zuerst die beiden Formeln

(Ia und b) $\qquad 2\dot{\pi}_7 = \overline{\pi}_7 + \Theta_{7B};\; 2\overline{\lambda}_7 = \dot{\lambda}_7 + \Theta_{7B} + \lambda_7$

(Nr. 19., 20.) auf alle Signaturen $[klmn]_7$ an. Alle θ_{7B} sind direct ermittelt, so wie die $\dot{\pi}_7$, $\dot{\lambda}_7$ für die Signaturen $[klm0]_7$, d. i. π_{8B}, λ_{8B} für $k, l, m+1, 0]_8$. Einige Beispiele der directen Berechnung folgen der Tabelle. Die π_{8B} und λ_{8B} und zwar alle, also auch die aus der folgenden Tabelle nicht zu entnehmenden für die Signaturen $[kl00]_8$ finden sich in Tab. 1) in Nr. 40.

Tab. I: $\sigma = 7$.

Sign.	Θ_{7B}	$\dot{\pi}_7$	$\overline{\pi}_7$	λ_7	$\dot{\lambda}_7$	$\overline{\lambda}_7$
3010	9	6	3	0	1	5
3001	6	3	0	3	5	7
0310	6	8	10	0	0	3
0301	18	10	2	3	3	12
2110	3	4	5	1	2	3
2101	8	5	2	1	3	6
1210	8	6	4	1	1	5
1201	4	4	4	1	5	5
2030	6	8	10	0	0	3
2021	12	10	8	1	3	8
2012	14	8	2	4	8	13
2003	4	2	0	3	13	10
0230	2	8	14	0	0	1
0221	14	14	14	1	1	8
0212	22	14	6	4	8	17
0203	12	6	0	3	17	16
1130	6	8	10	0	0	3
1121	11	10	9	2	3	8
1112	12	9	6	2	8	11
1103	12	6	0	3	11	13

Sign.	Θ_{7B}	$\dot{\pi}_7$	$\overline{\pi}_7$	λ_7	$\dot{\lambda}_7$	$\overline{\lambda}_7$
1050, 0150	0	8	16	0	0	0
1041	12	16	20	0	0	6
1032	23	20	17	3	6	16
1023	26	17	8	6	16	24
1014	16	8	0	6	24	23
1005	0	0	0	3	23	13
0141	8	16	24	0	0	4
0132	25	24	23	3	4	16
0123	34	23	12	6	16	28
0114	24	12	0	6	28	29
0105	0	0	0	3	29	16
0070	0	8	16	0	0	0
0061	0	16	32	0	0	0
0052	20	32	44	0	0	10
0043	48	44	40	6	10	32
0034	60	40	20	12	32	52
0025	40	20	0	12	52	52
0016	0	0	0	6	52	29
0007	0	0	0	3	29	16.

Ich wiederhole, dass die λ_7 aus Hirst's Tabelle in Nr. 41. entnommen sind.

34. Was nun die Ermittelung der Zahlen Θ_{7B} angeht, also der Axen-Ebenen-Correlationen für die betreffende Signatur, bei denen die eine singuläre Axe mit der Geraden a, die andere und also auch die zugehörige singuläre Ebene mit dem Punkte B incident ist, so wollen wir die Signatur [1121] betrachten:

$$\begin{array}{c} A_1 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{a}_1 \\ b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{b}_1 . \end{array}$$

I. α' sei $A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$; dann geht β' durch B und B_1; a' soll also mit α' und a incident sein, so kann es nur noch durch einen Punkt von α' gehen, oder eine Gerade treffen: 1) a' treffe a_1, so muss b', ausser dass sie durch B geht, noch b_1 und $\mathfrak{b}_1$ treffen, was auf eine Weise möglich ist; die Ebene β' ist dann durch BB_1 und b' bestimmt; 2) a' treffe $\mathfrak{a}_1$; so muss b' dann mit $b_1 B B_1$ incident sein, was nicht möglich ist; 3) a' gehe durch A_1, so müsste b' mit $B_1 B b_1$ incident sein, was ebenfalls nicht geht. Also 1 Lösung.

II. α' sei $A_1 a_1$; dann ist β' die $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 B$; 1) a' — mit a und α' (und dadurch auch mit a_1) incident — treffe $\mathfrak{a}_1$, so trifft b' — mit B und β' incident oder dem Büschel (B, β') angehörig — die b_1; 2) a' gehe durch A_1, so muss b' die $\mathfrak{b}_1$ treffen. 2 Lösungen.

III. α' gehe durch $A_1 \mathfrak{A}_1$; β' ist $B_1 \mathfrak{B}_2 B$; was durch die Vertauschung von $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}_2$ zwei Combinationen giebt; 1) a' sei mit $A_1 \mathfrak{a}_1 a$ incident; b' muss dann, befindlich im Büschel (B, β'), durch B_1 geben; 2) a' treffe a_1, $\mathfrak{a}_1$, a und, weil in α' gelegen, auch $A_1 \mathfrak{A}_1$, was 2 Lösungen hat, so wird b' die b_1 treffen; 3) a' sei mit $A_1 a_1 a$ incident, so hat b' die $\mathfrak{b}_1$ zu treffen. In allen 3 Fällen ist α' durch a' und $A_1 \mathfrak{A}_1$ fixirt. Hierdurch ergeben sich $2(1+2+1)=8$ Lösungen.

Andere Fälle als diese $1+2+3$ sind nicht möglich.

Mithin giebt es $1+2+8=11$ Lösungen; $\Theta_{7B}=11$.

Ein Hauptaugenmerk hat man darauf zu richten, dass jedes der 4 Elemente $\alpha' \beta' a' b'$ so viel Bedingungen erhält, als zu seiner Bestimmung nothwendig sind; bei dem obigen Arrangement ist es bei a', b' gleich nothwendig, α', β' können noch durch das schon fixirte a', b' endgiltig bestimmt werden.

Wir nehmen als zweites Beispiel

$$[0123] \qquad \begin{array}{c} a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \\ B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3 . \end{array}$$

I $\alpha' : a_1, \mathfrak{A}_1$ *); $\beta' : \mathfrak{B}_2, B$ (2 Comb.); $a' : \alpha', a, \mathfrak{a}_1$; $b' : B, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); also 6 Lösungen.

*) Der Doppelpunkt ist wie oben das Zeichen der Incidenz.

II $\alpha' : \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$; $\beta' : B_1, B$; $a' : a_1, a, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ (2 Lagen); $b' : B, b_2, b_3$ (3 Comb.); also ebenfalls 6 Lösungen.

III $\alpha' : a_1$; $\beta' : \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, B$; $a' : a_1, a, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ (2 Lagen); $b' : B, \beta', \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); wiederum 6 Lösungen.

IV $\alpha' : \mathfrak{A}_1$; $\beta' : B_1, \mathfrak{B}_2, B$ (2 Comb.); 1) $a' : a, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ (2 Lagen); $b' : B, B_1$; 2) $a' : a, a_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ (2 Lagen); $\mathfrak{b}' : B, \beta', \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); also im Ganzen $2(2 + 2 \cdot 3) = 16$ Lösungen.

$$\theta_{7B} = 6 + 6 + 6 + 16 = 34.$$

Fassen wir θ_{7B} als Grad einer Fläche und zwar der der Axen a' von Axen-Ebenen-Correlationen für $[0123]$, für welche die Axe b' durch B geht, so besteht diese Fläche 34. Grades aus 6 ebenen Strahlbüscheln (I), und aus 14 Regelschaaren (2. Grades) (II, III, IV).

35. Was die Berechnung der $\dot{\pi}_7$ für $[klm0]_7$, d. i. der π_{8B} für $[k, l, m+1, 0]_8$ anbetrifft, so nehmen wir als Beispiel die Signatur

$$[2120]_8 \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2, \end{matrix}$$

welche $\dot{\pi}_7$ für $[2110]_7$ giebt; die Axe a' soll mit a, die Axe b' mit B incident sein.

I a' sei mit a, A_1 incident; b' ist dann mit $b_2 B_1 B$ incident, was nicht möglich.

II a' treffe a, a_1; b' ist dann mit b_1, b_2, B incident, hat also eine bestimmte Lage; ferner muss sein

$$a'(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2).$$

Wir ersetzen für einen Augenblick a_1, b_1, b_2 durch beliebige auf ihnen gelegene Punkte A_1', B_1', B_2'; wodurch die Ebenen, welche b', a', die ja b_1, b_2; a_1 treffen, mit B_1', B_2'; A_1' bilden, dieselben sind wie die, welche sie mit b_1, b_2; a_1 bilden, wofern nur die b' nicht gerade durch B_1' oder B_2' oder die a' durch A_1' geht. Der *einen* Geraden b' correspondirt nun für die beiden Gruppen von 5 Punkten

$$A_1 A_2 A_1' \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2, \quad B_1' B_2' B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$$

eine Strahlencongruenz 1. Ordnung 3. Klasse*) (Sehnensystem einer cubischen Raumcurve), welche aus dem Punkte A_1' einen Kegel 2. Grades erhält (Räuml. Project. Nr. 8.); diese hat mit der linearen Congruenz $[a a_1]$ $1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4$ Strahlen gemein; darunter befinden sich aber auch die beiden Strahlen des eben genannten Kegels, welche a treffen und die, weil durch A_1' gehend, nicht als a' zu gebrauchen sind. Es bleiben mithin nur 2 Lösungen für a'.

---

*) Oder wie Schubert in prägnanterer Weise sagt: vom Bündelgrad 1, vom Feldgrad 3.

III a' ist mit A_1, a_1, a incident, und also bestimmt; b' dann mit mit B, b_2; ferner $a'\,(A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'\,(b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$. Indem wieder auf a_1, b_2 Punkte A_1', B_2' angenommen werden, ergiebt sich, dass dem *einen* a' ein Strahlencomplex 2. Grades correspondirt, zu dem jeder Strahl durch B_2' gehört (Räuml. Proj. Nr. 2.); so dass derselbe mit dem Büschel Bb_2 ausser dem durch B_2' gehenden Strahle noch einen gemein hat. Wir haben also, weil hier 2 Combinationen möglich sind, $2 \cdot 1 = 2$ Lösungen.

Andere Fälle sind nicht möglich; also ist π_{8B} für [2120] oder π_7 für [2110] gleich 4.

Ein zweites Beispiel sei

$$[0320] \qquad \begin{matrix} a_1 a_2 a_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ B_1 B_2 B_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 . \end{matrix}$$

I a' trifft a, a_1, a_2; b' geht durch BB_3, ist also bestimmt; ferner $a'\,(a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'\,(B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$. Dem einen b' entspricht ein Complex 2. Grades, dem die beiden Bündel A_1', A_2' ganz angehören, so dass er mit der Regelschaar $[a a_1 a_2]$ ausser den beiden durch A_1', A_2' gehenden Geraden derselben noch $2 \cdot 2 - 2 = 2$ Gerade gemein hat. Wegen der 3 Combinationen erhalten wir 6 Lösungen.

II a' trifft a, a_1, a_2, a_3, hat also 2 Lagen; b' geht durch B; wir haben $a'\,(a_1 a_2 a_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'\,(B_1 B_2 B_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$; jeder der beiden a' entspricht eine Congruenz (1, 3), von welcher also ein Strahl durch B geht; mithin 2 Lösungen. Also ist $\pi_{8B} = 8$, d. i. π_7 für [0310].

Ferner

$$[3100] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 . \end{matrix}$$

a' ist mit A_1, a_1, a, b' mit b_2, b_3, B incident; also beide dadurch eindeutig bestimmt; die Bedingung: $a'\,(A_2 A_3 a_1) \barwedge b'\,(b_2 b_3 B_1)$ erfüllt sich von selbst. Wegen der drei Combinationen giebt es 3 Lösungen. Also $\pi_{8B} = 3$; da auch $m = 0$, so kommt es in Tabelle 1 nicht vor.

Endlich

$$[0080] \qquad \begin{matrix} \mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_8 \\ \mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_8 . \end{matrix}$$

a' mit a, b' mit B incident; $a'\,(\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_8) \barwedge b'\,(\mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_8)$. Dem Bündel B correspondirt eine Regelfläche 8. Grades (Räuml. Proj. Nr. 43.), von welcher 8 Gerade die a treffen, also $\pi_{8B} = 8$ oder π_7 für [0070].

Nothwendig ist es nur, die π_{8B} für die Signaturen $[klm0]_8$ zu ermitteln. Ich habe aber *alle* auf die vorhergehende Weise gefunden und wähle noch als Beispiel

$$[1122] \qquad \begin{matrix} A_1 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \\ b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 , \end{matrix}$$

weil in den vorhergehenden keine conjugirten Geraden vorkommen.

I a' ist mit a, A_1, a_1, b' mit $B, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ incident, also beide bestimmt; $a'(a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'(B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$ erfüllt sich selbst. 1 Lösung.

II a' ist mit $a, a_1, \mathfrak{a}_1$, b' mit B, b_1, b_2 incident (2 Comb.); $a'(A_1 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'(b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$; dem b' entspricht ein Complex 2. Gr., der mit der Regelschäar $[a a_1 \mathfrak{a}_1]$ ausser der durch A_1' gehenden, noch 3 Gerade gemein hat. $2 \cdot 3 = 6$ Lösungen.

III a' ist mit $a, a_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, b' mit B, b_1 incident; $a'(A a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'(b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$; jeder der beiden Lagen von a' entspricht ein Complex 2. Grades, der mit dem Büschel Bb_1 ausser dem durch B_1' gehenden noch einen Strahl gemein hat; also 2 Lösungen.

Also im Ganzen $\pi_{8B} = 1 + 6 + 2 = 9$, welchen Werth mithin auch $\bar{\pi}_7$ für [1121] oder $\dot{\pi}_7$ für [1112] hat, wie die Tabelle I zeigt.

Die Fläche 9. Grades der Axen von a' Axen-Correlationen für [1122], bei denen die Axe b' durch B geht, besteht demnach 1) aus einem Strahlbüschel, 2) aus 2 Regelflächen 3. Grades, 3) aus einer Regelschaar.

36. Gehen wir nun zur Berechnung der λ_7 für $[klmn]_7$ oder der λ_{8B} für $[k, l, m+1, n]_8$, von denen wiederum nur die für $n = 0$ nothwendig, aber alle ermittelt sind.

Die in der Tabelle I vorkommenden $\dot{\lambda}_7$ oder λ_{8B} für $n = 0$ sind meistens 0, ausser denen, für welche es der Satz von Nr. 30. sagt, auch $\dot{\lambda}_7$ für [0310] oder λ_{8B} für [0320], wie man leicht einsieht.

Fasst man λ_{8B} als Ort der Punkte A auf, welche für $[klmn]_8$ dem festen B durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind, so besteht bei [2120] dieser Ort aus den beiden Ebenen $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$, $A_1 A_2 \mathfrak{A}_2$, bei [1220] aus der einen Ebene $A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$, bei [3020] aus der einen Ebene $A_1 A_2 A_3$; endlich noch bei den Signaturen $[kl00]$, die nicht zu $\dot{\lambda}_7$ in der Tabelle I führen, besteht sie bei [3100] aus der einen Ebene $A_1 A_2 A_3$, bei [1300] aus den drei Ebenen $A_1 a_1$, $A_1 a_2$, $A_1 a_3$ und bei [4000] aus den 4 Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2 A_4$ u. s. f. Bei [0400] existirt sie nicht.

Z. B. bei [2120] sei A irgend ein Punkt in $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; so wird dies für ihn die singuläre Ebene α', die β' ist $B_1 \mathfrak{B}_2 B$. Die Projectivität ist: $(A\alpha')(A_1 A_2 a_1) \barwedge (B\beta')(b_1 b_2 B_1)$, welche von selbst erfüllt wird*).

Bei [2200] ist die Fläche diejenige Fläche α^2, die überhaupt dem Punkte B associirt ist (Nr. 1.). Jeder ihrer Punkte ist dem Punkte B durch ein System von Correlationen [2200] oder, wie dort gezeigt, [2110] u. s. f. associirt, in welchem es von jeder Ausartung eine giebt und dessen Charakteristiken beide 1 sind (Hirst, Nr. 41.); so dass es auf jeder Geraden a zwei Punkte giebt, welche dem B für [2200]

*) Ueber die Schreibweise sehe man Nr. 1.

durch Correlation mit singulären Ebenen oder durch allgemeine Correlation für [2210], oder für [2201] associirt sind, und zwar immer dieselben 2 Punkte.

37. Ich habe aber, wie schon oben gesagt, auch die λ_{8B} für alle Signaturen direct ermittelt. Doch gestattet es der Raum nicht entfernt, auf diese bisweilen sehr umständlichen Untersuchungen einzugehen. Die Fläche von der Ordnung λ_{8B} zerfällt im Allgemeinen.

Als Beispiel betrachten wir

$$[1113]_8 \qquad \begin{array}{l} A_1 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \\ b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3. \end{array}$$

I. α' ist $a_1 \mathfrak{A}_1$, β' ist $b_1 B$; A beliebig in α'; $(A\alpha')(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$ erfüllt sich von selbst.

II α' ist $A_1 a_1$, β' geht durch $\mathfrak{B}_1$, B; A beliebig in α', $(A\alpha')(A_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')(b_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$. Für jede Lage von A in α' giebt es zwei Ebenen β' durch $\mathfrak{B}_1 B$; denn alle Ebenen durch B, welche die 4 Ebenen $B\,(b_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$ in einem zu $(A\alpha')\,(A_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3)$ projectiven Büschel schneiden, umhüllen einen Kegel 2. Gr., an den von $B\mathfrak{B}_1$ zwei Ebenen gehen.

III α' geht durch $A_1 \mathfrak{A}_1$, β' durch BB_1 und in jener ist A so zu suchen, dass $(A\alpha')\,(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')\,(b_1 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$.

Wir betrachten eine feste Ebene durch $A_1 \mathfrak{A}_1$, so haben wir in derselben 5 Punkte: A_1 und die Spuren von a_1, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$; wir dualisiren die Figur im Raume B, die aus 4 Ebenen und einer Geraden (mit beweglicher Ebene um letztere) in einem Bündel besteht, und erhalten 4 Punkte und eine Gerade (mit beweglichem Punkte auf letzterer) in einer Ebene; auf die Gerade legen wir einen Punkt, so dass wir in jeder Ebene 5 Punkte haben; und unsere Frage ist nun die nach der Curve der Punkte in der A-Ebene, welche der Geraden in der B-Ebene, um mich kurz so auszudrücken, in Bezug auf die beiden Punktgruppen correspondirt. Da die Gerade durch einen Punkt der B-Gruppe geht, so ist die gesuchte Curve 3. Ordnung (Ebene Project. Nr. 8.; Math. Ann. I).

Wir legen zweitens A fest auf die Gerade $A_1 \mathfrak{A}_1$ und lassen α' sich wieder bewegen; jetzt wird auch die A-Figur, bestehend aus vier festen Ebenen und einer festen Geraden durch A und beweglicher Ebene durch letztere, dualisirt; wir erhalten 4 feste Punkte und eine feste Gerade, auf der sich ein Punkt bewegt, in einer Ebene. Wir legen wiederum einen festen Punkt auf die Gerade, der aber nicht homolog zu dem auf die Gerade in der B-Ebene gelegten wird. Es fragt sich nun, wie viele correspondirende Punktepaare giebt es, bez. auf den beiden Geraden gelegen, in Bezug auf die beiden Punktgruppen. Da die mit den Geraden incidenten Grundpunkte nicht homolog sind, so ergeben sich 2 Punktepaare, wie leicht aus dem eben benutzten Satze der „ebenen Projectivität" hervorgeht. Es folgt hieraus, dass auf der Fläche der Punkte A die Gerade $A_1\mathfrak{A}_1$ doppelt und demnach diese Fläche 5. Ordnung ist.

IV Die Ebene α' geht durch A_1 und β' ist $B_1\mathfrak{B}_1B$. A ist in α' so zu suchen, dass $(A\alpha')\,(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')\,(b_1 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$, welcher letztere Büschel fest ist.

Die Punkte A erzeugen, wie gleich bewiesen wird, eine Fläche 3. Ordnung, und nun haben wir die sämmtlichen Flächen zusammen, deren Punkte A dem B für [1113] durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind: eine einfache, eine doppelte Ebene, eine Fläche 5. und eine 3. Ordnung, zusammen 11. Ordnung, wie in der Tab. I. λ_7 für [1103], $\bar{\lambda}_7$ für [1112].

38. Um die Ordnung 3 der Fläche in IV zu ermitteln, beweisen wir erst einen andern bei diesen Untersuchungen häufig vorkommenden Satz:

Sind sechs Gerade a_1, a_2, a_3, a_4, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ *gegeben, so giebt es vier einem gegebenen projective (vierstrahlige) Strahlbüschel, deren Scheitel mit* $\mathfrak{a}$, *deren Ebene mit* $\mathfrak{a}'$ *und deren Strahlen mit* a_1, a_2, a_3, a_4 *incident sind* (eine bestimmte Zuordnung vorausgesetzt). Oder mit andern Worten:

In den Ebenen α *durch* $\mathfrak{a}'$ *beschreiben die Punkte* A, *für welche der Büschel* $(A\alpha)\,(a_1 a_2 a_3 a_4)$ *dem gegebenen projectiv ist, eine Fläche* 4. *Ordnung*, oder, und dual hierzu: *Die Ebenen* α *durch die Punkte* A *auf* $\mathfrak{a}$, *für welche* $(A\alpha)\,(a_1 \cdots a_4)$ *dem gegebenen Büschel projectiv ist, umhüllen eine Fläche* 4. *Klasse.*

In der That, wenn wir die zweite Ausspruchsweise annehmen, so erzeugen ersichtlich die Punkte A in jeder Ebene durch $\mathfrak{a}'$ einen Kegelschnitt. Hingegen (dual) umhüllen die Ebenen α durch jeden Punkt A von $\mathfrak{a}'$ (oder $\mathfrak{a}$) einen Kegel 2. Grades, so dass 2 durch $\mathfrak{a}'$ selbst gehen; daraus geht hervor, dass $\mathfrak{a}'$ der Fläche doppelt angehört, womit die vierte Ordnung bewiesen ist.

Lassen wir aber a_4 die $\mathfrak{a}'$ treffen, so genügt die ganze Ebene $a_4\mathfrak{a}'$, weil in dieser die Spur von a_4 unbestimmt wird; für die übrigen Ebenen α ist dann nur der Schnittpunkt $A_4 = a_4\mathfrak{a}'$ wichtig, und wir haben also den Satz:

Wenn a_1, a_2, a_3, A_4 *und eine durch* A_4 *gehende Gerade* $\mathfrak{a}'$ *gegeben sind, so erzeugen die Punkte* A *in den Ebenen* α *durch* $\mathfrak{a}'$, *für welche* $(A\alpha)\,(a_1 a_2 a_3 A_4)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, eine Fläche* 3. *Ordnung, auf der* $\mathfrak{a}'$ *einfach ist,* und durch die weitere Annahme, dass auch a_3 die $\mathfrak{a}'$ in A_3 treffe, den Satz:

Wenn a_1, a_2, A_3, A_4 *gegeben sind, so erzeugen die Punkte* A *in den Ebenen* α *durch* A_3A_4, *für welche* $(A\alpha)\,(a_1 a_2 A_3 A_4)$ *einem gegebenen*

Büschel projectiv ist, eine Fläche 2. Grades; welcher übrigens schon in Nr. 1. vorkommend auch einfacher bewiesen werden kann.

Wir gehen nun zu unserm Falle IV zurück und verlangen zunächst blos, dass $(A\alpha')(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$ dem festen Büschel $(B\beta')(b_1 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)$ projectiv sei; legen wir durch A_1 eine Gerade $\mathfrak{a}$, durch welche α' gehen soll, so beschreibt A eine Fläche 3. Ordnung, so dass A dreimal auf eine Gerade a fällt; wird demnach A auf a bewegt, jedoch die Bedingung der Incidenz von α' mit $\mathfrak{a}$ fallen gelassen, so umhüllt α' einen Kegel 3. Klasse. Derselbe hat die Ebene $A_1 a$ zur doppelten, die Ebenen $A_1(a_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ zu einfachen Berührungsebenen; denn wenn α' die erst genannte Ebene ist, so bilden die Punkte A, für welche $(A\alpha')(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \barwedge$ dem festen Büschel $(B\beta')$, einen Kegelschnitt, von dem 2 Punkte auf a liegen; in der Ebene $A_1 a_1$ aber befriedigt die Spur von a, weil der mit a_1 incidente Strahl unbestimmt ist, also der Projectivität gemäss gewählt werden kann.

Verlangen wir nun, dass während A die a durchläuft, α' so sei, dass $(A\alpha')(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')(b_1 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_3)$, so ergiebt sich ein zweiter Kegel 3. Klasse, der ebenfalls $A_1 a$ doppelt, $A_1(a_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3)$ einfach berührt und mit dem ersteren ausser $A_1(a, a_1, \mathfrak{a}_1)$ noch 3 Berührungsebenen gemein hat. Für die Schnitte A von a mit jeder derselben ist dann $(A\alpha')(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')(b_1 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$. Folglich giebt es auf der Geraden a 3 Punkte, die der in IV gestellten Bedingung genügen. Die Punkte A erzeugen mithin eine Fläche 3. Ordnung.

Also, wenn gegeben sind $A_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ (da die Verschiedenartigkeit der Bezeichnung im Allgemeinen nicht nothwendig ist), *so liegen die Punkte A von Ebenen α durch A_1, für welche $(A\alpha)(A_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ einem gegebenen Büschel projectiv ist, auf einer cubischen Fläche.*

Betrachten wir diese Fläche noch etwas genauer. Sie enthält den Punkt A_1 nur einfach. Denn es giebt durch A_1 einfach unendlich viele Ebenen α, in denen A_1 selbst A ist; der Strahl in jeder dieser Ebenen, der in der Projectivität dem ersten Strahle des festen Büschels entspricht, ist Tangente der Fläche in A_1, wie man durch eine unendlich kleine Verrückung erkennt.

Nun giebt es, wenn $\mathfrak{a}$ eine beliebige Gerade ist, nur eine Ebene α durch A_1, für die $(A_1\alpha)(\mathfrak{a} a_2 a_3 a_4 a_5)$ dem gegebenen Büschel projectiv ist, wie die Dualisirung der A-Figur zeigt (Ebene Project. Nr. 2.); also trifft nur eine der Tangenten der Fläche in A_1 eine beliebige Gerade.

Dass die Geraden a_2, a_3, a_4, a_5 einfach auf der Fläche liegen, ist leicht einzusehen, indem A z. B. auf a_2 gelegt wird, mit Hilfe des eben citirten Satzes und des Umstandes, dass der Strahl, der mit a_2 incident ist, unbestimmt wird. Gleichfalls wegen der Unbestimmtheit dieses Strahls ist der Kegelschnitt in der Ebene $A_1 a_2$ leicht nachzuweisen.

Unter den Geraden, welche a_2, a_3, a_4 treffen, giebt es eine a^0, bei der $a^0(A_1 a_2 a_3 a_4)$ dem Büschel der 4 ersten Strahlen im festen projectiv ist. Für jeden Punkt A auf a^0 und jede Ebene α durch AA_1 ist also $(A\alpha)$ $(A_1 a_2 a_3 a_4)$ dem genannten vierstrahligen Büschel projectiv, und die dem fünften Strahle entsprechenden Strahlen erfüllen eine gewisse Ebene α^* durch a^0, nämlich die, für welche $a^0(A a_2 a_3 a_4 \alpha^*)$ dem gegebenen Büschel projectiv ist; dieser Strahl wird also für jede Lage von A auf a^0 einmal a_5 treffen. Folglich liegt die ganze Gerade a^0 auf der cubischen Fläche und ähnlich drei andere.

Auf der Fläche 3. Ordnung giebt es ferner drei Gerade, welche gegen alle vier Geraden a_2, a_3, a_4, a_5 windschief sind. Der Kegelschnitt auf der Fläche in der Ebene durch A_1 und eine dieser Geraden enthält A_1 und die 4 Spuren; der Büschel, durch welchen aus einem beweglichen Punkte dieser Curve die 5 Punkte projicirt werden, bleibt sich und dem gegebenen projectiv. Mithin haben alle Punkte A eines dieser 3 Kegelschnitte dessen Ebene zur Ebene α.

39. Von den weiteren Sätzen, die sich bei Gelegenheit dieser Untersuchungen ergeben haben, will ich noch folgende hervorheben.

1) *Wenn ein Punkt* $\mathfrak{A}$ *und fünf Gerade* $a_1, \cdots, a_5$ *gegeben sind, so ist der Ort der Punkte* A *in den Ebenen* α *durch* $\mathfrak{A}$, *für welche* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_5)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, eine Fläche 7. Ordnung, auf welcher* $\mathfrak{A}$ *einfach, die Geraden* $a_1, \cdots, a_5$ *doppelt sind.*

2) *Wenn sechs Gerade* $a_1, \ldots, a_6$ *gegeben, so sollen solche Büschel* (A, α) *gesucht werden, dass* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist; die* A *erzeugen eine Fläche 4. Ordnung, auf der die* $a_1, \cdots, a_6$ *einfach sind; die Ebenen* α *umhüllen das duale Gebilde.*

3) *Gegeben* $a_1, \cdots, a_8$; $b_1, \cdots, b_8$; *es sollen solche Büschel* (A, α), (B, β) *gesucht werden, dass* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_8) \barwedge (B\beta)(b_1 \cdots b_8)$. *Wenn* B *oder* β *eine feste Lage hat, so ist das Erzeugniss der* A *eine Fläche 16. Ordnung, auf welcher die Geraden* $a_1, \cdots, a_8$ *dreifach sind; die von den* α *umhüllte Fläche ist die duale.*

Diese Fläche 16. Ordnung ist die der Punkte A, die für [0008] dem festen B durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind.

40. Wir geben nun die Tabelle für $\sigma = 8$, in welcher aus ζ_8, π_{8B}, λ_{8B} mit Hilfe der Formeln

(1 a u. b): $$2\nu_8 = \mu_8 + \zeta_8 + \pi_{8B}, \quad 2\mu_8 = \nu_8 + \lambda_{8B}$$

(Nr. 7.) die Werthe von μ_8 und ν_8 berechnet sind.

Die Werthe ζ_8 sind aus Hirst's Tabelle Nr. 42. entnommen.

Tab. 1. $\sigma = 8$.

Signatur	ζ_8	π_{8B}	λ_{8B}	μ_8	ν_8
4000	1	0	4	3	2
0400	1	8	0	3	6
3100	1	3	1	2	3
1300	1	2	3	3	3
2200	0	2	2	2	2
3020	1	6	1	3	5
3011	2	3	5	5	5
3002	1	0	7	5	3
0320	1	8	0	3	6
0311	2	10	3	6	9
0302	1	2	12	9	6
2120	1	4	2	3	4
2111	1	5	3	4	5
2102	1	2	6	5	4
1220	1	6	1	3	5
1211	1	4	5	5	5
1202	1	4	5	5	5
2040, 0240	1	8	0	3	6
2031	2	10	3	6	9
2022	3	8	8	9	10
2013	2	2	13	10	7
2004	1	0	10	7	4
0231	2	14	1	6	11
0222	3	14	8	11	14
0213	2	6	17	14	11
0204	1	0	16	11	6

Signatur	ζ_8	π_{8B}	λ_{8B}	μ_8	ν_8
1140	1	8	0	3	6
1131	2	10	3	6	9
1122	2	9	8	9	10
1113	2	6	11	10	9
1104	1	0	13	9	5
1060, 0160	1	8	0	3	6
1051, 0151	2	16	0	6	12
1042	4	20	6	12	18
1033	5	17	16	18	20
1024	4	8	24	20	16
1015	2	0	23	16	9
1006	1	0	13	9	5
0142	4	24	4	12	20
0133	5	23	16	20	24
0124	4	12	28	24	20
0115	2	0	29	20	11
0106	1	0	16	11	6
0080	1	8	0	3	6
0071	2	16	0	6	12
0062	4	32	0	12	24
0053	8	44	10	24	38
0044	10	40	32	38	44
0035	8	20	52	44	36
0026	4	0	52	36	20
0017	2	0	29	20	11
0008	1	0	16	11	6.

41. Das μ_8, ν_8 für eine Signatur $[k\,l\,m\,n]_8$ ist ζ_{9B} *für die Signatur* $[k, l, m+1, n]_9$, *bez.* $[k, l, m, n+1]_9$, *also die Ordnung der Fläche der Punkte* A, *welche dem festen* B *für diese Signatur associirt sind.* Als ζ_{9B} finden wir sie in der Tab. 2 Nr. 55. Aus der Tabelle ergiebt sich demnach, dass *für alle Signaturen* $\sigma = 9$, $n = 0$ *diese Fläche dritter Ordnung ist, mit Ausnahme der beiden Signaturen* [3110] *und* [2210], *wo sie zweiter Ordnung ist*; was wir für die letztere Signatur schon wissen, da ja diese Fläche dieselbe ist, welche auch schon für [2200] associirt war (Nr. 1).

Diese dritte Ordnung lässt sich auf sehr einfache Weise direct erkennen, und zugleich damit schon zwei analoge Sätze für die Signaturen von $\sigma = 10$, $\sigma = 11$, bei denen $n = 0$ ist. (C. P. Nr. 5.)

Wenn zwei verschiedene Punkte A', A'' demselben Punkte B associirt sind, so sind die beiden Bündel A', A'' zum Bündel B correlativ, also unter einander collinear; sie erzeugen demnach eine cubische Raumcurve, welche durch jeden der k Punkte A_i geht und jede der l Geraden a_i zur Sehne hat.

Jeder der m Punkte $\mathfrak{A}_i$ ferner liegt in den Ebenen beider Bündel A', A'', die dem Strahle $B\mathfrak{B}_i$ homolog sind, also auch in der Collineation einander entsprechen; so dass ihre Schnittlinie, die durch den Punkt $\mathfrak{A}_i$ gehen muss, ebenfalls eine Sehne der Curve ist. Bewegt man nun A auf der Curve, so bleibt die Collineation bestehen: die Strahlen nach den Punkten A_i, die Ebenen nach den Geraden a_i und nach den durch die Punkte $\mathfrak{A}_i$ gehenden Sehnen bleiben homologe Elemente, also auch in der Correlation zum Bündel B bleiben sie den Ebenen Bb_i, den Strahlen BB_i und $B\mathfrak{B}_i$ entsprechend. Das heisst nichts anderes als: sämmtliche Punkte A der cubischen Curve sind in Bezug auf die vorliegende Signatur dem B associirt.

Wenn also für eine Signatur $[k, l, m, 0]$ zwei Punkte A einem und demselben Punkte B associirt sind, so induciren sie eine ganze cubische Raumcurve von diesem Punkte B associirten Punkten A.

Wir fanden nun, dass bei $\sigma = 11$ einem Punkte B nur eine endliche Zahl von Punkten A correspondirt; folglich kann diese Zahl bei den Signaturen $[k\,l\,m\,0]$ nur 1 sein.

Also für eine Signatur $[k\,l\,m\,0]_{11}$ entspricht jedem Punkte B ein und nur ein Punkt A, und umgekehrt; so dass die beiden Räume A *und* B *eindeutig auf einander bezogen werden.*

42. Nehmen wir nun weiter an, ausserhalb der durch A', A'' inducirten cubischen Raumcurve gebe es noch einen dritten dem B associirten Punkt A'''. Die drei collinearen Bündel A', A'', A''' erzeugen durch die Schnitte ihrer entsprechenden Ebenen eine cubische Fläche (Grassmann's Erzeugungsart). Die Geraden a_i als Schnittlinien dreier entsprechenden Ebenen (derer, die je dem Strahle BB_i homolog sind), die Punkte $\mathfrak{A}_i$, als Schnittpunkte dreier solchen Ebenen (derer, die je dem Strahle $B\mathfrak{B}_i$ homolog sind), gehören der Fläche an.

Die Punkte A_i als Schnittpunkte von 3 entsprechenden Strahlen der 3 Bündel gehören der Fläche als Knotenpunkte an. Die durch je zwei der drei Bündel z. B. durch A', A'' erzeugte cubische Raumcurve gehört bekanntlich der Fläche ganz an, für jede Sehne dieser Curve sind also zwei ihrer 3 Schnittpunkte mit der Fläche die auf der Curve gelegenen Punkte, der dritte ist ihr Begegnungspunkt mit der Ebene des dritten Bündels, die den in ihr sich schneidenden Ebenen von

A', A'' homolog ist. Die Curve geht ersichtlich durch sämmtliche A_i; sei A_1 einer derselben, so ist er für jede von ihm ausgehende Curvensehne der eine Schnittpunkt mit der Fläche, insofern er der eine Curvenpunkt ist; die beiden in der Sehne sich schneidenden homologen Ebenen von A', A'' gehen bez. durch $A'A_1$, $A''A_1$, also die homologe Ebene im dritten Bündel durch $A'''A_1$ und demnach wird A_1 auch noch der oben als dritter bezeichnete Schnittpunkt der Sehne mit der Fläche. Wir haben also durch A_1 einfach unendlich viele Geraden, auf denen von den drei Schnittpunkten zwei sich in A_1 vereinigt haben; und diese Geraden liegen nicht in einer Ebene. Dies genügt schon, um zu erkennen, dass A_1 ein Knotenpunkt ist; die beiden andern Raumcurven liefern ebenfalls solche Geraden und in Folge der gleich noch weiter zu besprechenden Veränderlichkeit der Scheitel der erzeugenden Bündel wird der ganze Bündel A_1 erschöpft werden können.

Diese Veränderlichkeit führt uns gerade zu unserm eigentlichen Ziele. Ersetzt man irgend einen der 3 Punkte A', A'', A''', z. B. den letzten, durch irgend einen beliebigen Punkt A der cubischen Fläche, so kann man diesen Bündel A so collinear auf die beiden collinearen Bündel A', A'' beziehen, dass wiederum die cubische Fläche als Erzeugniss auftritt.

Den Beweis hiervon hat Herr Reye*) gegeben; vielleicht ist es nicht überflüssig, wenn ich ihn hier wiederhole. Wir betrachten die beiden cubischen Raumcurven a^{13} und a^{23}, welche bez. durch die Bündel A', A'' und A'', A''' erzeugt werden und auf der durch alle drei Bündel erzeugten cubischen Fläche liegen; wir bewegen zunächst einen Punkt A^{13} auf a^{13}, so bleibt der Bündel A^{13} mit A', A''' collinear: die Schnittlinie einer Ebene von A' und der homologen von A^{13} ist die von der Bewegung nicht beeinflusste Sehne der Curve a^{13}, in der sich jene Ebene von A' mit der homologen von A''' schneidet. Da nun auch die homologe Ebene in A'' sich nicht geändert hat, so ist der Schnittpunkt der drei homologen Ebenen von A', A'', A''' derselbe wie der der drei homologen von A', A'', A^{13} d. h. die 3 collinearen Bündel A', A'', A^{13} erzeugen dieselbe Fläche 3. Ordnung, wie A', A'', A'''.

Schneiden sich etwa drei homologe Ebenen von A', A'', A''', statt in einem Punkte, in einer Geraden, so gehen auch die von A', A'', A^{13} durch dieselbe. Ferner durch die Bündel um A'' und irgend einen A^{13} wird ebenfalls eine der Fläche angehörige cubische Raumcure, wie a^{23}, erzeugt.

Wir gehen nun zu dem beliebigen Punkt A der Fläche; in ihm schneiden sich also homologe Ebenen α', α'', α''' von A', A'', A''', (oder irgend einem Bündel A^{13}). Der Strahl $A''\,A = a''$, durch den

*) Geometrie der Lage II S. 176 — 177.

die Ebene α'' geht, habe zu entsprechenden a', a''', gelegen bez. in α', α'''; die projectiven Ebenenbüschel a', a''', welche in den Bündeln A', A''' entsprechend sind, erzeugen eine Regelschaar von Sehnen der a^{13}, von denen die Gerade α' α''' durch A geht. Folglich geht auch eine Gerade der Leitschaar durch A; sei A^{13} der Punkt, wo sie a^{13} trifft, so ist in dessen Bündel diese Gerade der Geraden $A''A$ von A'' in der Collineation der Bündel A^{13}, A'' homolog, denn die durch sie gehenden Ebenen projiciren die Geraden der Regelschaar aus A^{13}, also sind sie im Bündel A^{13} den dieselben Geraden projicirenden von A' oder A'' d. i. den durch a', a''' gehenden Ebenen und mithin auch den durch a'' gehenden im Bündel A'' homolog.

Folglich geht die durch diese beiden Bündel erzeugte cubische Raumcurve durch unsern beliebigen Punkt A, weil er Schnittpunkt zweier entsprechenden Strahlen ist. Der Bündel A ist nun zu A'', A^{13} und deshalb auch zu A' collinear, und je zwei homologe Ebenen von A', A'' schneiden sich mit der von A in demselben Punkte oder eventuell in derselben Geraden wie mit der von A^{13} oder A''', also erzeugen die drei Bündel A', A'', A dieselbe Fläche wie A', A'', A'''.

Der Punkt, durch den alle die homologen Ebenen in den verschiedenen Bündeln, deren Scheitel die cubische Fläche durchläuft, zu zwei homologen Ebenen von A', A'' gehen und in dem sie mit diesen zusammenlaufen, ist der dritte Schnittpunkt der Schnittlinie der beiden letzten Ebenen, einer Sehne der Curve a^{12}, mit der Fläche.

43. Die 3 Ebenen in A', A'', A''', welche einem Strahle $B\mathfrak{B}_i$ homolog sind, begegnen sich gerade in $\mathfrak{A}_i$, also gehen auch die ihnen und dem $B\mathfrak{B}_i$ homologen in den andern collinearen Bündeln A, deren Scheitel irgend ein Punkt der cubischen Fläche ist, durch $\mathfrak{A}_i$. Zweitens die drei Ebenen in A', A'', A''', welche einem Strahle BB_i entsprechen, schneiden sich in der Geraden a_i, also gehen auch die homologen Ebenen in den genannten Bündeln A durch diese Gerade.

Die 3 Strahlen in A', A'', A''', welche einer Ebene Bb_i homolog sind, gehen durch den Punkt A_i; wir legen zweimal drei homologe Ebenen durch diese Strahlen, so ist A_i für beide Ternen der Schnittpunkt, folglich gehen auch die diesen beiden Ternen in jedem der weiteren Bündel A entsprechenden Ebenen durch A_i und mithin auch ihre Schnittlinie, welche den Strahlen $A'A_i$, $A''A_i$, $A'''A_i$ und der Ebene Bb_i homolog ist. Kurz: Jeder Punkt A der cubischen Fläche ist dem B associirt.

Wenn drei Punkte A', A'', A''' in Bezug auf eine Signatur $[klm0]$ demselben Punkte B associirt sind, und A''' nicht auf der durch A', A'' inducirten cubischen Raumcurve liegt, so induciren sie eine ganze cubische Fläche von dem Punkte B associirten Punkten.

Gäbe es nun noch einen Punkt A^{IV} ausserhalb dieser Fläche, der ebenfalls zu B associirt ist, so würde die Combination dlesseben mit irgend zwei Punkten der Fläche zu einer neuen Fläche führen, und der ganze Raum könnte so erschöpft werden. Da nun bei $\sigma = 10$ einem B nur eine Curve, bei $\sigma = 9$ nur eine Fläche associirt sein kann, so schliessen wir:

In Bezug auf die Signaturen $[klm0]_9$, *bez.* $[klm0]_{10}$ *ist jedem Punkte B eine cubische Fläche, bez. eine cubische Raumcurve associirt.*

Im ersteren Falle gehen die einem Strahle von B in den Bündeln der verschiedenen associirten Punkte A homologen Ebenen alle durch einen und denselben Punkt der Fläche, so dass *diese ein zweiter Ort von Punkten wird* und eindeutig auf den Strahlenbündel B abgebildet ist. (C. P. Nr. 7.) Dass diese Ebenen einen Bündel bilden, konnte man schon so erkennen: Sei B' auf den Strahl von B gelegt und a' eine beliebige Gerade; aus $[klm0]_9$ wird durch Zufügung von $a'B'$ $[k, l+1, m, 0]_{11}$; da entspricht B nur *ein* Punkt A (Nr. 41.); also geht von unsern Ebenen nur eine durch jede Gerade. Im zweiten Falle gehen die einem Strahle von B homologen Ebenen alle durch eine und dieselbe Sehne der Raumcurve, so dass deren Sehnensystem zu dem Bündel B in eindeutiger Beziehung steht.

Es leuchtet ein, dass die drei für die Signaturen $[klm0]_{9,\,10,\,11}$ gewonnenen Sätze auch für das „Problem der Collineation" bestehen; man sehe in meinem so benannten Aufsatze, wo freilich nur eine einzige Signatur behandelt wird und conjugirte Elemente nur versteckt auftreten, Nr. 4, 5, 17.

44. Wie verhält es sich aber mit *den beiden Signaturen* $[3110]_9$ *und* $[2210]_9$, bei denen sich oben nur eine Fläche 2. Ordnung ergab? (C. P. Nr. 8.)

$$[3110] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1 \\ b_1\ b_2\ b_3 B_1 \mathfrak{B}_1 \,. \end{matrix}$$

Es seien wieder A', A'', A''' drei dem B associirte Punkte. In jedem Punkt $\mathfrak{A}$ der Ebene $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ kommen drei entsprechende Ebenen der 3 Bündel zusammen. Seien nämlich $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''\mathfrak{a}'''$ die Schnitte der homologen Ebenen $A'a_1$, $A''a_1$, $A'''a_1$ mit α_{123}, welche nach der Spur A_1' von a_1 zusammenlaufen. Wir legen durch A_1, A_2, A_3, A_1', $\mathfrak{A}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^2$, welcher $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{A}'$ treffe. Die Spuren der projectiven Ebenenbüschel um $A'\mathfrak{A}'$ und den entsprechenden Strahl in A'', welcher $\mathfrak{a}''$ trifft, sind projective Strahlbüschel, welche einen Kegelschnitt erzeugen, der durch A_1, A_2, A_3, A_1', $\mathfrak{A}'$ geht, also mit $\mathfrak{A}^2$ identisch ist; dasselbe gilt von dem Kegelschnitte, der von den Ebenenbüscheln um $A'\mathfrak{A}'$ und den homologen Strahl in A''' herrührt. Daraus folgt, dass in jedem Punkte von $\mathfrak{A}^2$, also auch in $\mathfrak{A}$ 3 homologe Ebenen der 3 Bündel sich treffen. Wird $\mathfrak{A}$ bewegt, so wird $A'\mathfrak{A}'$ den ganzen Strahlbüschel in $A'a_1$ durchlaufen, und so jede Ebene des Bündels A'

und deshalb auch jede in A'', A''' an die Reihe kommen. *Folglich ist die Ebene α_{123} der Ort der Convergenzpunkte homologer Ebenen der drei Bündel.* Die 3 Ebenen, welche dem Strahle $B\mathfrak{B}_1$ homolog sind und sich in $\mathfrak{A}_1$ schneiden, schneiden sich auch auf α_{123} und haben also eine ganze Gerade a^1 gemein; diese, die a_1 und die 3 Punkte A_1, A_2, A_3 bestimmen nun eine Fläche 2. Grades α^2. Die 3 Curven a^{12}, a^{13}, a^{23} und jede durch irgend zwei associirte Punkte inducirte cubische Raumcurve gehen durch A_1, A_2, A_3, treffen die a_1 und a^1 je zweimal, liegen demnach auf α^2. *Also ist diese Fläche 2. Grades der Ort der associirten Punkte. Die beiden sonst identischen Oerter haben sich also getrennt.*

Die Abbildung des Strahlenbündels B in die Ebene α_{123} ist aber nicht Collineation; sondern jedem Strahlbüschel dort entspricht ein Kegelschnitt hier.

Der gemeinsame Kegelschnitt von α^2 und α_{123} correspondirt dem B durch Correlation mit den singulären Ebenen $\alpha' = \alpha_{123}$ und $\beta' = BB_1\mathfrak{B}_1$, so dass die Punkte A desselben der Bedingung: $(A\alpha')$ $(A_1A_2A_3a_1) \barwedge (B\beta')$ $(b_1b_2b_3B_1)$ genügen; die ganze Ebene α_{123} fanden wir früher (Nr. 36.) dem B für [3100] durch Correlation mit (denselben) singulären Ebenen associirt.

45. Bei der andern Signatur

$$[2210] \qquad \begin{matrix} A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1 \\ b_1\,b_2\,B_1B_2\mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

giebt es in der Ebene $\alpha_0 = A_1A_2\mathfrak{A}_1$ einen und nur einen Punkt A^*, für welchen $(A^*\alpha_0)$ $(A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1) \barwedge \overline{Bb_1b_2}$ $(b_1b_2B_1B_2\mathfrak{B}_1)$ (Eb. Project. Nr. 4.).

Seien A', A'' zwei zu B associirte Punkte, so geht die durch sie inducirte cubische Raumcurve durch A_1, A_2; sie treffe α_0 zum dritten Male in A_0, folglich ist A_0 $(A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1)$ collinear A' $(A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1)$ correlativ B $(b_1b_2B_1B_2\mathfrak{B}_1)$, demnach der Schnitt des ersten Bündels mit der Ebene $\alpha_0 = A_0A_1A_2$ d. i. $(A_0\alpha_0)$ $(A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1)$ projectiv zum Schnitt des letzten Bündels mit dem Strahle $\overline{Bb_1b_2}$ d. i. $\overline{Bb_1b_2}$ $(b_1b_2B_1B_2\mathfrak{B}_1)$; also ist A_0 der obige Punkt A^*. Mithin schneiden alle durch zu B associirte Punkte A gebildeten cubischen Raumcurven die Ebene α_0 in drei festen Punkten A_1, A_2, A^*, folglich auch die für $[2220]_{10}$ associirte (Nr. 43.). Auch durch den letzten der drei Punkte, A^*, gehen homologe Strahlen der Bündel der verschiedenen associirten Punkte A, welche einer festen Ebene in B homolog sind.

Wir haben jetzt genau dieselbe Figur wie im vorigen Falle: dort $A_1A_2A_3a_1a^1$; hier $A_1A_2A^*a_1a_2$, also auch dieselben weiteren Schlüsse.

Der Punkt A^* ist der einzige Punkt des Schnitts der Fläche 2. Grades, des Orts der dem B associirten Punkte A, mit der Ebene α_0, dem Orte der Convergenzpunkte der in den verschiedenen Bündeln A

je demselben Strahle von B homologen Ebenen, welcher dem B durch allgemeine Correlation für [2210] correspondirt, und zwar durch ein ganzes System von Correlationen. Denn lässt man die Strahlen $A^*(A_1, A_2)$ den Ebenen $B(b_1, b_2)$, die Ebene A^*a_1 dem Strahle BB_1 homolog und irgend einen Strahl der Ebene A^*a_2 (der nicht in α_0 liegt) dem Strahle BB_2 conjugirt sein, wodurch erst die Signatur [2110] entsteht; so ist der Ebene α_0 der Strahl $B\overline{b_1}\overline{b_2}$ und in Folge der Projectivität, welcher A^* genügt, dem Strahle $A^*\mathfrak{A}_1$ die Ebene durch $Bb_1 b_2$ und $\mathfrak{B}_1$, und aus demselben Grunde der Ebene $(Bb_1 b_2, B_2)$ der Strahl in α_0 nach der Spur von a_2, folglich wegen der beiden gegebenen conjugirten Strahlen auch BB_2 mit A^*a_2 homolog. Es ist also A^* dem B auch durch je eine exceptionelle Correlation von jeder Art associirt (Hirst, Nr. 41.). Die andern Punkte des Schnitts entsprechen dem B durch Correlation mit singulären Ebenen.

Die Fläche α^2 ist, wie schon erwähnt, dieselbe, welche dem B schon für [2200] correspondirt, und zwar für allgemeine Correlation, als auch für die beiden exceptionellen; sie correspondirt ihm auch für [2201]. (Nr. 1.) (C. P.)

46. Bei [3110] zerfällt die Fläche α^2 nochmals, wenn B z. B. in die Ebene $b_3 B_1$ fällt, nämlich in die Ebenen $A_3 a_1$ und $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; die Punkte A und B in $A_3 a_1$ und $b_3 B_1$ correspondiren sich, jeder dort mit jedem hier, durch allgemeine Correlation; die von $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ und $b_3 B_1$ durch Correlation mit diesen Ebenen als singulären. Der zweite Bestandtheil der cubischen Fläche, die einem A in $A_3 a_1$ associirt ist, ausser $b_3 B_1$ ist eine mit A veränderliche Fläche 2. Gr., welche durch Correlation mit singulären Axen entspricht, von denen die im Raume B die eine Schaar auf ihr bilden: sie sind diejenigen Geraden b' der Congruenz $[b_1 b_2]$, für welche $b'(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1) \barwedge AA_3 (A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1)$. Ebenso besteht die cubische Fläche, welche einem A in $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ correspondirt, aus $b_3 B_1$ und einer mit A veränderlichen Fläche 2. Grades, deren Punkte dem A durch allgemeine Correlation entsprechen. Sie wird durch die Punkte B gebildet, für welche $\overline{Bb_1 b_2}\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1) \barwedge (A, A_1 A_2 \mathfrak{A}_1)(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1)$; findet diese Bedingung statt, so kann die Bedingung, dass Bb_3 und AA_3 homolog seien, der Correlation noch auferlegt werden.

Die cubische Fläche, welche einem Punkte A in $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ associirt ist, ist nur durch Correlation mit singulären Ebenen associirt; ihre Punkte B sind die Punkte in den Ebenen β durch $B_4 \mathfrak{B}_1$, welche der Bedingung genügen:

$$(B\beta)(b_1 b_2 b_3 B_4) \barwedge (A, \alpha_{123})(A_1 A_2 A_3 a_1),$$

d. h. einem festen Büschel (Nr. 38.). Die Fläche ist also von $\mathfrak{A}_1$ unabhängig.

Bei [4010] correspondiren sich die Ebene $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ und das

Hyperboloid $\beta^2_{123} = [b_1 b_2 b_3]$, jeder Punkt mit jedem, durch allgemeine Correlationen und die Ebenen α_{123} und $b_4 \mathfrak{B}_1$ durch exceptionelle Correlationen mit ihnen als singulären Ebenen. Der zweite Theil der cubischen Fläche, die einem B in $b_4 \mathfrak{B}_1$ associirt ist, ist — mit B veränderlich — der Kegel 2. Grades mit der Spitze in A_4, dessen Punkte A der Bedingung genügen: $AA_4 (A_1 A_2 A_3 \mathfrak{A}_1) \barwedge (B, b_4 \mathfrak{B}_1) (b_1 b_2 b_3 \mathfrak{B}_1)$; hier ist die Correlation allgemein. Ein ebenso definirter Kegel correspondirt auch jedem Punkte B von β^2_{123} — ausser α_{123} — und zwar durch Correlationen mit singulären Axen, welche bez. den Flächen angehören.

Bei [2210] ist die einem B in $\beta_0 = B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ correspondirende Fläche 2. Gr. ganz durch exceptionelle Correlationen mit singulären Ebenen associirt, von denen die eine β_0 ist, die andere durch $A_1 A_2$ geht. Sie wird durch die Punkte A in den Ebenen α durch $A_1 A_2$ erzeugt, für welche

$$(A\alpha)(A_1 A_2 a_1 a_2) \barwedge (B\beta_0)(b_1 b_2 B_1 B_2),$$

d. h. einem festen Büschel ist. (Nr. 38.)

47. Man kann den Satz, dass einem B in Bezug auf $[k, l, m+1, n]_9$ oder $[k, l, m, n+1]_9$ eine Fläche ζ_{9B}^{ter} Ordnung associirt ist, auch so aussprechen:

1) Für $[klmn]_8$ werde A auf einer Geraden a bewegt, und jedesmal die einem festen Strahle $B\mathfrak{B}$ des Bündels B homologe Ebene in den verschiedenen Correlationen construirt; dieselbe umhüllt einen Torsus ζ_{9B}^{ter} Klasse, wenn ζ_{9B} zu $[k, l, m+1, n]_9$ gehört; oder

   zu den Strahlen der variablen Bündel A, die durch einen festen Punkt $\mathfrak{A}$ gehen, werde in dem festen Bündel B je in den verschiedenen Correlationen die homologe Ebene gesucht; diese umhüllt einen Kegel von der Klasse ζ_{9B}.

2) Wird hingegen zu einer festen Ebene $B\mathfrak{b}$ des Bündels B in den verschiedenen Bündeln A der homologe Strahl gesucht, so erzeugt dieser eine Fläche vom Grade ζ_{9B}, wenn diese Zahl der Signatur $[k, l, m, n+1]_9$ angehört; oder

   zu den Ebenen der Bündel A, die durch eine feste Gerade $\mathfrak{a}$ gehen, werden im festen Bündel B in den verschiedenen Correlationen die entsprechenden Strahlen gesucht: sie erzeugen einen Kegel von der Ordnung ζ_{9B}*).

Ist $n = 0$, also das zu $[k, l, m, n]_8$ gehörige $\zeta_8 = 1$, mit der

*) Man vergleiche im Probl. der Collineation die Resultate von Nr. 2., 4. 5., 9., welche für die dort allein betrachtete Signatur auf andere Weise erhalten sind.

einen bekannten Ausnahme, so sind die erzeugenden Elemente dieser Gebilde zur Punktreihe auf a in eindeutiger Beziehung, diese Torsen, Kegel, Regelflächen vom Geschlechte 0.

Wenden wir die zweite Form von 1) auf die Signaturen [4000], [0400], [3100], [1300] an, so ist bei der dritten dieser Signaturen der Kegel von der 2., bei den drei andern von der 3. Klasse; sein Geschlecht 0 weist darauf hin, dass er in jenem Falle keine, in diesen je eine Doppeltangentialebene β^0 hat. In diesen letzteren drei Fällen giebt es also einmal zwei Punkte A auf a, bei denen die Bündel A $(kA_i,\ la_i,\ \mathfrak{A})$ mit dem Bündel B $(kb_i,\ lB_i,\ \beta^0)$ correlativ, also unter einander collinear sind; ihr Erzeugniss ist eine cubische Raumcurve, welche durch die $k+1$ Punkte A_i, $\mathfrak{A}$ geht und die $l+1$ Geraden a_i, a zweimal trifft.

Also giebt es jederzeit eine und nur eine cubische Raumcurve, welche durch 5, 1, 2 gegebene Punkte geht und 1, 5, 4 gegebene Gerade zu Sehnen hat, dagegen keine, welche durch 4 Punkte geht und 2 Gerade zweimal trifft.

Wird auf dieselben vier Signaturen die zweite Form von 2) angewandt, so ist der Kegel bez. von der Ordnung 2, 6, 3, 3 und hat also wegen seines Geschlechtes 0 bez. 0, 10, 1, 1 Doppelkanten b^0. Bei der zweiten Signatur

$$[0400] \qquad \begin{matrix} a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix}$$

seien a', a'' die beiden Transversalen von a_1, a_2, a_3, a und A', A'' ihre Schnitte mit a. Kommt A z. B. nach A', so wird die Correlation zwischen A' und B eine exceptionelle mit a' und BB_4 als singulären Axen (cf. π_{8B} für [0400]); so dass für beide Lagen A', A'' von A der Ebene $A\mathfrak{a}$ die singuläre BB_4 homolog ist. Demnach sind $B(B_1, B_2, B_3, B_4)$ vier von den 10 Doppelkanten.

Sehen wir von diesen ab, so erhalten wir für die vier Signaturen 0mal, 6mal, 1mal, 1mal zwei Punkte auf a, aus denen die k Punkte A_i und die $l+1$ Geraden a_i, $\mathfrak{a}$ durch mit B $(kb_i,\ lB_i,\ b^0)$ correlative, also unter einander collineare Bündel projicirt werden; die erzeugte Raumcurve geht durch die k Punkte A_i und trifft die $l+2$ Geraden a_i, $\mathfrak{a}$, a zweimal.

Folglich giebt es 0, 6, 1, 1 cubische Raumcurven, welche durch 4, 0, 3, 1 Punkte gehen und 2, 6, 3, 5 Gerade zweimal treffen; wovon das erste und das letzte Resultat schon oben gewonnen wurden.

Vereinigen wir beides, so erhalten wir die bekannten Sätze*): *Es giebt* 1, 0, 1, 1, 1, 6 *cubische Raumcurven, welche durch* 5, 4, 3,

*) Cremona, Borchardt's J. Bd. 60, S. 188; Sturm, ebenda, Bd. 80, S. 128, wo ich auf der letzten Seite des Aufs. schon auf den obigen Beweis hingewiesen habe.

2, 1, 0 *Punkte gehen und bez.* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *gegebene Geraden zu Sehnen haben.*

Die ausgeschlossene Signatur [2200] könnte auch behandelt werden, wenn auch in anderer Weise, doch würde sie nichts Neues bringen.

48. Unter den Flächen von der Ordnung ζ_{9B} giebt es auch für $n > 0$ noch einige einfache Fälle, nämlich bei den Signaturen [4001], [3101], [1301], [2201], [3003], wo ζ_{9B} bez. 2, 3, 3, 2, 3 ist; für die vierte haben wir es schon gefunden (Nr. 1.). Nach Nr. 3. ist der Grad der Vielfachheit einer Geraden a_i auf den Flächen 3., 3., 2. Ordnung bei [3101], [1301], [2201] gleich der Zahl der Correlationen bei festen Scheiteln A, B für [3011], [1211], [2111], also nach Hirst Nr. 42. (oder ζ_s Tab. 1. Nr. 40.) gleich 2, 1, 1; hingegen derjenige der einen, bez. der drei Geraden $\mathfrak{a}_i$ auf allen fünf Flächen gleich der Zahl der Correlationen bei festen Scheiteln für [4000], [3100], [1300], [2200], [3002], also gleich 1, 1, 1, 0, 1. Auf der Fläche der vorletzten Signatur liegt mithin $\mathfrak{a}_1$ nicht; wir wissen ja aus Nr. 1., dass sie von $\mathfrak{a}_1$ unabhängig ist.

Bei [4001] ist die Ordnung 2 leicht zu finden: In B haben wir den festen Bündel von fünf Ebenen $B\,(4b_i,\ \mathfrak{b}_1)$; wird A auf a bewegt, so erzeugen die Strahlen in den zu B für [4000] correlativen Bündeln A, welche der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ homolog sind, eine Regelschaar, wie sich aus Nr. 2. des „Probl. der Collineation" nach Dualisirung der B-Bündels ergiebt, also liegen 2 Punkte A auf a, bei denen $\mathfrak{a}_1$ zu $\mathfrak{b}_1$ conjugirt wird.

Die Fläche 3. Ordnung bei [3101] ist, weil ihr a_1 doppelt, $\mathfrak{a}_1$ einfach angehört, eine Regelfläche; ist mithin ein Punkt A dem B associirt, so sind es alle Punkte der Geraden $\overline{A a_1 \mathfrak{a}_1}$; in der That, der Schnitt des Bündels $A(3A_i,\ a_1,\ \mathfrak{a}_1)$ mit der Ebene $A_1A_2A_3$ bleibt bei der Bewegung von A auf der genannten Geraden unveränderlich, also der Bündel zu sich collinear; der der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ homologe Strahl wird stets in der sich homolog bleibenden Ebene $A\mathfrak{a}_1$ bleiben.

Dagegen sind die beiden andern cubischen Flächen bei [1301] und [3003], welche die a_i, $\mathfrak{a}_i$ einfach enthalten, allgemeiner Art. Die Punkte A_i können auf ihnen nur einfach liegen; denn ein gegebener Doppelpunkt ist für eine Fläche eine vierfache Bedingung, desgleichen das Enthalten einer Geraden für eine cubische Fläche. Die Grundelemente haben beliebige Lage; der cubischen Fläche würden also im ersten Falle 5.4, im andern sogar 6.4 Bedingungen auferlegt.

V. $\sigma = 10$.

49. Wir gehen nun zur Aufstellung der Tabelle, die sich aus den Formeln

(II a u. b) $\quad 2\dot{\pi}_8 = \bar{\pi}_8 + \Theta_{8B}; \quad 2\bar{\lambda}_8 = \dot{\lambda}_8 + \Theta_{8B} + \lambda_{8B}$

(Nr. 21.) ergiebt.

Tab. II; $\sigma = 8$;

Sign.	Θ_{8B}	$\dot{\pi}_8$	π_8	λ_{8B}	$\dot{\lambda}_8$	$\bar{\lambda}_8$
4000	12	6	0	4	0	8
0400	0	6	12	0	0	0
3100	3	3	3	1	2	3
1300	9	6	3	3	0	6
2200	2	3	4	2	2	3
3020	3	6	9	1	0	2
3011	15	9	3	5	2	11
3002	6	3	0	7	11	12
0320	0	6	12	0	0	0
0311	9	12	15	3	0	6
0302	24	15	6	12	6	21
2120	6	6	6	2	0	4
2111	5	6	7	3	4	6
2102	12	7	2	6	6	12
1220	3	6	9	1	0	2
1211	11	9	7	5	2	9
1202	8	7	6	5	9	11
2040, 0240	0	6	12	0	0	0
2031	9	12	15	3	0	6
2022	20	15	10	8	6	17
2013	18	10	2	13	17	24
2004	4	2	0	10	24	19
0231	3	12	21	1	0	2
0222	20	21	22	8	2	15
0213	32	22	12	17	15	32
0204	24	12	0	16	32	36

Sign.	Θ_{8B}	$\dot{\pi}_8$	$\bar{\pi}_8$	λ_{8B}	$\dot{\lambda}_8$	$\bar{\lambda}_8$
1140	0	6	12	0	0	0
1131	9	12	15	3	0	6
1122	16	15	14	8	6	15
1113	20	14	8	11	15	23
1104	16	8	0	13	23	26
1060, 0160	0	6	12	0	0	0
1051, 0151	0	12	24	0	0	0
1042	18	24	30	6	0	12
1033	36	30	24	16	12	32
1024	38	24	10	24	32	47
1015	20	10	0	23	47	45
1006	0	0	0	13	45	29
0142	12	24	36	4	0	8
0133	36	36	36	16	8	30
0124	52	36	20	28	30	55
0115	40	20	0	29	55	62
0106	0	0	0	16	62	39
0080	0	6	12	0	0	0
0071	0	12	24	0	0	0
0062	0	24	48	0	0	0
0053	30	48	66	10	0	20
0044	72	66	60	32	20	62
0035	90	60	30	52	62	102
0026	60	30	0	52	102	107
0017	0	0	0	29	107	68
0008	0	0	0	16	68	42.

50. Θ_{8B} ist die Zahl der Axen-Ebenen-Correlationen für $[klmn]_8$, bei denen die Axe in B der Bedingung, durch B zu gehen, unterworfen ist; die Bedingung, einen Scheitel in α zu liefern, wird von der Axe in A von selbst erfüllt.

Wir nehmen als Beispiel die Signatur

$$[1033] \qquad \begin{matrix} A_1 \, \mathfrak{A}_1 \, \mathfrak{A}_2 \, \mathfrak{A}_3 \, \mathfrak{a}_1 \, \mathfrak{a}_2 \, \mathfrak{a}_3 \\ b_1 \, \mathfrak{B}_1 \, \mathfrak{B}_2 \, \mathfrak{B}_3 \, \mathfrak{b}_1 \, \mathfrak{b}_2 \, \mathfrak{b}_3 . \end{matrix}$$

I $\alpha' : \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3;\ \beta' : B b_1;\ a' : \alpha', \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2;\ b' : B, \beta', \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); 3 Lösungen.

II $\alpha' : A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2;\ \beta' : B\mathfrak{B}_3$ (3 Comb.); 1) $a' : \alpha', \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2;\ b' : B, b_1, \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); 2) $a' : A_1, \alpha', \mathfrak{a}_1;\ b' : B, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); $\beta' : B\mathfrak{B}_3, b'$ in beiden Fällen. Also $3(3+3) = 18$ Lösungen.

III $\alpha' : A_1\mathfrak{A}_1;\ \beta' : B\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ (3 Comb.); 1) $a' : A_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2;\ b' : B, \beta', \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); 2) $a' : A_1\mathfrak{A}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ (2 Lagen); $b' : B, \beta', b_1$; in beiden Fällen $\alpha' : A_1\mathfrak{A}_1, a'$. Also $3\ (3+2) = 15$ Lösungen. Folglich $\Theta_{8B} = 3 + 18 + 15 = 36$.

Man sieht, dass diese 36 Lösungen schon in 5 Gruppen zerfallen, deren jede sich durch Combinationen noch wieder zerspaltet.

51. Es sind ferner die $\dot{\pi}_8$ und $\dot{\lambda}_8$ für die Signaturen $[klm0]_8$, d. i. die π_{9B} und λ_{9B} für $[k, l, m+1, 0]_9$ zu ermitteln. Die vorhergehende Tabelle zeigt, dass die Zahlen $\dot{\pi}_8$ oder π_{9B} durchweg 6 sind, mit Ausnahme von $[3100]_8$, $[2200]_8$, bez. $[3110]_9$, $[2210]_9$, also denjenigen beiden Signaturen, bei welchen auch ζ_{9B} von der dritten zur zweiten Ordnung sinkt.

π_{9B} ist die Anzahl der möglichen Axen-Correlationen für Signaturen $\sigma = 9$, bei denen die Axe in B mit B incident sein muss. Man sieht, dass die π_{9B} Axen in A auf der Fläche $\zeta_{9B}{}^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, welche dem B überhaupt durch Correlation correspondirt. Bei den Flächen 3. Ordnung, die sich im Allgemeinen für $[klm0]_9$ ergeben, sind dies, wie eben gesagt, 6 Gerade, und zu ihnen gehören die etwaigen Verbindungslinien zweier Punkte A_i, Transversalen von 4 Geraden a_i und Geraden, welche mit einem A_i und zwei a_i incident sind; das Liegen solcher Geraden auf der Fläche ist von vornherein zu erkennen. In den beiden Fällen [3110] und [2210], wo $\zeta_{9B} = 2$ ist, ist die Zahl π_{9B} der Geraden 3; sie sind bei [2210] die drei Geraden $\overline{A_1 a_1 a_2}$, $\overline{A_2 a_1 a_2}$, und $\overline{A^* a_1 a_2}$ (Nr. 45.); der Punkt A^* ist der einzige Punkt auf der letzten Geraden, der dem B auch durch allgemeine Correlation und zwar ein ganzes System von solchen Correlationen associirt ist.

Bei der Signatur [3110] befindet sich in jedem der drei Büschel $A_1 a_1$, $A_2 a_1$, $A_3 a_1$ eine der 3 Geraden; die (a') im ersten genügt der Bedingung: $a'(A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1) \barwedge \overline{B b_2 b_3}\ (b_2 b_3 B_1 \mathfrak{B}_1)$.

Bei der Signatur [0090] müssen a', b' so sein, dass $a'(\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_9) \barwedge \mathfrak{b}'(\mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_9)$ und $\mathfrak{b}'$ durch B gehen, was auf 6 Weisen möglich (Raüml. Project. Nr. 45.). Ferner

$$[2130] \qquad \begin{array}{l} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 . \end{array}$$

I $a' : A_1 A_2;\ b' : BB_1;\ a'(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b'(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$ wird von selbst erfüllt; 1 Lösung.

II $a' : A_1, a_1;\ b' : B, \mathfrak{b}_2$ (2 Comb.); $a'(A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b'(b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$.

Auf a_1, b_2 werden A_1', B_2' gelegt, so entspricht dem Büschel Bb_2, der durch B_2' geht, ein Complex 3. Grades, der den Bündel A_1' einfach enthält (Räuml. Project. Nr. 13.), also im Büschel $A_1 a_1$ noch zwei weitere Strahlen hat; $2 . 2 = 4$ Lösungen.

III $a' : a_1$; $b' : Bb_1 b_2$; $a' (A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b' (b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$. Dem b' entspricht eine Regelschaar, die durch den auf a_1 gelegten A_1' geht (R. Pr. Nr. 18.), so dass der a_1 noch eine Gerade begegnet; 1 Lösung. Im Ganzen 6 Lösungen.

Aber auch die übrigen π_{9B} sind von mir direct ermittelt worden. Wir wollen noch

$$[0152] \qquad \begin{matrix} a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_5 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \\ B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \cdots \mathfrak{B}_5 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \end{matrix}$$

betrachten.

I $a' : a_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$; $b' : B$; $a' (a_1 \mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_5) \barwedge b' (B_1 \mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_5)$. Dem Bündel B entspricht ein Complex 3. Grades, der den Bündel um den auf a_1 gelegten Punkt A_1' ganz enthält (R. Proj. Nr. 22.), also mit der Regelschaar $[a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2]$ ausser der durch A_1' gehenden Geraden noch 5 gemein hat; 5 Lösungen.

II $a' : a_1, \mathfrak{a}_1$; $b' : B, \mathfrak{b}_2$ (2 Comb.); dieselbe Projectivität; dem Büschel $B\mathfrak{b}_2$ correspondirt eine Congruenz vom Bündelgrad 3 und vom Feldgrad 9, welche aus dem Punkte A_1' einen Kegel 5. Ordnung erhält (R. Proj. Nr. 28.) und demnach mit der linearen Congruenz $[a_1 \mathfrak{a}_1]$ $3.1 + 9.1 - 5 = 7$ nicht durch A_1' gehende Geraden gemein hat; $2.7 = 14$ Lösungen.

III $a' : a_1$; $b' : B\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2$; dieselbe Projectivität; dem b' entspricht eine Regelschaar, von der nur eine nicht durch A_1' gehende Gerade die a_1 trifft; 1 Lösung.

IV $a' : \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$; $b' : BB_1$; $a' (\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_5) \barwedge b' (\mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_5)$; dem b' entspricht eine Congruenz vom Bündelgrad 1 und Feldgrad 3 (R. Proj. Nr. 8.), welche mit der linearen Congruenz $[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2]$ $1.1 + 1.3 = 4$ Gerade gemein hat. 4 Lösungen.

Im Ganzen 24 Lösungen (cf. $\dot{\pi}_8$ bei [0142] oder $\bar{\pi}_8$ bei [0151] in Tab. II.).

52. Was die λ_8 oder λ_{9B} anlangt, so sind diese für die Signaturen, wo $n = 0$ ist, wie die Tabelle II zeigt, fast alle 0; nur $[3100]_8$, $[2200]_8$, bez. $[3110]_9$, $[2210]_9$ machen wieder eine Ausnahme. Aber auch bei [4010], [0410] und [1310] findet man leicht: $\lambda_{9B} = 0$. Bei allen, wo $k + l < 4$ ist, folgt es aus Nr. 30.

Bei [4000] ergab sich jede der 4 Ebenen $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ u. s. f. als mit Punkten A erfüllt, die dem B durch Correlation mit singulären Ebenen correspondiren (Nr. 36.). Der Schnitt von α_{123} mit der cubischen Fläche, welche dem B für [4010] associirt ist, besteht aus den

3 Geraden $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_3$ (Nr. 51.). Jeder Punkt A aber z. B. von $A_1 A_2$ ist für [4000] dem B durch ein ganzes System von Axen-Correlationen associirt, für welche $a' = A_1 A_2$ die eine Axe ist, während $b' = \overline{B b_3 b_4}$ und die Projectivität: $a' (A_3, A_4) \barwedge b' (b_3, b_4)$ noch unbestimmt ist.

Unter diesen Axen-Correlationen befindet sich auch zwei Axen-Ebenen-Correlationen: α' ist $a' A_3$, bez. $a' A_4$; β' ist $b' b_4$, bez. $b' b_3$. Wegen der ersten dieser Ausartungen vom 2. Typus kommt $A_1 A_2$ auf die Ebene α_{123} (wegen der zweiten auf α_{124}) als Ort von Punkten A, die dem B durch Correlation mit singulären Ebenen entsprechen; eine andere aber von den allgemeinen Axen-Correlationen bringt sie auf die cubische Fläche. So zeigt sich, wie aus $\lambda_{8B} > 0$ $\lambda_{9B} = 0$ hervorgeht.

Analoges gilt bei [3030] und dem Schnitt der cubischen Fläche mit α_{123}, wo die dem B für [3020] durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte sich befinden.

Für [1300] besteht der Ort dieser Punkte aus den 3 Ebenen $A_1 (a_1, a_2, a_3)$; die erste derselben schneidet aus der cubischen Fläche α^3, die dem B für [1310] associirt ist, a_1 und die beiden Geraden $\overline{A_1 a_1 a_2}$ und $\overline{A_1 a_1 a_3}$ (Nr. 51.). Auch jede dieser ist für [1300] dem B durch ein ganzes System von Correlationen associirt, so dass sie durch verschiedene Correlationen auf $A_1 a_1$ und α^3 gelangt. Was a_1 anlangt, so sei $\mathfrak{A}_1'$ irgend ein Punkt derselben; es ist der Punkt A auf a_1 dem B associirt für [1300], wenn er für

$$[1210]_7 \qquad \begin{matrix} A_1 a_2 a_3 \mathfrak{A}_1' \\ b_1 B_2 B_3 B_1 \end{matrix}$$

associirt ist; was durch einfach unendlich viele allgemeine Correlationen geschieht, unter denen sich auch je eine mit singulären Ebenen und eine, bei der $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ conjugirt sind, befindet (Hirst, Nr. 41.), weshalb a_1 einfach auf dem obigen Orte $A_1 a_1$ liegt, sowie auf der Fläche 3. Ordnung, die dem B für [1310] entspricht. Man erkennt leicht, dass dies bei allen Signaturen $\sigma = 8$ richtig ist, wo $l > 0$ ist.

Sei nun aber A ein Punkt von $\overline{A_1 a_1 a_2}$, so giebt es für [1300] ein System von Axen-Correlationen zwischen A und B, für welche $\overline{A_1 a_1 a_2}$ und BB_3 die Axen a', b' sind, während nur $a' (a_1, a_2) \barwedge b' (B_1, B_2)$ verlangt wird; u. s. f.

Bei $[2120]_8$ besteht der Ort der dem B durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte aus den Ebenen $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$, $A_1 A_2 \mathfrak{A}_2$. Die erstere (α_0) schneidet aus der Fläche α^3 der für $[2130]_9$ associirten Punkte die Gerade $A_1 A_2$, für die Analoges wie oben gilt, und einen Kegelschnitt $\mathfrak{a}^2$ aus, der noch durch A_1, A_2, $\mathfrak{A}_1$ und die Spur von a_1 geht. Er wird durch die Punkte A erzeugt, für welche $(A \alpha_0)$

$(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1) \barwedge \overline{B b_1 b_2}\, (b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1)$. Lassen wir für einen solchen Punkt A die Strahlen AA_1, AA_2 den Ebenen Bb_1, Bb_2 homolog, ferner irgend einen Strahl von A in der Ebene Aa_1 (jedoch nicht in α_0 gelegen) und die Strahlen $A\mathfrak{A}_1$, $A\mathfrak{A}_2$ den Strahlen BB_1, $B\mathfrak{B}_2$, $B\mathfrak{B}_3$ conjugirt sein, wodurch sich $[2030]_7$ ergiebt, so sind in allen den Correlationen in Folge der obigen Projectivität auch Aa_1 und BB_1 homolog d. h. A ist durch sie dem B auch für [2120] associirt. Folglich gelangen die Punkte von $\mathfrak{a}^2$ durch verschiedene Correlationen auf die Oerter $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ und α^3.

Bei [1220] ist der Ort der durch Correlation mit singulären Ebenen dem B associirten Punkte die Ebene $A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \alpha_0$; ihr Schnitt mit der für [1230] associirten α^3 ist eine cubische Curve, welche durch A_1 zweimal, durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ je einmal geht.

Diejenigen Punkte A nämlich in der Ebene α_0, für welche $(A\alpha_0)$ $(A_1 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b_0\, (b_1 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$, wobei b_0 ein mit A beweglicher Strahl durch B in der Ebene Bb_1 ist, erzeugen eine Curve 3. Ordnung, welche durch A_1 doppelt, durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und die Spuren von a_1, a_2 einfach geht; was man mit Hilfe des Satzes Nr. 8. der „Eb. Proj.“ erkennt, wenn man in Bb_1 noch einen beliebigen, aber festen Strahl durch B annimmt und dann den Bündel B mit einer Ebene durchschneidet, so dass sich eine zweite Gruppe von 5 Punkten ergiebt.

Ist nun A irgend ein Punkt der Curve 3. Ordnung und bilden wir die Correlationen der Bündel A, B für

$$[1210] \qquad \begin{matrix} A_1 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1, \end{matrix}$$

so sind auch in allen α_0 und b_0 und wegen der Projectivität auch $A\mathfrak{A}_2$ und $b_0\mathfrak{B}_2$ homolog, oder $A\mathfrak{A}_2$ und $B\mathfrak{B}_2$ conjugirt. Die Punkte der Curve 3. Ordnung sind also dem B auch für [1220] durch ein ganzes System von Correlationen associirt, so dass die Curve durch die in dem Systeme enthaltende eine Correlation mit singulären Ebenen auf die Ebene α_0 als Ort der so dem B für [1220] associirten Punkte, durch eine andere Correlation des Systems, in der auch noch $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3$ conjugirt sind (Hirst Nr. 41.); auf den Ort α^3 der dem B für [1230] associirten Punkte gelangt.

53. Bei beiden am Anfang von Nr. 44. erwähnten Ausnahmen [3110], [2210] ist $\lambda_{9B} = 2$; d. h. die Punkte A, welche dem B durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind, bilden eine Curve 2. Ordnung.

Bei [3110] sind α' und β' für alle Punkte dieser Curve die Ebenen α_{123} und $BB_1\mathfrak{B}_1$ und die Punkte A sind so, dass $(A\alpha')\,(A_1 A_2 A_3 a_1)$ $\barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 b_3 B_1)$; der erzeugte Kegelschnitt ist der Schnitt der dem B durch Correlation mit singulären Ebenen für [3100] associirten

Ebene α_{123} mit der für [3110] associirten Fläche 2. Grades. (Ende von Nr. 44.)

Was nun aber [2210] wieder erlangt, so sind die Flächen der dem B hierfür durch allgemeine Correlation und ihm für [2200] durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte identisch; so dass wir die Curve der für [2210] auf letztere Weise associirten Punkte nicht als Schnitt erhalten. In Nr. 45. wurde jedoch schon die Schnittcurve jener Fläche mit $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ als diese Curve erkannt.

Die λ_{9B} für die Signaturen $n > 0$ habe ich — mit Ausnahme der vier Signaturen [2005], [0107], [0018], [0009] — direct ermittelt. Bei den niedrigeren Werthen von n besteht die Curve $\lambda_{9B}{}^{\text{ter}}$ Ordnung meistens blos aus Kegelschnitten oder enthält Kegelschnitte, welche sich auf ähnliche Weise ergeben, wie in den eben besprochenen 2 Fällen, und in den Ebenen liegen, die dem B für $[k, l, m, 1, n]$ oder $[k, l, m, n-1]$ durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind.

Betrachten wir noch einige andere Fälle:

$$[2112] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \\ b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 . \end{matrix}$$

I $\alpha' : A_1, A_2, \mathfrak{A}_1$; $\beta' : B_1, B$; A in α so, dass $(A\alpha')\,(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$ $\barwedge$ $(B\beta')\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)$. Dualisiren wir wieder den zweiten Bündel, so erhalten wir 4 Punkte und eine Gerade, auf der sich der aus der Büschel-Ebene β' entstandene Büschelscheitel bewegt. Legt man auf diese Gerade einen beliebigen, aber festen Punkt als fünften; so erhellt, dass A in $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ eine Curve 3. Ordnung beschreibt, die durch die Spur von a_1 zweimal geht (wegen des mehrfach citirten Satzes: Ebene Proj. Nr. 8.).

II $\alpha' : A_1 A_2$, $\beta' : B_1 \mathfrak{B}_1 B$; A ist in α' so gelegen, dass $(A\alpha')$ $(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)$, welcher letztere Strahlbüschel nun aber fest ist. Theilen wir in zwei Bedingungen:

$$(A\alpha')\,(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{a}_1) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{b}_1)$$

und

$$(A\alpha')\,(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{a}_2) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{b}_2),$$

so ist das Erzeugniss von A jedesmal eine Fläche 2. Grades (Nr. 38.); die den beiden Flächen ausser a_1 gemeinsame Raumcurve 3. Ordnung ist der Ort der Punkte A, die den beiden Bedingungen genügen.

Also besteht die Curve 6^{ter} Ordnung der für [2112] dem B durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte aus einer ebenen cubischen Curve und einer cubischen Raumcurve.

Eine cubische Raumcurve ergiebt sich (als einziger Ort) auf dieselbe Weise wie bei II auch bei

$$[2201] \qquad \begin{array}{l} A_1 A_2 a_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \\ b_1 b_2 B_1 B_2 \mathfrak{b}_1; \end{array}$$

dagegen auf ähnliche Weise wie bei I eine in $A_1 A_2 A_3$ gelegene ebene cubische Curve für

$$[3101] \qquad \begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 a_1 \mathfrak{a}_1 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 \mathfrak{b}_1, \end{array}$$

als einziger Ort.

54. Bei den weiteren Untersuchungen ergeben sich wieder mehrfache Sätze, von denen ich folgende hervorheben will:

1) *Gegeben* A_1, A_2, a_3, a_4, a_5; *der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch* $A_1 A_2$, *für welche* $(A\alpha)$ $(A_1 A_2 a_1 a_2 a_5)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine cubische Raumcurve, welche durch* A_1, A_2 *geht,* a_3, a_4, a_5 *je zweimal schneidet* (eben bewiesen).

2) *Der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch eine Gerade* $\mathfrak{a}$, *auf welcher* A_1 *liegt, so beschaffen, dass* $(A\alpha)$ $(A_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine Raumcurve* 5. *Ordnung, welche durch* A_1 *zweimal geht,* $\mathfrak{a}$ *ausserdem noch zweimal,* a_2, a_3, a_4, a_5 *je dreimal trifft.*

3) *Der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch eine Gerade* $\mathfrak{a}$, *so beschaffen, dass* $(A\alpha)$ $(a_1 a_2 \cdots a_5)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine Raumcurve* 7. *Ordnung, welche* $\mathfrak{a}$ *sechsmal,* $a_1, \cdots, a_5$ *je viermal trifft.*

4) *Der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch* A_1, *so beschaffen, dass* $(A\alpha)$ $(A_1 a_2 a_3 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine Raumcurve* 5. *Ordnung, welche durch* A_1 *einmal geht,* $a_2, \cdots, a_6$ *je dreimal trifft.*

5) *Der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch* $\mathfrak{A}$, *so beschaffen, dass* $(A\alpha)$ $(a_1, a_2, \cdots, a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine Raumcurve* 12. *Ordnung, welche durch* $\mathfrak{A}$ *nicht geht,* $a_1, \cdots, a_6$ *je siebenmal trifft.*

6) *Gesucht die Strahlbüschel* $(A\alpha)$, *für welche* $(A\alpha)$ $(a_1, a_2, \cdots, a_7)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist; die Punkte* A *erzeugen eine Curve* 8. *Ordnung, bez. die Ebenen* α *hüllen einen Torsus* 8. *Klasse ein. Erstere trifft* $a_1, \cdots, a_7$ *je viermal, an letzteren gehen von diesen Geraden je vier Ebenen.*

7) *Der Ort der Punkte* A, *so beschaffen, dass alle Berührungsebenen des durch* $A(a_1, a_2, \cdots, a_5)$ *bestimmten Kegels* 2. *Grades dies fünf Ebenen in einem Büschel schneiden, der einem gegebenen projectiv ist, ist eine cubische Raumcurve, welche* $a_1, \cdots, a_5$ *z. Sehnen hat.*

8) *Gesucht Paare von Büscheln* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *so beschaffen, das* $(A\alpha)$ $(a_1 \cdots a_9)$ $\barwedge$ $(B\beta)$ $(b_1 \cdots b_9)$. *Hat* B *oder* β *eine fest*

Lage, so erzeugen die Punkte A eine Curve 42. *Ordnung, die Ebenen α einen Torsus* 42. *Klasse. Jene hat je* 16 *Punkte auf, dieser je* 16 *Ebenen durch* $a_1, \cdots, a_9$. (Cf. λ_{9B} für [0009].)

Um z. B. den Satz 4) zu beweisen, hat man nur den Büschel A in zwei fünfstrahlige zu zerlegen: $(A\alpha)(A_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ und $(A\alpha)(A_1 a_2 a_3 a_4 a_6)$ und analog den gegebenen; man erhält dann zwei Flächen 3. Ordnung (Nr. 38.), welche die Geraden $a_2 a_3 a_4$ und die Gerade a^0, die dort erhalten wurde, gemein haben, so dass eine Curve 5. Ordnung übrig bleibt, welche der a^0 noch einmal begegnet.

Für den Beweis des Satzes 6) wird eine eben solche Zerlegung vorgenommen: $(A\alpha)(a_1 \cdots a_6)$ und $(A\alpha)(a_1 \cdots a_5 a_7)$.

Jedem Falle entspricht eine Fläche 4. Ordnung von Punkten A (Nr. 39.); die beiden Flächen haben die Geraden $a_1 \cdots a_5$ und die cubische Raumcurve gemein, von welcher der nicht schwer zu beweisende Satz (7) spricht; der Rest ist die Curve 8. Ordnung des Satzes (6).

Durch die cubische Raumcurve und einen beliebigen Punkt legen wir einen Flächenbüschel 2. Ordnung. Jede Fläche desselben schneidet aus jeder der beiden Flächen 4. Ordnung eine Curve 5. Ordnung, welche den von der Curve 3. Ordnung ein-, zweimal getroffenen Geraden der Fläche 2. Grades je drei-, zweimal begegnet und deshalb die cubische Curve achtmal trifft. Die Berührung mit der einen oder andern der beiden Flächen 4. Ordnung in einem Punkte dieser letzteren Curve bestimmt eine Fläche des Büschels. Es entsteht folglich eine Correspondenz (8,8) von solchen Punkten der cubischen Raumcurve, in denen dieselbe Büschelfläche die eine und die andere Fläche 4. Ordnung tangirt. Es giebt mithin 16 Punkte auf der Curve, wo dieselbe Fläche des Büschels beide, also auch diese einander tangiren; und in jedem Punkte, wo die Flächen 4. Ordnung einander berühren, werden sie auch von derselben Büschelfläche tangirt werden. Demnach begegnet sich die cubische Raumcurve mit dem übrigen Schnitte der beiden Flächen 4. Ordnung in 16 Punkten, folglich mit der Curve 8. Ordnung in 6 Punkten.

55. Wir gehen jetzt zur Aufstellung der Tabelle über, die sich durch die Benutzung der Formeln (Nr. 8.)

(2 a u. b) $\qquad 2\nu_9 = \mu_9 + \pi_{9B} + \zeta_{9B}, \quad 2\mu_9 = \nu_9 + \lambda_{9B}.$

ergiebt.

Tab. 2. $\quad \sigma = 9.$

Sign.	ζ_{9B}	π_{9B}	λ_{9B}	μ_9	ν_9	Sign.	ζ_{9B}	π_{9B}	λ_{9B}	μ_9	ν_9
4010	3	6	0	3	6	3110	2	3	2	3	4
4001	2	0	8	6	4	3101	3	3	3	4	5
0410	3	6	0	3	6	1310	3	6	0	3	6
0401	6	12	0	6	12	1301	3	3	6	6	6

Sign.	ζ_{9B}	π_{9B}	λ_{9B}	μ_9	ν_9
2210	2	3	2	3	4
2201	2	4	3	4	5
3030,0330	3	6	0	3	6
3021	5	9	2	6	10
3012	5	3	11	10	9
3003	3	0	12	9	6
0321	6	12	0	6	12
0312	9	15	6	12	18
0303	6	6	21	18	15
2130,1230	3	6	0	3	6
2121	4	6	4	6	8
2112	5	7	6	8	10
2103	4	2	12	10	8
1221	5	9	2	6	10
1212	5	7	9	10	11
1203	5	6	11	11	11
2050,0250	3	6	0	3	6
2041,0241	6	12	0	6	12
2032	9	15	6	12	18
2023	10	10	17	18	19
2014	7	2	24	19	14
2005	4	0	19	14	9
0232	11	21	2	12	22
0223	14	22	15	22	29
0214	11	12	32	29	26
0205	6	0	36	26	16

Sign.	ζ_{9B}	π_{9B}	λ_{9B}	μ_9	ν_9
1150	3	6	0	3	6
1141	6	12	0	6	12
1132	9	15	6	12	18
1123	10	14	15	18	21
1114	9	8	23	21	19
1105	5	0	26	19	12
1070,0170	3	6	0	3	6
1061,0161	6	12	0	6	12
1052,0152	12	24	0	12	24
1043	18	30	12	24	36
1034	20	24	32	36	40
1025	16	10	47	40	33
1016	9	0	45	33	21
1007	5	0	29	21	13
0143	20	36	8	24	40
0134	24	36	30	40	50
0125	20	20	55	50	45
0116	11	0	62	45	28
0107	6	0	39	28	17
0090	3	6	0	3	6
0081	6	12	0	6	12
0072	12	24	0	12	24
0063	24	48	0	24	48
0054	38	66	20	48	76
0045	44	60	62	76	90
0036	36	30	102	90	78
0027	20	0	107	78	49
0018	11	0	68	49	30
0009	6	0	42	30	18.

56. *Die μ_9 bez. ν_9 geben uns also die Ordnung ζ_{10B} der Curve der Punkte A, welche dem B für $[k, l, m+1, n]_{10}$, bez. $[k, l, m, n+1]_{10}$ associirt sind.*

Die ζ_{10B} und zwar auch die für die Signaturen $[kl00]_{10}$, welche aus der vorhergehenden Tabelle nicht zu entnehmen sind, enthält die Tabelle 4 in Nr. 69.

Die μ_9 für $[k, l, m, 0]_9$, also die ζ_{10B} für $[k, l, m+1, 0]$ zeigt die Tabelle sämmtlich gleich 3; also *ist dem B für die Signaturen:* $\sigma = 10$, $m > 0$, $n = 0$ *eine cubische Raumcurve associirt,* wie wir schon von Nr. 43. her wissen. Doch diese Nr. sagt uns *dasselbe auch* *für diejenigen Signaturen, bei denen auch* $m = 0$; also für [5000], [0500], [4100], [1400], [2300]. Die Auslassung von [3200] wird bald besprochen werden.

Diese cubische Raumcurve geht durch jeden der Punkte A_i *und schneidet jede der Geraden* a_i *zweimal.*

Ist $m > 0$, $n = 0$, *so hat jeder Punkt* B *eine besondere associirte cubische Raumcurve. Wenn aber* $m = n = 0$, *also* $k + l = 5$, *so bestimmt der Punkt* B *mit den* k *Geraden* b_i *und den* l *Punkten* B_i *eine einzige cubische Raumcurve, welche durch* B *und die* B_i *geht, die* b_i *zweimal trifft, ausser wenn* $k = 2$, $l = 3$ (*Nr.* 47.). Wird nun B auf dieser Curve bewegt, so bleibt der Bündel $B\,(k\,b_i,\ l\,B_i)$ collinear, folglich zu den Bündeln der verschiedenen Punkte der associirten Curve correlativ; also *alle Punkte unserer Curve in* B *haben dieselbe associirte Curve; es giebt nun doppelt unendlich viele Curven* $(k\,A_i,\ l\,a_i)$ d. h. durch die k Punkte A_i und mit den l Geraden a_i als Sehnen, *und ebenso doppelt unendlich viele Curven* $(k\,b_i,\ l\,B_i)$.

Wir sehen, dass *jeder Curve des einen Systems eine und nur eine des andern associirt ist, d. h. allen Punkten der einen alle Punkte der andern.* Dasselbe Resultat, sowie auch die gleich zu besprechende Ausnahme ergiebt sich auch bei der Collineation, wie man bei der Signatur, die im „Probl. der Coll.“ behandelt ist: $k = 5$, $l = 0$, sehen kann (Nr. 17.).

57. *Bei der Signatur* [2300] ergab sich zu einem Punkte B, dem eine Curve $(2\,A_i,\ 3\,a_i)$ associirt ist, nicht eine „adjungirte“ Curve $(2\,b_i,\ 3\,B_i)$, deren Punkte sämmtlich ebenfalls die Curve in A zur associirten haben, weil durch einen beliebigen Punkt B im allgemeinen keine Curve $(2\,b_i,\ 3\,B_i)$ geht. Es giebt nun zwar auch doppelt unendlich viele Curven $(2\,b_i,\ 3\,B_i)$, aber diese befinden sich alle auf der Fläche 2. Grades $\beta_0{}^2$, welche durch die $3\,B_i$ und die $2\,b_i$ geht, so dass durch einen Punkt ausserhalb dieser Fläche keine, durch jeden aber auf der Fläche ein einfach unendliches System von solchen Curven geht, welches die Fläche ganz bedeckt.

Aber ein ausserhalb $\beta_0{}^2$ liegender Punkt B hat doch ein adjungirtes Gebilde, dessen Punkte alle dieselbe associirte Curve wie B haben, nämlich die Gerade $B\,b_1\,b_2$. Wird der Scheitel B auf dieser Geraden bewegt, so bleibt der Bündel $B(2\,b_i,\ 3\,B_i)$ ebenfalls collinear, weil der Schnitt mit der Ebene $B_1 B_2 B_3$ sich nicht ändert.

Ist aber B ein Punkt von $\beta_0{}^2$ und $a_0{}^3$ seine associirte Curve, so kann man von ihm zu jedem andern Punkt dieser Fläche auf einer cubischen Raumcurve $(2\,b_i,\ 3\,B_i)$ gelangen, wobei der Bündel $B(2\,b_i,\ 3\,B_i)$ collinear und B zu dem Scheitel der associirten Curve $a_0{}^3$ associirt bleibt; d. h. $a_0{}^3$ ist zu allen Punkten von $\beta_0{}^2$ associirt.

Vertauschen wir die Räume, so dass wir zu *der Signatur* [3200] kommen; so zeigt sich, dass *jedem Punkte B und allen ihm adjungirten d. h. auf der cubischen Raumcurve* ($3b_i$, $2B_i$, B) *liegenden Punkten nicht eine cubische Raumcurve, sondern eine Gerade a^1 der Congruenz* $[a_1 a_2]$ *associirt ist. Eine Curve $b_0{}^3$ aber giebt es im System* ($3b_i$, $2B_i$), *welcher eine ganze Fläche 2. Grades $\alpha_0{}^2$, nämlich die durch $3A_i$, $2a_i$ gehende, correspondirt und darauf ein doppelt unendliches System von cubischen Raumcurven.*

Was nun den früheren Beweis (Nr. 41.) anlangt, dass durch zwei dem B associirte Punkte A stets eine ganze cubische Raumcurve inducirt wird, so bleibt derselbe bestehen, wenn beide A der Fläche $\alpha_0{}^2$ angehören; im andern Falle müssen sie auf einer Geraden a^1 der Congruenz $[a_1 a_2]$ liegen, dann werden aber die beiden Bündel, wie schon gesagt, mit der Ebene $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ und unter einander perspectiv: jede zwei homologe Strahlen schneiden sich, nämlich auf α_{123}, nicht blos einfach unendlich viele, wie im allgemeinen Falle; Erzeugniss ist also ausser dem sich selbst entsprechenden Verbindungsstrahl der Scheitel die ganze Ebene α_{123}. (C. P. Nr. 12., 13., 14.).

Bewegt man B_2 auf einer Geraden $\mathfrak{b}_2$ entlang, welche dadurch zu $a_2 = \mathfrak{a}_2$ conjugirt wird, so erzeugen die Geraden a_1 die dem B bezüglich [3101] associirte Regelfläche 3. Grades (Nr. 48.).*)

58. Für

$$[3200] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \end{matrix}$$

sind die Erzeugenden des Hyperboloids β^2_{123}, für welche $b_1 b_2 b_3$ Leitgerade sind, noch erwähnenswerth. Sei b^1 eine solche Erzeugende und B^1 ihre Spur in irgend einer durch B_1, B_2 gelegten Ebene β, so giebt es in der Ebene $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ einen und nur einen Punkt A', so beschaffen, dass

$$(A' \alpha_{123})(A_1 A_2 A_2 a_1 a_2) \barwedge (B^1 \beta)(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2) \barwedge b^1 (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2).$$

Ist B nun ein beliebiger Punkt von b^1, anderseits $\mathfrak{A}''$ auf a_2 gelegen, so sind für

$$[2110] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}'' \\ b_1 b_2 B_1 B_2 \end{matrix}$$

einfach unendlich viele Correlationen zwischen den Bündeln A', B möglich, und in Folge der obigen Projectivität sind in denselben auch je $A'(A_3, a_2)$ mit $B(b_3, B_2)$ homolog, so dass A' und B auch auf unendlich viele Weisen für [3200] associirt sind. Man kann mithin noch $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ hinzufügen und in diesem System wird es je eine Correlation geben, in der $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ noch conjugirt sind (Hirst

*) Auf die im Vorhergehenden besprochene Ausnahme des Satzes von Nr. 43. hat mich Hirst schon im April 1875 aufmerksam gemacht.

Nr. 42. Sign. [2111] oder [2102]); so dass also A' und die ganze Gerade b^1 sich auch für [3210] oder [3201] associirt sind.

Wir können gleich die Frage anschliessen: wie bewegt sich A' in α_{123}, wenn b^1 die Regelschaar durchläuft? Wir haben in jeder der beiden Ebenen α_{123} und β eine Gruppe von 5 Punkten, und A' und B^1 correspondiren einander in Bezug auf diese beiden Gruppen.

Einer Geraden in α_{123} entspricht in β eine Curve 5. Ordnung, welche durch die 5 Punkte in β, also auch durch die Spuren der drei b_i zweimal geht (Eb. Proj. Nr. 10.) und demnach dem Hyperboloide β^2_{123} noch viermal begegnet. Daraus folgt, dass die Punkte A' eine Curve 4. Ordnung erzeugen.

Es giebt also in der Ebene $A_1A_2A_3$ eine unicursale Curve 4. Ordnung a^1 so beschaffen, dass jedem Punkte A' derselben alle Punkte einer Erzeugenden der Regelschaar, zu deren Leitschaar die drei b_i gehören, durch unendlich viele Correlationen für [3200] *und je eine für* [3210] *oder* [3201] *associirt sind. Diese, also von* $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1{}^1$ oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ *unabhängige, Curve geht durch die drei A_1 zweimal und trifft die a_1, a_2 einmal;* wie man einsieht, wenn man die obige Gerade in α_{123} mit einem dieser Elemente incident sein lässt, wo dann an Stelle der Curve 5. Ordnung eine von der 3. tritt (Eb. Proj. Nr. 8.).

Nehmen wir wieder eine beliebige, aber feste Lage von A' auf $\bar{a}^4$ und die associirte Gerade b^1; schneiden wir die verschiedenen zum Bündel A' für [3210] correlativen Bündel, deren Scheitel die b^1 durchläuft, mit der Ebene $B_1B_2\mathfrak{B}_1$, wenn $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zugefügt gedacht wird; so zeigt sich der Schnitt fest; die Correlation zwischen dem Bündel A' und dem ebenen Systeme ist, da [3200] zunächst wie oben auf [2110] zurückgeführt werden kann und dazu noch das conjugirte Paar $A'\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ getreten ist, [2120], welche eine Lösung hat. Wird also nun noch $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ zugefügt, so ist dem Strahle $A'\mathfrak{A}_2$ im ebenen Systeme eine Gerade homolog und um diese dreht sich die dem Strahle $A'\mathfrak{A}_2$ in den verschiedenen Bündeln B homologe Ebene, so dass *es einen Punkt B auf b^1 giebt,* für welchen sie durch $\mathfrak{A}_2$ geht, also *einen Punkt, der dem A' auch für* $[3220]_{12}$ *associirt ist.* Hat man aber $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ hinzugefügt, wodurch $[3300]_{12}$ entsteht (S. 256); so wird die durch die feste Gerade des ebenen Systems und $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$ gehende Ebene gerade die Ebene $B_1B_2\mathfrak{B}_1$ und der von ihr markirte Punkt ist die Spur von b^1 in $B_1B_2\mathfrak{B}_1$, das ebene System in $B_1B_2\mathfrak{B}_1$ hat zwar seine Correlation zum Bündel A' beibehalten, aber der jetzige Punkt B ist kein Punkt, aus dem es durch einen ebenfalls correlativen Bündel projicirt werden kann. *Es giebt also keinen Punkt auf b^1, der dem A' auch noch für* [3300] *associirt wäre.* (C. P. Nr. 32., 37., 38.)

Wird nun $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2$ statt $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ hinzugefügt (ausser $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$), so dass man

$[3211]_{12}$ erhält; so entspricht der Ebene $A'\mathfrak{a}_1$ des Bündels A' im ebenen Systeme von $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ ein Punkt, durch den dann der Strahl der Bündel B, der der Ebene $A'\mathfrak{a}_1$ homolog ist, gehen muss; also giebt es einen Punkt B auf b^1, wo dieser Strahl auch noch $\mathfrak{b}_1$ trifft; so dass $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ conjugirt werden.

Auf b^1 liegt folglich ein Punkt B, der dem A' auch noch für [3211] *associirt ist.*

59. Wir bemerken weiter, dass für alle Signaturen: $\sigma = 10, n = 1$ $\zeta_{10B} = 6$, ausser für [3111] und [2111], wo es 4 ist; ferner bei $\sigma = 10$, $n = 2$ ist es nur 7mal 12, die Werthe 24, 48 kommen bei bez. $n = 3$, $n = 4$ nur dreimal, resp. einmal vor. Eine Curve 4. Ordnung erhalten wir noch bei [4002].

Wir wollen noch untersuchen, von welcher Species diese drei Raumcurven 4. Ordnung sind.

Bei [4002] ist sie die vollständige Schnittcurve der beiden Flächen 2. Grades, welche dem B für $\left[4000, {\mathfrak{a}_1 \atop \mathfrak{b}_1}\right]$ und für $\left[4000, {\mathfrak{a}_2 \atop \mathfrak{b}_2}\right]$ correspondiren; bei [3111] schneiden sich in ihr die beiden Flächen, die für $\left[3100, {\mathfrak{A}_1 \atop \mathfrak{B}_1}\right]$ und $\left[3100, {\mathfrak{a}_1 \atop \mathfrak{b}_1}\right]$ associirt und bez. 2ter, 3ter Ordnung sind, ausser in der auf letzterer doppelten Geraden a_1 (Nr. 48.), folglich ist die Curve von der zweiten Species. Bei [2211] ergiebt sie sich freilich nicht als Schnitt der beiden dem B für $\left[2200, {\mathfrak{A}_1 \atop \mathfrak{B}_1}\right]$ und $\left[2200, {\mathfrak{a}_1 \atop \mathfrak{b}_1}\right]$ associirten Flächen 2. Grades, denn diese fallen in die nämliche Fläche zusammen; sie liegt jedoch auf derselben und begegnet jeder der beiden a_i, z. B. der a_1 in so vielen Punkten, als dieselbe mit der dem B für [2121] associirten Fläche 4. Ordnung ausser dem auf letzteren einfachen*) $\mathfrak{A}_1'$, der auf a_1 gelegt ist, gemein hat, also dreimal; woraus sich ebenfalls die zweite Species ergiebt.

60. Die eben vorgenommenen Schnittbetrachtungen führen zu folgender Untersuchung:

Wir denken uns irgend eine Signatur $[klmn]_8$ und fügen zwei Paare conjugirter Elemente (Punkte oder Geraden) hinzu, wodurch zwei Signaturen, wo $\sigma = 9$ ist, und eine, bei der $\sigma = 10$ ist, entstehen. Zu dem Schnitte der beiden Flächen, welche einem B für die beiden ersteren associirt sind, gehört die demselben B für die letztere associirte Curve. Der Rest des Schnitts wird, wenn die Correlation bei festen Scheiteln für $[klmn]_8$ mehr als eine Lösung hat, aus verschiedenartigen Theilen bestehen: bei den Punkten der einen wird die Correlation immer noch blos eine endliche Zahl von Lösungen haben und wegen einer derselben werden diese Theile auf die eine der

*) Weil eine Correlation mit festen Scheiteln für [2111] nur eine Lösung hat.

beiden Flächen, wegen einer andern auf die andere gelangen (während die Punkte der dem B für die Signatur $\sigma = 10$ associirten Curve wegen *derselben* Lösung auf beide Flächen kommen); die Bündel der Punkte der andern Theile befinden sich mit B in unendlich vielen Correlationen, sind für die Signatur $[k\,l\,m\,n]_8$ *„porismatisch“ correlativ*, wie sich Hirst ausdrückt für solche Specialfälle, wo *an Stelle einer endlichen eine unendliche Zahl von Lösungen tritt.*

Die Geraden a_i, $\mathfrak{a}_i$ gehören zu diesen letzteren Theilen, und die Punkte A_i, $\mathfrak{A}_i$ liegen auf ihnen (Nr. 3,52), aber es giebt im allgemeinen noch andere. Bei den Signaturen, wo $n = 0$, ist es nicht schwer, dieselben zu ermitteln. Von der Signatur [2200] sehen wir ab, denn da entspricht eben jeder Punkt der ganzen Fläche α^2, die einem B associirt, und nicht blos einer Curve, diesem B durch unendlich viele Correlationen. Bei der Signatur [3100] besteht die Curve der dem B porismatisch associirten Punkte blos aus a_1; denn die für zwei nur durch das Paar der conjugirten Punkte verschiedene [3110] associirten Flächen 2. Grades durchschneiden sich in a_1 und der für [3120] associirten cubischen Raumcurve; der Schnitt der für [3110] und [3101] associirten Flächen ist oben betrachtet, und die für zwei nur im Paare der conjugirten Geraden verschiedene [3101] associirten Flächen 3. Ordnung haben die auf beiden doppelte a_1 und die für [3102] associirte Curve 5. Ordnung gemein.

Für die übrigen Fälle: $n = 0$ wollen wir blos zwei Paare conjugirter Punkte zufügen, weil sich dann durchweg cubische Flächen ergeben; auf diesen liegen stets die etwa vorhandenen Geraden A_iA_k, $\overline{A_i a_i a_k}$ und Transversalen von vier Geraden a_i und sind für $\sigma = 8$ dem B porismatisch associirt, und zwar durch unendlich viele Correlationen mit singulären Axen, von denen die betreffende Gerade selbst eine ist. Ausser diesen Geraden, den a_i, und der für $\sigma = 10$ associirten cubischen Raumcurve haben die Flächen bei [4000], [0400], [1300] nichts mehr gemein; bei [3020], [0320], [1220] eine Curve von der 3. Ordnung; bei [2120] und [0240] von der 4. Ordnung; bei [2040], [1140], [0160] von der 5. und bei [1060] und [0080] von der 6. Ordnung. *Die Punkte dieser Curve sind dem B durch unendlich viele im allgemeinen gewöhnliche Correlationen associirt.*

Bei [1220] lässt sich durch den übrigen Schnitt, der aus einer durch A_1 gehenden cubischen Raumcurve, den beiden Sehnen a_1, a_2 derselben und der Geraden $\overline{A_1 a_1 a_2}$ besteht, eine Fläche 2. Gr. legen; also ist die obige Curve 3. Ordnung eben. Wir haben sie schon oben in Nr. 52. gefunden als den von dem hinzugefügten conjugirten Paare unabhängigen Schnitt der Ebene $A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ mit der für [1230] dem B associirten Fläche.

Bei [3020] und [0320] dagegen ist die Curve 3. Ordnung doppelt gekrümmt; aus der Theorie der Schnittcurven zweier cubischen Flächen folgt, dass sie durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ geht und im ersten Falle noch durch A_1, A_2, A_3, im zweiten aber a_1, a_2, a_3 zu Sehnen hat. Wir können diese Curve z. B. bei

$$[3020] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 b_2 b_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \end{matrix}$$

auch so erhalten: Sei A irgend ein Punkt, der dem B porismatisch (und zwar durch allgemeine Correlationen) correspondirt; so heisst dies doch, die verschiedenen Ebenen, welche den Strahlen $A\mathfrak{A}_1$, $A\mathfrak{A}_2$ in den verschiedenen Correlationen homolog sind, gehen durch $B\mathfrak{B}_1$, bez. $B\mathfrak{B}_2$, bilden demnach Büschel um diese beiden Geraden. Nun kann man aber durch A_1, A_2, A_3, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, A eine cubische Raumcurve legen. Wird nun A auf derselben bewegt, so bleibt der Bündel $A(A_1 A_2 A_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2)$ collinear und die Strahlen $A\mathfrak{A}_1$, $A\mathfrak{A}_2$ zu denselben Ebenen in B in den verschiedenen Correlationen homolog, so dass also die Eigenschaft, dass die diesen Strahlen homologen Ebenen durch $B\mathfrak{B}_1$, $B\mathfrak{B}_2$ gehen, bestehen bleibt.

Analoges gilt bei [0320]. Bei [1220] wäre die cubische Curve durch 4 Punkte und zwei Sehnen bestimmt, was zu keiner Lösung führt.

Bei [2120] aber befinden sich die dem B porismatisch associirten Punkte nur in den Ebenen $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ und $A_1 A_2 \mathfrak{A}_2$ und erzeugen dort zwei Kegelschnitte, welche schon je von $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ unabhängig sind (Nr. 52.); die Betrachtung mit der cubischen Raumcurve wird hier illusorisch, weil von den 5 Punkten und der einen Sehne 4 Punkte A, A_1, A_2, $\mathfrak{A}_1$ bez. $\mathfrak{A}_2$ in derselben Ebene liegen. Die beiden Kegelschnitte bilden, weil beide durch A_1, A_2 gehen, eine Raumcurve 4. Ordnung 1. Species.

Gleichfalls von der 1. Species ist die allgemeine Raumcurve 4. Ordnung bei [2040], weil durch den ferneren Schnitt der cubischen Flächen eine Fläche 2. Grades geht. Die Curve 5. Ordnung in den 3 Fällen [2040], [1140], [0160] bildet mit einer Raumcurve 4. Ordnung 1. Species und die Curve 6. Ordnung bei [1060] und [0080] mit einer cubischen Raumcurve den vollen Schnitt zweier cubischen Flächen, folglich haben ihre Tangentenflächen die Ordnung 12, 16. (C. P. Nr. 15—17.)

Auf die Fälle $n > 0$ gehen wir hier nicht ein, weil die Verhältnisse doch wegen der oben geschilderten Verschiedenartigkeit des Schnitts zu complicirt werden. Wir begnügen uns noch mit der Bemerkung, dass dort etwa vorkommende $A_i A_k$, $A_i a_k a_l$, $(4 a_i)$ nicht auf allen einem Punkte associirten Flächen liegen.

61. Wir gehen zur Aufstellung der nächsten Tabelle vermittelst der Formeln aus Nr. 22.:

(III a u. b) $2\dot{\pi}_8' = \bar{\pi}_8' + \Theta_8'$; $2\bar{\lambda}_8' = \dot{\lambda}_8' + \Theta_8' + \lambda_{8B} + \lambda_{8A}$;

λ_{8A} ergiebt sich aus λ_{8B} durch Vertauschung der Räume, also von k und l. Für die andern Zahlen bewirkt die Vertauschung der Räume keine Veränderung (Nr. 2.). λ_{8B} und λ_{8A} beziehen sich in der folgenden Tabelle nur je auf die vordere von zwei nebeneinander geschriebenen Signaturen, für die hintere sind sie zu vertauschen. Aehnliches gilt auch für die Tabellen 3, VII, 7, IX, 9.

Tab. III; $\sigma = 8$.

Sign.	Θ_8'	$\dot{\pi}_8'$	$\bar{\pi}_8'$	λ_{8B}	λ_{8A}	$\dot{\lambda}_8'$	$\bar{\lambda}_8'$
4000,0400	24	16	8	4	0	4	16
3100,1300	8	10	12	1	3	6	9
2200	16	12	8	2	2	4	12
3020,0320	18	22	26	1	0	1	10
3011,0311	32	26	20	5	3	10	25
3002,0302	36	20	4	7	12	25	40
2120,1220	14	18	22	2	1	3	10
2111,1211	24	22	20	3	5	10	21
2102,1202	28	20	12	6	5	21	30
2040,0240	8	24	40	0	0	0	4
2031,0231	32	40	48	3	1	4	20
2022,0222	56	48	40	8	8	20	46
2013,0213	64	40	16	13	17	46	70
2004,0204	32	16	0	10	16	70	64
1140	12	24	36	0	0	0	6
1131	28	36	44	3	3	6	20
1122	48	44	40	8	8	20	42
1113	56	40	24	11	11	42	60
1104	48	24	0	13	13	60	67
1060,0160	0	24	48	0	0	0	0
1051,0151	20	48	76	0	0	0	10
1042,0142	60	76	92	6	4	10	40
1033,0133	104	92	80	16	16	40	88
1024,0124	120	80	40	24	28	88	130
1015,0115	80	40	0	23	29	130	131
1006,0106	0	0	0	13	16	131	80
0080	0	24	48	0	0	0	0
0071	0	48	96	0	0	0	0
0062	40	96	152	0	0	0	20
0053	120	152	184	10	10	20	80

Sign.	Θ_8'	$\dot{\pi}_8'$	$\overline{\pi}_8'$	λ_{8B}	λ_{8A}	$\dot{\lambda}_8'$	$\overline{\lambda}_8'$
0044	208	184	160	32	32	80	176
0035	240	160	80	52	52	176	260
0026	160	80	0	52	52	260	262
0017	0	0	0	29	29	262	160
0008	0	0	0	16	16	160	96.

62. Es sind also wiederum die sämmtlichen Θ_8', ferner die $\dot{\pi}_8'$, $\dot{\lambda}_8'$ für die Signaturen $[k, l, m, 0]_8$, d. i. die π_9', λ_9' für $[k, l, m+1, 0]_9$ direct zu ermitteln.

In Bezug auf Θ_8' wählen wir als Beispiel:

$$\begin{array}{ll} (2022) & A_1 A_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \\ (0222) & b_1 b_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 . \end{array}$$

Die singulären Axen sollen mit a, b incident sein.

I $\alpha' : A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; $\beta' : \mathfrak{B}_2$ (2 Comb.); 1) $a' : \alpha' a A_1$; $b' : b_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 b$ 2 Lagen (2 Comb.); 2) $a' : \alpha' a \mathfrak{a}_1$; $b' : b_1 b_2 \mathfrak{b}_2 b$ 2 Lagen (2 Comb.); in 1) und 2) $\beta' : \mathfrak{B}_2 b'$. $2(2.2 + 2.2) = 16$.

II $\alpha' : A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$; $\beta' : b_2$ (2 Comb.); 1) $a' : \alpha' a A_1$; $b' : b_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 b$ 2 Lagen; 2) $a' : \alpha' a \mathfrak{a}_1$; $b' : b_1 b_2 \mathfrak{b}_2 b$ 2 Lagen (2 Comb.); in 1) und 2) $\beta' : b_2 b'$. $2(2 + 2.2) = 12$.

III $\alpha' : A_1 A_2$; $\beta' : \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$; 1) $a' : A_1 \mathfrak{a}_1 a$; $b' : b b_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ 2 Lagen (4 Comb.); 2) $a' : \overline{A_1 A_2} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 a$; $b' : b_1 b_2 b \overline{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2}$ 4 Lagen; in 1) und 2) $\alpha' : \overline{A_1 A_2} a'$; $\beta' : \overline{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2} b'$; $2.4 + 4 = 12$.

IV $\alpha' : A_1 \mathfrak{A}_1$; $\beta' : b_2 \mathfrak{B}_2$ (4 Comb.); 1) $a' : A_1 a \mathfrak{a}_1$; $b' : \beta' \mathfrak{b}_2 b$. (2 Comb.); 2) $a' : \overline{A_1 \mathfrak{A}_1} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 a$; $b' : \beta' b_1 b$ (2 Lagen); in 1) und 2) $\alpha' : \overline{A_1 \mathfrak{A}_1} a'$. $4(2 + 2) = 16$.

Also

$$\Theta_8' = 16 + 12 + 12 + 16 = 56.$$

Für die Ermittelung der π_9' nehmen wir als Beispiel die Signaturen [0090] und [2130].

a', b' müssen bez. mit a, b incident sein; bei der ersteren Signatur haben wir

$$a' (\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_9) \;\overline{\wedge}\; b' (\mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_9);$$

dem Complexe $[a]$ entspricht eine Linienfläche 24. Grades (R. Proj. Nr. 47., 57.), von welcher 24 Geraden die b treffen; also $\pi_9' = 24$.

$$\begin{array}{ll} [2130] & \begin{array}{l} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \\ b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 \end{array} \end{array}$$

I $a' : A_1 a_1 a$; $b' : b_2 b$; $a' (A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \;\overline{\wedge}\; b' (b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$; dem a' entspricht eine Congruenz vom Bündelgrad 1 und Feldgrad 3, welche aus dem auf b_2 gelegten Punkt B_2' einen Kegel 2. Grades erhält (R

Proj. Nr. 8.), also mit der linearen Congruenz $[b_2 b]$ $1.1 + 1.3 - 2 = 2$ nicht durch B_2' gehende Gerade gemein hat. (2 Comb.). $2.2 = 4$.

II $a' : a a_1$; $b' : b_1 b_2 b$; $a' (A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b' (b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$; einem Büschel in B correspondirt eine Congruenz (3,9), welche aus dem auf a_1 gelegten Punkte A_1' einen Kegel 5. Ordnung erhält (R. Project. Nr. 28.) und folglich mit der Congruenz $[a a_1]$ $3.1 + 9.1 - 5 = 7$ nicht durch A_1' gehende Geraden gemein hat; jedem Strahl, der durch den auf b_1 gelegten Punkt B_1' geht, entspricht eine Congruenz (1,3), welche aus A_1' einen Kegel 2. Grades erhält (R. Proj. Nr. 1, 8.), also mit der Congruenz $[a a_1]$ zwei nicht durch A_1' gehende Geraden gemein hat. Demnach correspondirt der Congruenz $[a a_1]$ ein Complex 7. Grades, für welchen die Bündel um die Punkte B_1', B_2' auf b_1, b_2 doppelt sind, der mithin mit der Regelschaar $[b_1 b_2 b]$ $2.7 - 2.2 = 10$ nicht durch B_1' oder B_2' gehende Strahlen gemein hat. Also giebt es bei II 10 Lösungen.

III $a' : A_1 a$; $b' : b_2 B_1 b$; $a' (A_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b' (b_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$; b' ist bestimmt; ihr ist ein Complex 2. Grades associirt, welcher im Büschel $A_1 a$ 2 Strahlen hat; mithin wegen der 2 Combinationen 4 Lösungen. Also im Ganzen $\pi_9' = 4 + 10 + 4 = 18$.

Durch analoge Betrachtungen sind aber auch die π_9' für $n > 0$ ermittelt worden.

63. Die Werthe λ_9' für $n = 0$ sind überall null, wo $k + l < 3$ (Nr. 30.); nur die für [4010], [3110], [2210], [3030], [2130] (indem von den Doppelsignaturen blos die ersten geschrieben sind) sind von 0 verschieden. Diese 5 Signaturen sind leicht zu behandeln.

Die Scheitel A, B sollen auf a, b liegen.

$$[4010] \qquad \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \mathfrak{A}_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

$\alpha' : A_1 A_2 A_3$; $\beta' : b_4 \mathfrak{B}_1$; $A = \alpha' a$; $B = \beta' b$; $(A\alpha') (A_1 A_2 A_3) \barwedge (B\beta') (b_1 b_2 b_3)$ erfüllt sich von selbst; 4 Comb.; $\lambda_9' = 4$.

Die Fläche der Punkte $A(B)$, welche Punkten B auf b (oder A auf a) durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind, besteht also aus den 4 Ebenen $A_i A_k A_l$ (oder $\mathfrak{B}_1 b_i$).

$$[3110] \qquad \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & a_1 & \mathfrak{A}_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & B_1 & \mathfrak{B}_1. \end{matrix}$$

I $\alpha' : A_1 A_2 A_3$; $\beta' : B_1 \mathfrak{B}_1$; der feste Büschel $(A\alpha') (A_1 A_2 A_3 a_1) \barwedge (B\beta') (b_1 b_2 b_3 B_1)$. Jedem A in α' (wo sie z. B. von a getroffen wird) entspricht eine Fläche 3. Ordnung von Punkten B (Nr. 38.), so dass drei Punkte auf b liegen.

II $\alpha' : A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; $\beta' : b_3 B_1$; die Projectivität erfüllt sich für jede zwei beliebige Punkte A, B in α', β' selbst; 3 Comb. $\lambda_9' = 6$.

Der b sind demnach die dreifache Ebene $A_1 A_2 A_3$ und die 3 Ebenen $A_i A_k \mathfrak{A}_1$, der a eine Fläche 3. Ordnung und die 3 Ebenen $b_i B_1$ associirt.

$$[2210] \qquad \begin{array}{l} A_1 A_2 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1 b_2 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 . \end{array}$$

I $\alpha' : A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; $\beta' : B_1 B_2$; $A = a\alpha'$, B in β'; der feste Büschel $(A\alpha')$ $(A_1 A_2 a_1 a_2) \barwedge (B\beta')$ $(b_1 b_1 B_1 B_2)$; B beschreibt (Nr. 38.) eine Fläche 2. Grades.

II $\alpha' : A_1 A_2$; $\beta' : B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$; $B = b\beta'$; A in α'; A beschreibt eine Fläche 2. Grades. Einer b (oder a) entspricht mithin die doppelte Ebene $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ (oder $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$) und eine Fläche 2. Grades.

Endlich bei [3030] entspricht einem b die Ebene $A_1 A_2 A_3$, einem a die Ebene $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$; bei [2130] einem b die 3 Ebenen $A_1 A_2 \mathfrak{A}_i$, einem a die 3 Ebenen $B_1 \mathfrak{B}_i \mathfrak{B}_k$.

Die λ_9' für $n > 0$ habe ich nicht mehr direct ermittelt, indem die Controlle der zweifachen Ermittelung der π_9' für genügend erachtet wurde.

Das Resultat $\lambda_9' = 96$ für [0009] giebt folgenden Satz:

Gegeben zwei Gruppen von je 9 Geraden $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_9$; $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_9$; *gesucht solche Strahlbüschel* $(A\alpha)$, $B\beta)$, *dass*

$$(A\alpha)\,(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_9) \barwedge (B\beta)\,(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_9);$$

bewegt sich B auf einer Geraden, oder dreht sich β um eine Gerade, so beschreibt A eine Fläche 96. *Ordnung, α eine Fläche* 96. *Klasse.*

64. Wir gehen zur nächsten Tabelle, welche durch die Formeln aus Nr. 9.

(3a u. b) $\quad 2\nu_9' = \mu_9' + \pi_9' + \zeta_{9B} + \zeta_{9A}, \; 2\mu_9' = \nu_9' + \lambda_9'$

zu den Werthen von μ_9', ν_9' führt. Die ζ_{9A} ergeben sich aus den ζ_{9B} durch Vertauschung von k und l.

Tab. 3. $\sigma = 9$.

Sign.	ζ_{9B}	ζ_{9A}	π_9'	λ_9'	μ_9'	ν_9'
4010,0410	3	3	16	4	10	16
4001,0401	2	6	8	16	16	16
3110,1310	2	3	10	6	9	12
3101,1301	3	3	12	9	12	15
2210	2	2	12	4	8	12
2201	2	2	8	12	12	12
3030,0330	3	3	22	1	10	19
3021,0321	5	6	26	10	19	28
3012,0312	5	9	20	25	28	31
3003,0303	3	6	4	40	31	22

Sign.	ζ_{9B}	ζ_{9A}	π_9'	λ_9'	μ_9'	ν_9'
2130,1230	3	3	18	3	10	17
2121,1221	4	5	22	10	17	24
2112,1212	5	5	20	21	24	27
2103,1203	4	5	12	30	27	24
2050,0250	3	3	24	0	10	20
2041,0241	6	6	40	4	20	36
2032,0232	9	11	48	20	36	52
2023,0223	10	14	40	46	52	58
2014,0214	7	11	16	70	58	46
2005,0205	4	6	0	64	46	28

Sign.	ζ_{9B}	ζ_{9A}	π_9'	λ_9'	μ_9'	ν_9'
1150	3	3	24	0	10	20
1141	6	6	36	6	20	34
1132	9	9	44	20	34	48
1123	10	10	40	42	48	54
1114	9	9	24	60	54	48
1105	5	5	0	67	48	29
1070,0170	3	3	24	0	10	20
1061,0161	6	6	48	0	20	40
1052,0152	12	12	76	10	40	70
1043,0143	18	20	92	40	70	100
1034,0134	20	24	80	88	100	112
1025,0125	16	20	40	130	112	94

Sign.	ζ_{9B}	ζ_{9A}	π_9'	λ_9'	μ_9'	ν_9'
1016,0116	9	11	0	131	94	57
1007,0107	5	6	0	80	57	34
0090	3	3	24	0	10	20
0081	6	6	48	0	20	40
0072	12	12	96	0	40	80
0063	24	24	152	20	80	140
0054	38	38	184	80	140	200
0045	44	44	160	176	200	224
0036	36	36	80	260	224	188
0027	20	20	0	262	188	114
0018	11	11	0	160	114	68
0009	6	6	0	96	68	40.

65. Die μ_9', ν_9' geben uns nun *die Ordnung* ζ'_{10} *der Fläche, die für* $[kl, m+1, n]_{10}$, $[k, l, m, n+1]_{10}$ *einer Geraden b oder a associirt ist.* Als ζ'_{10} finden wir sie in Tab. 5 Nr. 80. Diese Ordnung ist zwar dieselbe, ob man a oder b annimmt; aber die weiteren Eigenschaften der Fläche sind doch verschieden, z. B. die Vielfachheit der Grundelemente.

Wir bekommen die einer b oder a associirten Flächen nur für die Signaturen, bei denen m, n nicht beide 0 sind. Es fehlen also die Signaturen [5000], [0500]; [4100], [1400]; [3200], [2300].

Bemerken wir jedoch zuerst noch, dass *für die Signaturen* $n=0$, *die aus der Tabelle zu entnehmen sind*, $\zeta'_{10}=10$ *ist, mit Ausnahme von* [3120], [1320]; [2220], *wo* $\zeta'_{10}=9$, *bez.* $=8$ *ist.* Für die Signaturen $[kl, m, 1]_{10}$ ist $\zeta'_{10}=20$ mit 5 Ausnahmen; $\zeta'_{10}=40$ bei $n=2$ nur zweimal, $\zeta'_{10}=80$ bei $n=3$ nur einmal.

66. Wir nehmen die 3 Doppel-Signaturen vor, für welche uns die Tabelle ζ'_{10} nicht giebt.

Diese Signaturen [5000], [0500]; [4100], [1400]; [3200], [2300] können durch Auflösung behandelt werden. Wir nehmen zuerst

$$[4100] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 a_1 \\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 B_1 \end{matrix}$$

vor und indem wir $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2$ mit B_1 identisch, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ mit a_1 incident sein lassen, erhalten wir:

$$[4020] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1. \end{matrix}$$

Es sei $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ das zu [4010] hinzugefügte Paar in der Betrachtung der Nr. 9.; in Nr. 46. ist gesagt, dass für [4010] jedem Punkte B der Ebene $b_1\mathfrak{B}_1$, also auch der Spur von b, jeder Punkt von $A_1A_2A_3$

associirt ist, und zwar durch eine Correlation, für welche diese beiden Ebenen singulär sind, also auch der Punkt $A = (a,\ A_1 A_2 A_3)$. In dieser Correlation zwischen den Bündeln der beiden Spuren A, B von a, b ist den beiden Ebenen von B, welche nach den durch $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$ gelegten Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ gehen, weil sie die singuläre Ebene in demselben Strahle $B\mathfrak{B}_1$ treffen, nach den Eigenschaften dieser exceptionellen Correlation derselbe Strahl des Bündels A homolog. Wir erhalten also in seiner Spur in der Ebene der eindeutig bezogenen Curven einen weiteren vereinigten Punkt, und da 4 Combinationen möglich sind, vier solche. Folglich wird der Werth von μ_9' für den Fall der Identität von $\mathfrak{B}_1$ mit $\mathfrak{B}_2$ um 4 kleiner als wenn sie verschieden sind; ν_9' wird offenbar nicht von dieser Identität beeinflusst, und ebenso die ganze Formel 3b); für beide wird ja ein Paar conjugirter Geraden hinzugefügt; der Werth von μ_9' in 3b) ist derjenige, der dem allgemeinen Fall der Verschiedenheit von $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_1$ entspricht. Ist also $\zeta_{10}' = 10$ für (4020), so ist es 6 für [4100].

$$[1400] \qquad \begin{matrix} A_1\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ b_1 B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix}$$

wird verwandelt in:

$$[1320] \qquad \begin{matrix} A_1\, a_1\, a_2\, a_3\, \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 B_1 B_2 B_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1; \end{matrix}$$

für [1310] sind (Nr. 46.) $A_1 a_1$ und $B_2 B_3 \mathfrak{B}_1$, jeder Punkt mit jedem, durch exceptionelle Correlation mit diesen Ebenen als singulären associirt. Wir haben 3 Combinationen; da nun $\zeta_{10}' = 9$ für [1320], so ist es ebenfalls 6 für [1400].

Drittens

$$[3200] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1 B_2 \end{matrix}$$

wird aufgelöst in:

$$[3120] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\, b_2\, b_3 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1. \end{matrix}$$

Hier sind für [3110] zu den Punkten der Ebene $A_1 A_2 A_3$ durch exceptionelle Correlation mit singulären Ebenen, von denen die eine die $A_1 A_2 A_3$ ist, die andere durch $B_1 \mathfrak{B}_1$ geht, alle Punkte einer cubischen Fläche (Nr. 46., 38.), also dem Punkt $(a,\ A_1 A_2 A_3)$ drei Punkte von b associirt; für [3120] ist $\zeta_{10}' = 9$, also 6 für [3200].

Die einer Geraden b associirte Fläche 6. Ordnung wird durch die den verschiedenen Punkten von b entsprechenden Geraden erzeugt (Nr. 57.), also ist sie eine Regelfläche.

$$[2300] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2\, a_1\, a_2\, a_3 \\ b_1\, b_2 B_1 B_2 B_3 \end{matrix}$$

wird in

$$[2220] \quad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 b_2 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

aufgelöst. Jedem Punkte der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ ist für [2210] eine Fläche 2. Grades durch Correlation mit singulären Ebenen associirt (Nr. 46.), von denen die eine durch $A_1 A_2$ geht, die andere $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ ist, dem Punkte $(b,\ B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)$ also zwei Punkte auf a. Für [2220] ist $\zeta'_{10} = 8$, also 6 für [2300].

Die Fläche 6. Ordnung, die einer Geraden b associirt ist, enthält die Raumcurve $a_0{}^3$, welche der Fläche $\beta_0{}^2$ entspricht (Nr. 57.), doppelt.

Beim Uebergange von [4020] und [0420] zu [5000], [0500] findet keine Verringerung statt; ζ'_{10} ist also bei den letzteren ebenfalls 10.

67. *Die Vielfachheit der Grundelemente* a_i, $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{a}_i$ auf den Flächen $\zeta'_{10}{}^{\text{ter}}$ Ordnung, die einer Geraden b associirt sind, ist aus Nr. 3. zu entnehmen. Man kann diese Vielfachheit, sowie auch die nach Angabe der genannten Nr. nicht zu ermittelnde Vielfachheit der Punkte A_i auch dadurch finden, dass man die Gerade a mit einem dieser Grundelemente incident sein lässt und dieselbe Untersuchung wie bei der Frage nach der Ordnung ζ'_{10} vornimmt, dabei aber von allen mit dem betreffenden Grundelemente incidenten Gebilden absieht. Dies könnte auch schon für die Flächen, die bei $\sigma = 9$ einem Punkte B associirt sind, gesagt werden. In einem andern analogen Falle (Nr. 81.) ist ein Beispiel gegeben. Ich habe die Untersuchung nur ausgeführt für die Signaturen, wo $n = 0$; *in den Fällen, wo* $\zeta'_{10} = 10$, *ergab sich der Grad der Vielfachheit von* A_i, a_i, $\mathfrak{A}_i$ *bez.* 6, 3, 3. *Ueber die Ausnahme-Signaturen giebt die folgende Tabelle Auskunft.*

Sign.	ζ'_{10}	A_i	a_i	$\mathfrak{A}_i$	
4100	6	3	3	.	
1400	6	2	2	.	
3200	6	2	3	.	
2300	6	3	2	.	
3120	9	5	3	3	
1320	9	5	3	2	
2220	8	4	3	2	(C. P. Nr. 18., 19.)

In C. P. Nr. 20. ist von einem andern Verfahren für die Signaturen $n = 0$ die Zahl ζ'_{10} und diese Vielfachheiten zu ermitteln die Rede; der Raum gestattet es nicht, auf dasselbe hier einzugehen, zumal es überdies hinter dem gebrauchten wesentlich zurücksteht.

VI $\sigma = 11$.

68. Wir gehen jetzt zur Aufstellung der Tabelle, welche von der Formel (Nr. 23.)

IV b) $$2\bar{\lambda}_9 = \dot{\lambda}_9 + \lambda_{9B}$$

herrührt; wir brauchen hier blos noch $\dot{\lambda}_9$ für $[k, l, m, 0]_9$ oder λ_{10B} für $[k, l, m+1, 0]_{10}$.

Tab. IV; $\sigma = 9$.

Sign.	λ_{9B}	$\dot{\lambda}_9$	$\bar{\lambda}_9$	Sign.	λ_{9B}	$\dot{\lambda}_9$	$\bar{\lambda}_9$
4010	0	0	0	0232	2	0	1
4001	8	0	4	0223	15	1	8
0410	0	0	0	0214	32	8	20
0401	0	0	0	0205	36	20	28
3110	2	0	1	1150	0	0	0
3101	3	1	2	1141	0	0	0
1310	0	0	0	1132	6	0	3
1301	6	0	3	1123	15	3	9
2210	2	0	1	1114	23	9	16
2201	3	1	2	1105	26	16	21
3030, 0330	0	0	0	1070, 0170	0	0	0
3021	2	0	1	1061, 0161	0	0	0
3012	11	1	6	1052, 0152	0	0	0
3003	12	6	9	1043	12	0	6
0321	0	0	0	1034	32	6	19
0312	6	0	3	1025	47	19	33
0303	21	3	12	1016	45	33	39
2130, 1230	0	0	0	1007	29	39	34
2121	4	0	2	0143	8	0	4
2112	6	2	4	0134	30	4	17
2103	12	4	8	0125	55	17	36
1221	2	0	1	0116	62	36	49
1212	9	1	5	0107	39	49	44
1203	11	5	8	0090	0	0	0
2050, 0250	0	0	0	0081	0	0	0
2041, 0241	0	0	0	0072	0	0	0
2032	6	0	3	0063	0	0	0
2023	17	3	10	0054	20	0	10
2014	24	10	17	0045	62	10	36
2005	19	17	18	0036	102	36	69
				0027	107	69	88
				0018	68	88	78
				0009	42	78	60.

Die λ_{10B} für $n = 0$, soweit sie in dieser Tab. als $\dot{\lambda}_9$ nothwendig sind, sind alle null, da $k + l$ für sie < 5 ist (Nr. 30.).

Wir notiren das Resultat $\lambda_{10B} = 60$ für $[000\overline{10}]$ als folgenden Satz: *Es seien 2 Gruppen von je 10 Geraden gegeben:* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{10}$; $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{10}$; *gesucht solche Strahlbüschel* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *bei denen* $(A\alpha)(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{10}) \barwedge (B\beta)(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{10})$; *hat* B *oder* β *eine feste Lage, so giebt es 60 solche Paare.*

Bei der directen Berechnung einiger anderen λ_{10B} ergaben sich folgende Sätze.

1) *Wenn 6 Gerade* $a_1 \cdots a_6$ *gegeben, so sind mit einer Geraden* $\mathfrak{a}$ *die Ebenen oder die Scheitel von 4 Strahlbüscheln incident, so dass* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist* (identisch mit Satz 2) in Nr. 39.).

2) *Wenn* $A_1, a_2 \cdots a_6$ *gegeben ist, so umhüllen die Ebenen der Büschel* $(A\alpha)$, *für welche* $(A\alpha)(A_1 a_2 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, einen Kegel 3. Klasse.*

3) *Sind* $A_1 A_2 a_3 \cdots a_6$ *gegeben, so giebt es zwei Strahlbüschel* $(A\alpha)$, *für welche* $(A\alpha)(A_1 A_2 a_3 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist.*

4) *Wenn* $A_1 a_2 a_3 \cdots a_7$ *gegeben sind, so giebt es vier Strahlbüschel* $(A\alpha)$, *so beschaffen, dass* $(A\alpha)(A_1 a_2 \cdots a_7)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist.*

5) *Sind acht Gerade gegeben* $a_1 \cdots a_8$, *so giebt es sechs Strahlbüschel* $(A\alpha)$, *so dass* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_8)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist.*

Z. B. den letzten Satz erhält man durch Zerlegung in $a_1 \cdots a_7$ und $a_1 \cdots a_5\ a_8$, wodurch sich eine Curve 8. und eine Fläche 4. Ordnung ergiebt, die ausser in den 6 Punkten und 5.4 Punkten, welche jene Curve mit der in Nr. 54. besprochenen cubischen Raumcurve und mit den 5 Geraden $a_1 \cdots a_5$ gemein hat, noch in 6 Punkten sich schneiden.

69. Wir gehen zur nächsten Tabelle, welche auf den Formeln

$$\text{(4a u. b)} \qquad 2\nu_{10} = \mu_{30} + \zeta_{10B}, \quad 2\mu_{10} = \nu_{10} + \lambda_{10B}$$

der Nr. 10. beruht.

Tab. 4; $\sigma = 10$.

Sign.	ζ_{10B}	λ_{10B}	μ_{10}	ν_{10}	Sign.	ζ_{10B}	λ_{10B}	μ_{10}	ν_{10}
5000,0500	3	0	1	2	3120,1320	3	0	1	2
4100,1400	3	0	1	2	3111	4	1	2	3
3200	1	1	1	1	3102	5	2	3	4
2300	3	0	1	2	1311	6	0	2	4
4020,0420	3	0	1	2	1302	6	3	4	5
4011,0411	6	0	2	4	2220	3	0	1	2
4002	4	4	4	4	2211	4	1	2	3
0402	12	0	4	8	2202	5	2	3	4

Sign.	ξ_{10B}	λ_{10B}	μ_{10}	ν_{10}
3040,0340	3	0	1	2
3031,0331	6	0	2	4
3022	10	1	4	7
3013	9	6	7	8
3004	6	9	8	7
0322	12	0	4	8
0313	18	3	8	13
0304	15	12	13	14
2140,1240	3	0	1	2
2131,1231	6	0	2	4
2122	8	2	4	6
2113	10	4	6	8
2104	8	8	8	8
1222	10	1	4	7
1213	11	5	7	9
1204	11	8	9	10
2060,0260	3	0	1	2
2051,0251	6	0	2	4
2042,0242	12	0	4	8
2033	18	3	8	13
2024	19	10	13	16
2015	14	17	16	15
2006	9	18	15	12
0233	22	1	8	15
0224	29	8	15	22
0215	26	20	22	24
0206	16	28	24	20
1160	3	0	1	2
1151	6	0	2	4
1142	12	0	4	8

Sign.	ξ_{10B}	λ_{10B}	μ_{10}	ν_{10}
1133	18	3	8	13
1124	21	9	13	17
1115	19	16	17	18
1106	12	21	18	15
1080,0180	3	0	1	2
1071,0171	6	0	2	4
1062,0162	12	0	4	8
1053,0153	24	0	8	16
1044	36	6	16	26
1035	40	19	26	33
1026	33	33	33	33
1017	21	39	33	27
1008	13	34	27	20
0144	40	4	16	28
0135	50	17	28	39
0126	45	36	39	42
0117	28	49	42	35
0108	17	44	35	26
00$\overline{10}$0	3	0	1	2
0091	6	0	2	4
0082	12	0	4	8
0073	24	0	8	16
0064	48	0	16	32
0055	76	10	32	54
0046	90	36	54	72
0037	78	69	72	75
0028	49	88	75	62
0019	30	78	62	46
000$\overline{10}$	18	60	46	32.

70. Die Tab. IV. giebt nicht die λ_{10B} für die Signaturen $m = n = 0$ dieser Tabelle, für welche auch $k + l$ nicht mehr < 5 ist. Also ist noch darzuthun, dass auch für diese $\lambda_{10B} = 0$, ausser bei [3200], wo es 1 ist. Aber *bei allen Signaturen* $[k, l, m, 0]_{10}$, *wo überhaupt einem* B *eine cubische Raumcurve associirt ist, sind sämmtliche Punkte derselben durch allgemeine Correlation associirt*, in Folge der bekannten Eigenschaft dieser Curve.

In dem Falle [3200], wo dem B eine Grade a^1 der Congruenz $[a_1, a_2]$ associirt ist, macht die Spur derselben in der Ebene α_{123} eine

Ausnahme; diese ist dem B durch Correlation mit α_{123} und BB_1B_2 als singulären Ebenen associirt.

Die μ_{10}, ν_{10} geben also *die Zahl* $\zeta_{11\,B}$ *der einem* B *für* $[k, l, m+1, n]_{11}$, *bez.* $[k, l, m, n+1]_{11}$ *associirten Punkte.*

Als $\zeta_{11\,B}$ finden wir diese Zahlen in der Tab. 6 in Nr. 90.

Aus der Tabelle 4. geht hervor, dass *jedem* B *für* $[klm0]_{11}$ *in allen Signaturen ein und nur ein Punkt associirt ist,* wie wir oben in Nr. 41. gefunden haben; ist $n=1$, so sind 2 Punkte associirt, mit Ausnahme von [3201], wo blos 1 associirt ist; ferner, bei $n=2$ ist die Zahl der dem B associirten Punkte 4, ausser bei [3112] und [2212], wo sie 3 ist, u. s. w.

71. *Die Resultate für* $n=0, 1$ *lassen sich sehr einfach noch auf folgende Weise finden.* Wir sehen zunächst von [3210] und [3201] ab. Es sei zuerst $n=0$, also $m>0$. Wir scheiden aus $[k, l, m, 0]_{11}$ ein Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ aus, so dass sich $[k, l, m-1, 0]_{10}$ ergiebt. Hierfür ist dem B eine cubische Raumcurve a^3 associirt. Dem Strahle $B\mathfrak{B}_1$ sind in den Bündeln der verschiedenen associirten Punkte A (auf a^3) Ebenen homolog, welche alle durch eine feste Sehne der Curve a^3 gehen. Also wird auch eine und nur eine Ebene dieses Büschels durch $\mathfrak{A}_1$ gehen und auf a^3 die einzige Lage von A markiren, die dem B auch für $[klm0]_{11}$ associirt ist. Sollte die Sehne selbst durch $\mathfrak{A}_1$ gehen, so würde die ganze Curve a^3 dem B auch noch für $[klm0]_{11}$ associirt sein. Wir werden einen Ort 1. Stufe solcher Punkte B finden (Nr. 84.). Wird dann noch $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ hinzugefügt, so findet man für einen solchen Punkt B auf a^3 wieder einen einzigen, der auch noch für $[k, l, m+1, 0]_{12}$ associirt ist. (C. P. Nr. 22, 36.)

Ist aber $n=1$, so scheiden wir dies eine Paar conjugirter Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ aus. Für $[klm0]_{10}$ ist dem B eine cubische Raumcure a^3 associirt. In die Ebene $B\mathfrak{b}_1$ legen wir 2 Strahlen (durch B); die ihnen in den Bündeln der associirten Punkte A homologen Ebenen bilden um zwei Sehnen der Curve projective Büschel; die Schnittlinie entsprechender Ebenen, welche je der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ homolog ist, erzeugt mithin eine Regelschaar; und da zwei Gerade derselben die $\mathfrak{a}_1$ treffen, so geben uns die beiden Punkte, die sie auf a^3 markiren, die zwei Punkte, welche dem B auch noch für $[k, l, m, 1]_{11}$ associirt sind.

Hieraus ergiebt sich allgemein:

Ist einem Punkte B für irgend eine Signatur $[klmn]$ *eine cubische Raumcurve associirt, so hat er für* $[k, l, m+1, n]$ *einen, für* $[k, l, m, n+1]$ *zwei associirte Punkte,* natürlich auf dieser Curve gelegen.

Für [3200] correspondirt einem B eine Gerade a^1 der Congruenz $[a_1a_2]$. Es wurde auch schon bemerkt, dass die Bündel für die verschiedenen Lagen von A auf a^1 denselben Schnitt mit der Ebene α_{123} haben (Nr. 57.). Wird nun zu [3200] $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zugefügt, so entspricht dem

Strahle $B\mathfrak{B}_1$ eine feste Gerade $\mathfrak{a}^1$ in dem ebenen Systeme (Felde) von α_{123}, das ja ebenfalls correlativ zum Bündel B ist; durch diese Gerade und den Punkt $\mathfrak{A}_1$ geht eine Ebene und diese markirt auf a^1 den einen Punkt A, für den die zu $B\mathfrak{B}_1$ homologe Ebene durch $\mathfrak{A}_1$ geht, also den dem B für [3210] associirten. (Vergl. Nr. 58.) (C. P. Nr. 22.) Liegt aber B in der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 = \beta_0$, so dass die 3 Strahlen B (B_1, B_2, $\mathfrak{B}_1$) in dieselbe Ebene fallen, so müssen ihre entsprechenden Geraden im Felde α_{123} durch den nämlichen Punkt gehen; die ersten beiden derselben sind aber die Spuren der Ebenen A (a_1, a_2), welche, da A auf a^1 liegt, sich in der Spur A^1 von a^1 schneiden; durch diese muss auch die dem Strahle $B\mathfrak{B}_1$ entsprechende Gerade $\mathfrak{a}^1$ gehen, so dass sie a^1 schneidet. Aus der Correlation folgt dann, dass (A^1, α_{123}) $(A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{a}^1) \barwedge (B, \beta_0)$ $(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)$. Dann kann es Punkte B in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ geben, für welche diese Gerade so liegt, dass die durch sie und $\mathfrak{A}_1$ gelegte Ebene die ganze a^1 enthält. Einem solchen Punkte würde auch für [3210] die ganze Gerade a^1 associirt sein.

72. Wo liegen diese Punkte B in der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$, für welche die Ebene $a^1 \mathfrak{a}^1$ durch den Punkt $\mathfrak{A}_1$ geht?

Wir bewegen B auf einer Geraden b in β_0, so beschreibt der Punkt A^1, wenn er der Bedingung genügt, dass

(1) $\qquad (A^1, \alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2) \barwedge (B, \beta_0)\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2)$,

eine Curve 5. Ordnung, welche durch A_1, A_2, A_3 und die Spuren von a_1, a_2 doppelt geht (Eb. Proj. Nr. 10.). Weiter, wenn $\mathfrak{A}'$ ein beliebiger Punkt in α_{123} ist, so erzeugen die Punkte A^1, B in α_{123}, β_0, so beschaffen, dass

(2) $\qquad (A^1, \alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{A}') \barwedge (B, \beta_0)\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)$,

je eine Curve 3. Ordnung (Eb. Proj. Nr. 14.), von denen die in β_0 also die b dreimal trifft; daraus folgt, dass die durch A^1 gehende Gerade $\mathfrak{a}^1$, welche der Projectivität:

(3) $\qquad (A^1, \alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{a}^1) \barwedge (B, \beta_0)\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)$

genügt, während B die b durchläuft, dreimal durch $\mathfrak{A}'$ geht, folglich eine Curve 3. Klasse umhüllt.

Die Geraden a^1 selbst stützen sich während dieser Bewegung von B auf die oben beschriebene Curve 5. Ordnung und auf a_1, a_2, welche durch Doppelpunkte dieser Curve gehen; folglich erzeugen sie eine Fläche 6. Grades. Je eine Erzeugende dieser Fläche und eine Tangente der Curve 3. Klasse sind zu derselben Lage von B auf b gehörige Geraden a^1 und $\mathfrak{a}^1$; sie schneiden sich in einem Punkte A^1 der Curve 5. Ordnung, folglich umhüllen ihre Verbindungsebenen einen Torsus von der Klasse $6 + 3 - 5 = 4$, wie man erkennt, wenn man einen Schnitt mit einer Ebene macht: man erhält dann eine Gerade und eine Curve 6. Ordnung so auf einander bezogen, dass jedem Punkte der ersteren 3 Punkte der letzteren, jedem der letzteren 1 der ersteren entspricht, in den 5 Spuren der Curve 5. O. aber entsprechende Punkte sich vereinigen. 4 Ebenen des Torsus gehen durch $\mathfrak{A}_1$, vier Punkte B giebt es also auf b, die der gestellten Forderung genügen.

Demnach giebt es in der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ *eine Curve* 4. *Ordnung* $\overline{b}^4$ *von Punkten* B, *denen auch für* [3210] *dieselbe Gerade* a^1 *associirt ist, wie schon für* [3200] (cf. Nr. 58.). Dass sie durch den Punkt $\mathfrak{B}_1$ einfach geht, ist unmittelbar ersichtlich. Fällt B in einen B_i oder in die Spur einer b_i, so kann sich A^1 auf einem Kegelschnitt bewegen, weil in der Projectivität ein Paar homologer Strahlen wegfällt; $\mathfrak{a}^1$ erzeugt dabei einen Strahlbüschel und a^1 eine Regelfläche 3., bez. 2. Grades; der Torsus ist demnach von der Klasse 2, bez. 1; also die Punkte B_1, B_2 sind doppelt, die Spuren von b_1, b_2, b_3 einfach auf unserer Curve (C. P. Nr. 32.).

Tritt nun noch ein Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$ zu [3210] hinzu, so dass sich $[3220]_{12}$ ergiebt, so kann man nun wieder schliessen, dass *einem Punkte* B *von* $\overline{b}^4$ *für* [3220] *ein Punkt der* a^1 *associirt ist.* Ist aber $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ identisch, so dass sich die Signatur [3300] ergiebt, so ist die dem $B\mathfrak{B}_2 \equiv B\mathfrak{B}_1$ homologe Gerade im Felde der Ebene α_{123} die $\mathfrak{a}^1$, welche mit a^1 eine feste Ebene erzeugt, die zu $B\mathfrak{B}_1$ in den verschiedenen Bündeln der dem B auch noch für [3210] associirten Punkte A auf a^1 homolog ist und wegen ihrer Unveränderlichkeit im Allgemeinen nicht in die Lage kommen kann, durch $\mathfrak{A}_2$ zu gehen. *Für* [3300] *haben also die Punkte der Curve* 4. *Ordnung* b^1 *keine associirten Punkte.* (C. P. Nr. 37. 38.)

73. Wir fügen, indem B wieder ganz freie Lage hat, zu [3200] das Paar conjugirter Geraden $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ zu, so dass wir haben [3201]; der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ ist in dem ebenen Systeme von α_{123} ein Punkt $\mathfrak{A}^1$ homolog, durch den dann der Strahl, der zu $B\mathfrak{b}_1$ in den verschiedenen Bündeln der Punkte A auf a^1 homolog ist, stets gehen muss; *es giebt also einen und nur einen Punkt auf* a^1, für den er auch $\mathfrak{a}^1$ trifft, *der also dem* B *auch noch für* [3201] *associirt ist,* womit die eine Abweichung bei $n = 1$ sich erklärt.

Ebenso ergiebt sich, dass *jedem Punkte* B *der Curve* $\overline{b}^4$ *auch für* [3211] *ein Punkt der Geraden* a^1 *associirt* ist, *welche ihm für* [3210] *correspondirt.*

Jeder Geraden a^1 der Congruenz $[a_1 a_2]$ ist eine cubische Raumcurve b^3 für [3200] associirt. Wir bewegen B auf derselben, wodurch eben der Bündel zu sich collinear und zu dem Bündel jedes Punktes von a^1 correlativ bleibt; für jede Lage von B auf b^3 construiren wir den der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ entsprechenden Punkt $\mathfrak{A}^1$ in α_{123}; derselbe erzeugt dort einen Kegelschnitt. Denn es seien A', A'' zwei beliebige Punkte in

α_{123}, so drehen sich die Ebenen, welche den letzteren in den verschiedenen Bündeln B homolog sind, um Sehnen der b^3 und beschreiben projective Ebenenbüschel; der der Geraden $A'A''$ homologe Strahl beschreibt demnach die durch dieselben erzeugte Regelschaar, und die den verschiedenen Punkten von $A'A''$ in den verschiedenen Bündeln entsprechenden Ebenen sind die Tangentialebenen des Trägerhyperboloids; da zwei durch $\mathfrak{b}_1$ gehen, so giebt es zwei Punkte $\mathfrak{A}^1$ auf $A'A''$.

74. Wir haben weiter bei [3200] in B eine cubische Raumcurve $b_0{}^3$ gefunden, welcher eine ganze Fläche 2. Grades $\alpha_0{}^2$ associirt ist (Nr. 57.). Fügen wir $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zu, so ergiebt sich die cubische Raumcurve, welche diese Fläche mit derjenigen — ebenfalls 2. Gr. —, die einem B von $b_0{}^3$ für [3110] associirt ist, ausser a_1 gemeinsam hat, als die dem B für [3210] associirte, weil für [3100] keine dem B porismatisch associirte Curve existirt. (Nr. 60.)

Also *jedem Punkte B von $b_0{}^3$ ist auch noch für* [3210] *eine cubische Raumcurve associirt.*

Hieraus folgt wieder, dass *wenn nochmals $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ hinzugefügt wird, also für* [3220], *bez.* [3211] *einem solchen B nun noch ein Punkt, bezw. zwei Punkte associirt sind.*

75. *Sei B_0 nun der dritte Schnittpunkt von $b_0{}^3$ mit* $\beta_0 = B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$. Es giebt ferner in α_{123} einen Punkt A_0, so beschaffen, dass $(A_0\alpha_{123})$ $(A_1A_2A_3a_1a_2) \barwedge (B_0\beta_0)$ $(b_1b_2b_3B_1B_2)$ (Ebene Proj. Nr. 4.); lassen wir in den Bündeln A_0, B_0 die Ebenen α_{123} und β_0 — die auch durch $\mathfrak{B}_1$ geht — singuläre Ebenen sein, so sind die Bündel in Folge dieser Projectivität correlativ; folglich liegt A_0 auf der cubischen Raumcurve, welche für [3210] dem B_0 associirt ist, doch wegen dieser Correlation mit singulären Ebenen kann es keine allgemeine cubische Raumcurve sein (Nr. 70.). In der That, wegen der Association von A_0 zu B_0 muss ersterer auf der Fläche $\alpha_0{}^2$ liegen, also auf deren Schnitt mit α_{123}, der durch $A_1A_2A_3$ und die Spuren von a_1a_2 geht; aber deshalb bleibt die obige Projectivität auch bestehen, wenn A_0 auf diesem Kegelschnitt verschoben wird. Daraus folgt einerseits, dass der Punkt B_0 in Bezug auf die beiden Gruppen von je 5 Punkten in α_{123} und β_0 nicht blos einen, sondern sämmtliche Punkte des Kegelschnitts durch die Gruppe in α_{123} zu seinen correspondirenden hat, dass er also der Punkt ist, den ich in der Eb. Proj. Nr. 6. den der Gruppe in β_0 verbundenen Punkt*) genannt habe.

Anderseits ergiebt sich eben der Kegelschnitt, in dem α_{123} und $\alpha_0{}^2$ sich schneiden, als Bestandtheil der dem B_0 für [3210] associirten cubischen Raumcurve, so dass der zweite Bestandtheil, der noch a_1, a_2

---

*) β_0 — hier eine Ebene — war zufällig dort der Name des verbundenen Punktes selbst.

je einmal zu treffen hat, eine Gerade a^1 der Congruenz $[a_1 a_2]$ ist; weshalb B_0 *auf der Curve* $\overline{b}^4$ *liegt.*

Nun sind wir in der Lage, *den Grad der Fläche der* a^1 zu ermitteln, *welche den Punkten von* b^4 *associirt sind*; legen wir nämlich in die Ebene α_{123} eine Gerade, so entspricht derselben für die beiden Gruppen in α_{123} und β_0 eine Curve 5. Ordnung, welche durch die 5 Punkte in β_0 und durch den ihnen verbundenen B_0 doppelt geht (Eb. Proj. 10., wie oben), also die Curve b^1, die von diesen 6 Punkten die B_1, B_2 doppelt, die andern einfach enthält (Nr. 72.), noch in 4 Punkten trifft; woraus hervorgeht, dass die den Punkten von $\overline{b}^4$ entsprechenden Punkte A^1, die Spuren der a^1 in α_{123}, eine Curve 4. Ordnung erzeugen, von der man leicht erkennt, wenn man die obige Gerade durch die Spuren von a_1, a_2 legt, dass sie durch diese einmal geht. Daraus ergiebt sich, dass die fraglichen a^1, weil sie diese Curve a_1, a_2 treffen, *eine Fläche vom* 4. *Grade* erzeugen. Da einer Geraden a für [3200] eine Fläche 6. Ordnung β^6 associirt ist, auf welcher die B_1, B_2 dreifach, die b_1, b_2, b_3 und die Curve $b_0{}^3$ doppelt liegen (Nr. 66., 67.), so hat dieselbe mit $\overline{b}^4$ noch 4 Punkte gemein, was auch zu dem eben gewonnenen Grade führt.

76. Da also ζ_{11B} *für alle Signaturen* $[klm0]_{11}$ den Werth 1 hat, so *sind die beiden Räume* A *und* B *eindeutig bezogen.* Bei [3201] entspricht wohl jedem B ein A, aber jedem A entsprechen zwei B. Im ersteren Falle erhalten wir *zwei homaloidale Systeme* und werden in Folge der genaueren Erforschung solcher Systeme noch etwas tiefer in die Sache eindringen können. Wir gehen aber nun erst zur Aufstellung der beiden nächsten Tabellen, welche uns überhaupt die Ordnungen ζ'_{11B} der einer Geraden b des Raums B associirten Curve, bez. die Ordnung ζ''_{11B} der einer Ebene β associirten Fläche von A geben; wir erinnern daran, dass $\zeta''_{11A} = \zeta'_{11B}$, $\zeta''_{11B} = \zeta'_{11A}$ (Nr. 11.).

77. Wir geben zuerst die Tabelle, welche mit Hilfe der Formeln (Nr. 24.)

$$\text{(V a u. b)} \qquad 2\dot{\pi}_9 = \overline{\pi}_9' + \Theta'_{9B}\,; \quad 2\overline{\lambda}_9' = \dot{\lambda}_9' + \Theta'_{9B} + \lambda_{9B} + \lambda'_{9B}$$

sich ergiebt.

Tab. V; $\sigma = 9$;

Sign.	Θ'_{9B}	$\dot{\pi}_9'$	$\overline{\pi}_9'$	λ_{8B}	λ'_{9B}	$\dot{\lambda}_9'$	$\overline{\lambda}_9'$
4010	12	20	28	0	4	0	8
4001	48	28	8	8	16	8	40
0410	12	20	28	0	4	0	8
0401	32	28	24	0	16	8	28

Sign.	Θ'_{9B}	$\dot{\pi}_9'$	$\bar{\pi}_9'$	λ_{9B}	λ'_{9B}	$\dot{\lambda}_9'$	$\bar{\lambda}_9'$
3110	18	17	16	2	6	2	14
3101	14	16	18	3	9	14	20
1310	14	17	20	0	6	2	11
1301	20	20	20	6	9	11	23
2210	8	14	20	2	4	4	9
2201	24	20	16	3	12	9	24
3030, 0330	3	20	37	0	1	0	2
3021	30	37	44	2	10	2	22
3012	62	44	26	11	25	22	60
3003	48	26	4	12	40	60	80
0321	26	37	48	0	10	2	19
0312	52	48	44	6	25	19	51
0303	72	44	16	21	40	51	92
2130, 1230	9	20	31	0	3	0	6
2121	26	31	36	4	10	6	23
2112	38	36	34	6	21	23	44
2103	52	34	16	12	30	44	69
1221	22	31	40	2	10	6	20
1212	44	40	36	9	21	20	47
1203	48	36	24	11	30	47	68
2050, 0250	0	20	40	0	0	0	0
2041, 0241	12	40	68	0	4	0	8
2032	56	68	80	6	20	8	45
2023	100	80	60	17	46	45	104
2014	100	60	20	24	70	104	149
2005	40	20	0	19	64	149	136
0232	48	68	88	2	20	8	39
0223	96	88	80	15	46	39	98
0214	120	80	40	32	70	98	160
0205	80	40	0	36	64	160	170
1150	0	20	40	0	0	0	0
1141	18	40	62	0	6	0	12
1132	48	62	76	6	20	12	43
1123	82	76	70	15	42	43	91
1114	100	70	40	23	60	91	137
1105	80	40	0	26	67	137	155
1070, 0170	0	20	40	0	0	0	0
1061, 0161	0	40	80	0	0	0	0

Sign.	Θ'_{9B}	$\dot{\pi}_9'$	$\bar{\pi}_9'$	λ_{9B}	λ'_{9B}	$\dot{\lambda}_9'$	$\bar{\lambda}_9'$
1052,0152	30	80	130	0	10	0	20
1043	104	130	156	12	40	20	88
1034	182	156	130	32	88	88	195
1025	200	130	60	47	130	195	286
1016	120	60	0	45	131	286	291
1007	0	0	0	29	80	291	200
0143	96	130	164	8	40	20	82
0134	178	164	150	30	88	82	189
0125	220	150	80	55	130	189	297
0116	160	80	0	62	131	297	325
0107	0	0	0	39	80	325	222
0090	0	20	40	0	0	0	0
0081	0	40	80	0	0	0	0
0072	0	80	160	0	0	0	0
0063	60	160	260	0	20	0	40
0054	200	260	320	20	80	40	170
0045	360	320	280	62	176	170	384
0036	420	280	140	102	260	384	583
0027	280	140	0	107	262	583	616
0018	0	0	0	68	160	616	422
0009	0	0	0	42	96	422	280.

78. Für die Berechnung von Θ'_{9B}, der Zahl der Axen-Ebenen-Correlationen, bei denen die Axe b' mit einer gegebenen Geraden incident ist, während die a' keiner Bedingung unterworfen ist, oder dem Grad der von den Axen b' der bei $\sigma = 9$ möglichen Axen-Ebenen-Correlationen gebildeten Fläche, scheint diesmal kein Beispiel mehr nothwendig.

Es sind ferner die $\dot{\pi}_9'$ und $\dot{\lambda}_9'$ für die Signaturen $[klm0]_9$, also die π'_{10B} und λ'_{10B} für $[k, l, m+1, 0]_{10}$ zu ermitteln, d. i. die Zahl der Axen-Correlationen für diese Signaturen, bei denen a' keiner Bedingung unterworfen ist, b' aber b treffen soll, oder der Grad der Fläche der Axen b' von Axen-Correlationen, welche bei $\sigma = 10$ möglich sind, und die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen, bei denen der eine Scheitel auf b, der andere in α liegt, oder die Ordnung der Curve der durch eine solche Correlation den Punkten auf b associirten Punkte, oder der Fläche der den Punkten von α associirten Punkte.

Für die Berechnung von π'_{10B} geben wir ebenfalls kein Beispiel; für $[00\overline{10}0]$ verweisen wir auf Nr. 59. der „R. Project.“.

Die π'_{10B} Axen a', deren associirte b' die Gerade b treffen, liegen auf der der Geraden b associirten Fläche; für die Signaturen $n = 0$, wo $\zeta'_{10\,B} = 10$, ist $\pi'_{10\,B} = 20$ und unter diesen 20 Geraden a' befinden sich die etwa vorkommenden Geraden $(2A_i)$, $(A_i, 2a_i)$, $(4a_i)$ doppelt und gehören also auch der genannten Fläche doppelt an.

Für die 6 Ausnahms-Signaturen $n = 0$ (Nr. 67.) giebt die folgende Tabelle Auskunft über die Zahl $\pi'_{10\,B}$ der Axen a' und die Vielfachheit der genannten Geraden unter ihnen:

Sign.	$\pi'_{10\,B}$	$(2A_i)$	$(4a_i)$	$(A_i, 2a_i)$
4100	8	0	.	.
1400	8	.	2	0
3200	8	0	.	2
2300	12	0	.	1
3120	17	1	.	.
1320	17	.	.	2
2220	14	0	.	2

(C. P. Nr. 19.)

79. Was die $\lambda'_{10\,B}$ der Signaturen $n = 0$ anlangt, so wissen wir aus Nr. 30., dass sie 0 sind, sobald $k + l < 4$.

$\lambda'_{10\,B}$ ist ferner 0 bei [5000], [0500], [4020], [0420]. Bei [4100] werden z. B. $A_1 A_2 A_3$ und $b_4 A_1$ singuläre Ebenen α', β' und wenn A und B in ihnen liegen, so muss sein:

$$(A\alpha')\,(A_1 A_2 A_3 a_1) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 b_3 B_1).$$

Fällt also B auf b, d. h. in die Spur $b\beta'$, so beschreibt A einen Kegelschnitt, von dem zwei Punkte in α liegen, oder bewegt sich A auf dem Schnitt $\alpha\alpha'$, so durchstreicht B die Ebene β' zweimal. Die vier Combinationen geben $\lambda'_{10\,B} = 8$.

Bei [1400] ergiebt sich genau dasselbe Resultat.

$$[3200] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_1 \\ b_1\, b_2\, b_3 B_1 B_2; \end{matrix}$$

$\alpha' : A_1 A_2 A_3$; $\beta' : B_1 B_2$; $(A\alpha')\,(A_1 A_2 A_3 a_1 a_2) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2)$. Wird A auf einer Geraden $\alpha\alpha'$ in α' bewegt, so erzeugen in einer festen Ebene durch $B_1 B_2$ die Punkte B eine Curve 5. Ordnung (Eb. Project. Nr. 10.). Legen wir B auf die Gerade $B_1 B_2$, so dass im zweiten Büschel die beiden letzten Strahlen sich vereinigen, so müssen es die im ersten auch thun; d. h. A muss dann auf $\alpha\alpha'$ der Schnitt der Verbindungslinie der Spuren $a_1\alpha'$, $a_2\alpha'$ sein. Nun genügt für diese Punkte A, B die Projectivität:

$$(A\alpha')\,(A_1 A_2 A_3 a_1) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 b_3 B_1);$$

durch Dualisirung der B-Figur erhält man in einer Ebene 3 feste Punkte und eine feste Gerade, auf der sich ein Punkt bewegt; es giebt nun eine Lage desselben, wo die Strahlen aus ihm nach den festen Punkten und die feste Gerade selbst einen einem gegebenen Büschel projectiven Büschel erzeugen. Also wird der letzten Projectivität nur durch eine Ebene β' genügt. Daraus folgt, dass die Punkte B, während A die $\alpha\alpha'$ durchläuft, eine Fläche 6. Ordnung erzeugen, auf welcher $B_1 B_2$ einfach ist, oder dass, wenn B eine Gerade b durchläuft, A in α_{123} eine Curve 6. Ordnung beschreibt, welche also den vollen Schnitt von α_{123} mit der Fläche 6 Ordnung bildet, die der b für [3200] associirt ist; demnach $\lambda'_{10\,B} = 6$.

Nehmen wir a und β, statt b und α an, so kann A auf a nur die eine Lage $a\alpha'$ annehmen und der erste Büschel wird fest; wir wissen nun aus Nr. 54., dass dann B eine cubische Raumcurve beschreibt. Mithin ist für [3200] $\lambda'_{10\,A} = 3$, oder $\lambda'_{10\,B} = 3$ für [2300].

In [3120], [1320], [2220] werden beide Ebenen α', β' fest und sind leicht zu finden; wir erhalten bez. $\lambda'_{10\,B} = 2, 2, 4$.

Das Resultat $\lambda'_{10\,B} = 280$ für $[000\overline{10}]$ kann auch so interpretirt werden:

Es sind zwei Gruppen von je 10 *Geraden gegeben:* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{10}$; $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{10}$; *und man sucht Strahlbüschel* $(A\alpha)$, $B\beta)$, *so beschaffen, dass*

$$(A\alpha)\,(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{10}) \barwedge (B\beta)\,(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{10});$$

so erzeugen, wenn B eine Gerade durchläuft oder β um eine Gerade sich dreht, die Punkte A eine Curve 280ter *Ordnung und die zugehörigen Ebenen α einen Torsus derselben Klasse*; *oder wenn B eine Ebene durchläuft, oder β um einen Punkt sich dreht, so erzeugen die A und α eine Fläche* 280ter *Ordnung, bez. Klasse.*

80. Wir gehen jetzt zur Tabelle 5 über, zu welcher die Formeln

(5 a u. b) $2\nu_{10}' = \mu_{10}' + \pi'_{10\,B} + \zeta_{10}' + \zeta_{10\,B}$; $2\mu_{10}' = \nu_{10}' + \lambda'_{10\,B}$

(Nr. 11.) führen.

Tab. 5; $\sigma = 10$;

Sign.	$\zeta_{10\,B}$	ζ'_{10}	$\pi'_{10\,B}$	$\lambda'_{10\,B}$	μ'_{10}	ν'_{10}
5000,0500	3	10	20	0	11	22
4100,1400	3	6	8	8	11	14
3200	1	6	8	6	9	12
2300	3	6	12	3	9	15
4020,0420	3	10	20	0	11	22
4011,0411	6	16	28	8	22	36
4002	4	16	8	40	36	32
0402	12	16	24	28	36	44
3120,1320	3	9	17	2	11	20
3111	4	12	16	14	20	26
3102	5	15	18	20	26	32
1311	6	12	20	11	20	29
1302	6	15	20	23	29	35
2220	3	8	14	4	11	18
2211	4	12	20	9	18	27
2202	5	12	16	24	27	30
3040,0340	3	10	20	0	11	22
3031,0331	6	19	37	2	22	42
3022	10	28	44	22	42	62
3013	9	31	26	60	62	64
3004	6	22	4	80	64	48
0322	12	28	48	19	42	65
0313	18	31	44	51	65	79
0304	15	22	16	92	79	66
2140,1240	3	10	20	0	11	22
2131,1231	6	17	31	6	22	38

Sign.	$\zeta_{10\,B}$	ζ'_{10}	$\pi'_{10\,B}$	$\lambda'_{10\,B}$	μ'_{10}	ν'_{10}
2122	8	24	36	23	38	53
2113	10	27	34	44	53	62
2104	8	24	16	69	62	55
1222	10	24	40	20	38	56
1213	11	27	36	47	56	65
1204	11	24	24	68	65	62
2060,0260	3	10	20	0	11	22
2051,0251	6	20	40	0	22	44
2042,0242	12	36	68	8	44	80
2033	18	52	80	45	80	115
2024	19	58	60	104	115	126
2015	14	46	20	149	126	103
2006	9	28	0	136	103	70
0233	22	52	88	39	80	121
0224	29	58	80	98	121	144
0215	26	46	40	160	144	128
0206	16	28	0	170	128	86
1160	3	10	20	0	11	22
1151	6	20	40	0	22	44
1142	12	34	62	12	44	76
1133	18	48	76	43	76	109
1124	21	54	70	91	109	127
1115	19	48	40	137	127	117
1106	12	29	0	155	117	79

Sign.	$\zeta'_{10\,B}$	ζ'_{10}	$\pi'_{10\,B}$	$\lambda'_{10\,B}$	μ'_{10}	ν'_{10}
1080,0180	3	10	20	0	11	22
1071,0171	6	20	40	0	22	44
1062,0162	12	40	80	0	44	88
1053,0153	24	70	130	20	88	156
1044	36	100	156	88	156	224
1035	40	112	130	195	224	253
1026	33	94	60	286	253	220
1017	21	57	0	291	220	149
1008	13	34	0	200	149	98
0144	40	100	164	82	156	230
0135	50	112	150	189	230	271
0126	45	94	80	297	271	245
0117	28	57	0	325	245	165
0108	17	34	0	222	165	108
$00\overline{10}0$	3	10	20	0	11	22
0091	6	20	40	0	22	44
0082	12	40	80	0	44	88
0073	24	80	160	0	88	176
0064	48	140	260	40	176	312
0055	76	200	320	170	312	454
0046	90	224	280	384	454	524
0037	78	188	140	583	524	465
0028	49	114	0	616	465	314
0019	30	68	0	422	314	206
$000\overline{10}$	18	40	0	280	206	132.

81. Die μ_{10}', ν_{10} geben also *die Ordnung* $\zeta'_{11\,B}$ *der Curve, welche einer Geraden* b *für* $[k,\, l,\, m+1,\, n]_{11}$ *bez.* $[k,\, l,\, m,\, n+1]_{11}$ *associirt ist, oder die Ordnung* $\zeta''_{11\,A}$ *der Fläche, welche dafür einer Ebene* α *correspondirt*; als $\zeta'_{11\,B}$ finden wir sie in Tab. 6 von Nr. 90.

Die Ordnung des Gebildes, welches für die Signatur $[klmn]_{11}$ einer Geraden a oder einer Ebene β associirt ist, ist gleich der Ordnung des zu l oder α associirten Gebildes für $[l,\, k,\, m,\, n]_{11}$ (Nr. 2.).

Aus der Tabelle geht hervor, dass *bei allen Signaturen* $\sigma = 11$, $n = 0$, *wo also eine eindeutige Transformation statt hat, einer Geraden, gleichgültig ob* b *oder* a, *eine Curve* 11. *Ordnung* a^{11}, b^{11}, *und also einer Ebene* α *oder* β *eine Fläche* 11. *Ordnung* β^{11}, α^{11} *correspondirt, mit Ausnahme der zu einander gehörigen Signaturen* [3210] *und* [2310], *wo an die Stelle der* 11. *die* 9. *Ordnung tritt.*

Aus Nr. 3., 4. folgt, dass *auf den Flächen* 11. *Ordnung die Geraden* a_i (b_i) *und die Punkte* $\mathfrak{A}_i$ ($\mathfrak{B}_i$) *dreifach sind und die Curven* 11.

Ordnung durch die A_i (B_i) dreimal gehen und die Geraden a_i (b_i) siebenmal treffen. Die Flächen 9. Ordnung α^9, β^9 bei [3210] enthalten die Geraden a_i, b_i ebenfalls dreifach, während $\mathfrak{A}_1$ auf den α^9 auch noch dreifach, $\mathfrak{B}_1$ hingegen auf den β^9 blos einfach ist; die Curven a^9, b^9 gehen durch die A_i (B_i) je zweimal und treffen die a_i (b_i) je sechsmal.

Die Ermittelungsweise dieser Ordnung 11 (9), auf die ich in C. P. Nr. 23. hingewiesen, habe ich hier, weil sie weniger vortheilhaft ist, unerwähnt gelassen.

Die Vielfachheit der Punkte B_i auf den Flächen kann auf die Weise ermittelt werden, dass man b durch einen B_i legt und die Betrachtung wiederholt, nur dabei stets von mit diesem B_i incidenten oder identischen Gebilden absieht. Wir wollen dies an einem Beispiel zeigen und der Kürze halber eine Signatur $n = 0$ wählen, weil wir da nicht erst zu den Formeln V zurückzugehen brauchen, sondern $\pi'_{10\,B}$ und $\lambda'_{10\,B}$ direct ermitteln. Wir wählen die Signatur [1400], legen b durch B_4. Von den $\pi'_{10\,B} = 8$ Axen-Correlationen bleiben blos 5, bei denen die Axe b' nicht durch B_4 geht; ebenso von den $\lambda'_{10\,B} = 8$ Correlationen mit singulären Ebenen fallen 6 weg, bei denen die Ebene β' durch B_4 geht. Ferner da auf der Fläche 6. Ordnung (Nr. 66.), welche einer Geraden a für [1400] associirt ist, die Punkte B_i dreifach (Nr. 67.) sind, so folgt daraus, dass den von B_4 verschiedenen Punkten der Geraden b, die durch B_4 geht, nur noch eine Fläche 3. Ordnung associirt ist. Dagegen an $\zeta_{10\,B}$ wird nichts geändert. Aus diesen reducirten Werthen ergiebt sich durch die Formeln (5 a u. b) $\mu_{10}' = 5$; d. h. von der der Ebene α für [1410] associirten Fläche 11. Ordnung liegen auf der beliebigen durch B_4 gelegten Geraden ausser B_4 nur noch 5 Punkte; der Punkt B_4 ist folglich sechsfach.

Aehnlich ergeben sich auch auf den übrigen Flächen α^{11}, β^{11} die Punkte A_i, B_i sechsfach, auf den Flächen α^9, β^9 bei [3210] hingegen vierfach (C. P. Nr. 23., 31.). Für $n > 0$ habe ich die Vielfachheit nicht ermittelt.

82. Wir wollen hier gleich für die Signaturen $\sigma = 11, n = 0$ die Werthe von π_{11}' ermitteln; d. h. die Zahlen der Axen-Correlationen, deren Axen a', b' nun keiner weiteren Bedingung unterworfen sind. Wir wählen als Beispiel die Signatur

$$[3130] \qquad \begin{matrix} A_1\,A_2\,A_3\,a_1\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_3 \\ b_1\;\,b_2\;\,b_3\,B_1\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,. \end{matrix}$$

I $a' : A_1 A_2$; $b' : B_1 b_3$; a' $(A_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b'$ $(b_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$. Dem a' entspricht ein Complex 2. Grades, der in dem Büschel $B_1 b_3$ nur einen nicht mit dem Punkte B_3' (auf b_3) incidenten Strahl hat; wegen der drei Combinationen 3 Lösungen.

II $a':A_1,\ a_1;\ b':b_2,\ b_3;\ a'\ (A_2A_3a_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3) \barwedge b'\ (b_2b_3B_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3)$. Dem Büschel A_1a_1, der durch den auf a_1 gelegten Punkt A_1' geht, entspricht eine Congruenz (2, 6), welche aus den Punkten B_2', B_3' (auf b_2, b_3) je einen Kegel 3. Ordnung erhält, für den $B_2'B_3'$ einfache Kante ist (R. Proj. Nr. 28). Folglich hat diese Congruenz mit der linearen Congruenz $[b_2b_3]$ die Gerade $B_2'B_3'$, je zwei weitere Kanten der Kegel aus B_2', B_3', die bez. b_3, b_2 treffen, gemein, mithin noch $1.2+1.6-(2.2+1)=3$ andere nicht mit B_2' oder B_3' incidente Strahlen. Die 3 Combinationen führen zu 9 Lösungen.

III $a':A_1;\ b':B_1,\ b_2,\ b_3;\ a'\ (A_2A_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3) \barwedge b'\ (b_2b_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3)$; dem b' entspricht eine Congruenz (1, 3), von der also eine Gerade durch A_1 geht; durch 3 Combinationen 3 Lösungen.

IV $a':a_1;\ b':b_1b_2b_3;\ a'(A_1A_2A_3a_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3) \barwedge b'(b_1b_2b_3B_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3)$; dem Complexe $[a_1]$ entspricht, weil a_1 duch den Grundpunkt A_1' geht, ein Complex 4. Grades, der die ganzen Bündel um die Punkte B_1', B_2', B_3' (auf b_1, b_2, b_3) einfach enthält (R. Project. Nr. 37.), also mit der Regelschaar $[b_1b_2b_3]$ nur $2.4-3=5$ mit keinem der 3 Punkte B_i' incidente Geraden gemein hat. 5 Lösungen.

Im Ganzen demnach $3+3.3+3.1+5=20$ Lösungen.

Und ebenso ergiebt sich bei den andern Signaturen $\sigma=11$, $n=0$ $\pi_{11}'=20$, ausser bei [3210] (oder [2310]), wo $\pi_{11}'=14$ ist.

Bei $[00\overline{10}0]$ kommt der Satz Nr. 61. der R. Proj. — das letzte Resultat der damaligen Untersuchung — zur Verwendung.

83. *Bei* $\sigma=11$ *giebt es demnach stets* π_{11}' *Paare von Geraden* a', b', *so beschaffen, dass jedem Punkte der einen jeder Punkt der andern durch eine exceptionelle Correlation, von der* a', b' *die singulären Axen sind, associirt ist. Diese* π_{11}' *Geraden* a', b' *liegen auf den Flächen* $\zeta_{11\,B}''^{ter}$, *bez.* $\zeta_{11\,A}''^{ter}$ *Ordnung, welche den Ebenen* β, α *der beiden Räume im andern associirt sind, je einfach,* weil β, α von b', a' je einmal getroffen wird; *also auch insbesondere, wenn* $n=0$, *wo sich eine eindeutige Transformation ergiebt, liegen sie beziehlich auf allen Flächen* α^{11}, β^{11}, *oder in dem einen Falle* α^9, β^9. *Ihre Zahl ist dann stets* 20, *ausgenommen in diesem einen Falle, wo sie* 14 *ist.* Unter diesen 20 Geraden a', bez. b' befinden sich die etwaigen Geraden $(2A_i)$, $(4a_i)$, $(A_i,\ 2a_i)$, bez. $(2B_i)$ u. s. w. je einfach; unter den 14 Geraden a', b' bei [3210] nur die 3 Geraden $(A_i\,a_1a_2)$, bez. die 6 Geraden $(B_i,\ 2b_i)$ und nicht die $(2A_i)$, bez. $(2B_i)$. Ferner gehen durch jeden A_i, bez. B_i sechs von den Geraden a', bez. b', in dem Falle [3210] jedoch nur 3; und jede Gerade a_i, bez. b_i wird von 14 a', bez. b' getroffen, bei [3210] aber nur von 10.

Die 20 (bez. 14) Geraden a' (oder b') bilden diejenigen Fundamentalcurven der homaloidischen Flächensysteme in A (oder B), von denen Cremona in Nr. 7. seines Aufsatzes Sulle trasformazioni razionali nello spazio *) spricht.

84. Wir lassen nun 2 Flächen α^{11}, die zwei Ebenen β associirt sind, sich durchschneiden, sehen also zunächst noch von [3210] oder [2310] ab; zum Schnitte gehören die Curve a^{11}, welche dem Schnitt der beiden Ebenen correspondirt, und die 20 Geraden a'; es bleibt also eine Curve 90. Ordnung. Jedem Punkte derselben entspricht ein Punkt jeder der beiden Ebenen, aber nicht auf der Schnittlinie derselben, also zwei in der That verschiedene Punkte, folglich nach Nr. 41. eine ganze cubische Raumcurve; und da diese jede Ebene β dreimal trifft, so ist jeder Punkt unserer Curve ein dreifacher Punkt für alle Flächen α^{11}, die Curve selbst also eine auf allen Flächen α^{11} dreifache Curve 10^{ter} Ordnung a_0^{10}; sie ist die von Cremona Nr. 6. besprochene Fundamentalcurve (Salmon-Fiedler ebenfalls S. 479).

Dass jeder Punkt $\mathfrak{A}_i$ die Eigenschaft hat, einer ganzen cubischen Curve associirt zu sein, leuchtet unmittelbar ein (Nr. 3.); also liegen die Punkte $\mathfrak{A}_i$ auf a_0^{10}. Ebenso folgt aus derselben Nr., dass jedem Punkt A einer Geraden a_i, z. B. a_1, eine cubische Raumcurve für $[klm0]_{11}$ associirt ist, dieselbe nämlich, welche für $[k, l-1, m+1, 0]_{10}$ associirt ist, wobei $a_1 B_1$ ersetzt ist durch das Paar der conjugirten Punkte $\mathfrak{A}'$, B_1, von denen $\mathfrak{A}'$ auf a_1 liegt. Bewegt man A auf a_1, so erzeugt diese associirte Curve eine Fläche 7^{ter} Ordnung, da es auf a_1 7 Punkte giebt, welche mit Punkten einer beliebigen Geraden b associirt sind, die Schnittpunkte der a_1 mit der associirten Curve von b. Bei [3210] oder [2310] wird diese Fläche 6. Ordnung sein (Nr. 81.; C. P. Nr. 27.).

Wir haben also in A *wie* B *einfach unendlich viele Punkte, denen auch für* $[klm0]_{11}$ *nicht blos ein Punkt, sondern eine ganze cubische Raumcurve associirt ist. Diese Punkte bilden eine Curve* 10. *Ordnung* a_0^{10}, b_0^{10}. *Zu ihr gehören die etwa vorhandenen Geraden* a_i, b_i. Für den übrigen Theil der Curve b_0^{10} ist die jedem Punkte B desselben associirte Curve stets dieselbe, wie für $[k, l, m-1, 0]_{10}$, so dass die jetzige Ausnahme-Signatur [3210] auch zu der früheren Ausnahme-Signatur [3200] führt. Um die Fläche der von den associirten Curven der Punkte der von b_0^{10} nach Abzug der b_i verbleibenden Restcurve b_0^{10-k} zu finden, müssen wir die Zahl derjenigen Schnitte von b_0^{10-k} mit der einen Geraden a für $[k, l, m-1, 0]$ associirten Fläche aufsuchen, welchen in Wirklichkeit für letztere Signatur eine cubische Raumcurve und nicht eine Fläche associirt ist. Wir werden dies an einigen Beispielen thun und damit zugleich diejenigen Punkte finden, welchen für $\sigma = 10$ eine ganze Fläche entspricht.

*) Annali di Matematica, ser. II. t. V. S. 131. Cf. auch Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raums 2. Aufl. Bd. II. S. 476, spec. für die obige Stelle S. 479.

Dazu ist aber noch nothwendig, das Verhalten der Curve b_0^{10-k} zu den Grundelementen zu kennen. Durch die $\mathfrak{B}_i$ geht sie einmal, wie oben gezeigt. Auf den Flächen β^{11} liegen die Punkte B_i sechsfach (Nr. 81.); also geht der vollständige Schnitt 36mal durch jeden; da nun jede b^{11} durch einen B_i dreimal geht, von den 20 b' sechs ihn enthalten (Nr. 83.), so bleiben $\frac{27}{3^2} = 3$ Zweige der Curve b_0^{10} oder vielmehr der Restcurve b_0^{10-k}, die ihn passiren.

Um die Begegnungspunkte einer b_i mit der b_0^{10-k} zu ermitteln, bringen wir auf der b_i eine Correspondenz hervor: B' sei ein Punkt der b_i, zu der einen der beiden sich schneidenden Flächen β^{11} gerechnet; b_i ist auf derselben dreifach; die 3 Berührungsebenen von B' schneiden aus der andern Fläche drei Curven 8. O., welche der b_i in 24 Punkten B'' begegnen. Umgekehrt führt jeder Punkt B'' zu 24 Punkten B'; so dass wir 48 Berührungsebenen beider Flächen erhalten, die je in demselben Punkte von b_i tangiren; von diesen Punkten kommen 7 auf die Schnittpunkte der b^{11} mit b_i, 14 auf Schnitte von b' und b_i; die 27 übrigen sind $\frac{27}{3^2} = 3$ Begegnungspunkte der auf beiden Flächen dreifachen Curven b_i und b_0^{10-k}, in denen also beide Flächen je eine neunfache Tangentialebene haben.

Die Curven b_0^{10-k} (a_0^{10-l}) gehen demnach durch jeden B_i (A_i) dreimal, durch jeden $\mathfrak{B}_i$ ($\mathfrak{A}_i$) einmal und treffen jede b_i (a_i) dreimal. (C. P. Nr. 25.)

85. Jedem Punkte B_i z. B. B_1 ist eine ganze Fläche associirt, diejenige nämlich, die ihm für $[k, l-1, m, n]_9$ correspondirt, wobei a_1B_1 weggelassen ist; also, wenn $n = 0$, eine cubische Fläche, ausser bei den Signaturen [3210] und [2310], d. i. bei unsern jetzigen Ausnahme-Signaturen.

86. Die Flächen 3. Ordnung, welche so den Punkten B_i associirt sind, und zwar doppelt gerechnet (Cremona, Nr. 13.; Salmon-Fiedler S. 481), die Flächen ferner 7. Ordnung, welche den Geraden b_i correspondiren, und die der Restcurve b_0^{10-k} associirte setzen *die Jacobi'sche Fläche des homaloidischen Systems in* A zusammen. Nun ist die Ordnung derselben nach Cremona Nr. 6. (Salmon-Fiedler S. 479) $4(11-1) = 40$.

Fassen wir also zuerst die Fälle ins Auge, wo einer Geraden b oder a für $[klm0]_{10}$ eine Fläche 10. Ordnung α^{10}, β^{10} associirt ist, so bleibt, bei $[k, l, m+1, 0]_{11}$, für die der Restcurve b_0^{10-k} associirte Fläche die Ordnung $40 - (2.3.l + 7k)$. Die Restcurve selbst trifft eine Fläche β^{10} in $10(10-k)$ Punkten; darunter befinden sich die Punkte B_i, $\mathfrak{B}_i$ beziehlich 18-, 3fach, weil sie auf b_0^{10-k} dreifach, einfach, auf β^{10} sechsfach, dreifach sind, ferner die 3 Schnittpunkte mit jeder

b_i ebenfalls dreifach, da die b_i auf β^{10} dreifach sind; es bleiben demnach $100 - 10k - 18l - 9k - 3m$ Punkte. Unter diesen müssen sich die $40 - (6l + 7k)$ Punkte befinden, die den Schnitten der a, zu welcher β^{10} associirt ist, mit dem der Restcurve associirten Theile der Jacobi'schen Fläche entsprechen; so dass noch $60 - 3(2k + 2l + m) - 6(k + l) = 30 - 6(k + l)$ weitere Punkte existiren. Jeder dieser Punkte B_0 von b_0^{10-k} hat deshalb für $[klm0]$ noch einen associirten Punkt ausserhalb der cubischen Curve, welche ihm für $[k, l, m+1, 0]$ sowohl als für $[k, l, m, 0]$ associirt ist; folglich ist ihm für $[klm0]$ eine ganze cubische Fläche associirt (Nr. 43.), und da die Gerade a sie dreimal schneidet, so ist dieser Punkt B_0 dreifach auf β^{10}, also die Zahl der Punkte B_0 $\frac{1}{3}[30 - 6(k + l)] = 10 - 2(k + l)$.

Wir betrachten noch einen der drei Fälle $m > 0$, wo einer a für $[klm0]_{10}$ eine Fläche von niedrigerer als 10. Ordnung correspondirt, nämlich

$$[3120]_{10} \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\ b_2\ b_3\ B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2. \end{matrix}$$

Die Jacobi'sche Fläche in A besteht, für $[3130]_{11}$, aus einer doppelten cubischen Fläche, drei Flächen 7. Ordnung und demnach noch aus einer Fläche 13. Ordnung. Die Restcurve ist 7. Ordnung und trifft die Fläche β^9 *), welche einer a für $[3120]$ correspondirt, ausser in B_1, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, auf b_1, b_2, b_3, was $3.5 + 2.2 + 3.3.3 = 46$ Schnittpunkte macht, noch in 17 Punkten, von denen 4 nicht mit Schnittpunkten der Geraden a mit dem Theile 13. Ordnung der Jacobi'schen Fläche associirt sind; diesen entsprechen für $[3120]$ Flächen 2. Grades, dieselben wie für $[3110]$; so dass sie auf den β^9 doppelt liegen und die Zahl dieser Punkte B_0 $2 = 10 - 2(k + l)$ ist. Die beiden andern Fälle (Nr. 66.) führen zu demselben Resultat. Ist $m = 0$, so weist die Zahl $10 - 2(k + l)$ auf die Nichtexistenz von solchen Punkten B_0 hin; und die Correspondenz (1, 1) zwischen den zweifach unendlichen Systemen von cubischen Raumcurven (kA_i, la_i) und (kb_i, lB_i) lässt von vornherein die Unmöglichkeit solcher Punkte erkennen, so dass wir uns den obigen Beweis für diese Fälle $m = 0$ — $[3200]$ und $[2300]$ mit inbegriffen — ersparen können.

Wenn also die Signatur $[klm0]_{10}$ *gegeben ist, so giebt es in jedem der beiden Räume, abgesehen von den* $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, *den Punkten auf den* a_i, b_i, $10 - 2(k + l)$ *Punkte* A_0, B_0, *denen nicht blos eine cubische Curve, sondern eine ganze Fläche* 3. *Ordnung associirt ist; nur bei* $[3120]$ *correspondirt den* B_0, *bei* $[2220]$ *den* A_0 *und* B_0 *eine Fläche* 2. *Ordnung.* Diese Punkte befinden sich auf den Flächen, welche den Geraden des andern Raums correspondiren, dreifach (bez. doppelt). (C. P. Nr. 29., 30.)

---

*) In C. P. Nr. 30. steht aus Versehen β^6 statt β^9.

Stellen wir uns $[k, l, m-1, 0]_9$ vor, wo das Paar $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ weggelassen ist; so werden also die B_0 so sein, dass die Ebenen, welche dem Strahle $B_0\mathfrak{B}_2$ in den Bündeln der Punkte der einem B_0 in Bezug auf $[k, l, m-1, 0]$ associirten cubischen Fläche homolog sind, alle nach dem auf dieser Fläche selbst befindlichen Punkte $\mathfrak{A}_2$ convergiren. Bei [3120] und [2220], wo den B_0 je eine Fläche 2. Grades associirt ist, convergiren die Ebenen, die dem Strahle $B\mathfrak{B}_2$ in den Bündeln der Punkte dieser Fläche homolog sind, nach einem Punkte von $A_1A_2A_3$, bez. $A_1A_2\mathfrak{A}_1$, folglich werden sie sich um die Gerade drehen, die diesen Punkt mit $\mathfrak{A}_2$ verbindet.

87. Die *Ausnahme-Signatur* [3210] (oder [2310], wenn die Räume vertauscht werden) ist noch nicht hinreichend erledigt:

$$\begin{matrix} A_1\, A_2 A_3\, a_1\, a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 . \end{matrix}$$

Der Schnitt der Flächen α^9, β^9, welche zwei Ebenen β, α associirt sind, enthält die Curve a^9, b^9, ferner die 14 Geraden a', b' (Nr. 83.); es bleibt also eine Curve 58. Ordnung.

Nun haben wir aber schon in jedem der beiden Räume A, B eine ebene Curve 4. Ordnung $\overline{a}^4$, $\overline{b}^4$ gefunden, gelegen in $A_1A_2A_3$, $B_1B_2\mathfrak{B}_1$, so beschaffen, dass jedem ihrer Punkte eine Gerade b^1, a^1 entspricht (Nr. 58., 72.). Da b^1, a^1 jede Ebene β, α einmal trifft, so liegen die Curven $\overline{a}^4$, $\overline{b}^4$ bez. auf den Flächen α^9, β^9 einfach und gehören also zur Curve 58. Ordnung.

Der Rest stellt sich aus ähnlichen Gründen wie früher als auf allen Flächen α^9, β^9 dreifache Curve 6. Ordnung heraus; im Raume A besteht er aus den beiden Geraden a_i und einer Raumcurve 4. Ordnung $a_0{}^4$, welche noch einmal durch jeden der 3 Punkte A_i geht und jede der beiden b_i noch zweimal trifft, so dass $a_0{}^4$ und $\overline{a}^4$ die volle Restcurve $a_0{}^8$ geben und das allgemeine Verhalten derselben gegen A_i, a_i zeigen. Mit jedem der Punkte der $a_0{}^4$ ist dieselbe cubische Raumcurve associirt, wie für [3200].

In B aber ist die Curve 6. Ordnung zusammengesetzt aus den drei b_i und der cubischen Raumcurve $b_0{}^3$, da jedem Punkte dieser für [3210] eine cubische Raumcurve associirt ist (Nr. 57., 74.)

Die J a c o b i s c h e Fläche, hier von der Ordnung $4(9-1)=32$, besteht in A 1) aus zwei doppelten Flächen 2. Grades, den beiden B_i associirt, 2) aus drei Flächen 6. Ordnung, den drei b_i entsprechend, (Nr. 84.), 3) aus der Fläche $a_0{}^2$, mit $b_0{}^3$ associirt, 4) der Regelfläche 4. Grades der a^1, die den Punkten von $\overline{b}^4$ correspondiren (Nr. 75.); in B dagegen 1) aus drei doppelten Flächen 2. Grades, 2) aus zwei Flächen 6. Ordnung, 3) aus dem Hyperboloide β^2_{123}, das der

Curve $\bar{a}^4$ associirt ist, 4) einer Fläche 6. Ordnung, durch die cubischen Raumcurven erzeugt, welche den Punkten der $a_0{}^4$ correspondiren. (C. P. Nr. 32—34.)

Jede Sehne der $a_0{}^4$ hat zur associirten Curve ein System von 3 cubischen Raumcurven, von denen zwei den Schnittpunkten mit $a_0{}^4$ entsprechen, die dritte aber, Punkt für Punkt, den übrigen Punkten der Sehne associirt ist; diese trifft zwar auch b_1, b_2, b_3 zweimal, geht aber nicht durch B_1, B_2. Gäbe es nun dreifache Secanten, so würde für die übrigen Punkte nichts bleiben; es zeigt sich so, dass $a_0{}^4$ von der ersten Species ist. Den Sehnen von $b_0{}^3$ entsprechen ebenfalls — abgesehen von den Schnittpunkten mit der Curve — cubische Raumcurven, welche a_1, a_2 je zweimal treffen, durch A_1, A_2, A_3 aber nicht gehen. Von diesen cubischen Raumcurven, welche gewissen Geraden Punkt für Punkt correspondiren, geht in A durch jeden Punkt eine, in B zwei.

VII. $\sigma = 12$.

88. Wir gehen nun zu der Aufstellung der Tabelle VI über mit Hilfe der Formeln (Nr. 25.)

$$\text{(VIb)} \qquad 2\bar{\lambda}_{10} = \dot{\lambda}_{10} + \lambda_{10B} + \lambda'_{10B}.$$

Tab. VI; $\sigma = 10$.

Sign.	λ_{10B}	λ'_{10B}	$\dot{\lambda}_{10}$	$\bar{\lambda}_{10}$
5000, 0500	0	0	0	0
4100, 1400	0	8	0	4
3200	1	6	1	4
2300	0	3	1	2
4020, 0420	0	0	0	0
4011, 0411	0	8	0	4
4002	4	40	4	24
0402	0	28	4	16
3120, 1320	0	2	0	1
3111	1	14	1	8
3102	2	20	8	15
1311	0	11	1	6
1302	3	23	6	16
2220	0	4	0	2
2211	1	9	2	6
2202	2	24	6	16

Sign.	λ_{10B}	λ'_{10B}	$\dot{\lambda}_{10}$	$\bar{\lambda}_{10}$
3040, 0340	0	0	0	0
3031, 0331	0	2	0	1
3022	1	22	1	12
3013	6	60	12	39
3004	9	80	39	64
0322	0	19	1	10
0313	3	51	10	32
0314	12	92	32	68
2140, 1240	0	0	0	0
2131, 1231	0	6	0	3
2122	2	23	3	14
2113	4	44	14	31
2104	8	69	31	54
1222	1	20	3	12
1213	5	47	12	32
1204	8	68	32	54

Sign.	λ_{10B}	λ'_{10B}	$\dot{\lambda}_{10}$	$\bar{\lambda}_{10}$
2060,0260	0	0	0	0
2051,0251	0	0	0	0
2042,0242	0	8	0	4
2033	3	45	4	26
2024	10	104	26	70
2015	17	149	70	118
2006	18	136	118	136
0233	1	39	4	22
0224	8	98	22	64
0215	20	160	64	122
0206	28	170	122	169
1160	0	0	0	0
1151	0	0	0	0
1142	0	12	0	6
1133	3	43	6	26
1123	9	91	26	63
1115	16	137	63	108
1106	21	155	108	142
1080,0180	0	0	0	0
1071,0171	0	0	0	0
1062,0162	0	0	0	0

Sign.	λ_{10B}	λ'_{10B}	$\dot{\lambda}_{10}$	$\bar{\lambda}_{10}$
1053,0153	0	20	0	10
1044	6	88	10	52
1035	19	195	52	133
1026	33	286	133	226
1017	39	291	226	278
1008	34	200	278	256
0144	4	82	10	48
0135	17	189	48	127
0126	36	297	127	230
0117	49	325	230	302
0108	44	222	302	281
00$\overline{10}$0	0	0	0	0
0091	0	0	0	0
0082	0	0	0	0
0073	0	0	0	0
0064	0	40	0	20
0055	10	170	20	100
0046	36	384	100	260
0037	69	583	260	456
0028	88	616	456	580
0019	78	422	580	540
00010	60	280	540	440.

89. Es sind für diese Tabelle nur noch die $\dot{\lambda}_{10}$ für die Signaturen $[k, l, m, 0]_{10}$ oder die λ_{11B} für die Signaturen $[k, l, m+1, 0]_{11}$ direct zu ermitteln. Aus Nr. 30. ist aber zu nehmen, dass $\lambda_{11B=0}$, wenn $k + l < 5$; es bleiben nur die 6 ersten Signaturen der vorhergehenden Tabelle. λ_{11B} ist aber die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen, wo der Scheitel B auf einer Geraden b liegt, oder die Ordnung der Fläche der Punkte B, welche Punkten A durch solche Correlationen associirt sind. Es ergiebt sich leicht, dass $\lambda_{11B} = 0$ ist auch für [5010], [0510], [4110], [1410].

Bei [3210] wird $\alpha' = A_1 A_2 A_3$, $\beta' = B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$; $(A\alpha')(A_1 A_2 A_3 a_1 a_2)$ $\overline{\wedge}$ $(B\beta')(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2)$. Jedem Punkte B in β' oder A in α' (z. B. der Spur von b oder a) entspricht ein und nur ein Punkt A in α' oder B in β', also ist $\lambda_{11B} = 1$ für [3210] und [2310].

Zu dem früher gefundenen ergiebt sich, dass zwischen den Punkten dieser beiden Ebenen eine eindeutige Association durch Correlation mit singulären Ebenen stattfindet; den Punkten freilich der beiden Curven $\bar{a}^4$, $\bar{b}^4$ entspricht zwar in der andern Ebene auch nur ein Punkt ausserdem aber noch unendlich viele Punkte, die einer Geraden b^1, a^1, und zwar durch allgemeine Correlation.

Der Werth von $\bar{\lambda}_{10}$ für $[0001\bar{0}]$ oder von λ_{11B} für $[000\overline{11}]$ führt zu folgendem Satze: *Gegeben sind zwei Gruppen von je* 11 *Geraden* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{11}$, $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{11}$; *wir suchen solche Paare von Strahlbüscheln* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *dass* $(A\alpha)\ (\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{11}) \barwedge_{'} (B\beta)\ (\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{11})$; *die Scheitel* A, B *erfüllen je eine Fläche* 440. *Ordnung, die Ebenen* α, β *umhüllen je eine Fläche* 440. *Klasse.*

90. Wir können nun gleich zur Aufstellung der Tabelle 6 schreiten, zu welcher die Formeln (Nr. 12.)

$$(6\,\text{a u. b}) \qquad 2\nu_{11} = \mu_{11} + \zeta_{11B} + \zeta'_{11B}; \quad 2\mu_{11} = \nu_{11} + \lambda_{11B}$$

führen.

Tab. 6; $\sigma = 11$.

Sign.	ζ_{11B}	ζ'_{11B}	λ_{11B}	μ_{11}	ν_{11}
5010,0510	1	11	0	4	8
5001,0501	2	22	0	8	16
4110,1410	1	11	0	4	8
4101,1401	2	14	4	8	12
3210,2310	1	9	1	4	7
3201	1	12	4	7	10
2301	2	15	2	7	12
4030,0430	1	11	0	4	8
4021,0421	2	22	0	8	16
4012,0412	4	36	4	16	28
4003	4	32	24	28	32
0403	8	44	16	28	40
3130,1330	1	11	0	4	8
3121,1321	2	20	1	8	15
3112	3	26	8	15	22
3103	4	32	15	22	29
1312	4	29	6	15	24
1303	5	35	16	24	32
2230	1	11	0	4	8
2221	2	18	2	8	14
2212	3	27	6	14	22
2203	4	30	16	22	28
3050,0350	1	11	0	4	8
3031,0341	2	22	0	8	16
3032,0332	4	42	1	16	31
3023	7	62	12	31	50
3014	8	64	39	50	61
3005	7	48	64	61	58
0323	8	65	10	31	52
0314	13	79	32	52	72
0305	14	66	68	72	76
2150,1250	1	11	0	4	8
2141,1241	2	22	0	8	16
2132,1232	4	38	3	16	29
2123	6	53	14	29	44
2114	8	62	31	44	57
2105	8	55	54	57	60
1223	7	56	12	29	46
1214	9	65	32	46	60
1205	10	62	54	60	66
2070,0270	1	11	0	4	8
2061,0261	2	22	0	8	16
2052,0252	4	44	0	16	32
2043,0243	8	80	4	32	60
2034	13	115	26	60	94
2025	16	126	70	94	118
2016	15	103	118	118	118
2007	12	70	136	118	100
0234	15	121	22	60	98
0225	22	144	64	98	132
0216	24	128	122	132	142
0207	20	86	160	142	124

Sign.	ζ_{11B}	ζ'_{11B}	λ_{11B}	μ_{11}	ν_{11}
1170	1	11	0	4	8
1161	2	22	0	8	16
1152	4	44	0	16	32
1143	8	76	6	32	58
1134	13	109	26	58	90
1125	17	127	63	90	117
1116	18	117	108	117	126
1107	15	79	142	126	110
1090, 0190	1	11	0	4	8
1081, 0181	2	22	0	8	16
1072, 0172	4	44	0	16	32
1063, 0163	8	88	0	32	64
1054, 0154	16	156	10	64	118
1045	26	224	52	118	184
1036	33	253	133	184	235
1027	33	220	226	235	244
1018	27	149	278	244	210
1009	20	98	256	210	164

Sign.	ζ_{11B}	ζ'_{11B}	λ_{11B}	μ_{11}	ν_{11}
0145	28	230	48	118	188
0136	39	271	127	188	249
0127	42	245	230	249	268
0118	35	165	302	268	234
0109	26	108	284	234	184
$00\overline{11}0$	1	11	0	4	8
$00\overline{10}1$	2	22	0	8	16
0092	4	44	0	16	32
0083	8	88	0	32	64
0074	16	176	0	64	128
0065	32	312	20	128	236
0056	54	454	100	236	372
0047	72	524	260	372	484
0038	75	465	456	484	512
0029	62	314	580	512	444
$001\overline{10}$	46	206	540	444	348
$000\overline{11}$	32	132	440	348	256.

91. Die μ_{11}, ν_{11} geben uns also wieder *die Zahlen* ζ_{12B} *d. i. die Ordnung der Fläche der Punkte* $(B)_{12}$, *welche für* $[k, l, m+1, n]_{12}$, *bez.* $[k, l, m, n+1]_{12}$ *associirte Punkte* $(A)_{12}$ *besitzen;* jedoch nur für solche Signaturen, bei denen **nicht** m, n beide null sind. Die Tabelle zeigt, dass *für* $n=0$ *alle Signaturen* (die dieser Bedingung genügen) ζ_{12B} *und also auch* $\zeta_{12A} = 4$ *haben, ferner für* $n = 1$ *ist* $\zeta_{12B} = \zeta_{12A} = 8$, *ausser bei* [3211] *und* [2311], *wo es* 7 *ist;* $n = 2$ hat schon 6 Ausnahmen von dem Werthe 16 der Ordnung u. s. w.

Es bleiben noch die 7 Signaturen: [6000], [0600]; [5100], [1500]; [4200], [2400]; [3300]. Wir können bei jeder von ihnen ein Paar $A_i b_i$ oder $B_i a_i$ ersetzen durch zwei Paare conjugirter Punkte $\mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i'$, wo $\mathfrak{A}_i$ mit A_i identisch, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_i'$ mit b_i incident sind, bez. durch $\mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{A}_i' \mathfrak{B}_i$, und es wird sich dabei herausstellen, dass die Identität zweier $\mathfrak{A}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$, zu der diese Auflösung führt, bei den sechs ersten Signaturen auf die Formel (6a) keinen Einfluss hat. Sie bewirkt auf den beiden eindeutig bezogenen Curven, die wir bei der Ableitung dieser Formel betrachtet haben, keine weiteren vereinigten entsprechenden Punkte. Also ist auch bei diesen 6 Signaturen $\zeta_{12B} = \zeta_{12A} = 4$. Hingegen

$$[3300] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 a_3 \\ b_1 \; b_2 \; b_3 B_1 B_2 B_3, \end{matrix}$$

welches wir in

$$[3220] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 \; a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 \; b_2 \; b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

verwandeln wollen, führt zu einer Ausnahme. Wir wissen (Nr. 89.), dass der jedem *beliebigen* Punkte B der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$, also z. B. auch der der Spur von b für

$$[3210] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 \; a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1 \; b_2 \; b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

associirte Punkt A in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ liegt und durch Correlation mit singulären Ebenen associirt ist. $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1$ sei das in Nr. 12. hinzugefügte Paar. Die beiden Ebenen von $B = (b, B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)$ nach den durch $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$ gelegten Geraden $\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''$ gehen durch $B \mathfrak{B}_1$, schneiden also die singuläre Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ in dem nämlichen Strahle des Büschels derselben, also entspricht beiden nach den Eigenschaften dieser exceptionellen Correlation derselbe Strahl der singulären Ebene im Bündel A. Es kommt also durch die Identität von $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ zu den in Nr. 12. betrachteten vereinigten entsprechenden Punkten der beiden Curven durch diesen Strahl noch ein weiterer hinzu. Vergl. Nr. 66.

Mithin ergiebt sich für [3300] $\zeta_{12B} = 3$, und da $k = l$ ist, auch $\zeta_{12A} = 3$.

Von sämmtlichen Signaturen $[klm0]_{12}$ *bildet also* [3300] *eine Ausnahme; während im Allgemeinen die Flächen der Punkte* $(A)_{12}$, $(B)_{12}$, *welche associirte Punkte* (B_{12}), $(A)_{12}$ *besitzen, zwei Flächen* 4. *Ordnung* α^4, β^4 *erzeugen, befinden sie sich bei* [3300] *auf zwei Flächen* 3. *Ordnung* α^3, β^3.*)

92. Wenn wir die Gerade b, welche in Nr. 12. benutzt wurde, durch einen der Punkte B_i legen und stets von den mit diesen B_i incidenten Gebilden absehen, so erhalten wir die Vielfachheit der Punkte B_i auf der Fläche der $(B)_{12}$. Diejenige der b_ι, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{b}_\iota$ ergiebt sich nach Nr. 3., wenn auch die Incidenz von b mit ihnen ebenfalls zu derselben führen würde. Auf den Flächen α^4, β^4 bei $n = 0$ sind die A_i, B_i doppelt, die a_i, b_i und die $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ einfach; auf den α^3, β^3 bei [3300] sind auch die A_i, B_i nur einfach. (C. P. Nr. 36.) Die Grade der Vielfachheit von A_i, B_ι; a_ι, b_ι; $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ auf den α^8, β^8 bei $n = 1$ sind doppelt so gross als bei α^4, β^4; auf α^7, β^7 bei [3211] sind jedoch die A_i, B_i nur dreifach, die a_i, b_i; $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ ebenfalls doppelt. Die Vielfachheit von $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ ist bei allen Flächen, wo $n = 1$, gleich 1.

Da jedem Punkte A, B der Curven a_0^{10}, b_0^{10}, die sich bei $[klm0]_{11}$

---

*) Auf diese Ausnahme machte mich Hirst, gleichzeitig mit der früheren, aufmerksam; ich verweise noch bei dieser Gelegenheit auf die analoge Untersuchung im Probl. der Coll. (Nr. 24), wo sich in jedem Raume eine Fläche 2. Grades ergab.

ergaben, eine cubische Raumcurve associirt ist, so hat er für $[k, l, m+1, 0]_{12}$ einen, für $[klm\,1]_{12}$ zwei associirte Punkte auf derselben (Nr. 71.). Also *liegen die Curven* a_0^{10}, b_0^{10} *auf den Flächen* α^4, β^4 *einfach und auf den Flächen* α^8, β^8 *doppelt.*

Die Signatur

$$[3210]_{12} \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1\; b_2\; b_2 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

erfordert besondere Betrachtung. In jeder der beiden Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ giebt es eine Curve 4. Ordnung $\overline{a}^1$, $\overline{b}^1$, von welcher jeder Punkt A, B für [3210] eine ganze Gerade b^1, a^1 associirt hat und, wenn noch $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$ oder $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ hinzugefügt wird, giebt es dann noch einen Punkt auf b^1, a^1, der dem A, B auch noch für $[3220]_{12}$, bez. $[3211]_{12}$ associirt ist, ausser wenn $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_i$ identisch ist, also [3300] entsteht, in welchem Fall es keinen solchen Punkt giebt (Nr. 58., 72., 73.). *Die Curven* $\overline{a}^4$, $\overline{b}^4$ *liegen also einfach auf* α^4, β^4 *bei* [3220] *oder* [4200] *und* α^7, β^7 *bei* [3211], *dagegen nicht auf* α^3, β^3 *auf* [3300]; die Restcurven a_0^6, b_0^6 machen keine Ausnahme. (Cf. C. P. Nr. 36–38.)

93. Bei der *Ausnahme-Signatur*

$$[3300] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\; a_1\; a_2\; a_3 \\ b_1\; b_2\; b_3\; B_1 B_2 B_3 \end{matrix}$$

lassen sich *die Schnitte der beiden Flächen* α^3, β^3 *mit den Ebenen* $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ *und* $\beta_{123} = B_1 B_2 B_3$ leicht nachweisen. Wir haben in jeder dieser beiden Ebenen eine Gruppe von 6 Punkten: in der einen die Punkte A_i und die Spuren der a_i, in der andern, ihnen homolog, die Spuren der b_i und die B_i. Folglich giebt es in ihnen bez. zwei eindeutig bezogene Curven 3. Ordnung $\mathfrak{a}^3$, $\mathfrak{b}^3$, für deren entsprechende Punkte A, B

$$(A\alpha_{123})\,(A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 a_3) \barwedge (B\beta_{123})\,(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 B_3)$$

(Eb. Proj. Nr. 14.). Es geht daraus hervor, dass A, B sich durch exceptionelle Correlation mit singulären Ebenen correspondiren, dass also diese beiden Curven die erwähnten Schnitte sind.

Es ist aus der Theorie der cubischen Flächen bekannt, dass die Fläche α^3 das Hyperboloid $\alpha_{123}^2 = [a_1 a_2 a_3]$ noch in drei Geraden a^0 der andern Schaar schneidet; die Spur einer dieser Geraden in α_{123}, auf $\mathfrak{a}^3$ gelegen, hat einen entsprechenden Punkt B^0 auf $\mathfrak{b}^3$, folglich

$$a^0\,(A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 a_3) \barwedge (B^0 \beta_{123})\,(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 B_3).$$

Sei nun A ein beliebiger Punkt von a^0, $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$ beliebige (nur nicht in α_{123}, bez. β_{123} befindliche) Punkte von $a_1 a_2 a_3 b_3$ und bilden wir für die Bündel A, B^0 die Correlation

$$[2040] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \mathfrak{A}' \mathfrak{A}'' \mathfrak{A}''' \\ b_1\, b_2 \mathfrak{B}''' B_1 B_2 B_3, \end{matrix}$$

welche eine Lösung hat, so werden in derselben auch a^0 und β_{123} ferner A $(A_3 a_1 a_2 a_3)$ und B^0 $(b_3 B_1 B_1 B_3)$ homolog sein.

Wir haben also 3 *Punkte* B^0, A^0 *auf* $\mathfrak{b}^3$, $\mathfrak{a}^3$, *von denen jedem alle Punkte einer Geraden* a^0, b^0 *des Hyperboloids* α_{123}^2, β_{123}^2 *für* [3300] *durch allgemeine Correlation* — ausser was die Punkte in α_{123}, β_{123} selbst anlangt — *associirt sind.* Der Schnitt der Bündel, deren Scheitel die a^0, b^0 durchwandert, mit der Ebene α_{123}, β_{123} ist unveränderlich; wird also noch $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ zugefügt, so *findet sich wieder auf jeder der* a^0, b^0 *noch ein Punkt, der dem associirten* B^0, A^0 *auch noch für* [3310] *oder* [3301] *associirt ist.*

Wenn bei einer andern Signatur $n = 0$ $l > 2$ $(k > 2)$ ist, so entspricht der Curve 5. Ordnung, welche α^4 (β^4) mit dem Hyperboloid α_{ikl}^2 (β_{ikl}^2) gemein hat, stets — Punkt für Punkt — durch allgemeine Correlation der Schnitt von β^4 (α^4) mit der Ebene β_{ikl} (α_{ikl}). (C. P. Nr. 39.)

Bei der Signatur

$$[3211] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{a}_1 \\ b_1\, b_2\, b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{b}_1 \end{matrix}$$

haben wir in $A_1 A_2 A_3$ sechs Punkte: A_1, A_2, A_3, die Spuren von $a_1 a_2 \mathfrak{a}_1$, in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ ebenfalls, jenen homolog, sechs Punkte: die Spuren von b_1, b_2, b_3, B_1, B_2 und die Spur von $\mathfrak{b}_1$: wir erhalten also auch 2 Curven 3. Ordnung $\mathfrak{a}^3$, $\mathfrak{b}^3$, die sich, Punkt für Punkt, in Bezug auf die beiden Gruppen entsprechen und deshalb auch für [3211] durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind. Diese Curven sind die *ferneren Schnitte ihrer Ebenen mit den sich für* [3211] *associirten Flächen* α^7, β^7, *ausser* $\bar{a}^4$, $\bar{b}^4$.

94. Bei $[klm0]_{10}$ war jedem Punkt B eine cubische Raumcurve zugeordnet, ausser bei [3200]. Die Ebenen der verschiedenen Bündel der Punkte dieser Curve, welche einem Strahl von B homolog sind, der durch einen festen Punkt B' geht, drehen sich um eine feste Sehne der cubischen Raumcurve. Wird nun B auf einer Geraden b bewegt, so treffen so viele dieser Sehnen eine gegebene Gerade a', als es für $[k, l + 1, m, 0]_{12}$ Punkte $(B)_{12}$ auf b giebt, wobei das Paar $a'B'$ zugefügt ist; also erzeugen die Sehnen eine Fläche vom 4. Grade. Geht aber b durch B' selbst, so giebt es, da B' auf β^4 doppelt ist, nur noch 2 Punkte $(B)_{12}$ auf b, also ist die erzeugte Fläche 2. Grades.

Bei [3200] tritt an Stelle der cubischen Raumcurve eine Gerade und an Stelle der Sehne eine Gerade in der Ebene α_{123}; $[k, l + 1, m, 0]$ wird hier [3300], wo es auf einer beliebigen Geraden b drei, auf einer durch B' gehenden zwei Punkte $(B)_{12}$ giebt.

An Stelle der Fläche 4., bez. 2. Grades tritt also eine Curve 3., bez. 2. Klasse in α_{123}. (C. P. Nr. 42.)

95. Wir gehen nun zur Aufstellung der Tabelle VII über;

$$\text{(VII a u. b)} \quad 2\dot{\pi}'_{10} = \overline{\pi}'_{10} + \Theta'_{10}, \quad 2\overline{\lambda}'_{10} = \dot{\lambda}'_{10} + \Theta'_{10} + \lambda'_{10B} + \lambda'_{10A};$$

(Nr. 26.), wo also die Θ_{10}' durchweg, die $\dot{\pi}_{10}'$ und $\dot{\lambda}_{11}'$ für die Signaturen $n = 0$ direct zu ermitteln sind; die $\dot{\pi}_{10}'$ d. h. die π_{11}' für $[k, l, m+1, 0]_{11}$ sind schon bei Gelegenheit der Betrachtungen von Nr. 82. ermittelt.

Tab. VII; $\sigma = 10$.

Sign.	Θ'_{10}	$\dot{\pi}'_{10}$	π'_{10}	λ'_{10B}	λ'_{10A}	$\dot{\lambda}'_{10}$	$\overline{\lambda}'_{10}$
5000, 0500	0	20	40	0	0	0	0
4100, 1400	24	20	16	8	8	0	20
3200, 2300	8	14	20	6	3	5	11
4020, 0420	0	20	40	0	0	0	0
4011, 0411	24	40	56	8	8	0	20
4002, 0402	80	56	32	40	28	20	84
3120, 1320	6	20	34	2	2	0	5
3111, 1311	32	34	36	14	11	5	31
3102, 1302	34	36	38	20	23	31	54
2220	12	20	28	4	4	0	10
2211	16	28	40	9	9	10	22
2202	48	40	32	24	24	22	59
3040, 0340	0	20	40	0	0	0	0
3031, 0331	6	40	74	2	2	0	5
3022, 0322	56	74	92	22	19	5	51
3013, 0313	114	92	70	60	51	51	138
3004, 0304	120	70	20	80	92	138	215
2140, 1240	0	20	40	0	0	0	0
2131, 1231	18	40	62	6	6	0	15
2122, 1222	48	62	76	23	20	15	53
2113, 1213	82	76	70	44	47	53	113
2104, 1204	100	70	40	69	68	113	175
2060, 0260	0	20	40	0	0	0	0
2051, 0251	0	40	80	0	0	0	0
2042, 0242	24	80	136	8	8	0	20
2033, 0233	104	136	168	45	39	20	104
2024, 0224	196	168	140	104	98	104	251
2015, 0215	220	140	60	149	160	251	390
2006, 0206	120	60	0	136	170	390	408

Sign.	Θ'_{10}	$\dot{\pi}'_{10}$	$\bar{\pi}'_{10}$	λ'_{10B}	λ'_{10A}	$\dot{\lambda}'_{10}$	$\bar{\lambda}'_{10}$
1160	0	20	40	0	0	0	0
1161	0	40	80	0	0	0	0
1142	36	80	124	12	12	0	30
1133	96	124	152	43	43	30	106
1124	164	152	140	91	91	106	226
1115	200	140	80	137	137	226	350
1106	160	80	0	155	155	350	410
1080,0180	0	20	40	0	0	0	0
1071,0171	0	40	80	0	0	0	0
1062,0162	0	80	160	0	0	0	0
1053,0153	60	160	260	20	20	0	50
1044,0144	200	260	320	88	82	50	210
1035,0135	360	320	280	195	189	210	477
1026,0126	420	280	140	286	297	477	740
1017,0117	280	140	0	291	325	740	818
1008,0108	0	0	0	200	222	818	620
$00\overline{10}0$	0	20	40	0	0	0	0
0091	0	40	80	0	0	0	0
0082	0	80	160	0	0	0	0
0073	0	160	320	0	0	0	0
0064	120	320	520	40	40	0	100
0055	400	520	640	170	170	100	420
0046	720	640	560	384	384	420	954
0037	840	560	280	583	583	954	1480
0028	560	280	0	616	616	1480	1636
0019	0	0	0	422	422	1636	1240
$00\overline{10}$	0	0	0	280	280	1240	900.

96. In Bezug auf die $\dot{\lambda}'_{10}$ für $[klm0]_{10}$, also die λ_{11}' für $[k, l, m+1, 0]_{11}$ zeigt wieder die Tabelle, dass sie alle null sind, mit Ausnahme von $[3210]_{11}$, oder $[2310]_{11}$. Für diejenigen Signaturen, wo $k+l<5$, folgt es aus Nr. 30., für [5010], [0510]; [4100, 1400] ist es auch leicht einzusehen. Bei

$$[3210] \qquad \begin{matrix} A_1\, A_2\, A_3\; a_1\; a_2\, \mathfrak{A}_1 \\ b_1\; b_2\; b_3 B_1\, B_2\, \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

sind die Punkte A und B der Ebenen $\alpha' = A_1 A_2 A_3$ und $\beta' = B_1 B_2 \mathfrak{B}_2$ eindeutig durch Correlation mit ihnen als singulären Ebenen associirt (Nr. 89.) und nur diese Punkte. Wird B auf dem Schnitte der Ebene β mit β' bewegt, oder A auf $\alpha\alpha'$, so beschreibt A in α' oder B in β'

eine Curve 5. Ordnung (Eb. Proj. Nr. 10.), so dass 5 Punkte in α oder β liegen. Wir erhalten also für [3210], [2310] $\lambda_{11}' = 5$.

Der Werth 900 von $\overline{\lambda}_{10}'$ für $[00\overline{10}]$ oder λ_{11}' für $[00\overline{11}]$ führt zu folgendem Satze:

Sind zwei Gruppen von je 11 *Geraden* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{11}$; $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{11}$ *gegeben; und man verlangt Strahlbüschel* $(A\alpha)$, $(B\beta)$ *derartig, dass*

$$(A\alpha)\,(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{11}) \barwedge (B\beta)\,(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{11});$$

so beschreibt A *eine Curve* 900. *Ordnung,* α *einen Torsus* 900. *Klasse, wenn* B *mit einer gegebenen Ebene oder* β *mit einem gegebenen Punkte incident sein soll.*

97. Die Formeln (Nr. 13.)

(7a u. b) $\quad 2\nu_{11}' = \mu_{11}' + \pi_{11}' + \zeta_{11B}' + \zeta_{11A}', \quad 2\mu_{11}' = \nu_{11}' + \lambda_{11}'$

führen zu folgender Tabelle für μ_{11}', ν_{11}':

Tab. 7; $\sigma = 11$.

Sign.	ζ_{11B}'	ζ_{11A}'	π_{11}'	λ_{11}'	μ_{11}'	ν_{11}'
5010, 0510	11	11	20	0	14	28
5001, 0501	22	22	40	0	28	56
4110, 1410	11	11	20	0	14	28
4101, 1401	14	14	16	20	28	36
3210, 2310	9	9	14	5	14	23
3201, 2301	12	15	20	11	23	35
4030, 0430	11	11	20	0	14	28
4021, 0421	22	22	40	0	28	56
4012, 0412	36	36	56	20	56	92
4003, 0403	32	44	32	84	92	100
3130, 1330	11	11	20	0	14	28
3121, 1321	20	20	34	5	28	51
3112, 1312	26	29	36	31	51	71
3103, 1303	32	35	38	54	71	88
2230	11	11	20	0	14	28
2221	18	18	28	10	28	46
2212	27	27	40	22	46	70
2203	30	30	32	59	70	81
3050, 0350	11	11	20	0	14	28
3041, 0341	22	22	40	0	28	56
3032, 0332	42	42	74	5	56	107
3023, 0323	62	65	92	51	107	163
3014, 0314	64	79	70	138	163	188
3005, 0305	48	66	20	215	188	161

Sign.	ζ'_{11B}	ζ'_{11A}	π'_{11}	λ'_{11}	μ'_{11}	ν'_{11}
2150, 1250	11	11	20	0	14	28
2141, 1241	22	22	40	0	28	56
2132, 1232	38	38	62	15	56	97
2123, 1223	53	56	76	53	97	141
2114, 1214	62	65	70	113	141	169
2105, 1205	55	62	40	175	169	163
2070, 0270	11	11	20	0	14	28
2061, 0261	22	22	40	0	28	56
2052, 0252	44	44	80	0	56	112
2043, 0243	80	80	136	20	112	204
2034, 0234	115	121	168	104	204	304
2025, 0225	126	144	140	251	304	357
2016, 0216	103	128	60	390	357	324
2007, 0207	70	86	0	408	324	240
1170	11	11	20	0	14	28
1161	22	22	40	0	28	56
1152	44	44	80	0	56	112
1143	76	76	124	30	112	194
1134	109	109	152	106	194	282
1125	127	127	140	226	282	338
1116	117	117	80	350	338	326
1107	79	79	0	410	326	242
1090, 0190	11	11	20	0	14	28
1081, 0181	22	22	40	0	28	56
1072, 0172	44	44	80	0	56	112
1063, 0163	88	88	160	0	112	224
1054, 0154	156	156	260	50	224	398
1045, 0145	224	230	320	210	398	586
1036, 0136	253	271	280	477	586	695
1027, 0127	220	245	140	740	695	650
1018, 0118	149	165	0	818	650	482
1009, 0109	98	108	0	620	482	344
$00\overline{11}0$	11	11	20	0	14	28
$00\overline{10}1$	22	22	40	0	28	56
0092	44	44	80	0	56	112
0083	88	88	160	0	112	224
0074	176	176	320	0	224	448
0065	312	312	520	100	448	796
0056	454	454	640	420	796	1172
0047	524	524	560	954	1172	1390

Sign.	$\zeta'_{11\,B}$	$\zeta'_{11\,A}$	π'_{11}	λ_{11}	μ'_{11}	ν'_{11}
0038	465	465	280	1480	1390	1300
0029	314	314	0	1636	1300	964
$001\overline{10}$	206	206	0	1240	964	688
$000\overline{11}$	132	132	0	900	688	476.

98. Die μ_{11}', ν_{11}' geben uns also *die Ordnung* ζ_{12}' *der Curve der Punkte* $(A)_{12}$, $(B)_{12}$, *welche ihre associirten* $(B)_{12}$, $(A)_{12}$ *in einer gegebenen Ebene* β, α *haben*, jedoch zunächst nur für die Signaturen, wo nicht m und n beide gleich 0 sind.

Für diese kann auf ähnliche Weise als in Nr. 91. der Werth von ζ_{12}' ermittelt werden und ergiebt sich wie *bei den übrigen Signaturen, bei denen* $n = 0$ *ist*, $\zeta_{12}' = 14$, *nur diejenige Signatur, die auch im Vorhergehenden eine Ausnahme machte*, [3300] *macht sie auch hier*. Wir lösen sie wieder auf in

$$[3220] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2\, \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1; \end{matrix}$$

für [3210] sind die Punkte von $A_1 A_2 A_3$ mit denen von $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ durch Correlation mit singulären Ebenen eindeutig associirt, ausgenommen die Punkte der Curven $\overline{a}^4$, $\overline{b}^4$; die Curven, auf denen A und B bewegt werden (Nr. 13.), sind 9ter Ordnung: sie sind die Schnitte der Ebenen α, β mit den Flächen 9. Ordnung α^9, β^9, welche β, α associirt sind; die Fläche β^9 enthält in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ die Curve $\overline{b}^4$, folglich liegen von der Curve 9. Ordnung in β ausserhalb $\overline{b}^4$ noch 5 Punkte; diese 5 Punkte führen zu 5 weiteren vereinigten Punkten auf den eindeutig bezogenen Curven. Also *ist* $\zeta_{12}' = 9$ *für* [3300].

99. *Für die Signaturen* $[klm0]_{12}$ *und* $[klm1]_{12}$ *kann der Werth von* ζ_{12}' *auch auf folgende Weise ermittelt werden.* Nachdem eventuell, wenn $m = 0$, was bei $[klm1]$ nicht möglich, $[kl00]_{12}$ in $[k, l-1; 2, 0]_{12}$ aufgelöst ist, bringen wir die Fläche α^4, bez. α^8 der Punkte $(A)_{12}$ mit der Fläche α^9, welche für $[k, l, m-1, 0]_{11}$, bez. $[klm0]_{11}$ der Ebene β associirt ist, zum Schnitt; dieser Schnitt besteht aus der Curve a_0^{10}, dreifach auf α^{11}, einfach auf α^4, bez. doppelt auf α^8, auf welcher alle Punkte (Nr. 84., 92.) liegen, denen für $[k, l, m-1, 0]$, bez. $[klm0]$ mehr als ein Punkt (und deshalb alle Punkte einer cubischen Raumcurve) associirt ist, und aus der Curve 14. Ordnung, bez. 28. Ordnung, um die es sich jetzt handelt. Bei der Signatur

$$[3220] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \end{matrix}$$

und

$$[3211] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2 \mathfrak{A}_1\, \mathfrak{a}_1 \\ b_1\, b_2\, b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{b}_1 \end{matrix}$$

tritt an Stelle von α^{11} eine Fläche α^9; $a_0{}^{10}$ zerlegt sich in $a_0{}^6$, welche auf α^9 dreifach, auf α^4 einfach, bez. auf α^7 doppelt ist, und $\bar{a}^4$, die auf α^9, α^4, α^7 einfach ist (Nr. 84., 92.); es bleibt eine Curve 14. Ordnung, bez. 23. Ordnung. Ist aber $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ identisch, so dass wir [3300] erhalten, so tritt an Stelle von α^4 eine Fläche α^3, auf der die Curve $\bar{a}^1$ nicht mehr liegt (Nr. 91., 92.); es bleibt blos eine Curve 9. Ordnung, wie sie auch oben gefunden wurde. (C. P. Nr. 40.)*)

100. Die Zahl der Durchgänge der Curve $\zeta_{12}'^{\text{ter}}$ Ordnung der Punkte $(A)_{12}$ oder $(B)_{12}$, welche für $[klmn]_{12}$ associirte Punkte in β oder α haben, durch jeden der Punkte A_i (B_i) und der Begegnungspunkte mit einer $a_i (b_i)$ ergiebt sich wieder leicht mit Hilfe von Nr. 4. Die bei $n = 0$ gefundene Curve 14. Ordnung a^{14}, b^{14} trifft jede Gerade a_i, b_i achtmal und geht durch jeden Punkt A_i, B_i dreimal; die Curve a^9, b^9 bei [3300] geht einmal durch jeden A_i, B_i und trifft jede a_i, b_i sechsmal. Im letztern Falle trifft a^9 die Ebene α_{123} ausserdem noch in den 3 Punkten, welche den Schnitten der associirten Curve $\beta\beta^3$ mit β_{123} associirt sind, und in den 3 Punkten A^0, welche den Punkten βb^0 correspondiren (Nr. 93.); im allgemeinen Falle wird jede etwa vorhandene Ebene α_{ikl} von a^{14} noch in den 5 Punkten getroffen, welche den nicht auf b_i, b_k, b_l gelegenen Schnitten von $\beta\beta^4$ mit dem Hyperboloide β_{ikl}^2 entsprechen.

Bei den Curven a^{28}, b^{28} sind die Zahlen doppelt so gross, wie bei a^{14}, b^{14}; die $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ treffen sie 11mal. Die a^{23}, b^{23} bei [3211] gehen durch jeden A_i, B_i 4mal, treffen jede a_i, b_i 14 mal und die $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ 9mal.

Da a^{14} mit $a_0{}^{10}$, wie oben gezeigt, einen vollständigen Schnitt (α^4, α^{11}) bildet, zu welchem $a_0{}^{10}$ dreifach gehört, so sind nun leicht die Zahl der Durchgänge von $a_0{}^{10}$ durch jeden A_i und die Begegnungspunkte mit jeder a_i zu verificiren (Nr. 84.)

101. Mit einem Punkte B_i, z. B. B_1, ist für $[klmn]_{12}$ die Curve $\zeta_{10B}{}^{\text{ter}}$ Ordnung associirt, welche ihm für $[k, l-1, m, n]_{10}$ correspondirt, wo das Paar $a_1 B_1$ weggelassen ist; sie trifft also a_1 nicht. Geht mithin die Ebene β durch B_1, so löst sich diese Curve von der Curve $a^{\zeta_{12}'}$ ab.

Jeder Punkt einer b_i, z. B. b_1, hat einen associirten und diese associirten Punkte erzeugen eine Curve, deren Ordnung offenbar gleich der Zahl der Begegnungspunkte der Curve $b^{\zeta_{12}'}$, die der Ebene α — oder genauer der Curve $\alpha\alpha^{\zeta_{12}}$ — associirt ist, mit b_i. Um zu erkennen, wie oft diese Curve durch A_1 oder einen der andern A geht, haben

*) Im „Problem der Collineation" ergab sich für die dort betrachtete Signatur dieselbe Curve von der 11. Ordnung (Nr. 31., 35.). Diese Ordnung wurde dort mit Hilfe des Correspondenzprincips der Ebene gefunden.

wir α durch denselben zu legen und von der diesem Punkte allein entsprechenden Curve abzusehen.

Betrachten wir als Beispiel die Signaturen $n = 0$ ausser [3300]. Der Ebene α correspondirt eine Curve b^{14}, welche b_1 8mal trifft; also der b_1 eine Curve 8. Ordnung. Legen wir α durch A_1, so zerfällt b^{14} in eine cubische Raumcurve und eine Curve 11. Ordnung, von denen die erstere der b_1 nicht, die letztere also noch 8mal begegnet. Die Curve 8. Ordnung geht demnach nicht durch A_1 (und das wird allgemein statthaben). Geht aber α durch einen andern A_ι, so trifft die sich ablösende Curve 3. Ordnung die b_1 zweimal, die Curve 11. Ordnung dieselbe also nur noch sechsmal; d. h. die Ebene α enthält von der Curve 8. Ordnung ausser dem A_i noch 6 Punkte, also den A_i doppelt. Legte man α durch eine a_i, so würde dies zu nichts führen. Man findet aber die Zahl der Begegnungspunkte der Curve 8. Ordnung, die der b_1 associirt ist, mit einer a_i so: es werde $A_1 b_1$ ersetzt durch $A_1 \mathfrak{B}'$, wo $\mathfrak{B}'$ auf b_1 liegt; so dass $[klm0]_{12}$ in $[k-1, l, m+1, 0]_{11}$ übergeht. Die Curve 11. Ordnung, die der Geraden b_1 hierfür correspondirt und a_i 7mal trifft, zerfällt in die blos dem $\mathfrak{B}'$ correspondirende cubische Raumcurve (d. i. die ihm für $[k-1, l, m, 0]_{10}$, wo $A_1\mathfrak{B}'$ weggelassen, associirte), welche a_i zweimal trifft, und die Curve 8. Ordnung, welche also a_i noch fünfmal trifft.

Im Falle [3300] ist mit jeder Geraden b_i eine Curve 6. Ordnung associirt, welche durch den homologen A_i nicht geht, durch die andern je einmal und die a_i je viermal trifft. (C. P. Nr. 41).

VIII $\sigma = 13$.

102. Wir kommen zur Tabelle VIII, für welche die Formel (Nr. 27.)

VIII b) $$2\overline{\lambda}_{11} = \dot{\lambda}_{11} + \lambda_{11B} + \lambda_{11}'$$

dient. Es fehlt die Kenntniss der $\dot{\lambda}_{11}$ für die Signaturen $[klm0]_{11}$, oder der λ_{12B} für die Signaturen $[k, l, m+1, 0]_{12}$; für diejenigen Signaturen, wo $k + l < 6$, sagt Nr. 30., dass $\lambda_{12B} = 0$ ist; aber auch von den 7 übrigen haben 6 diesen Werth von λ_{12B}; nur [3300] macht wieder eine Ausnahme. λ_{12B} ist die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen, bei denen der Scheitel B in einer gegebenen Ebene β liegt, oder die Ordnung der Curve der Punkte B, denen Punkte A durch solche Correlationen correspondiren.

Die 3 Schnitte von β mit der Curve (β^3, β_{123}), deren Punkte denen von (α^3, α_{123}) durch solche Correlationen entsprechen (Nr. 93.), führen zu 3 Lösungen; also $\lambda_{12B} = 3$; aber für die folgende Tabelle ist dieses λ_{12B} noch nicht nothwendig.

Tab. VIII; $\sigma = 11$.

Sign.	λ_{11B}	λ'_{11}	$\dot{\lambda}_{11}$	$\overline{\lambda}_{11}$
5010, 0510	0	0	0	0
5001, 0501	0	0	0	0
4110, 1410	0	0	0	0
4101, 1401	4	20	0	12
3210, 2310	1	5	0	3
3201	4	11	3	9
2301	2	11	3	8
4030, 0430	0	0	0	0
4021, 0421	0	0	0	0
4012, 0412	4	20	0	12
4003	24	84	12	60
0403	16	84	12	56
3130, 1330	0	0	0	0
3121, 1321	1	5	0	3
3112	8	31	3	21
3103	15	54	21	45
1312	6	31	3	20
1303	16	54	20	45
2230	0	0	0	0
2221	2	10	0	6
2212	6	22	6	17
2203	16	59	17	46
3050, 0350	0	0	0	0
3041, 0341	0	0	0	0
3032, 0332	1	5	0	3
3023	12	51	3	33
3014	39	138	33	105
3005	64	215	105	192
0323	10	51	3	32
0314	32	138	32	101
0305	68	215	101	192
2150, 1250	0	0	0	0
2141, 1241	0	0	0	0
2132, 1232	3	15	0	9
2123	14	53	9	38
2114	31	113	38	91
2105	54	175	91	160

Sign.	λ_{11B}	λ'_{11}	$\dot{\lambda}_{11}$	$\overline{\lambda}_{11}$
1223	12	53	9	37
1214	32	113	37	91
1205	54	175	91	160
2070, 0270	0	0	0	0
2061, 0261	0	0	0	0
2052, 0252	0	0	0	0
2043, 0243	4	20	0	12
2034	26	104	12	71
2025	70	251	71	196
2016	118	390	196	352
2007	136	408	352	448
0234	22	104	12	69
0225	64	251	69	192
0216	122	390	192	352
0207	160	408	352	460
1170	0	0	0	0
1161	0	0	0	0
1152	0	0	0	0
1143	6	30	0	18
1134	26	106	18	75
1125	63	226	75	182
1116	108	350	182	320
1107	142	410	320	436
1090, 0190	0	0	0	0
1081, 0181	0	0	0	0
1072, 0172	0	0	0	0
1063, 0163	0	0	0	0
1054, 0154	10	50	0	30
1045	52	210	30	146
1036	133	477	146	378
1027	226	740	378	672
1018	278	818	672	884
1009	256	620	884	880
0145	48	210	30	144
0136	127	477	144	374
0127	230	740	374	672
0118	302	818	672	896
0109	284	620	896	900

Sign.	λ_{11B}	λ'_{11}	$\dot{\lambda}_{11}$	$\overline{\lambda}_{11}$
$00\overline{11}0$	0	0	0	0
$00\overline{10}1$	0	0	0	0
0092	0	0	0	0
0083	0	0	0	0
0074	0	0	0	0
0065	20	100	0	60
0056	100	420	60	290
0047	260	954	290	752
0038	456	1480	752	1344
0029	580	1636	1344	1780
$001\overline{10}$	540	1240	1780	1780
$000\overline{11}$	440	900	1780	1560.

Das letzte Resultat, also $\overline{\lambda}_{11}$ für $[000\overline{11}]$ oder λ_{12B} für $[000\overline{12}]$ giebt folgenden Satz: *Wenn 2 Gruppen von je 12 Geraden* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{12}$, $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{12}$ *gegeben sind und man sucht solche Büschel* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *dass* $(A\alpha)$ $(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{12}) \barwedge (B\beta)$ $(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{12})$; *so liegen die* A, *sowohl wie die* B *auf je einer Curve* 1560^ter *Ordnung, und die* α, *wie die* β *umhüllen je einen Torsus von der* 1560^ten *Klasse.*

103. Zur Aufstellung der Tabelle 8 sind die Formeln (Nr. 14.)

(8 a u. b) $$2\nu_{12} = \mu_{12} + \zeta_{12B} + \zeta'_{12}; \quad 2\mu_{12} = \nu_{12} + \lambda_{12B}$$

nöthig.

Tab. 8; $\sigma = 12$.

Sign.	ζ_{12B}	ζ'_{12}	λ_{12B}	μ_{12}	ν_{12}
6000, 0600, 5100, 1500, 4200, 2400	4	14	0	6	12
3300	3	9	3	6	9
5020, 0520	4	14	0	6	12
5011, 0511	8	28	0	12	24
5002, 0502	16	56	0	24	48
4120, 1420	4	14	0	6	12
4111, 1411	8	28	0	12	24
4102, 1402	12	36	12	24	36
3220, 2320	4	14	0	6	12
3211, 2311	7	23	3	12	21
3202	10	35	9	21	33
2302	12	35	8	21	34
4040, 0440	4	14	0	6	12
4031, 0431	8	28	0	12	24
4022, 0422	16	56	0	24	48
4013, 0413	28	92	12	48	84
4004	32	100	60	84	108
0404	40	100	56	84	112
3140, 1340	4	14	0	6	12
3131, 1331	8	28	0	12	24
3122, 1322	15	51	3	24	45
3113	22	71	21	45	69
3104	29	88	45	69	93
1313	24	71	20	45	70
1304	32	88	45	70	95
2240	4	14	0	6	12
2231	8	28	0	12	24
2222	14	46	6	24	42
2113	22	70	17	42	67
2204	28	81	46	67	88
3060, 0360	4	14	0	6	12
3051, 0351	8	28	0	12	24
3042, 0342	16	56	0	24	48
3033, 0333	31	107	3	48	93
3024	50	163	33	93	153
3015	61	188	105	153	201
3006	58	161	192	201	210
0324	52	163	32	93	154
0315	72	188	101	154	207
0306	76	161	192	207	222
2160, 1260	4	14	0	6	12
2151, 1251	8	14	0	12	24
2142, 1242	16	28	0	24	48
2133, 1233	29	97	9	48	87
2124	44	141	38	87	136

Sign.	ζ_{12B}	ζ'_{12}	λ_{12B}	μ_{12}	ν_{12}
2115	57	169	91	136	181
2106	60	163	160	181	202
1224	46	141	37	87	137
1215	60	169	91	137	183
1206	66	163	160	183	206
2080, 0280	4	14	0	6	12
2071, 0271	8	28	0	12	24
2062, 0262	16	56	0	24	48
2053, 0253	32	112	0	48	96
2044, 0244	60	204	12	96	180
2035	94	304	71	180	289
2026	118	357	196	289	382
2017	118	324	352	382	412
2008	100	240	448	412	376
0235	98	304	69	180	291
0226	132	357	192	291	390
0217	142	324	352	390	428
0208	124	240	460	428	396
1180	4	14	0	6	12
1171	8	28	0	12	24
1162	16	56	0	24	48
1153	32	112	0	48	96
1144	58	194	18	96	174
1135	90	282	75	174	273
1126	117	338	182	273	364
1117	126	326	320	364	408
1108	110	242	436	408	380
$0\overline{10}0$, $01\overline{10}0$	4	14	0	6	12
1091, 0191	8	28	0	12	24

Sign.	ζ_{12B}	ζ'_{12}	λ_{12B}	μ_{12}	ν_{12}
1082, 0182	16	56	0	24	48
1073, 0173	32	112	0	48	96
1064, 0164	64	224	0	96	192
1055, 0155	118	398	30	192	354
1046	184	586	146	354	562
1037	235	695	378	562	746
1028	244	650	672	746	820
1019	210	482	884	820	756
$100\overline{10}$	164	344	880	756	632
0146	188	586	144	354	564
0137	249	695	374	564	754
0128	268	650	672	754	836
0119	234	482	896	836	776
$010\overline{10}$	184	344	900	776	652
$00\overline{12}0$	4	14	0	6	12
$00\overline{11}1$	8	28	0	12	24
$00\overline{10}2$	16	56	0	24	48
0093	32	112	0	48	96
0084	64	224	0	96	192
0075	128	448	0	192	384
0066	236	796	60	384	708
0057	372	1172	290	708	1126
0048	484	1390	752	1126	1500
0039	512	1300	1344	1500	1656
$002\overline{10}$	444	964	1780	1656	1532
$001\overline{11}$	348	688	1780	1532	1284
$000\overline{12}$	256	476	1560	1284	1008.

104. Die μ_{12}, ν_{12} geben *die Ordnung ζ_{13B} der Curve der Punkte $B)_{13}$, welche für $[k, l, m+1, n]_{13}$, $[k, l, m, n+1]_{13}$ associirte Punkte $(A)_{13}$ haben.*

Die Tabelle zeigt, dass, *wenn $n = 0$, ζ_{13B} (und also auch ζ_{13A}) ohne Ausnahme* 6 *ist, bei $n = 1$ $\zeta_{12B} = 12$ ist und nur* [3301] *eine Ausnahme mit $\zeta_{13B} = 9$ macht, bei $n = 2$ $\zeta_{13B} = 24$ mit alleiniger Ausnahme von* [3212], [2312], *wo $\zeta_{13B} = 21$ ist*, während nun die Ausnahmen zahlreicher werden und bei $n = 6$ nur für [0076] $\zeta_{13B} = 384$ ist.

Für $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ lässt sich dies Resultat auch so erreichen: Man zerlegt (13) α) in $\left(11, \begin{matrix}\mathfrak{A}_1\\ \mathfrak{B}_1\end{matrix}\right)$ und $\left(11, \begin{matrix}\mathfrak{A}_2\\ \mathfrak{B}_2\end{matrix}\right)$, β) in $\left(11, \begin{matrix}\mathfrak{A}_1\\ \mathfrak{B}_1\end{matrix}\right)$, und $\left(11, \begin{matrix}\mathfrak{a}_1\\ \mathfrak{b}_1\end{matrix}\right)$, γ) in $\left(11, \begin{matrix}\mathfrak{a}_1\\ \mathfrak{b}_1\end{matrix}\right)$ und $\left(11, \begin{matrix}\mathfrak{a}_2\\ \mathfrak{b}_2\end{matrix}\right)$. Wir erhalten in **B** α) zwei Flächen 4. Ordnung, β) eine Fläche 4. und eine 8. Ordnung, γ) zwei Flächen 8. Ordnung. Diese schneiden sich in der zu (11) gehörigen Curve b_0^{10}, die auf den Flächen 4. Ordnung einfach, auf den Flächen 8. Ordnung doppelt ist (Nr. 92.) und die Punkte enthält, denen für (11) mehr als ein Punkt associirt ist, und in einer Curve α) 6., β) 12., γ) 24. Ordnung; jedem Punkte derselben ist für (11) nur ein Punkt associirt, der dann auch für $\left(11, \begin{matrix}\mathfrak{A}_1\\ \mathfrak{B}_1\end{matrix}\right)$ und $\left(11, \begin{matrix}\mathfrak{A}_2\\ \mathfrak{B}_2\end{matrix}\right)$, u. s. f. und also auch für (13) associirt ist.

Wenn aber (11) die Signatur

$$[3210] \qquad \begin{matrix} A_1\, A_2\, A_3\, a_1\, a_2\, \mathfrak{A}_1 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1\, B_2\, \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

ist und es wird bez. α) $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3$; β) $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; γ) $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$ hinzugefügt, so dass sich α) [3230] und, falls $\mathfrak{B}_2$ identisch $\mathfrak{B}_1$ ist, [3310], β) [3221] bez. [3301], γ) [3212] ergiebt; so haben wir in α) für $\left(3210, \begin{matrix}\mathfrak{A}_2\\ \mathfrak{B}_2\end{matrix}\right)$ und $\left(3210, \begin{matrix}\mathfrak{A}_3\\ \mathfrak{B}_3\end{matrix}\right)$ je eine Fläche β^4 in B, denen die Curve 10. Ordnung b_0^{10}, bestehend aus b_0^6 und $\overline{b}^4$, gemein ist und ausserdem die Curve b^6 wie oben; in β) erhalten wir eine Fläche 4. und eine 7. Ordnung; auf der ersteren liegt b_0^6 einfach, auf der letzteren doppelt, $\overline{b}^4$ aber auf beiden einfach; also bleibt auch hier eine Curve 12. Ordnung. Ist aber $\mathfrak{B}_2$ identisch mit $\mathfrak{B}_1$, so führt $\left(3210, \begin{matrix}\mathfrak{A}_2\\ \mathfrak{B}_1\end{matrix}\right)$ nur zu einer Fläche 3. Ordnung, auf der $\overline{b}^4$ nicht liegt; es bleibt als Schnitt dieser Fläche in α) mit der Fläche 4. Ordnung, mit der sie die b_0^6 einfach gemein hat, eine Curve 6. Ordnung, wie bisher, in β) mit der Fläche 7. Ordnung, auf der b_0^6 doppelt ist, eine Curve 9. Ordnung, wie sie sich bei [3301] ergeben hat. In γ) erhalten wir zwei Flächen 7. Ordnung, welche beide die Curve b_0^6 doppelt, die $\overline{b}^4$ einfach enthalten, so dass ein Schnitt 21. Ordnung bleibt, wie er für [3212] gefunden ist. Für [2310] ergeben sich dieselben Resultate.

105. Die Zahl der Durchgänge der Curve $a^{\zeta''}$, $b^{\zeta''}$ der Punkte $(A)_{13}$, $(B)_{13}$ durch die Punkte A_i, B_i und der Begegnungspunkte mit den a_i, b_i, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ ist wieder leicht aus Nr. 4. zu entnehmen. Die Curve 6. Ordnung a^6, b^6 bei $n = 0$ geht durch jeden A_i, B_i einmal und trifft jede Linie a_i, b_i dreimal; bei den Curven 12., 24. Ordnung verdoppeln und vervierfachen sich diese Zahlen; die $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ treffen sie 4-, 8mal. Die a^9, b^9 bei [3301] geht durch A_i, B_i je einmal, trifft a_i, b_i fünfmal und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ dreimal.

Die Curve a^{21} bei [3212] geht durch die A_i je dreimal, trifft die a_i je eilfmal und die $\mathfrak{a}_i$ je siebenmal; ebenso verhält sich b^{21} gegen die B_i, b_i, $\mathfrak{b}_i$.

Die Curven a^6, b^6 bei [3310] und a^9, b^9 bei [3301] gehen beide durch $A_1 A_2 A_3$, bez. $B_1 B_2 B_3$ einfach, schneiden ferner (Nr. 93.) die α_{123}, β_{123} noch in den drei Punkten A^0, B^0; die drei weiteren Schnittpunkte der Curven a^9, b^9 mit den beiden Ebenen sind die Punkte $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}^0$, für welche

$$(\mathfrak{A}^0 \alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 a_3 \mathfrak{a}_1) \barwedge (\mathfrak{B}^0 \beta_{123})\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 B_3 \mathfrak{b}_1)$$

(Eb. Proj. Nr. 16.); womit zugleich der Werth 3 für λ_{13} bei [3301] gewonnen ist. (C. P. Nr. 43.)

106. Im Vorhergehenden ist *für* $n = 0, 1, 2$ die Curve $a^{\zeta^{13}}$, $b^{\zeta^{13}}$ als partieller Schnitt von zwei Flächen erkannt worden, der durch a_0^{10}, b_0^{10} zum vollen Schnitt ergänzt wird; es ist nicht unwichtig, *die Zahl der Begegnungspunkte* $a^{\zeta^{13}} a_0^{10}$, $b^{\zeta^{13}} b_0^{10}$ zu ermitteln.

Die Curven a^6, a^{12}, a^{24} treffen, wenn unsere Signaturen aus $[klm0]_{11}$ hervorgegangen sind wie oben, die Fläche α^{11}, welche einer Ebene β hierfür associirt ist, in 6. 11, 12. 11, 24. 11 Punkten. Zu diesen gehören die k Punkte A_i, auf α^{11} 6fach, auf den Curven bez. 1-, 2-, 3fach, ferner die 6, 12, 24 Punkte, welche den Schnitten der associirten Curven b^6, b^{12}, b^{24} mit β correspondiren; also bleiben noch $60 - 6k$, $120 - 12k$, $240 - 24k$ Punkte, welche sowohl für (11) einen associirten auf β, also auch einen davon verschiedenen associirten für (13) haben, der mithin auch schon für (11) associirt war; folglich haben sie eine ganze cubische Curve für (11) associirt (Nr. 41.); die Punkte befinden sich demnach auf a_0^{10} (zu welcher ja die a_i gehören); da dieselbe auf α^{11} dreifach ist, so ist ihre Zahl nur $20 - 2k$, $40 - 4k$, $80 - 8k$. Die Zahl derjenigen, welche auf der Restcurve a_0^{10-l} liegen, beträgt mithin $20 - 2k - 3l$, $40 - 2k - 6l$, $80 - 8k - 12l$. Ebenso haben die associirten Curven b^6, b^{12}, b^{24} mit b_0^{10} bez. $10 - 2l$, $40 - 4l$, $80 - 8l$ Punkte gemein, also mit b_0^{10-k} $20 - 2l - 3k$, $40 - 4l - 6k$, $80 - 8l - 12k$.

Die Signatur

$$[3210]_{11} \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

erfordert wieder eine besondere Betrachtung. Wir erhielten in den drei obigen Fällen α), β), γ), wenn $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3$; $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2$ hinzugefügt wird, so dass die Signaturen [3230], [3221] und [3212] entstehen, eine Curve a^6, a^{12}, a^{21} und ihr associirt b^6, b^{12}, b^{21}. Jene schneiden die Fläche α^9, die der Ebene β für [3210] correspondirt, in 9.6, 9.12, 9.21 Punkten; dazu gehören die 3 Punkte A_i, auf α^9 vierfach, auf den Curven bez. 1-, 2-, 3fach. Diese Curven treffen ferner die Ebene α_{123} ausser in den A_i noch in 3, 6, 12 Punkten. Die ausserhalb der Curve $\bar{a}^4$ gelegenen Punkte dieser Ebene correspondiren für [3210] ihren associirten Punkten (in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$) durch Correlation mit singulären Ebenen; bei [3230], [3221] giebt es keine derartig associirten Punkte, bei [3212] jedoch 3 Paare $\mathfrak{A}' \mathfrak{B}'$ in α_{123} und $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$, diejenigen, welche der Bedingung

$(\mathfrak{A}' \alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \barwedge (\mathfrak{B}',\ B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)$ genügen (Eb. Proj. Nr. 16.); beides wird auch in der nächsten Tabelle erkannt werden. Daraus geht hervor, dass die obigen 3, 6 Punkte bei a^6, a^{12} auf $\bar{a}^1$ liegen, von den 12 bei a^{21} aber nur 9. In diesen 3, 6, 9 Punkten schneiden die a^6, a^{12}, a^{21} die Fläche α^9 einfach, ausserdem noch in den Punkten, welche den Schnitten von b^6, b^{12}, b^{21} mit β associirt sind; es bleiben demnach 33, 66, 123 weitere Schnittpunkte übrig; dies sind die 11, 22, 41 Punkte, in denen unsere Curven die auf α^9 dreifache $a_0{}^6$ treffen, welche mit $\bar{a}^4$ die $a_0{}^{10}$ bildet. Ist aber in α), β) $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ identisch, so dass man [3310] und [3301] hat, so tritt bei a^6 keine Aenderung ein; an Stelle von a^{12}, b^{12} tritt aber a^9, b^9; a^9 geht durch die A_i einmal, und die 3 Schnitte mit $\bar{a}^4$ sind die 3 bei [3300] gefundenen Punkte A^0 (Nr. 93). Es bleiben $9.9 - 3.4.1 - 3 - 9 = 3.19$ Punkte; a^9 hat also mit $a_0{}^{10}$ 22 Punkte gemein, 19 auf $a_0{}^6$ und 3 auf $\bar{a}^4$.

Die Curven b^6, b^{12}, b^{21} in B haben mit der einer α associirten Fläche β^{11} gemein 1) die 2 Punkte B_1, B_2, auf letzterer 4fach, auf ersteren 1-, 2-, 3fach; 2) die den Schnitten von α mit a^6, a^{12}, a^{21} associirten; 3) 4, 8, 12 Punkte auf $\bar{b}^4$, indem bei b^{21} drei ausserhalb $\bar{b}^4$ liegende Punkte in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ die obigen $\mathfrak{B}'$ sind, also noch 36, 72, 132, welche die 12, 24, 44 Schnitte von b^6, b^{12}, b^{21} mit $b_0{}^6$ sind. Bei a^6, a^{12}; b^6, b^{12} ist die Zahl der Begegnungspunkte mit der ganzen $a_0{}^{10}$; $b_0{}^{10}$ also $11 + 3$, $22 + 6$; $12 + 4$, $24 + 8$, folglich gleich den obigen Werthen $20 - 2k$, $40 - 4k$; $20 - 2l$, $40 - 4l$.

Lässt man aber wieder $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_1$ in B_3 zusammenfallen, so geht b^{12} wieder in b^9 über, welche durch die auf β^9 vierfachen Punkte B_1, B_2 einfach geht, β^9 auf $\bar{b}^4$ in den 3 Punkten B^0 und dem in B_3 übergegangenen $\mathfrak{B}_1$, ferner in den den 9 Punkten αa^9 associirten Punkten und demnach auf der Curve $b_0{}^6$ in $\frac{1}{3}(9.9 - 2.4.1 - 4 - 9) = 20$ Punkten trifft. Bei b^6 geht keine Veränderung vor; die 4 Punkte auf $\bar{b}^4$ sind B_3 und die drei B^0. (Cf. C. P. Nr. 44., 45.)

IX $\sigma = 14$.

107. Die Tabelle IX ergiebt sich aus der Formel (Nr. 28.).

(IX b) $$2\bar{\lambda}_{12} = \dot{\lambda}_{12} + \lambda_{12B} + \lambda_{12A}.$$

Tab. IX; $\sigma = 12$.

Sign.	λ_{12B}	λ_{12A}	$\dot{\lambda}_{12}$	$\bar{\lambda}_{12}$	Sign.	λ_{12B}	λ_{12A}	$\dot{\lambda}_{12}$	λ_{12}
6000, 0600					3300	3	3	0	3
5100, 1500	0	0	0	0	5020, 0520	0	0	0	0
4200, 2400					5011, 0511	0	0	0	0

Sign.	λ_{12B}	λ_{12A}	$\dot{\lambda}_{12}$	$\bar{\lambda}_{12}$
5002, 0502	0	0	0	0
4120, 1420	0	0	0	0
4111, 1411	0	0	0	0
4102, 1402	12	12	0	12
3220, 2320	0	0	0	0
3211, 2311	3	3	0	3
3202, 2302	9	8	3	10
4040, 0440	0	0	0	0
4031, 0431	0	0	0	0
4022, 0422	0	0	0	0
4013, 0413	12	12	0	12
4004, 0404	60	56	12	64
3140, 1340	0	0	0	0
3131, 1331	0	0	0	0
3122, 1322	3	3	0	3
3113, 1313	21	20	3	22
3104, 1304	45	45	22	56
2240	0	0	0	0
2231	0	0	0	0
2222	6	6	0	6
2213	17	17	6	20
2204	46	46	20	56
3060, 0360	0	0	0	0
3051, 0351	0	0	0	0
3042, 0342	0	0	0	0
3033, 0333	3	3	0	3
3024, 0324	33	32	3	34
3015, 0315	105	101	34	120
3006, 0306	192	192	120	252
2160, 1260	0	0	0	0
2151, 1251	0	0	0	0
2142, 1242	0	0	0	0
2133, 1233	9	9	0	9
2124, 1224	38	37	9	42
2115, 1215	91	91	42	112
2106, 1206	160	160	112	216
2080, 0280	0	0	0	0
2071, 0271	0	0	0	0
2062, 0262	0	0	0	0

Sign.	λ_{22B}	λ_{12A}	$\dot{\lambda}_{12}$	$\bar{\lambda}_{12}$
2053, 0253	0	0	0	0
2044, 0244	12	12	0	12
2035, 0235	71	69	12	76
2026, 0226	196	192	76	232
2017, 0217	352	352	232	468
2008, 0208	448	460	468	688
1180	0	0	0	0
1171	0	0	0	0
1162	0	0	0	0
1153	0	0	0	0
1144	18	18	0	18
1135	75	75	18	84
1126	182	182	84	224
1117	320	320	224	432
1108	436	436	432	652
$10\overline{10}0, 01\overline{10}0$	0	0	0	0
1091, 0191	0	0	0	0
1082, 0182	0	0	0	0
1073, 0173	0	0	0	0
1064, 0164	0	0	0	0
1055, 0155	30	30	0	30
1046, 0146	146	144	30	160
1037, 0137	378	374	160	456
1028, 0128	672	672	456	900
1019, 0119	884	896	900	1340
$100\overline{10}, 010\overline{10}$	880	900	1340	1560
$00\overline{12}0$	0	0	0	0
$00\overline{11}1$	0	0	0	0
$00\overline{10}2$	0	0	0	0
0093	0	0	0	0
0084	0	0	0	0
0075	0	0	0	0
0066	60	60	0	60
0057	290	290	60	320
0048	752	752	320	912
0039	1344	1344	912	1800
$002\overline{10}$	1780	1780	1800	2680
$001\overline{11}$	1780	1780	2680	3120
$000\overline{12}$	1560	1560	3120	3120.

Die Tabelle zeigt, dass λ_{12} bei allen Signaturen $[klm0]_{12}$ oder λ_{13} bei allen Signaturen $[k, l, m+1, 0]_{13}$ den Werth 0 hat, wie aus Nr. 30. schon hervorgeht, da $k+l<7$ ist. Die $\overline{\lambda}_{12}$ für [3300] und [3211] oder λ_{13} für [3301] und [3212] sind schon in Nr. 105., 106. (die Punkte $\mathfrak{A}^0\mathfrak{B}^0$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$) gleich 3 erkannt. Wir interpretiren wieder das letzte Resultat: $\overline{\lambda}_{12}$ für [00012] oder λ_{13} für [$0001\overline{3}$] gleich 3120.

Hat man zwei Gruppen von je 13 *Geraden:* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{13}$, $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{13}$, *so giebt es* 3120 *Paare von Strahlbüscheln* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *so dass*

$$(A\alpha)\ (\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{13}) \barwedge (B\beta)\ (\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{13}).$$

108. Wir kommen nun zur letzten Tabelle, durch welche wir *die Zahl* ζ_{14} *der Paare von associirten Punkten für* $\sigma = 14$ finden. Für die Aufstellung derselben dienen die Formeln (Nr. 15.):

(9 a u. b) $\quad 2\nu_{13} = \mu_{13} + \zeta_{13B} + \zeta_{13A}; \quad 2\mu_{13} = \nu_{13} + \lambda_{13}.$

Tab. 9; $\sigma = 13$.

Sign.	ζ_{13B}	ζ_{13A}	λ_{13}	μ_{13}	ν_{13}
6010, 0610	6	6	0	4	8
6001, 0601	12	12	0	8	16
5110, 1510	6	6	0	4	8
5101, 1501	12	12	0	8	16
4210, 2410	6	6	0	4	8
4201, 2401	12	12	0	8	16
3310	6	6	0	4	8
3301	9	9	3	8	13
5030, 0530	6	6	0	4	8
5021, 0521	12	12	0	8	16
5012, 0512	24	24	0	16	32
5003, 0503	48	48	0	32	64
4130, 1430	6	6	0	4	8
4121, 1421	12	12	0	8	16
4112, 1412	24	24	0	16	32
4103, 1403	36	36	12	32	52
3230, 2330	6	6	0	4	8
3221, 2321	12	12	0	8	16
3212, 2312	21	21	3	16	29
3203, 2303	33	34	10	29	48
4050, 0450	6	6	0	4	8
4041, 0441	12	12	0	8	16
4032, 0432	24	24	0	16	32
4023, 0423	48	48	0	32	64

Sign.	ζ_{13B}	ζ_{13A}	λ_{13}	μ_{13}	ν_{13}
4014, 0414	84	84	12	64	116
4005, 0405	108	112	64	116	168
3150, 1350	6	6	0	4	8
3141, 1341	12	12	0	8	16
3132, 1332	24	24	0	16	32
3123, 1323	45	45	3	32	61
3114, 1314	69	70	22	61	100
3105, 1305	93	95	56	100	144
2250	6	6	0	4	8
2241	12	12	0	8	16
2232	24	24	0	16	32
2223	42	42	6	32	58
2214	67	67	20	58	96
2205	88	88	56	96	136
3070, 0370	6	6	0	4	8
3061, 0361	12	12	0	8	16
3052, 0352	24	24	0	16	32
3043, 0343	48	48	0	32	64
3034, 0334	93	93	3	64	125
3025, 0325	153	154	34	125	216
3016, 0316	201	207	120	216	312
3007, 0307	210	222	252	312	372
2170, 1270	6	6	0	4	8
2161, 1261	12	12	0	8	16
2152, 1252	24	24	0	16	32
2143, 1243	48	48	0	32	64
2134, 1234	87	87	9	64	119
2125, 1225	136	137	42	119	196
2116, 1216	181	183	112	196	280
2107, 0207	202	206	216	280	344
2090, 0290	6	6	0	4	8
2081, 0281	12	12	0	8	16
2072, 0272	24	24	0	16	32
2063, 0263	48	48	0	32	64
2054, 0254	96	96	0	64	128
2045, 0245	180	180	12	128	244
2036, 0236	289	291	76	244	412
2027, 0227	382	390	232	412	592
2018, 0218	412	428	468	592	716
2009, 0209	376	396	688	716	744

Sign.	ζ_{13B}	ζ_{13A}	λ_{13}	μ_{13}	ν_{13}
1190	6	6	0	4	8
1181	12	12	0	8	16
1172	24	24	0	16	32
1163	48	48	0	32	64
1154	96	96	0	64	128
1145	174	174	18	128	238
1136	273	273	84	238	392
1127	364	364	224	392	560
1118	408	408	432	560	688
1109	380	380	652	688	724
$10\overline{11}0, 01\overline{11}0$	6	6	0	4	8
$10\overline{10}1, 01\overline{10}1$	12	12	0	8	16
1092, 0192	24	24	0	16	32
1083, 0183	48	48	0	32	64
1074, 0174	96	96	0	64	128
1065, 0165	192	192	0	128	256
1056, 0156	354	354	30	256	482
1047, 0147	562	564	160	482	804
1038, 0138	746	754	456	804	1152
1029, 0129	820	836	900	1152	1404
$101\overline{10}, 011\overline{10}$	756	776	1340	1404	1468
$100\overline{11}, 010\overline{11}$	632	652	1560	1468	1376
$00\overline{13}0$	6	6	0	4	8
$00\overline{12}1$	12	12	0	8	16
$00\overline{11}2$	24	24	0	16	32
$00\overline{10}3$	48	48	0	32	64
0094	96	96	0	64	128
0085	192	192	0	128	156
0076	384	384	0	256	512
0067	708	708	60	512	964
0058	1126	1126	320	964	1608
0049	1500	1500	912	1608	2304
$003\overline{10}$	1656	1656	1800	2304	2808
$002\overline{11}$	1532	1532	2680	2808	2936
$001\overline{12}$	1284	1284	3120	2936	2752
$000\overline{13}$	1008	1008	3120	2752	2384.

109. Die μ_{13}, ν_{13} geben nun die Zahl ζ_{14} für $[k, l, m+1, n]$, bez. $[k, l, m, n+1]$. *Alle bisher erhaltenen Signaturen* $[k, l, m, 0]_{14}$

haben also $\zeta_{14} = 4$ *und auch die* 8 *Signaturen* $[k, l, 0, 0]_{14}$ *weichen,* wie man wieder durch Auflösung einer Doppel- in zwei einfache Bedingungen erkennt, *davon nicht ab*; *alle Signaturen ferner* $[k, l, m, 1]_{14}$ *haben* $\zeta_{14} = 8$.

Bei $n = 2$ ist $\zeta_{14} = 16$, ausser für [3302], wo es 13 ist;

bei $n = 3$ ist $\zeta_{14} = 32$, ausser für [3213], [2313], wo es 29 ist;

bei $n = 4$ ist $\zeta_{14} = 64$, ausser für [4104], [1404]; [3204), [2304]; [3124], [1324]; [2224], wo es bez. 52, 48, 61, 58 ist;

bei $n = 5$ ist $\zeta_{14} = 128$, ausser für [4015], [0415]; [3115], [1315]; [2215]; [3035], [0335]; [2135], [1235], wo es bez. 116, 100, 96, 125, 119 ist. Nachher nehmen die Ausnahmen überhand. *)

Bis zu $n = 3$ *können diese Zahlenwerthe von* ζ_{14} *auch auf folgende Weise gefunden werden:* Zu $[klm0]_{11}$ werden 3 Paare conjugirter Elemente (Punkte oder Geraden) zugefügt, wobei zunächst noch von [3210] abgesehen wird; wir combiniren einmal das eine Paar und dann die beiden andern Paare mit $[klm0]_{11}$; im ersteren Falle erhalten wir, wenn das Paar aus Punkten besteht, in A durchweg eine Fläche α^4 und wenn es aus Geraden besteht, durchweg eine Fläche α^8, auf α^4 ist a_0^{10} einfach, auf α^8 doppelt; auf jener die A_i doppelt, auf dieser vierfach.

Im zweiten Falle ergiebt sich, je nach der Beschaffenheit der zugefügten Paare, eine Curve 6., 12. oder 24. Ordnung, welche durch die A_i 1-, 2-, 4mal geht und die a_0^{10} in $20 - 2k$, $40 - 4k$, $80 - 8k$ Punkten trifft; schneiden wir diese Curve zunächst mit α^4, so werden von den 24, 48, 96 Begegnungspunkten dadurch schon $1 \cdot 2k + 20 - 2k$, $2 \cdot 2k + 40 - 4k$, $4 \cdot 2k + 80 - 8k$, also 20, 40, 80 Punkte absorbirt und es bleiben 4, 8, 16 Punkte, von welchen jeder für beide entstandenen Signaturen (12) und (13) einen associirten Punkt besitzt, und zwar denselben, den einzigen, der ihm für (11) associirt ist; folglich findet auch Association für die Signatur (14) statt, die durch die Hinzufügung aller drei Paare zu $[klm0]_{11}$ entsteht. Tritt α^8 an Stelle von α^4, so verdoppeln sich offenbar alle Zahlen und wir erhalten 8, 16, 32 Paare associirter Punkte. Identitäten zwischen einem hinzugefügten $\mathfrak{A}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$ mit einem schon in $[klm0]_{11}$ enthaltenen, oder auch zweier hinzugefügten unter einander ändern nichts. Ist z. B. in dem im ersteren Falle, wo sich α^4 ergiebt, hinzugefügten Paare $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ der Punkt $\mathfrak{A}_1$ mit einem in $[klm0]_{11}$ enthaltenen Punkt $\mathfrak{A}_i$ identisch, so liegt dieser Punkt wohl auf α^4 (und zwar doppelt), aber nicht

*) Die Werthe von ζ_{14} für $n = 0$ bis $n = 7$ hat auch Hirst in ganz übereinstimmender Weise durch seine Untersuchungen gefunden und mir im Frühjahre 1876, wo ich erst den Werth $\zeta_{14} = 4$ für $n = 0$ kannte, mitgetheilt. Man vergl. auch das im Probl. der Coll. gefundene analoge Resultat (Nr. 41.), wo ebenfalls 4 sich ergeben hat.

auf den Curven des zweiten Falles; ist der $\mathfrak{A}_1$ eines der beiden für den zweiten Fall addirten Paare mit einem schon in $[klmO]_{11}$ enthaltenen $\mathfrak{A}_i$ identisch, so repräsentirt der dadurch für (13) entstehende Punkt A_i 1, 2, 4 von den Schnittpunkten der Curve 6., 12., 24. Ordnung mit a_0^{10}. Ist ein für den ersten Fall addirter $\mathfrak{A}_i$ mit einem im zweiten addirten identisch, so liegt er wohl auf der Fläche α^4, aber nicht auf der Curve a^6 oder a^{12}.

110. Betrachten wir nun auch die Signatur

$$[3210] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 ; \end{matrix}$$

wird $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$ zugefügt, so ergiebt sich eine Fläche α^4 oder α^3, je nachdem $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ nicht identisch oder identisch ist; erstere enthält die A_i doppelt, die $\bar{a}^4$ einfach, die a_0^6 einfach, letztere die A_i einfach, die $\bar{a}^4$ gar nicht, die a_0^6 ebenfalls einfach. Wird aber $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ zugefügt, so ergiebt sich eine Fläche 7. Ordnung α^7, welche die A_i dreifach, die $\bar{a}^4$ einfach, die a_0^6 doppelt enthält.

Fügt man nun andererseits α) 2 Paare conjugirter Punkte, wobei auch Identität der beiden $\mathfrak{A}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$ möglich ist, β) zwei conjugirte Punkte und zwei conjugirte Geraden, γ) 2 Paare conjugirter Geraden zu; so ergiebt sich eine Curve a^6, a^{12}, a^{21}, welche durch die drei A_i 1-, 2-, 3mal geht und a_0^6 in 11, 22, 41 Punkten, die a^4 in 3, 6, 9 Punkten trifft (Nr. 106.). Bringen wir sie mit α^4 zum Schnitt, so erhalten wir $6\ 4 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 11 - 3$, $12 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 22 - 6$, $21 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 41 - 9$ übrige Punkte; das sind die 4, 8, 16 Punkte $(A)_{14}$ für [3240] (oder [4220] oder [3320]), [3231], [3222]; schneiden wir sie mit α^3, so erhalten wir $6 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 11$, $12 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 22$, $21 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 41$ übrige Punkte; dies sind die 4, 8, 13 Punkte $(A)_{14}$ für [3320] (oder [4300] oder [3400]), [3311] und [3302]. Von ihren Begegnungspunkten mit α^7 bleiben übrig $6 \cdot 7 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 11 - 3$, $12 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 22 - 6$, $21 \cdot 7 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 41 - 9$. Dies sind die 8, 16, 29 Punkte $(A)_{14}$ für [3231] (oder [4211] oder [3311]), [3222], [3213].

Man hätte natürlich auch die $(B)_{14}$ abzählen können und wäre zu denselben Zahlen gelangt. (Cf. C. P. Nr. 46.).

Anhang.

111. Bei der Signatur [0070] nehmen wir an, dass jeder $\mathfrak{A}_i$ sich mit seinem homologen $\mathfrak{B}_i$ zu $\mathfrak{C}_i$ vereinige. Man habe weiter zwei Punkte A, B.

Es giebt ein System von Correlationen zwischen den Bündeln A, B und die einem Strahle des einen Bündels entsprechenden Ebenen im andern erzeugen einen Ebenenbüschel, jeder Ebene desselben entspricht eine Correlation (Hirst Nr. 41.). Jede Correlation führt nun durch die

Schnitte homologer Strahlen und Ebenen zu einer Fläche 2. Grades, welche durch die 9 Punkte A, B, $\mathfrak{E}_1, \cdots, \mathfrak{E}_7$ geht; Herr Schröter hat nun in § 6. der schon in der Einleitung erwähnten Abhandlung (Borchardt's Journal Bd. 62. S. 215) den interessanten Satz bewiesen, dass sämmtliche Correlationen des Systems *dieselbe* Fläche hervorrufen. Die Axe des Büschels der Ebenen z. B. in B, welche in den verschiedenen Correlationen einem Strahle von A homolog sind, begegnet sich mit diesem Strahle in dem Punkte, wo er die Fläche zum zweiten Male schneidet. Nach Hirst giebt es in dem Systeme drei Axen-Correlationen. Zwei derselben haben zu Axen die durch A und B gehenden Geraden der Fläche aus der einen, bez. aus der andern Schaar und die Erzeugung der Fläche geschieht durch projective Ebenenbüschel (Ebene Proj. Nr. 19.; Fiedler darst. Geom. 2. Aufl., S. 676); bei der dritten Axen-Correlation sind die projectiven Büschel zu identischen, um die Gerade $\overline{AB}$ geworden; jede Ebene entspricht sich selbst (Eb. Proj. Nr. 17.) und enthält den ihr im andern Bündel homologen Strahl ganz. *Durch diese Correlation wird also die Fläche nicht erzeugt.* Fügt man demnach $\mathfrak{A}_8 \mathfrak{B}_8$ zu, so giebt es in dem Ebenenbüschel, der dem Strahle $A\mathfrak{A}_8$ im Systeme entspricht, eine durch $\mathfrak{B}_8$ gehende Ebene, und es ist eine Correlation aus dem Systeme bestimmt (cf. Schröter a. a. O.). Vereinigen sich aber $\mathfrak{A}_8$, $\mathfrak{B}_8$ in den Punkt $\mathfrak{E}_8$, der von dem zweiten Schnitte von $A\mathfrak{E}_8$ mit der Fläche 2. Gr. verschieden ist, so enthält die durch $\mathfrak{B}_8 \equiv \mathfrak{A}_8 \equiv \mathfrak{E}_8$ gehende Ebene des Büschels die ganze Gerade $A\mathfrak{E}_8$, da sie ausserdem noch jenen zweiten Schnitt enthält, durch den ja die Büschelaxe geht. Also ist die Correlation die dritte Axen-Correlation, welche die Fläche nicht erzeugt.

Wenn also bei [0080] die Punkte $\mathfrak{B}_i$ je mit $\mathfrak{A}_i$ sich zu $\mathfrak{E}_i$ vereinigen, so ist die Correlation zwischen zwei Bündeln A, B stets von der Art der oben beschriebenen dritten Axen-Correlation, ausser wenn die 10 Punkte A, B, $\mathfrak{E}_1 \cdots \mathfrak{E}_8$ auf derselben Fläche 2. Grades liegen, in welchem Falle dann ein ganzes Correlationssystem möglich ist.*)

Darmstadt, Februar 1877.

---

*) Eine Fläche 3. O. kann durch einen Strahlenbündel und ein Flächennetz 2. O., die in Correlation stehen, erzeugt werden (cf. meine Fl. 3. O. Nr. 110.); von den Grundpunkten des Netzes kann man nur 6 in beliebige Punkte der Fläche legen, weil sonst nicht beide übrigen auch auf dieselbe fallen. Thut man dies, wenn 19 Punkte der Fläche gegeben sind, dann lässt sich dieselbe noch auf einfach unendlich viele Weisen erzeugen; es beschreibt dabei der Scheitel des Strahlenbündels eine Curve 6. Ordnung, weil $\zeta^{13B} = 6$ für [$00\overline{13}0$], während (Eb. Proj. Nr. 46.) die beiden andern Netzgrundpunkte eine Curve 27. Ordnung durchlaufen: ein Resultat, das dem Schröter'schen analog ist. Man vergl. hierfür Herrn v. Escherich's Aufsatz März 1877 der Wiener Sitzungsberichte, wo auch $\zeta_{11B} = 1$ für [$00\overline{11}0$] und $\zeta_{14} = 4$ für [$00\overline{14}0$] ermittelt ist. (Juli 1877.)

On some formulae in Elliptic Integrals.

Von A. Cayley in Cambridge.

I reproduce in a modified form an investigation contained in the memoir, Zolotareff, Sur la méthode d'integration de M. Tchébychef, Annalen t. V (1872) pp. 560—580.

Starting from the quartic

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)\,(x,\ 1)^4, = a \cdot x - \alpha \cdot x - \beta \cdot x - \gamma \cdot x - \delta,$$

we derive from it the quartic

$$(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1)\,(x_1,\ 1)^4 = a_1 \cdot x_1 - \alpha_1 \cdot x_1 - \beta_1 \cdot x_1 - \gamma_1 \cdot x_1 - \delta_1,$$

where, writing for shortness

$$\begin{aligned} \lambda &= -\alpha + \beta + \gamma - \delta, \\ \mu &= \quad \alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ \nu &= \quad \alpha + \beta - \gamma - \delta, \end{aligned}$$

the roots of the new quartic are

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \theta + \frac{\mu\nu}{2\lambda}, \\ \beta_1 &= \theta + \frac{\nu\lambda}{2\mu}, \\ \gamma_1 &= \theta + \frac{\lambda\mu}{2\nu}, \\ \delta_1 &= \theta, \end{aligned}$$

θ being arbitrary: the differences of the roots $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1$ are, it will be observed, functions of the differences of the roots $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$.

We assume $a_1 = a = 1$, nevertheless retaining in the formulae a_1 or a (each meaning 1), whenever, for the sake of homogeneity, it is convenient to do so. The relations between the remaining coefficients $b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1$ and $b,\ c,\ d,\ e$ are of course to be calculated from the formulae $-4b = \Sigma\alpha$, $6c = \Sigma\alpha\beta$, &c. and the like formulae $-4b_1 = \Sigma\alpha_1$, $6c_1 = \Sigma\alpha_1\beta_1$, &c. We thus have

$$-4b_1 = 4\theta + \tfrac{1}{2} \quad \Sigma \frac{\mu\nu}{\lambda},$$

$$6c_1 = 6\theta^2 + \tfrac{3}{2}\theta \, \Sigma \frac{\mu\nu}{\lambda} + \tfrac{1}{4}\Sigma\lambda^2,$$

$$-4d_1 = 4\theta^3 + \tfrac{3}{2}\theta^2 \, \Sigma \frac{\mu\nu}{\lambda} + \tfrac{1}{2}\theta \, \Sigma\lambda^2 + \tfrac{1}{8}\lambda\mu\nu,$$

$$e_1 = \theta^4 + \tfrac{1}{2}\theta^3 \, \Sigma \frac{\mu\nu}{\lambda} + \tfrac{1}{4}\theta^2 \, \Sigma\lambda^2 + \tfrac{1}{8}\theta\lambda\mu\nu,$$

where $\Sigma \frac{\mu\nu}{\lambda} = \frac{1}{\lambda\mu\nu} \Sigma \lambda^2\mu^2$.

Writing for shortness

$C = ac - b^2,$ $\qquad$ $I = ae - 4bd + 3c^2,$

$D = a^2d - 3abc + 2b^3,$ $\qquad$ $J = ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3,$

$E = a^3e - 4a^2bd + 6ab^2c - 3b^4 (= a^2 I - 3C^2),$ $\quad$ $B = \frac{-a^2I + 12C^2}{4D},$

we have

$$\begin{aligned}
\Sigma\lambda &= -4(b+\delta),\\
\Sigma\lambda^2 &= -48C,\\
\Sigma\lambda\mu &= 24C + 8(b+\delta)^2,\\
\lambda\mu\nu &= 32D,\\
\Sigma\lambda^2\mu^2 &= 64(-a^2I + 12C^2),
\end{aligned}$$

where the last equation may be verified by means of the formula

$$(\Sigma\lambda\mu)^2 = \Sigma\lambda^2\mu^2 + 2\lambda\mu\nu\Sigma\lambda.$$

And we hence obtain

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1,\\
b_1 &= -\theta - B,\\
c_1 &= \theta^2 + 2B\theta - 2C,\\
d_1 &= -\theta^3 - 3B\theta^2 + 6C\theta - D,\\
e_1 &= \theta^4 + 4B\theta^3 - 12C\theta^2 + 4D\theta.
\end{aligned}$$

And consequently

$$(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)(x_1, 1)^4 = (1, -B, -2C, -D, 0)(x_1 - \theta, 1)^4.$$

Hence also

$$I_1 = a_1e_1 - 4b_1d_1 + 3c_1^2, = -4BD + 12C^2, = a^2I;$$

$$\begin{aligned}
J_1 = a_1c_1e_1 - a_1d_1^2 - b_1^2e_1 + 2b_1c_1d_1 - c_1^3, &= -D^2 + 8C^3 - 4BCD,\\
&= -D^2 + 8C^3 + C(a^2I - 12C^2),\\
&= a^2CI - 4C^3 - D^2,\\
&= a^3J,
\end{aligned}$$

where, as regards this last equation $a^2CI - 4C^3 - D^2 = a^3J$, observe that C, D are the leading coefficients of the Hessian H and the cubicovariant Φ of the quartic function U, and hence that the identity

$-\Phi^2 = JU^3 - IU^2\mathrm{H} + 4\mathrm{H}^3$, attending only to the term in x^6, becomes $-D^2 = a^3J - a^2CI + 4C^3$, which is the equation in question.

We thus have $I_1 = I$, $J_1 = J$; viz. the functions $(a, b, c, d, e)(x, 1)^4$, $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)(x_1, 1)^4$, are linearly transformable the one into the other, and that by a unimodular substitution $x_1 = \varrho x + \sigma$, $y_1 = \varrho' x + \sigma'$, where $\varrho\sigma' - \varrho'\sigma = 1$. It may be remarked that we have $(a, b, c, d, e)(x, 1)^4 = (1, 0, C, D, E)(x + b, 1)^4$; and hence the theorem may be stated in the form: the quartic functions $(1, 0, C, D, E)(x, 1)^4$, and $(1, -B, -2C, -D, 0)(x_1, 1)^4$, are transformable the one into the other by a unimodular substitution: or again substituting for E its value $a^2I - 3C^2, = -4BD + 9C^2$, the quartic functions $(1, 0, C, D, -4BD + 9C^2)(x, 1)^4$ and $(1, -B, -2C, -D, 0)(x_1, 1)^4$ are linearly transformable the one into the other by a unimodular substitution. In this last form B, C, D are arbitrary quantities; it is at once verified that the invariants I, J have the same values for the two functions respectively; and the theorem is thus self-evident.

Reverting to the expressions for $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ we obtain

$$\alpha_1 - \delta_1 = \frac{\mu\nu}{2\lambda};\ \beta_1 - \gamma_1 = \frac{\lambda}{2\mu\nu}(\nu^2 - \mu^2), = \frac{\alpha - \delta\cdot\beta - \gamma}{\alpha_1 - \delta_1},$$

$$\beta_1 - \delta_1 = \frac{\nu\lambda}{2\mu};\ \gamma_1 - \alpha_1 = \frac{\mu}{2\nu\lambda}(\lambda^2 - \nu^2), = \frac{\beta - \delta\cdot\gamma - \alpha}{\beta_1 - \delta_1},$$

$$\gamma_1 - \delta_1 = \frac{\lambda\mu}{2\nu};\ \alpha_1 - \beta_1 = \frac{\nu}{2\lambda\mu}(\mu^2 - \lambda^2), = \frac{\gamma - \delta\cdot\alpha - \beta}{\gamma_1 - \delta_1}.$$

Hence also

$$\alpha - \delta\cdot\beta - \gamma,\ \beta - \delta\cdot\gamma - \alpha,\ \gamma - \delta\cdot\alpha - \beta$$
$$= \alpha_1 - \delta_1\cdot\beta_1 - \gamma_1,\ \beta_1 - \delta_1\cdot\gamma_1 - \alpha_1,\ \gamma_1 - \delta_1\cdot\alpha - \beta,$$

which agrees with the foregoing equations $I_1 = I$ and $J_1 = J$ (since I, J are functions of the first set of quantities and I_1, J_1 the like functions of the second set; in fact $I = \frac{1}{24}(P^2 + Q^2 + R^2)$, and $J = \frac{1}{432}(Q - R)(R - P)(P - Q)$, if for a moment the quantities are called (P, Q, R).

We consider now the differential expression $\dfrac{dx}{\sqrt{x - \alpha\cdot x - \beta\cdot x - \gamma\cdot x - \delta}}$; to transform this into the elliptic form, assume

$$k^2 = -\frac{\alpha - \beta\cdot\gamma - \delta}{\gamma - \alpha\cdot\beta - \delta};\ \operatorname{sn}^2 a = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \delta},$$

(where a is of course not the coefficient, $= 1$, heretofore represented by that letter: as a will only occur under the functional signs sn, cn, dn, there is no risk of ambiguity). And then further

$$x = \frac{\alpha\operatorname{sn}^2 u - \delta\operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a}.$$

Forming the equations

$$k^2 \operatorname{sn}^2 a = -\frac{\alpha-\beta}{\beta-\delta}, \quad k^2 \operatorname{sn}^4 a = -\frac{\gamma-\alpha\cdot\alpha-\beta}{\gamma-\delta\cdot\beta-\delta},$$

we deduce without difficulty

$$\operatorname{sn}^2 a = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\delta}, \quad \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a} = \frac{x-\delta}{x-\alpha},$$

$$\operatorname{cn}^2 a = \frac{\alpha-\delta}{\gamma-\delta}, \quad \frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 a} = \frac{x-\gamma}{x-\alpha},$$

$$\operatorname{dn}^2 a = \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}, \quad \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 a} = \frac{x-\beta}{x-\alpha},$$

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a = \frac{(\alpha-\delta)(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)}{\beta-\delta\cdot\gamma-\delta}, = \frac{\lambda(\alpha-\delta)}{\beta-\delta\cdot\gamma-\delta}$$

the use of which last equation will presently appear.

We hence obtain

$$2 \operatorname{sn} u \ \operatorname{cn} u \ \operatorname{dn} u \ du = -(\alpha-\delta) \operatorname{sn}^2 a \frac{dx}{(x-\alpha)^2},$$

$$\operatorname{sn} u \ \operatorname{cn} u \ \operatorname{dn} u = \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \frac{\sqrt{x-\alpha\cdot x-\beta\cdot x-\gamma\cdot x-\delta}}{(x-\alpha)^2},$$

and consequently

$$2\,du = -\frac{(\alpha-\delta)\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha\cdot x-\beta\cdot x-\gamma\cdot x-\delta}},$$

or, reducing the coefficient,

$$\frac{dx}{\sqrt{x-\alpha\cdot x-\beta\cdot x-\gamma\cdot x-\delta}} = \frac{-2}{\sqrt{\gamma-\alpha\cdot\beta-\delta}}\,du,$$

which is the required formula.

We next have

$$\operatorname{sn}^2 2a = \frac{4\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{(1-k^2\operatorname{sn}^4 a)^2} = \frac{4\cdot\beta-\delta\cdot\gamma-\alpha}{\lambda^2}, = \frac{\gamma_1-\alpha_1}{\gamma_1-\delta_1}$$

in virtue of the foregoing values

$$\gamma_1-\alpha_1 = \frac{2\mu}{\nu\lambda}(\beta-\delta)(\gamma-\alpha) \text{ and } \gamma_1-\delta_1 = \frac{\lambda\mu}{2\nu}.$$

Moreover

$$k^2 = -\frac{\alpha-\beta.\gamma-\delta}{\gamma-\alpha\cdot\beta-\delta}, = -\frac{\alpha_1-\beta_1\cdot\gamma_1-\delta_1}{\gamma_1-\alpha_1\cdot\beta_1-\delta_1}.$$

Hence the like formulae with the same value of k^2, and with $2a$ in place of a, will be applicable to the like differential expression in x_1: viz. assuming

$$x_1 = \frac{\alpha_1 \operatorname{sn}^2 u_1 - \delta_1 \operatorname{sn}^2 2a}{\operatorname{sn}^2 u_1 - \operatorname{sn}^2 2a}$$

we have

$$\frac{dx_1}{\sqrt{x_1-\alpha_1\cdot x_1-\beta_1\cdot x_1-\gamma_1\cdot x_1-\delta_1}} = \frac{-2}{\sqrt{\gamma_1-\alpha_1\cdot\beta_1-\delta_1}}\,du_1.$$

We have thus the integral of the differential equation

$$\frac{dx_1}{\sqrt{x_1-\alpha_1\cdot x_1-\beta_1\cdot x_1-\gamma_1\cdot x_1-\delta_1}} = \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha\cdot x-\beta\cdot x-\gamma\cdot x-\delta}}$$

(the two quartic functions being of course connected as before) viz. assuming x, x_1 functions of u, u_1 respectively as above and recollecting that $\gamma_1-\alpha_1\cdot\beta_1-\delta_1=\gamma-\alpha\cdot\beta-\delta$, we have $du_1=du$; and therefore $u_1=u+f$ (f an arbitrary constant); the required integral is thus given by the equations

$$\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}=\frac{x-\delta}{x-\alpha};\quad \frac{\operatorname{sn}^2(u+f)}{\operatorname{sn}^2 2a}=\frac{x_1-\delta_1}{x_1-\alpha_1};\ (f \text{ the constant of integration}).$$

Using the formula

$$\operatorname{sn}(u+f)=\frac{\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2 f}{\operatorname{sn} u\operatorname{cn} f\operatorname{dn} f-\operatorname{sn} f\cdot\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u},$$

we obtain

$$\frac{x_1-\delta_1}{x_1-\alpha_1}\operatorname{sn}^2 2a=\frac{\left\{(x-\delta)\operatorname{sn}^2 a-(x-\alpha)\operatorname{sn}^2 f\right\}^2}{\left\{\sqrt{x-\alpha\cdot x-\delta}\operatorname{sn} a\operatorname{cn} f\operatorname{dn} f-\sqrt{x-\beta\cdot x-\gamma}\operatorname{sn} f\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a\right\}^2},$$

which is the general integral.

We obtain a particular integral of a very simple form by assuming $f=a$, viz. this is

$$\frac{x_1-\delta_1}{x_1-\alpha_1}\operatorname{sn}^2 2a=\frac{\operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{cn}^2 a\operatorname{dn}^2 a}\frac{(\alpha-\delta)^2}{\left\{\sqrt{x-\alpha\cdot x-\delta}-\sqrt{x-\beta\cdot x-\gamma}\right\}^2};$$

this is

$$\frac{x_1-\delta_1}{x_1-\alpha_1}\,\frac{\gamma_1-\alpha_1}{\gamma_1-\delta_1}=\frac{\gamma-\alpha\cdot\beta-\delta}{\left\{\sqrt{x-\alpha\cdot x-\delta}-\sqrt{x-\beta\cdot x-\gamma}\right\}^2},$$

or writing $\gamma-\alpha\cdot\beta-\delta=\gamma_1-\alpha_1\cdot\beta_1-\delta_1$, reducing and inverting, we have

$$\frac{x_1-\alpha_1}{x_1-\delta_1}=\frac{1}{\beta_1-\delta_1\cdot\gamma_1-\delta_1}\left\{\sqrt{x-\alpha\cdot x-\delta}-\sqrt{x-\beta\cdot x-\gamma}\right\}^2,$$

which may also be written in the equivalent forms

$$\frac{x_1-\beta_1}{x_1-\delta_1}=\frac{1}{\gamma_1-\delta_1\cdot\alpha-\delta_1}\left\{\sqrt{x-\beta\cdot x-\delta}-\sqrt{x-\gamma\cdot x-\alpha}\right\}^2,$$

$$\frac{x_1-\gamma_1}{x_1-\delta_1}=\frac{1}{\alpha_1-\delta_1\cdot\beta_1-\delta_1}\left\{\sqrt{x-\gamma\cdot x-\delta}-\sqrt{x-\alpha\cdot x-\beta}\right\}^2.$$

In fact from the first equation we have

$$\frac{\alpha_1-\delta_1\cdot\beta_1-\delta_1\cdot\gamma_1-\delta_1}{x_1-\delta_1}=(\beta_1-\delta_1)(\gamma_1-\delta_1)$$
$$-\left\{\sqrt{x-\alpha\cdot x-\delta}-\sqrt{x-\beta\cdot x-\gamma}\right\}^2.$$

where the expression on the right hand side is

$$\delta_1{}^2-\delta_1(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+\alpha_1\delta_1+\beta_1\gamma_1-2x^2+x(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\alpha\delta-\beta\gamma+2\sqrt{X},$$

X having here the value

$$X=x-\alpha\cdot x-\beta\cdot x-\gamma\cdot x-\delta.$$

Writing for a moment

$$\begin{aligned} P &= \alpha\delta + \beta\gamma\,, & P_1 &= \alpha_1\delta_1 + \beta_1\gamma_1\,, \\ Q &= \beta\delta + \gamma\alpha\,, & Q_1 &= \beta_1\delta_1 + \gamma_1\alpha_1\,, \\ R &= \gamma\delta + \alpha\beta\,, & R_1 &= \gamma_1\delta_1 + \alpha_1\beta_1\,, \end{aligned}$$

then by what precedes $Q_1 - R_1$, $R_1 - P_1$, $P_1 - Q_1$ are equal to $Q-R$, $R-P$, $P-Q$ respectively; that is $P_1 - P = Q_1 - Q = R_1 - R$, $=$(suppose) Ω, a function symmetrical in regard to $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; α, β, γ: the equation therefore is

$$\frac{\alpha_1-\delta_1 \cdot \beta_1-\delta_1 \cdot \gamma_1-\delta_1}{x_1-\delta_1} = \delta_1(\delta_1-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1) - 2x^2 + x(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + 2\sqrt{X} + \Omega,$$

or the relation is symmetrical in regard to $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; α, β, γ: and the first form implies therefore each of the other two forms.

Cambridge, 8 May 1877.

Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre.

Von H. Grassmann in Stettin.

Da die Ausdehnungslehre nur die *eine* willkührliche Annahme macht, dass es nämlich Grössen gebe, die sich aus mehr als einer Einheit numerisch ableiten lassen, und sie von da aus in ganz objectiver Weise fortschreitet, so müssen alle Ausdrücke, die aus einer Anzahl unabhängiger Einheiten numerisch ableitbar sind, und also auch die Hamilton'schen Quaternionen, in der Ausdehnungslehre ihren bestimmten Ort haben und erst in ihr ihre wissenschaftliche Grundlage finden. Dies ist bisher nicht erkannt und Göran Dillner in seiner lehrreichen Abhandlung über die Quaternionen (Annalen XI, 168 ff.) thut der Ausdehnungslehre nicht einmal Erwähnung, obgleich er eine ganze Reihe von Sätzen aus der Theorie der Quaternionen ableitet, welche schon in meiner Ausdehnungslehre von 1844 ($\mathfrak{A}_1$), und ebenso in der späteren Bearbeitung von 1862 ($\mathfrak{A}_2$) ihre viel einfachere und aus der Natur der Sache entspringende Begründung gefunden haben. Auch ist es verwerflich und der Lehre von den Quaternionen wenig förderlich gewesen, dass man nach Hamilton's Vorgang einfache und längst bekannte Begriffe mit neuen, oft recht unpassenden Namen bezeichnet hat, wie „Vector“ statt „Strecke“, „Tensor“ statt „Länge“ oder „numerischer Werth“ ($\mathfrak{A}_2$ 414), u. s. w.

Die Hamilton'schen Quaternionen entspringen aus einer der Multiplicationen, welche ich (in meiner Abhandlung Sur les différents genres de multiplication in Crelle's Journal Bd. 49 S. 136 ff.) dargestellt und an die 3 Gleichungsgruppen

(1) $$e_r e_s = e_s e_r$$

(2) $$e_r e_s + e_s e_r = 0, \quad e_1^2 = e_2^2 = \cdots = e_n^2$$

(3) $$e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 = 0$$

geknüpft habe, wo e_1, $e_2 \cdots e_n$ die von einander unabhängigen Einheiten und e_r und e_s zwei beliebige von einander verschiedene dieser Einheiten bezeichnen, und zwar knüpfen sich die Quaternionen für den Fall, dass $n = 3$ ist, an die Multiplication, deren Bedingungsgleichungen die mittlere jener drei Gruppen bilden. Ich will diese Art der Multiplication die mittlere nennen, und zwar hauptsächlich deshalb, weil sie, wie sich sogleich zeigen wird, zwischen den beiden Hauptarten der Multiplication, die ich die „äussere“ und die „innere“ genannt habe, die Mittelstufe bildet. Die äussere Multiplication hat nämlich zu Bedingungsgleichungen die zwei Gruppen (2) und (3) und die innere die zwei Gruppen (1) und (2). Ich habe das äussere Product zweier Strecken a und b mit $[ab]$, das innere Product derselben mit $[a \mid b]$ bezeichnet und werde in dieser Abhandlung unter ab (ohne scharfe Klammern) stets das mittlere Product der Strecken a und b verstehen. Dann ergiebt sich sogleich, dass das mittlere Product ab zweier Strecken sich darstellen lässt in der Form

$$ab = \lambda\,[a \mid b] + \mu'\,[ab] \tag{4}$$

wo λ und μ' constant und zunächst willkührlich, jedoch nicht null sind. Aus den Bedingungsgleichungen (2) ergiebt sich, dass es für das mittlere Product zweier Strecken $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ von einander unabhängige Einheitsproducte giebt, von denen eins (etwa e_1^2) dem inneren Producte $[a \mid b]$, die andern ($e_1 e_2$, $e_1 e_3$, $e_2 e_3$, u. s. w.) dem äusseren Producte $[ab]$ zu Grunde liegen. Im Raume, wo die Anzahl der von einander unabhängigen Strecken drei beträgt, also $n = 3$ ist, ist also die Zahl der Einheitsproducte, auf die die mittlere Multiplication zurückführt, gleich *vier*. Die Bedingungsgleichungen der mittleren Multiplication werden dann

$$e_3 e_2 = -e_2 e_3, \quad e_1 e_3 = -e_3 e_1, \quad e_2 e_1 = -e_1 e_2 \tag{a}$$

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 \tag{b}$$

Aber das wesentlich Eigenthümliche der mittleren Multiplication im Raume als einem Gebiete dritter Stufe ist, dass die Anzahl der von einander unabhängigen Einheitsproducte in (a) gleich der Anzahl der Einheiten ist, und man daher jene auf diese zurückführen kann. So bleiben also dann die Einheiten des Productes, wenn man noch die in (b) zu Grunde liegende Zahleinheit hinzunimmt, dieselben wie die ursprünglichen. Diese einfache Beziehung verschwindet bei den Gebieten höherer Stufe, so dass die mittlere Multiplication in der Ausdehnungslehre, welche Gebiete beliebiger Stufe behandelt, keine einfache Bedeutung behält. Ich beschränke mich daher auf den Raum und nehme an, dass die drei zu Grunde gelegten Einheiten e_1, e_2, e_3 drei gleich lange zu einander senkrechte Strecken sind, deren Länge 1 beträgt. Nun habe ich in der Ausdehnungslehre ($\mathfrak{A}_2$ 50, 51) nachgewiesen, dass die Bedingungsgleichungen der äusseren Multiplication noch bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten beliebige andere einführt, und ($\mathfrak{A}_2$ 330 ff.), dass, wenn e_1, e_2, e_3 einen

Normalverein bilden, d. h. sie auf einander senkrecht stehen und die Länge 1 haben, d. h. $[e_r \mid e_r] = 1$ ist, die Bedingungsgleichungen der inneren Multiplication auch dann noch bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Einheiten eines beliebigen Normalvereins setzt. Da also bei dieser Aenderung der Einheiten auch die Bedingungsgleichungen der äusseren Multiplication bestehen bleiben, so bleibt auch das mittlere Product, als aus dem äusseren und inneren zusammengesetzt, bei dieser Aenderung des Normalvereins in einen andern ungeändert.

In der angeführten Abhandlung (Crelle Bd. 49 S. 131 ff.) habe ich diese Unveränderlichkeit für alle aus den 3 Gleichungsgruppen (1, 2, 3) ableitbaren Multiplicationen also auch unmittelbar für die mittlere nachgewiesen.

Es kommt nun darauf an, die 3 Producte $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ auf die ursprünglichen Einheiten zurückzuführen; auch dies ist schon in der Ausdehnungslehre ($\mathfrak{A}_2$) vollendet, wo e_1, e_2, e_3 als Ergänzungen von $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ aufgefasst und

$$(5) \qquad \begin{cases} e_1 = \mid [e_2 e_3], & e_2 = \mid [e_3 e_1], & e_3 = \mid [e_1 e_2] \\ [e_2 e_3] = \mid e_1, & [e_3 e_1] = \mid e_2, & [e_1 e_2] = \mid e_3 \end{cases}$$

gesetzt sind, und wo der Strich | das Zeichen der Ergänzung ist und vorausgesetzt wird, dass e_1, e_2, e_3 einen Normalverein bilden. Dann wird ferner für eine beliebige Strecke a, die aus den ursprünglichen Einheiten durch die Zahlen α_1, α_2, α_3 abgeleitet ist, festgesetzt, dass ihre Ergänzung aus den Ergänzungen jener Einheiten durch dieselben Zahlen abgeleitet sei, also

$$(6) \qquad \begin{cases} \mid (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha_1 [e_2 e_3] + \alpha_2 [e_3 e_1] + \alpha_3 [e_1 e_2] \\ \mid [\alpha_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_3 e_1 + \alpha_3 e_1 e_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \end{cases}$$

sei, und es ist nachgewiesen ($\mathfrak{A}_2$ 37 ff.), dass dieselben Beziehungen bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Einheiten eines beliebigen andern Normalvereins setzt. Mit Hilfe dieser Begriffe können wir nun die Fundamentalgleichung (4) in der Form schreiben

$$ab = \lambda [a \mid b] + \mu \mid [ab]$$

wo λ und μ constante Zahlen sind. Aendern sich λ und μ in gleichem Verhältnisse, z. B. um den Factor ν, so ändert sich das Product nur um denselben Zahlfactor, bleibt also seinem Wesen nach unverändert. Wir können daher ohne wesentliche Aenderung eine dieser Zahlen 1 setzen. Wir setzen $\mu = 1$. Dann bestimmen wir λ dadurch, dass jedes mittlere Product aus 3 Factoren dem Gesetz der Vereinbarkeit (dem associativen Princip) unterliegen d. h. $abc = a(bc)$ sein soll. Dies wird erfüllt sein, wenn es für die Einheitsproducte der mittleren

Multiplication gilt. Diese Einheitsproducte lassen sich nach der Formel $ab = \lambda\,[a \mid b] + \mid [ab]$ auf die der inneren und äusseren Multiplication zurückführen. Für diese beiden sind nach dem Obigen die Einheitsproducte an die Formeln

$$[e_r \mid e_r] = 1, \quad [e_r \mid e_s] = 0; \quad [e_r e_r] = 0, \quad [e_r e_s] = -[e_s e_r]$$

geknüpft, wo r und s zwei verschiedene der Indices 1, 2, 3 sind. Dazu kommen noch vermöge des obigen Begriffes der Ergänzung die Formeln

$$\mid [e_r e_s] = e_t,$$

wenn r, s, t dem Cyclus 1, 2, 3 angehören, d. h. r, s, t entweder = 1. 2, 3 oder 2, 3, 1 oder 3, 1, 2 sind. Hieraus folgen für die mittlere Multiplication der Einheiten e_1, e_2, e_3 die bedingenden Gesetze

$$(7) \qquad e_r e_r = \lambda, \quad e_r e_s = e_t, \quad e_s e_r = -e_r e_s$$

wenn r, s, t dem Cyclus 1, 2, 3 angehören. Dann ergiebt sich für die mittlere Multiplication dreier Einheiten, wenn man die cyclische Bedeutung von r, s, t festhält, $e_r e_s e_t = e_t e_t = \lambda = e_r e_r = e_r(e_s e_t)$, ebenso $e_t e_s e_r = -e_r e_r = -\lambda = -e_t e_t = e_t(e_s e_r)$, d. h. für drei verschiedene Einheitsfactoren gilt Vereinbarkeit. Ebenso für drei gleiche. So auch für zwei gleiche, die durch einen ungleichen getrennt sind. Denn $e_r(e_s e_r) = -(e_s e_r) e_r = e_r e_s e_r$. Dagegen ist $e_r e_r e_s = \lambda e_s$, und $e_r(e_r e_s) = e_r e_t = -e_s$. Soll also auch für diesen Fall Vereinbarkeit gelten, so muss nothwendig $\lambda = -1$ sein. Umgekehrt wenn $\lambda = -1$ ist, so ergiebt sich auch für die noch übrigen Producte aus 3 Einheiten Vereinbarkeit der Factoren. Denn dann ist $e_s e_s e_r = \lambda e_r = -e_r = -e_s e_t = e_s(e_s e_r)$; ferner $e_r e_s e_s = e_t e_s = -e_r = \lambda e_r = e_r(e_s e_s)$ und $e_s e_r e_r = -e_t e_r = -e_s = \lambda e_s = e_s(e_r e_r)$. Es folgt also dann Vereinbarkeit für je 3 Einheitsfactoren, also auch für je 3 Factoren, also auch für beliebig viele ($\mathfrak{A}_1$ § 3.). Wir setzen daher für die mittlere Multiplication $\lambda = -1$, während $\mu = 1$ gesetzt war, also

$$(\mathrm{I}) \qquad ab = -[a \mid b] + \mid [ab].$$

Aus dieser Fundamentalgleichung folgen alle Gesetze der Quaternionen, und zwar fast alle mit der grössten Leichtigkeit. Auch die *naturgemässe* Benennung ergiebt sich hiernach von selbst. Wir werden $-[a \mid b]$ den inneren, $\mid [ab]$ den äusseren Theil der Quaternion nennen können. Sind a und b parallel, so wird der äussere Theil null, und die Factoren wie bei jedem inneren Product vertauschbar. Werden a und b zu einander senkrecht, so wird der innere Theil null und die Factoren wie bei jedem äusseren Product mit Zeichenwechsel vertauschbar. Vertauscht man die Factoren eines mittleren Products, so bleibt der innere Theil unverändert, der äussere ändert sein Zeichen ($\mp$).

Ich werde auch im Folgenden die Zahlen stets mit griechischen, die Strecken stets mit lateinischen Buchstaben bezeichnen, nur den

Buchstaben q werde ich für die Bezeichnung der Quaternionen aufbewahren. Ist $\alpha + a$ eine Quaternion, so bezeichnet man bekanntlich die Quaternion $\alpha - a$ als die zu jener conjugirte. Von fundamentaler Bedeutung ist das Gesetz:

(II) „Wenn $(\alpha + a)(\beta + b) = \gamma + c$ ist, so ist auch
$$(\beta - b)(\alpha - a) = \gamma - c\text{“}.$$

In der That ist der innere Theil des ersten Productes $\alpha\beta - [a \mid b]$ also dies $= \gamma$, aber $\alpha\beta - \mid [a \mid b]$ ist auch der innere Theil des zweiten Productes. Hingegen der äussere Theil des ersten Productes ist $\alpha b + \beta a + \mid [ab] = c$, der äussere Theil des zweiten ist $-\alpha b - \beta a + \mid [ba]$ d. h. da $[ba] = -[ab]$ ist, gleich $-c$, also das zweite Product $\gamma - c$. Es ist unmittelbar klar, dass sich dies auf beliebig viele Factoren ausdehnen lässt. Also

(II) „Das Product beliebig vieler Quaternionen ist conjugirt dem umgekehrt geordneten Producte der conjugirten Quaternionen.“

Es stellt dieser Satz die Formel (14) bei **Dillner** dar, aus welcher seine Formel (13) hervorgeht, wenn man die inneren Theile $(\alpha, \beta, \cdot\cdot)$ null setzt.

Wenn die Strecke $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ ist, so wird $[a \mid a]$, was ich der Kürze wegen mit $a^{\underline{2}}$ bezeichnet habe, gleich $\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2$ und stellt das Quadrat der Länge jener Strecke dar. Nach dieser Analogie nenne ich, wenn $q = \alpha + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \alpha + a$ ist, $\sqrt{\alpha^2 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2}$ d. h. $\sqrt{\alpha^2 + a^{\underline{2}}} = \sqrt{\alpha^2 - a^2}$ die Länge der Quaternion q (nach **Hamilton** der Tensor). Multiplicirt man nun die erste Formel in II mit der zweiten, so erhält man

$$(\alpha + a)(\beta + b)(\beta - b)(\alpha - a) = (\gamma + c)(\gamma - c)$$

d. h.

$$(\alpha + a)(\beta^2 - b^2)(\alpha - a) = \gamma^2 - c^2$$

Da $\beta^2 - b^2 = \beta^2 + b^{\underline{2}}$ eine Zahl ist, so ist ihre Stellung gleichgültig, wir können also die Factoren $\alpha + a$ und $\alpha - a$ zusammenrücken und erhalten $(\alpha^2 - a^2)(\beta^2 - b^2) = \gamma^2 - c^2$ oder

(III) $$\sqrt{\alpha^2 - a^2}\ \sqrt{\beta^2 - b^2} = \sqrt{\gamma^2 - c^2}$$

d. h. da sich dies auf beliebig viele Factoren ausdehnen lässt,

(III) „Die Länge eines Products von Quaternionen ist das Product aus den Längen der Factoren.“

Es kommt also nur auf die Multiplication der quaternen Einheiten, d. h. der Quaternionen, deren Länge 1 ist, an.

Es sei nun ϱ die Länge einer Quaternion $q = \alpha + \beta a$, wo a eine Strecke von der Länge 1 ist, so ist $\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Nun sei $\alpha = \varrho \cos \gamma$, so ist $\beta = \varrho \sin \gamma$, also

$$q = \varrho\,(\cos \gamma + a \sin \gamma).$$

Es heisse a das Mass und γ der Winkel der Quaternion, während $\cos\gamma + a\sin\gamma$ nach dem Obigen die quaterne Einheit ist. Das Product gleichmassiger quaterner Einheiten führt zu sehr einfachen Resultaten. In der That, es sei a das Mass zweier quaterner Einheiten und α und β ihre Winkel, so findet man

$$\text{(IV)}\quad \begin{array}{l}(\cos\alpha+a\sin\alpha)(\cos\beta+a\sin\beta)=a(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \text{da } a^2=-a^2=-1 \text{ ist, also } =\cos(\alpha+\beta)+a\sin(\alpha+\beta),\end{array}$$

d. h. „Gleichmassige quaterne Einheiten multiplicirt man, indem man ihre Winkel addirt.“

Hierin liegt eingeschlossen, dass man eine quaterne Einheit mit einer ganzen positiven Zahl potenzirt, indem man ihren Winkel mit dieser Zahl multiplicirt. Auch für das Potenziren mit einer gebrochenen und negativen Zahl können wir dieselbe Bestimmung festhalten, aber mit der Beschränkung, dass der Winkel der zu potenzirenden Quaternion innerhalb der Grenzen einer ganzen Umrollung bleibe, z. B. zwischen π und $-\pi$ liege (vergl. meine Arithmetik Stettin 1860 Nr. 426—433.). Eine Definition für diese Verknüpfungen ist nothwendig, und ebenso die oben angegebene Beschränkung, weil man sonst gegen die logische Regel verstösst, dass man dieselbe Sache nicht auf zwei verschiedene Arten definiren darf, namentlich wenn die beiden Definitionen sich widersprechen. Letzteres würde aber bei der Potenzirung mit gebrochenem Exponenten der Fall sein, wenn man jene Beschränkung nicht eintreten liesse. So z. B. ist $\cos 0 + a\sin 0 = \cos(2\pi) + a\sin(2\pi)$. Beide würden mit $\frac{1}{2}$ potenzirt, wenn man festsetzte, die quaterne Einheit mit $\frac{1}{2}$ potenziren, hiesse ihren Winkel mit $\frac{1}{2}$ multipliciren, verschiedenes liefern; denn ersteres würde danach 1 liefern, letzteres aber $\cos\pi + a\sin\pi$ d. h. -1. Obige Definition festgesetzt, erhält man, wenn α zwischen π und $-\pi$ liegt und μ reell ist,

$$\text{(V)}\qquad (\cos\alpha + a\sin\alpha)^{\mu} = \cos(\alpha\mu) + a\sin(\alpha\mu)$$

d. h. „Eine quaterne Einheit, deren Winkel zwischen π und $-\pi$ liegt, potenzirt man mit einer reellen Zahl, indem man ihren Winkel mit dieser Zahl multiplicirt.“

Hier ist die Darstellung Dillner's (Nr. 30.) ungenügend. Ebenso vermisse ich bei der Division (Nr. 12.) den Beweis der Eindeutigkeit des Quotienten. Dieser sei hier ergänzt. Wenn q eine von Null verschiedene Quaternion ist, so gilt als Definition von $\frac{1}{q}$ die Gleichung $\frac{1}{q}q = 1$. Wenn nun e_1 eine beliebige Strecke von der Länge 1 ist, so lässt sich q in der Form darstellen $q = \alpha_0 + \alpha_1 e_1$; nun sei $\frac{1}{q} = \beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$, wo e_1, e_2, e_3 einen Normalverein bilden; dann erhält man zur Bestimmung von $\beta_0 \cdots \beta_3$ die Gleichung

$(\beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3)(\alpha_0 + \alpha_1 e_1) = 1$, welche die 4 Gleichungen einschliesst

$$\begin{aligned} \beta_0 \alpha_0 - \beta_1 \alpha_1 &= 1 \\ \beta_0 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_0 &= 0 \\ -\beta_2 \alpha_1 + \beta_3 \alpha_0 &= 0 \\ \beta_2 \alpha_0 + \beta_3 \alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den zwei ersten folgt

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}, \qquad \beta_1 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2};$$

wo $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = \varrho^2$, ϱ die Länge von q ist, aus den zwei letzten folgt β_2 und $\beta_3 = 0$, also

$$\frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e_1} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 e_1}{\varrho^2},$$

namentlich wenn $q = \alpha_0 + \alpha_1 e_1$ eine quaterne Einheit also $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = \varrho^2 = 1$ ist, so wird $\frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e_1} = \alpha_0 - \alpha_1 e_1$.

Hieraus ergiebt sich dann leicht $\frac{1}{q^\mu} = q^{-\mu}$, in Uebereinstimmung mit der Algebra.

Die von Dillner behandelten Abschnitte über die Rechnung in doppeltem Axensysteme, so wie über das distributive Gesetz (Nr. 14 bis 23) werden durch die von mir zu Grunde gelegte Definition I überflüssig.

Unter den üblichen Anwendungen der Quaternionen sind zu verwerfen die auf die Zusammensetzung der Kräfte (Dill n. Nr. 4.), auf das Drehungsmoment und die mechanische Arbeit (Dilln. Nr. 24.), da die Verknüpfung der Strecken diese Begriffe aufs einfachste liefert, während die Quaternionen Ungehöriges hineinmischen. In der That ist $a + b$ die aus a und b zusammengesetzte Kraft, $[ab]$ das Moment der Kraft b am Hebelarm a, $[abc]$ das Moment der Kraft c am Hebelarm b, der an der festen Axe a angebracht ist, $[a \mid b]$ die Arbeit der Kraft b in Bezug auf den Weg a. Aus gleichem Grunde ist die Rechnung mit Quaternionen zu verbannen bei der Drehung eines räumlichen Gebildes um eine Axe (Dilln. Nr. 39—42.) und bei der Transformation rechtwinkliger Coordinaten (Dilln. Nr. 44—48, Hankel § 58.). Die letztere Aufgabe wird für senkrechte Coordinatensysteme aufs leichteste und unmittelbarste durch innere Multiplication gelöst; ich verweise in dieser Beziehung auf meine Abhandlung über „die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre“ in diesen Annalen Bd. XII. S. 222. Die erstere Aufgabe wird am leichtesten gelöst durch die vollständigen *Quotienten der Strecken* ($\mathfrak{A}_2$ Nr. 377—390.). Unter einem solchen Quotienten verstehe ich einen Ausdruck, welcher jede Strecke durch Multiplication (mit diesem Ausdruck) in eine bestimmte Strecke verwandelt. Es genügt zu dem Ende, festzusetzen, in welche drei Strecken sich drei nicht einer Ebene parallele Strecken im Raume durch jene Multiplication verwandeln sollen. Sollen z. B. durch einen solchen Quotienten Q die Strecken e_1, e_2, e_3 (die in keiner Zahlbeziehung stehen d. h. nicht derselben Ebene parallel sind) in die Strecken a_1, a_2, a_3 durch Multiplication mit Q verwandelt werden, d. h. ist $e_1 Q = a_1$, $e_2 Q = a_2$, $e_3 Q = a_3$, so ist nach dem allgemeinen Multiplicationsgesetze:

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)\, Q = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

und das Product jeder Strecke im Raume mit Q ist dann genau bestimmt. Ich schreibe dann

$$Q = \frac{a_1, a_2, a_3}{e_1, e_2, e_3}$$

und nenne e_1, e_2, e_3 die Nenner, a_1, a_2, a_3 die entsprechenden Zähler. Von fundamentaler Bedeutung ist die Aufgabe, die Strecken x (ihrer Richtung nach) zu suchen, welche sich dabei in ihr Vielfaches verwandeln, so dass also $xQ = \varrho x$ wird. Diese Aufgabe wird ($\mathfrak{A}_2$ Nr. 388 ff.) durch die äussere Multiplication vermittelst einer Gleichung dritten Grades aufs einfachste gelöst. Hat nämlich Q den obigen Werth und ist $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, so verwandelt sich die Gleichung $xQ - \varrho x = 0$ in die Gleichung $x_1(a_1 - \varrho e_1) + x_2(a_2 - \varrho e_2) + x_3(a_3 - \varrho e_3) = 0$. Hier können nicht x_1, x_2, x_3 zugleich null sein, weil sonst x null wäre, was natürlich ausgeschlossen ist. Ist nun z. B. x_1 von null verschieden, so multiplicire man die Gleichung äusserlich mit $(a_2 - \varrho e_2)$ und $a_3 - \varrho e_3$, so erhält man nach Division mit x_1 die Gleichung

$$[(a_1 - \varrho e_1)\ (a_2 - \varrho e_2)\ (a_3 - \varrho e_3)] = 0,$$

indem nämlich das äussere Product dreier Strecken stets null wird, wenn zwei Strecken einander gleich werden (siehe unten).

Dies ist eine cubische Gleichung in Bezug auf ϱ. Ich nehme an, dass die drei Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 dieser Gleichung von einander verschieden seien, da der Fall gleicher Wurzeln sich als Uebergangsfall leicht aus jenem allgemeineren Falle der ungleichen Wurzeln ableiten lässt. Zu jedem dieser Werthe ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sind dann vermöge der ersteren Gleichung die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ genau bestimmt und können durch äussere Multiplication mit je einer der Grössen $a_1 - \varrho e_1$, $a_2 - \varrho e_2$, $a_3 - \varrho e_3$ unmittelbar gefunden werden. Man erhält also drei ihrer Richtung nach bestimmte Axen c_1, c_2, c_3, die zu den drei Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gehören, und, wie man unmittelbar sieht, in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen.

So wird nun Q in der normalen Form

$$Q = \frac{\varrho_1 c_1, \varrho_2 c_2, \varrho_3 c_3}{c_1, c_2, c_3}$$

dargestellt. Ich nenne c_1, c_2, c_3 die Axen des Quotienten und $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die zugehörigen Hauptzahlen. Diese Darstellung ist für die Theorie der lineären Verwandtschaften, und für eine Menge algebraischer Probleme, z. B. für die, welche Dr. Gottlob Frege in seiner Dissertation zur Erlangung der venia docendi Jena 1874 S 20—23 behandelt hat, von fundamentaler Bedeutung.

Soll der Quotient Q, worauf es bei der angeregten Aufgabe ankommt, nur eine *Drehung* bewirken, so werden zwei der drei Axen imaginär, eine wird reell und ihre zugehörige Hauptzahl 1. Es sei a diese reelle Axe, alsdann sind die imaginären von der Form $b + ci$ und $b - ci$, wo a, b, c zu einander senkrecht sind. Die beiden zu diesen imaginären Axen gehörigen Hauptzahlen haben den numerischen Werth 1, sind also von den Formen $\cos\alpha - i\sin\alpha$ und $\cos\alpha + i\sin\alpha$, also wird dann

$$aQ = a,\quad (b+ci)Q = (b+ci)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = b\cos\alpha + c\sin\alpha + i(c\cos\alpha - b\sin\alpha)$$
$$(b-ci)Q = (b-ci)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = b\cos\alpha + c\sin\alpha - i(c\cos\alpha - b\sin\alpha)$$

Diese beiden Gleichungen addirt und mit 2 dividirt geben

$$bQ = b\cos\alpha + c\sin\alpha$$

und die zweite von der ersten subtrahirt und mit $2i$ dividirt giebt

$$cQ = c\cos\alpha - b\sin\alpha$$

d. h. b dreht sich durch Multiplication mit Q in der Ebene bc um den Winkel α nach c zu, und c dreht sich um denselben Winkel. Dann dreht sich offenbar jede Vielfachensumme von b und c d. h. jede Strecke der Ebene bc um denselben Winkel. Es ist sehr zweckmässig, für diesen Quotienten folgende zwei symbolische Ausdrücke festzustellen, zwischen denen man je nach Bedürfniss wählen kann,

$$Q = a^\alpha = e^{\angle bb'}$$

wo a die Drehungsaxe von der Länge 1, α der Drehungswinkel, b' aber die Strecke ist, in die sich b, was gegen die Axe senkrecht ist, durch die Drehung verwandelt. Es unterscheiden sich hier α und $\angle bb'$ nur dadurch, dass jenes den Winkel als Zahl, dieses aber denselben Winkel als Theil der Drehungsebene betrachtet darstellt. Dann bedeutet xa^π die Strecke x', welche mit a denselben Winkel bildet wie x, aber nach der entgegengesetzten Seite hin, so dass also $\angle xx' = 2\angle ax'$ ist; ebenso stellt $x'b^\pi$ die Strecke x'' dar, welche wieder so liegt, dass $\angle x'x'' = 2\angle x'b$ ist, dann ist also $xa^\pi b^\pi = xe^{2\angle ax' + 2x'b} = xe^{2\angle ab}$. So erhält man

$$a^\pi b^\pi = e^{2\angle ab}.$$

Dieser Satz ist für die Fortsetzung der Drehungen von Bedeutung. In der That ergiebt sich

$$e^{2\angle ab}\cdot e^{2\angle bc}=a^{\pi}b^{\pi}b^{\pi}c^{\pi}=a^{\pi}c^{\pi}=e^{2\angle ac},$$

also

$$e^{2\angle ab}\cdot e^{2\angle bc}=e^{2\angle ac},$$

eine Formel, die statt der verwickelten und mit fremdartigen Bestandtheilen vermischten Formel (81) von **Dillner** eintreten muss.

Die schönste Anwendung der Quaternionen ist die auf die sphärische Trigonometrie. Doch glaube ich, dass auch hier die Verknüpfung der Strecken der Rechnung mit Quaternionen überlegen ist. Hierzu ist noch der in dem Obigen schon implicite enthaltene Begriff des Productes $[abc]$ dreier Strecken a, b, c erforderlich. In der That, wenn $[bc]$ die Ergänzung der Strecke a_1 ist, also $[bc]=|\,a_1$, so wird $[abc]=[a\,|\,a_1]$, also gleich dem inneren Producte der Strecken a und a_1. Ich nenne $[abc]$ das äussere Product der drei Strecken a, b, c ($\mathfrak{A}_1$ 30, $\mathfrak{A}_2$ 262). Es ergeben sich leicht aus dem Obigen die Formeln

$$[abc]=[bca]=[cab]=-[acb]=-[bac]=-[cba]$$

ferner das Gesetz, dass $[abc]=0$ ist, wenn zwei der Factoren gleich sind, und begrifflich, dass $[abc]$ gleich dem Parallelepipedon (Spat) ist, in welchem 3 sich aneinander schliessende Kanten gleich a, b und c sind.

Nun setze ich statt eines sphärischen Polygons $ABCD\cdot\cdot$, die Reihe der Strecken a, b, c, d, .. welche vom Mittelpunkt der Kugel nach den Ecken A, B, C, D, $\cdots$ gezogen sind, und setze die Länge des Kugelradius 1. Setzt man dann statt ab, bc, cd, $\cdot\cdot$ die Radien, welche auf ab, bc, cd, $\cdot\cdot$ nach derselben Seite hin (z. B. nach links hin) senkrecht stehen, so erhält man das zugehörige Polareck. Es seien namentlich a, b, c die nach den Ecken eines sphärischen Dreiecks gezogenen Radien und sei c' der auf a, b senkrechte Radius, doch so, dass $[abc']$ positiv ist, und ebenso sei b' auf c, a, a' auf b, c senkrecht und $[cab']$ $[bca']$ positiv. Dann ist $a'b'c'$ die Polarecke, aber auch a auf b', c', b auf c', a', c auf a', b' senkrecht, nach gleicher Seite hin, also auch abc Polarecke von $a'b'c'$. Nun seien die Winkel bc, ca, ab, $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ mit α, β, γ, α', β', γ' bezeichnet, und zwar so, dass diese sechs Winkel als positive Zahlen betrachtet werden. Um nun die Beziehungen zwischen diesen Grössen auf die einfachste Weise ableiten zu können, mache ich noch von dem Product zweier Flächenräume im Raume Gebrauch, indem ich (nach $\mathfrak{A}_1$ § 132., $\mathfrak{A}_2$ Nr. 103)

$$[ab\cdot bc]=[abc]\cdot b$$

setze. Dann ergiebt sich ($\mathfrak{A}_2$ 97), dass das Product der Ergänzungen zweier Strecken a, b im Raume die Ergänzung des Productes dieser Strecken ist, d. h.

$$[|\,a\,|\,b]=|\,[ab].$$

Hieraus folgt für die obigen 6 Radien a, b, c, a', b', c', zunächst

$a' \sin\alpha = |\,[bc]$. Denn ist $\angle\, b\, c_1$ in der Ebene bc gleich 90^0 und c_1 gleichfalls Radius, so bilden a', b, c_1 einen Normalverein und es ist also $a' = |\,[bc_1] = |\,[bc] : \sin\,\alpha$. Auf gleiche Weise ist $b' \sin\beta = |\,[ca]$, $c' \sin\gamma = |\,[ab]$, $a \sin\alpha' = |\,[b'c']$, $b \sin\beta' = |\,[c'a']$, $c \sin\gamma' = |\,[a'b']$. Also ist

$$a = \frac{|\,[b'c']}{\sin\alpha'} = \frac{[\,|\,b'\,|\,c']}{\sin\,\alpha'} = \frac{[ca \cdot ab]}{\sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma} = \frac{[abc]\,a}{\sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma}$$

also $\quad [abc] = \sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cdot \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}.$

Da nun $[abc] = [bca] = [cab]$ ist, so kann man auch $\sin\beta' : \sin\beta$ und $\sin\gamma' : \sin\gamma$ statt $\sin\alpha' : \sin\,\alpha$ setzen. Es sei $\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \varkappa$ gesetzt,

so wird $\qquad [abc] = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cdot \varkappa$ und ebenso

$$[a'b'c'] = \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma' \frac{1}{\varkappa},$$

$$\varkappa = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma}.$$

Ferner da $|\,a' \sin\alpha = [bc]$ ist, so hat man $[a'bc] = [a'\,|\,a'] \sin\alpha = \sin\alpha$, und so

$[a'bc] = \sin\alpha, [b'ca] = \sin\beta, [c'ab] = \sin\gamma, [ab'c'] = \sin\alpha', [bc'a'] = \sin\beta'$, $[ca'b'] = \sin\gamma'$.

Ferner $[b'bc] = [b'\,|\,a'] \sin\alpha = \sin\alpha \cos\gamma'$, und so überhaupt

$[b'bc] = \sin\alpha \cos\gamma'$, $[c'ca] = \sin\beta \cos\alpha'$, $[a'ab] = \sin\gamma \cos\beta'$,
$[c'bc] = \sin\alpha \cos\beta'$ u. s. w.
$[bb'c'] = \sin\alpha' \cos\gamma$, $[cc'a'] = \sin\beta' \cos\alpha$, $[aa'b'] = \sin\gamma' \cos\beta$,
$[cb'c'] = \sin\alpha' \cos\beta$ u. s. w.

Nun seien a, b, c drei beliebige Strecken, die nicht einer Ebene angehören, so lässt sich jede andere Strecke d aus ihnen numerisch ableiten. Es sei

$$d = xa + yb + zc,$$

so erhält man durch äussere Multiplication mit $[bc]$, da $[bbc]$, $[cbc]$ null sind, $[dbc] = x[abc]$, also $x = \frac{[dbc]}{[abc]}$ und entsprechend für die übrigen, also

$$d\,[abc] = a\,[dbc] + b\,[adc] + c\,[abd]$$

oder symmetrischer

$$a\,[bcd] - b\,[cda] + c\,[dab] - d\,[abc] = 0$$

für beliebige 4 Strecken a, b, c, d.

Diese Gleichung können wir benutzen, um unmittelbar die Hauptaufgabe zu lösen: „Die Gleichung aufzustellen zwischen je 4 der Radien a, b, c, a', b', c'."

Man findet zuerst für a, b, c, a' die Gleichung

$$a\,[bca'] - b\,[ca'a] + c\,[a'ab] - a'\,[abc] = 0$$

(VI) d. h. $a \sin\alpha + b \sin\beta \cos\gamma' + c \sin\gamma \cos\beta' = a'\,(abc)$

oder indem man mit beliebigem Radius r innerlich multiplicirt und statt abc seinen Werth setzt

$$\cos ra \cdot \sin\alpha + \cos rb \sin\beta \cos\gamma' + \cos rc \sin\gamma \cos\beta' = \cos ra' \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma'.$$

Solcher Formeln erhält man sechs. Es sind dies die Formeln, welche Dillner unter Formel (71) andeutet.

Ferner findet man für a, b, a', b' die Gleichung

$$a[ba'b'] - b[a'b'a] + a'[b'ab] - b'[aba'] = 0, \text{ d. h.}$$

(VII) $$\sin\gamma'(a\cos\alpha - b\cos\beta) + \sin\gamma(a'\cos\alpha' - b'\cos\beta') = 0$$

oder

$$\sin\gamma'(\cos ra \cos\alpha - \cos rb \cos\beta) + \sin\gamma(\cos ra' \cos\alpha' - \cos rb' \cos\beta') = 0.$$

Setzt man insbesondere $r = a$, so erhält man, da $\cos aa' = [a \mid a'] = \frac{[abc]}{\sin\alpha} = \sin\beta \sin\gamma'$ ist, nach Division mit $\sin\gamma'$ die bekannte Formel

$$\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha' = 0.$$

Solcher Formeln wie (VII) erhält man drei.

Endlich findet man für a, b, c', a'

$$a[bc'a'] - b[c'a'a] + c'[a'ab] - a'[abc'] = 0 \text{ d. h.}$$

(VIII) $$\sin\beta'(a - b\cos\gamma) = \sin\gamma(a' - c'\cos\beta')$$

oder $$\sin\beta'(\cos ra - \cos rb \cos\gamma) = \sin\gamma(\cos ra' - \cos rc' \cos\beta')$$

Solcher Formeln giebt es 6.

Man erkennt hieraus den grossen Reichthum der Beziehungen, die durch diese Methode hervortreten. Jede geometrische Gleichung lässt sich auf diese Weise in Sätze der Sphärik umwandeln.

Ich führe als Beispiel an den von Hankel S. 193 citirten Gaussschen Satz für das sphärische Viereck, nämlich

$$\sin AB \sin CD \cos(AB, CD) = \cos AC \cos BD - \cos AD \cos BC,$$

welcher eine Umwandlung der Formel ($\mathfrak{A}_2$ 176) ist, nämlich der Formel

$$[ab \mid cd] = [a \mid c][b \mid d] - [a \mid d][b \mid c].$$

Als zweites Beispiel führe ich an die Umwandlung der Gleichung $a_1 + b_1 + c_1 + \cdots = s_1$, wo $a_1, b_1, c_1, \cdots s_1$ Strecken sind. Es sei $a_1 = \mathfrak{a}a$, $b_1 = \mathfrak{b}b$, $c_1 = \mathfrak{c}c$, $s_1 = \mathfrak{s}s$, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots \mathfrak{s}$ die Längen sind, $a, b, c, \cdots s$ also Radien einer Kugel von der Länge 1, so hat man durch innere Multiplication mit einem beliebigen Radius r

$$\mathfrak{a}\cos ra + \mathfrak{b}\cos rb + \cdots = \mathfrak{s}\cos rs.$$

Setzt man hier $r = s$, so hat man

$$\mathfrak{a}\cos sa + \mathfrak{b}\cos sb + \cdots = \mathfrak{s}, \quad \text{also}$$

$$\frac{\mathfrak{a}\cos ra + \mathfrak{b}\cos rb + \cdots}{\mathfrak{a}\cos sa + \mathfrak{b}\cos sb + \cdots} = \cos rs$$

eine Formel, von der d'Arrest in den Berichten der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften von 1852 (S. 37 ff.) einen speciellen Fall entwickelt hat.

Stettin, den 25. April 1877.

Zur Discussion der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit.

Von Alfred Köpcke in Hamburg.

In Crelle's Journal Bd. LXXI*) hat Geh. Rath Kirchhoff die Discussion der Bewegung eines festen Rotationskörpers in einer incompressiblen reibungslosen Flüssigkeit auf elliptische Integrale zurückgeführt. An die in dieser Abhandlung gewählten Voraussetzungen und Bezeichnungen soll im Folgenden angeknüpft werden, um das Problem mit Hülfe von ϑ-Functionen der numerischen Berechnung zugänglich zu machen.

Kirchhoff setzt voraus, dass die incompressible reibungslose Flüssigkeit ausser durch die Oberfläche des festen Rotationskörpers noch im Unendlichen durch eine geschlossene Fläche begrenzt ist; dass auf das gesammte System keine äusseren Kräfte wirken; dass die Geschwindigkeiten in der Flüssigkeit sich stetig von Ort zu Ort ändern. Durch die Annahme, dass der Bewegungszustand des Systems durch Kräfte, die auf den Körper wirkten, entstanden sei, ist die Aufgabe beschränkt für den Fall, dass die Flüssigkeit einen mehrfach zusammenhängenden Raum erfüllt; andererseits erstreckt sich die Geltung der Resultate jener Abhandlung bei den gewählten Bezeichnungen nicht nur auf den Fall, dass der feste Körper ein geometrischer Rotationskörper ist, sondern auf alle Fälle, in denen der Körper in Bezug auf zwei oder mehr Paare zu einander senkrechter Ebenen, die sämmtlich durch dieselbe Gerade gehen, nach Gestalt und Massenvertheilung symmetrisch ist.

Für ein im Körper festes Coordinatensystem wird die letzterwähnte Gerade als x-Axe gewählt, so dass die y- und z-Axen in eines der Ebenenpaare fallen. Die Bewegung eines solchen Systems lehrt,

*) Zum grössten Theile (mit etwas veränderten Bezeichnungen) wieder abgedruckt in: Vorlesungen über mathematische Physik von Dr. Gustav Kirchhoff. Leipzig 1876, S. 233—247.

ermittelt, diejenige eines beliebigen materiellen Punktes x, y, z im Körper kennen; bezeichnen nun u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten des Anfangspunktes jenes Systems nach den Richtungen seiner Axen, und p, q, r die Drehungsgeschwindigkeiten um dieselben, so lässt sich die lebendige Kraft T des ganzen Systems — wie in der citirten Abhandlung gezeigt ist — bei den gemachten Voraussetzungen durch jene 6 Functionen der Zeit t ausdrücken nach der Gleichung:

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2)$$

worin $c_{11}\, c_{22}\, c_{44}$ und c_{55} Constanten bedeuten, die ausser von der Gestalt und Massenvertheilung des festen Körpers von der Dichte der Flüssigkeit abhängen.

Führt man ein zweites System von Coordinaten ξ, η, ζ mit im Raume festen Axen ein, so stehen zur Zeit t die Coordinaten desselben materiellen Punktes nach den beiden Axensystemen in den Beziehungen:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned}$$

wenn die 12 Grössen α, β, γ Functionen der Zeit bedeuten. Unter Berücksichtigung der 12 Bedingungsgleichungen, die zwischen den α, β, γ und u, v, w, p, q, r bestehen, erhält man dann aus dem Hamilton'schen Princip $\delta \int T dt = 0$, wie es unter unseren Voraussetzungen gilt, 18 Differentialgleichungen; unter diesen bestimmen sechs — entstanden aus Differentiation nach u, v, w, p, q, r — nur 6 der benutzten unbestimmten Factoren; aus den übrigen 12 lassen sich mit Beachtung bekannter Relationen unter den α, β, γ mit Indd. 12 andere Gleichungen ableiten, von denen wir zunächst eine Hälfte betrachten, deren System nach Einsetzung des obigen Ausdrucks für T lautet:

$$\text{(A)} \begin{cases} c_{11}\dfrac{du}{dt} = -c_{22}(vr - wq), & \dfrac{dp}{dt} = 0 \\ c_{22}\dfrac{dv}{dt} = c_{11}ur - c_{22}wp\ c, & {}_{55}\dfrac{dq}{dt} = (c_{11} - c_{22})uw + (c_{44} - c_{55})pr \\ c_{22}\dfrac{dw}{dt} = -c_{11}uq + c_{22}vp, & c_{55}\dfrac{dr}{dt} = -(c_{11} - c_{22})uv - (c_{44} - c_{55})pq. \end{cases}$$

In der citirten Abhandlung werden aus diesen Gleichungen noch die folgenden Schlüsse gezogen:

1) p ist constant.

2) Es ergeben sich drei Integralgleichungen:

$$
\text{(B)} \qquad \begin{cases} c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2) = L \\ c_{11}{}^2u^2 + c_{22}{}^2(v^2 + w^2) = M \\ c_{11}c_{44}up + c_{22}c_{55}(vq + wr) = N, \end{cases}
$$

in denen L, M und N Constanten des Problems sind.

3) Mit Einführung der Variabeln s, σ, φ, ψ durch:

$$
v = s\cos\varphi, \qquad q = \sigma\cos(\varphi + \psi)
$$
$$
w = s\sin\varphi, \qquad r = \sigma\sin(\varphi + \psi)
$$

folgt aus den vorigen Integralgleichungen:

$$
s = \sqrt{f - f'u^2}, \quad \sigma = \sqrt{g - g'u^2}, \quad s\sigma\cos\psi = h - h'u,
$$

worin f, f', g, g', h und h' Constanten bedeuten, die von L, M, N, p, c_{11}, c_{22}, c_{44} und c_{55} abhängen; aus dem System (A) ergeben sich durch eben diese Bezeichnung die beiden Differentialgleichungen:

$$
\text{(C)} \qquad \begin{cases} c_{22}\,dt = -c_{11}\dfrac{du}{\sqrt{(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2}} \\ c_{22}{}^2\,d\varphi = c_{11}\dfrac{c_{11}u(h - h'u) - c_{22}p(f - f'u^2)}{(f - f'u^2)\sqrt{(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2}}\,du. \end{cases}
$$

Hieraus ist direct klar, dass sich u und φ mittelst ϑ-Functionen durch t ausdrücken lassen; die erwähnte Abhandlung zeigt dann noch, wie sich in einfacher Weise Functionen von u und φ finden lassen, durch welche die Lage des Körpers zur Zeit t bestimmt ist. Hierauf kommen wir indessen zurück, wenn wir jene Reduction von u und φ auf ϑ-Functionen wirklich geleistet haben.

Reduction von u und φ auf ϑ-Functionen.

Es folgt leicht:

$$
f = \frac{M}{c_{22}{}^2}, \qquad f' = \left(\frac{c_{11}}{c_{22}}\right)^2
$$

und also sind, da M positiv ist, auch f und f' positiv.

Ferner ist:

$$
h = \frac{N}{c_{22}c_{55}}, \qquad h' = \frac{c_{11}c_{44}p}{c_{22}c_{55}}.
$$

Nun kann man stets das System der x, y, z so wählen, dass hh' eine positive Grösse ist; da die c positive Constanten sind, genügt es, dass Np positiv ist. Man führe nun x', y', z' als Coordinaten ein durch $x' = -x$, $y' = y$, $z' = -z$, so ist in $\xi = \alpha' + \alpha_1'x' + \alpha_2'y' + \alpha_3'z'$ $\alpha' = \alpha$, $\alpha_1' = -\alpha_1$, $\alpha_2' = \alpha_2$, $\alpha_3' = -\alpha_3$ und gelten ebenso die hieraus durch Vertauschung von ξ mit η und ζ, α mit β und γ entstehenden Gleichungen; sind ferner u', v', w', p', q', r' und N' die aus u, v, w, p, q, r

und N entstehenden Grössen, wenn man in Letzteren α, β, γ mit α', β', γ' vertauscht, so ist:

$$u' = -u, \quad v' = v, \quad w' = -w$$

$$p' = -p, \quad q' = q, \quad r' = -r$$

also:

$$N'p' = -Np,$$

d. h. es ist entweder Np positiv, oder $N'p'$; hätten wir im letzteren Falle gleich die x- und z-Axen in die Richtungen der x'- und z'-Axen gelegt, so wäre Np positiv geworden — wir können daher das System der x, y, z stets so wählen, dass Np und damit hh' positiv wird.

Da f und f' positiv sind, ergiebt sich aus $s = \sqrt{f - f'u^2}$, dass die u des Problems zwischen $+\sqrt{\frac{f}{f'}}$ und $-\sqrt{\frac{f}{f'}}$ liegen müssen, weil für dieselben s reell sein muss; wir setzen: $+\sqrt{\frac{f}{f'}} = \mathfrak{a}$.

Wir definiren nun:

$$(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2 = H(u).$$

Für die u des Problems muss $\sqrt{H(u)}$ reell, also $H(u)$ positiv sein. Unter allen Umständen ist aber $H(u)$ für $u = \pm \mathfrak{a}$ negativ — und da doch zwischen $-\mathfrak{a}$ und $+\mathfrak{a}$ die u des Problems liegen, folgt, dass $H(u)$ zwischen $u = -\mathfrak{a}$ und $u = +\mathfrak{a}$ stets *zwei* reelle Lösungen hat. Der Coefficient von u^4 in $(H)u$ ist $f'g'$; sein Vorzeichen ist das von $g' = \frac{c_{11}}{c_2 c_{55}}(c_{22} - c_{11})$, so dass $H(u)$ in $u = \pm\infty$ positiv oder negativ unendlich wird, je nachdem $c_{22} \gtrless c_{11}$ ist. Danach haben wir zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

1) $c_{22} > c_{11}$; $H(u)$ hat 4 reelle Lösungen, 2 innerhalb (β und γ), 2 ausserhalb $-\mathfrak{a}$ bis $+\mathfrak{a}$ (α und δ).

2) $c_{22} < c_{11}$; $H(u)$ hat zwischen $-\mathfrak{a}$ und $+\mathfrak{a}$ 4 reelle Lösungen oder nur 2 (β und γ), wo dann 2 Lösungen (α und δ) imaginär sind.

Da hh' immer positiv ist, unterscheidet sich $H(+u)$ gegen $H(-u)$ um $+4hh'u$, so dass $H(+u) > H(-u)$; daraus folgt, dass im 1. *Falle* nicht β und γ beide negativ sein können, sondern nur eintreten kann:

a) $\left.\begin{array}{c} fg - h^2 > 0 \\ \alpha < -\mathfrak{a} < \beta < 0 < \gamma < +\mathfrak{a} < \delta \end{array}\right\}$ oder b) $\begin{array}{c} fg - h^2 < 0 \\ \alpha < -\mathfrak{a} < 0 < \beta < \gamma < +\mathfrak{a} < \delta. \end{array}$

Dasselbe folgt, wenn im 2. *Falle* α und δ imaginär sind; giebt es aber in diesem Falle 4 reelle Lösungen, so folgt nur, dass nicht alle 4 Wurzeln negativ sein können, also nur eintreten kann:

(a) $fg - h^2 > 0$ (b) $fg - h^2 < 0$

$-\mathfrak{a} < \alpha < \beta < \gamma < 0 < \delta < +\mathfrak{a}$ $-\mathfrak{a} < \alpha < \beta < 0 < \gamma < \delta < +\mathfrak{a}$

oder oder

$-\mathfrak{a} < \alpha < 0 < \beta < \gamma < \delta < +\mathfrak{a}$ $-\mathfrak{a} < 0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta < +\mathfrak{a}.$

Um nun u und φ durch ϑ-Functionen auszudrücken, haben wir die Ausdrücke (C) für t und φ zunächst auf Normalintegrale zurückzuführen. Es sei:

$$-\frac{c_{22}}{c_{11}}\,dt = \frac{du}{\sqrt{H(u)}} = dw.$$

Wir wollen nun den *ersten Fall*: $c_{22} > c_{11}$ zu Grunde legen; es liegt dann u zwischen β und γ, wenn $\alpha < \quad < \gamma < \delta$ die reellen Lösungen von $H(u)$ sind, und um $\frac{du}{\sqrt{H(u)}}$ in ein Normalintegral zu verwandeln, genügt der sogenannte 1. Fall der Gudermann'schen Transformation:

$$\frac{u-\beta}{u-\alpha} = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,z^2.$$

Entsprechen sich nun: $t = 0$, $u = \beta$, also $z = 0$, so giebt diese Transformation:

$$u = \frac{\beta - \alpha\,\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,z^2}{1 - \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,z^2}$$

$$dw = \frac{du}{\sqrt{H(u)}} = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -\frac{c_{22}}{c_{11}}\,dt$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{f'g'(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)},\quad k^2 = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\;\frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}$$

$$z = \sin\operatorname{am}\varepsilon w = -\sin\operatorname{am}\varepsilon\,\frac{c_{22}}{c_{11}}\,t.$$

Die quadratische, Gudermann'sche Transformation war hier vorzuziehen, weil eine lineare Beziehung zwischen u und z bei Umformung des Ausdrucks

$$\varphi = \int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

auch trigonometrische Integrale liefern würde, da $F(z)$ nicht nur von z^2 abhängig wäre. Für unsere demgemäss gewählte Transformation definiren wir noch die Grössen

$$\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = \eta \text{ und } z^2 = x,$$

so ist:

$$u = \frac{\beta\eta - \alpha x}{\eta - x}$$

$$\frac{u(h-h'u)}{f-f'u^2}=\frac{(\beta\eta-\alpha x)\{(\eta-x)h-h'(\beta\eta-\alpha x)\}}{f(\eta-x)^2-f'(\beta\eta-\alpha x)^2}$$
$$=\frac{\alpha(h-h'\alpha)}{f-f'\alpha^2}\,\frac{(x-\xi)(x-\zeta)}{(x-\pi)(x-\chi)}=\frac{\alpha(h-h'\alpha)}{f-f'\alpha^2}\,F(x),$$

worin gesetzt ist:

$$\xi=\frac{\beta}{\alpha}\eta,\qquad \pi=\frac{f-f'\alpha\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{ff'}}{f-f'\alpha^2}\,\eta=\frac{\mathfrak{a}-\beta}{\mathfrak{a}-\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta},$$

$$\zeta=\frac{h-h'\beta}{h-h'\alpha}\eta,\quad \chi=\frac{f-f'\alpha\beta-(\alpha-\beta)\sqrt{ff'}}{f-f'\alpha^2}\,\eta=\frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}.$$

Also ist nach den Differentialgleichungen (C):

$$(\mathrm{C}_1)\qquad\begin{cases} d\varphi=\left(\frac{c_{11}}{c_{22}}\right)^2\frac{u(h-h'u)}{f-f'u^2}\,\frac{du}{\sqrt{H(u)}}-\frac{c_{11}}{c_{22}}\,p\,\frac{du}{\sqrt{H(u)}}\\ \quad=\left(\frac{c_{11}}{c_{22}}\right)^2\frac{\alpha(h-h'\alpha)}{f-f'\alpha^2}\,\frac{F(x)}{2\varepsilon}\,\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}-\frac{c_{11}}{c_{22}}\,\frac{p}{2\varepsilon}\,\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}},\end{cases}$$

worin:

$$\varphi(x)=x(1-x)(1-k^2x).$$

Um dies auf Normalintegrale zu reduciren, müssen wir bekanntlich — für das Verfahren und die hier benutzten Bezeichnungen sehe man: Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen; Lpzg. 1874 Bd. I. S. 263 — einige Reihenentwickelungen machen und in denselben die Coefficienten der negativen ersten Potenz suchen; für diesen Zweck bedeute $[f(x)]_{\frac{1}{x-a}}$ den Coefficienten von $\frac{1}{x-a}$ in der Reihenentwickelung der Function $f(x)$ um $x=a$; definiren wir mit dieser Bezeichnung dann die folgenden Grössen:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t-\pi}}=c_\pi,\quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t-\chi}}=c_\chi$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\substack{\pi\\(\chi)}}\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\substack{\frac{1}{t-\pi}\\(\chi)}}=l_{\substack{\pi\\(\chi)}},\quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_\infty\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}}=l_0$$

$$L=l_\pi+l_\chi-l_0$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\substack{\pi\\(\chi)}}\frac{t\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\substack{\frac{1}{t-\pi}\\(\chi)}}=k_{\substack{\pi\\(\chi)}},\quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_\infty\frac{t\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}}=k_0$$

$$K=k_\pi+k_\chi-k_0$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\substack{\pi\\(\chi)}}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\substack{\frac{1}{t-\pi}\\(\chi)}}=f_{\substack{\pi\\(\chi)}}(x),\quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_\infty\frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}}=f_0(x)$$

$$f(x)=f_\pi(x)+f_\chi(x)-f_0(x),$$

so ist:

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = c_\pi \frac{\sqrt{\varphi(\pi)}\,dx}{(x-\pi)\sqrt{\varphi(x)}} + c_\chi \frac{\sqrt{\varphi(\chi)}\,dx}{(x-\chi)\sqrt{\varphi(x)}}$$
$$+ L\frac{k^2}{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} - K\frac{k^2}{2}\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + d\left(\sqrt{\varphi(x)}\,f(x)\right).$$

Die Reihenentwickelungen geben nun:

$$c_\pi\sqrt{\varphi(\pi)} = \frac{(\pi-\xi)(\pi-\zeta)}{\pi-\chi},\quad c_\chi\sqrt{\varphi(\chi)} = \frac{(\chi-\xi)(\chi-\zeta)}{\chi-\pi}$$
$$L=0,\ -K\frac{k^2}{2}=1,\qquad f(x)=0.$$

Die ersten zwei dieser Grössen lassen sich umformen in:

$$c_\pi\sqrt{\varphi(\pi)} = \eta\,\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}\left\{\frac{\mathfrak{a}+\alpha}{\mathfrak{a}-\alpha} - \frac{\mathfrak{a}+\alpha}{h-h'\alpha}\,h'\right\}$$
$$c_\chi\sqrt{\varphi(\chi)} = \eta\,\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}\left\{\frac{\mathfrak{a}-\alpha}{\mathfrak{a}+\alpha} + \frac{\mathfrak{a}-\alpha}{h-h'\alpha}\,h'\right\}.$$

Beachtet man dann noch:

$$\frac{\eta(\alpha-\beta)}{2\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{f'g'}}\,\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\delta-\beta}},$$

so erhält man aus (C_1):

$$(C_2)\begin{cases} d\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{f'g'}}\left\{\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\sqrt{\dfrac{\gamma-\alpha}{\delta-\beta}}\left(\dfrac{h-h'\mathfrak{a}}{(\mathfrak{a}-\alpha)^2}\,\dfrac{dz}{(z^2-\pi)\sqrt{R(z)}} + \dfrac{h+h'\mathfrak{a}}{(\mathfrak{a}+\alpha)^2}\,\dfrac{dz}{(z^2-\chi)\sqrt{R(z)}}\right)\right. \\ \qquad\left. + \dfrac{2}{\sqrt{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}}\left(\dfrac{\alpha(h-h'\alpha)}{\mathfrak{a}^2-\alpha^2} - \dfrac{c_{11}}{c_{22}}\,p\right)\dfrac{dz}{\sqrt{R(z)}}\right\}. \end{cases}$$

Hiermit ist φ durch drei Integrale ausgedrückt, die wir auf ϑ-Functionen zu reduciren haben:

Wenn, wie hier:

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = -\varepsilon\,\frac{c_{22}}{c_{11}}\,t,$$

so ist (s. Königsberger, Vorlesungen S. 421):

$$\int_0^z \frac{dz}{(z^2-z_1^2)\sqrt{R(z)}} = -\frac{k^2}{2}\,\frac{\sin^3\operatorname{am}\alpha}{\sin'\operatorname{am}\alpha}\,\lg\frac{\vartheta_0\left(\frac{w-\alpha}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w+\alpha}{2K}\right)}$$
$$-k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha\cdot w\left\{1+\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{2K}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\alpha}{2K}\right)}\,\frac{\dfrac{d\vartheta_0\left(\frac{\alpha}{2K}\right)}{d\alpha}}{\vartheta_3\left(\frac{\alpha}{2K}\right)}\right\},$$

wobei $\alpha = \int_0^{\frac{1}{kz_1}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ gesetzt ist.

Diese so definirte Grösse α haben wir, und zwar für den hier angenommenen Fall $c_{22} > c_{11}$ näher zu betrachten.

In unserm *ersten* Integral ist

$$z_1 = \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{a-\beta}{a-\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}.$$

Bei $c_{22} > c_{11}$ beweist man leicht:

$$1 < \pi < \frac{1}{k^2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{nämlich aus: } \dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} < 1 \text{ und daher } \dfrac{a-\beta}{a-\alpha} > \dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \\ \text{und aus: } \dfrac{a-\beta}{a-\alpha} < 1 \text{ und daher } \dfrac{\delta-\beta}{\delta-\alpha} > \dfrac{a-\beta}{a-\alpha} \end{array}\right\} \text{ denn: } \delta > a > \gamma.$$

Ist nun $\alpha = 2Kw_1$ und $w_1 = -\frac{\tau}{2} + w_1'$, wobei $\tau = \frac{iK'}{K}$ aus

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \text{ und } K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

bestimmt ist, so folgt:

$$2Kw_1' = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Um aber ein ϑ-Argument zu erhalten, dessen obere Grenze < 1 ist, setze man einmal $w_1' = w_{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}$, so giebt die Formel:

$$\sin\operatorname{am} 2Kw_{\mathrm{I}} = \sin\operatorname{am}(2Kw_1' + K) = \frac{\cos\operatorname{am} 2Kw_1'}{\Delta\operatorname{am} 2Kw_1'}$$

$$2Kw_{\mathrm{I}} = \int_0^{\sqrt{\frac{a-\gamma}{a-\delta}\,\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

und setze man weiter $w_{\mathrm{I}} = -w_\pi i$, so giebt die Formel:

$$i\,tn\,(2Kw_{\mathrm{I}};\,k) = \sin\operatorname{am}(2Kw_{\mathrm{I}}i;\,k_1) = \sqrt{\frac{a-\gamma}{a-\beta}\,\frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma}};$$

$$2Kw_{\mathrm{I}}i = 2Kw_\pi = \int_0^{\sqrt{\frac{a-\gamma}{a-\beta}\,\frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}},$$

worin $\frac{a-\gamma}{a-\beta}\,\frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma} < 1$, denn $\frac{a-\gamma}{a-\beta} < 1$, d. h. $\frac{a-\gamma}{a-\beta} < \frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma}$.

Durch die bekannten Substitutionsformeln der ϑ-Functionen ergiebt sich nun für dieses Argument w_π:

$$\int_0^z \frac{dz}{(z^2-\pi)\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\vartheta_3^3(w_\pi i)}{\vartheta_1(w_\pi i)\,\vartheta_2(w_\pi i)\,\vartheta_3(w_\pi i)}\lg\frac{\vartheta_2\left(w_\pi i+\frac{w}{2K}\right)}{\vartheta_2\left(w_\pi i-\frac{w}{2K}\right)}$$

$$+\,w\left\{\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\vartheta_3^3(w_\pi i)}{\vartheta_1(w_\pi i)\vartheta_2(w_\pi i)\vartheta_3(w_\pi i)}\,\frac{1}{2K}\,\frac{d\lg\vartheta_2(w_\pi i)}{d(w_\pi i)}-\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{\vartheta_3^2(w_\pi i)}{\vartheta_2^2(w_\pi i)}\right\}.$$

Besonders zu beachten hat man bei dieser Umformung nur:

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_0\frac{w-\alpha}{2K}}{\vartheta_0\frac{w+\alpha}{2K}} = -\frac{w}{2K}+\lg\frac{\vartheta_1\left(w_1'-\frac{w}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(w_1'+\frac{w}{2K}\right)}$$

$$\frac{w}{2K}\,\frac{d\lg e^{w_1'\pi i}\vartheta_1(w_1')}{dw_1'} = +\frac{w\pi i}{2K}+\frac{d\lg\vartheta_1(w_1')}{dw_1'},$$

so dass sich in der Addition die imaginären Glieder fortheben.

In unserm *zweiten* Integral ist $\chi=\frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}<0$. Hier genügt es also $\alpha=2Kw_2$ und $w_2=-\frac{\tau}{2}-w_\chi i$ zu setzen, so folgt:

$$\frac{\chi}{\chi-1}=\frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\gamma}\,\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\text{und } 2Kw_\chi=\int_0^{\sqrt{\frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\gamma}\,\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}$$

und sonach:

$$\int_0^z\frac{dz}{(z^2-\chi)\sqrt{R(z)}} = -\frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\vartheta_0^3(w\chi i)}{\vartheta_1(w_\chi i)\vartheta_2(w_\chi i)\vartheta_3(w_\chi i)}\lg\frac{\vartheta_1\left(w_\chi i+\frac{w}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(w_\chi i-\frac{w}{2K}\right)}$$

$$-\,w\left\{\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\vartheta_0^3(w_\chi i)}{\vartheta_1(w_\chi i)\vartheta_2(w_\chi i)\vartheta_3(w_\chi i)}\,\frac{1}{2K}\,\frac{d\lg\vartheta_1(w_\chi i)}{d(w_\chi i)}+\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{\vartheta_0^2(w_\chi i)}{\vartheta_1^2(w_\chi i)}\right\};$$

φ ist damit für den Fall $c_{22}>c_{11}$ bereits auf ϑ-Functionen reducirt. Wenn $c_{22}<c_{11}$ und dabei alle Lösungen von $H(u)$ reell sind, so hätten wir entweder, wenn u zwischen α und β läge, den sogenannten 3. oder, wenn u zwischen γ und δ läge, den sog. 4. Fall der Gudermann'schen Transformation anwenden müssen; um indessen die alte Transformationsformel und die übrigen durch die Lösungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ definirten Grössen auch in diesen Fällen beibehalten zu können, brauchen wir nur die Lösungen von $H(u)$ in anderer Folge zu benennen, und zwar müssen wir setzen:

A) im ersten Falle: $-\mathfrak{a}<\beta<\gamma<\delta<\alpha<+\mathfrak{a}$,

B) im andern Falle: $-\mathfrak{a}<\delta<\alpha<\beta<\gamma<+\mathfrak{a}$.

Zu untersuchen sind dann $\pi=\frac{\mathfrak{a}-\beta}{\mathfrak{a}-\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$ und $\chi=\frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$. Im Falle A) sind diese beiden Grössen negativ, da $\gamma-\alpha$ es ist. Im

Falle B) ist $1 < \pi < \frac{1}{k^2}$, wie bei $c_{22} > c_{11}$, und ebenso $1 < \chi < \frac{1}{k^2}$. Es können daher immer *beide* Integrale in eine der Formen gebracht werden, die sie für $c_{22} > c_{11}$ haben.

Ganz anders müssen wir verfahren, wenn das Polynom $H(u)$ zwei imaginäre Lösungen hat: $\alpha = a + bi$ und $\delta = a - bi$, was nach Früherem nur bei $c_{22} < c_{11}$ möglich ist. In diesem Falle ist eine Transformation nützlich, die einen Modul λ liefert, dessen absoluter Betrag $= 1$ ist, und dies leistet der sog. 3. Gudermann'sche Fall:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{-f'g'}\sqrt{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}, \quad \lambda^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}\,\frac{\delta - \gamma}{\delta - \beta}.$$

Setzt man nämlich:

$$(\gamma - \alpha)(\delta - \beta) = (\gamma - a - bi)(a - bi - \beta)$$
$$= \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\cos\frac{\varphi}{2} = k, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = k_1,$$

so folgt:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{-f'g'\varrho}\,(k + k_1 i)$$
$$\lambda^2 = \left(\frac{k - ik_1}{k + ik_1}\right)^2.$$

Wir suchen dann k statt λ als Integralmodul einzuführen, und zwar zunächst $\sin\operatorname{am}(u;\lambda)$ und ihre Perioden $4L$ und $2L'i$ durch $\sin\operatorname{am}(u;k)$ und deren Perioden $4K$ und $2K'i$ auszudrücken; es wird nun durch die Transformation: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ (s. Königsberger, Die Lehre von der Transformation, der Multiplication u. s. w. S. 61) der Multiplicator $a = k_1 + ik$, daher:

$$K = (k_1 + ik)\,C, \quad iK' = (k_1 + ik)(C + 2iC')$$

$$\sin\operatorname{am}\left[v(k_1 - ik);\ \frac{2\sqrt{kk_1 i}}{k + k_1 i}\right] = \frac{(k_1 - ik)\sin\operatorname{am}(v;k)\,\Delta\operatorname{am}(v;k)}{1 - k(k + ik_1)\sin^2\operatorname{am}(v;k)};$$

ferner wird durch:

$$a_0 = 0,\ a_1 = -1,\ b_0 = 1,\ b_1 = 0$$

(s. Königsberger a. a. O. S. 28) der Multiplicator $a = -i$, daher bei $v(k_1 - ik) = u$ und $\frac{2\sqrt{kk_1 i}}{k_1 i + k} = c$:

$$\sin\operatorname{am}(ui;\ c_1) = i\,tn(u, c),$$

d. h. da $c_1 = \lambda$ einfach:

$$C = -L', \qquad C' = -L$$
$$K = -(k_1 + ik)L', \quad iK' = -(k_1 + ik)(L' + 2iL)$$

oder:

$$L = \frac{iK' - K}{2}(k + ik_1), \quad L' = iK(k + ik_1).$$

Sei $\frac{iK'}{K} = \tau$, so ist:

$$\frac{L'i}{L} = \tau' = \frac{2K}{K - iK'} = \frac{2}{1-\tau}$$

$$-\frac{1}{\tau'} = \frac{-1+\tau}{2}.$$

Ferner können wir die ϑ-Functionen mit dem Modul τ' in solche mit dem Modul $-\frac{1}{\tau'}$ oder $\frac{-1+\tau}{2}$ umformen nach den Gleichungen:

$$\vartheta_3(v;\,\tau') = \; e^{\frac{-i\pi v^2}{\tau'}} C \cdot \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau'};\, -\frac{1}{\tau'}\right)$$

$$\vartheta_0(v,\,\tau') = \; e^{\frac{-i\pi v^2}{\tau'}} C \cdot \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau'};\, -\frac{1}{\tau'}\right)$$

$$\vartheta_1(v;\,\tau') = -i e^{\frac{-i\pi v^2}{\tau'}} C \cdot \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau'};\, -\frac{1}{\tau'}\right)$$

$$\vartheta_2(v;\,\tau') = \; e^{\frac{-i\pi v^2}{\tau'}} C \cdot \vartheta_0\left(\frac{v}{\tau'};\, -\frac{1}{\tau'}\right).$$

Es wird dadurch:

$$\lg \frac{\vartheta_2\left(w_\pi i + \frac{w}{2L};\,\tau'\right)}{\vartheta_2\left(w_\pi i - \frac{w}{2L};\,\tau'\right)} = \frac{2\pi w}{\tau' L} w_\pi + \lg \frac{\vartheta_0\left(\frac{w_\pi i}{\tau'} + \frac{w}{2L\tau'};\, -\frac{1}{\tau'}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w_\pi i}{\tau'} - \frac{w}{2L\tau'};\, -\frac{1}{\tau'}\right)}.$$

Das Argument w_π ist noch zu untersuchen; wir haben zunächst:

$$2L\tau' = 2iL' = -\frac{4K\varepsilon}{\sqrt{-f'g'\varrho}}$$

$$\frac{w}{2L\tau'} = -\frac{w\sqrt{-f'g'\varrho}}{4K\varepsilon} = \frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K} t.$$

Ferner war:

$$w_\pi i = -w_1' - \tfrac{1}{2}, \quad 2Lw_1' = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2 z^2)}}$$

$$\frac{w_\pi i}{\tau'} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\tau'} - \frac{w_1'}{\tau'} = -\frac{1}{2\tau'} + v_1$$

$$-v_1 = \frac{w_1'}{\tau'} = \frac{1}{2L'i}\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2 z^2)}} = -\frac{\sqrt{-f'g'\varrho}}{4K\varepsilon}\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2 z^2)}}.$$

Die Gudermann'sche Substitution war:

$$z^2 = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\,\frac{u-\beta}{u-\alpha},$$

so dass sich entsprechen $z=0$, $u=\beta$ und $z=\sqrt{\pi}$, $u=+\alpha$, d. h. es bestimmt sich v_1 aus

$$2Kv_1 = \frac{\sqrt{-f'g'\varrho}}{2}\int_\beta^{+\alpha}\frac{du}{\sqrt{H(u)}}$$

und dann ist:

$$\lg\frac{\vartheta_0\left(\frac{w_\pi i}{\tau'}+\frac{w}{2L\tau'};-\frac{1}{\tau'}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w_\pi i}{\tau'}-\frac{w}{2L\tau'};-\frac{1}{\tau'}\right)} = \lg\frac{\vartheta_1\left(v_1+\frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K}t;\frac{-1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(v_1-\frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K}t;\frac{-1+\tau}{2}\right)}.$$

Aehnlich wird:

$$\lg\frac{\vartheta_1\left(w_\chi i+\frac{w}{2L};\tau'\right)}{\vartheta_1\left(w_\chi i-\frac{w}{2L};\tau'\right)} = \frac{2\pi w}{L\tau'}w_\chi + \lg\frac{\vartheta_1\left(\frac{w_\chi i}{\tau'}+\frac{w}{2L\tau'};-\frac{1}{\tau'}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{w_\chi i}{\tau'}-\frac{w}{2L\tau'};-\frac{1}{\tau'}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{-g'\varrho}}{K}\pi t w_\chi + \lg\frac{\vartheta_0\left(v_2+\frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K}t;\frac{-1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_0\left(v_2-\frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K}t;\frac{-1+\tau}{2}\right)},$$

wobei gesetzt ist:

$$\frac{w_\chi i}{\tau'} = -\frac{w_2}{\tau'}-\frac{1}{2} = v_2$$

$$2Kv_2 = \frac{\sqrt{-g'f'\varrho}}{2}\int_\beta^{-\alpha}\frac{du}{\sqrt{H(u)}}.$$

Den Winkel φ können wir sonach in allen Fällen auf ϑ-Functionen reduciren.

Leicht findet man mit den eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{\mathfrak{a}-u}{\mathfrak{a}-\alpha} = -\frac{\vartheta_0^2(w_3)}{\vartheta_3^2(w_\pi i)}\;\frac{\vartheta_2\left(\frac{w}{2K}+w_\pi i\right)\vartheta_2\left(\frac{w}{2K}-w_\pi i\right)}{\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}+w_3\right)\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}-w_3\right)}$$

$$\frac{\mathfrak{a}+u}{\mathfrak{a}+\alpha} = \frac{\vartheta_0^2(w_3)}{\vartheta_0^2(w_\chi i)}\;\frac{\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}+w_\chi i\right)\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}-w_\chi i\right)}{\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}+w_3\right)\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}-w_3\right)},$$

wobei $\sin^2 \operatorname{am} 2Kw_3 = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$ ist; dies Argument ist verschieden umzuformen:

I. Bei $c_{22} > c_{11}$ ist immer $\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} > \frac{1}{k^2}$, also zu setzen:

$$w_3 = -\frac{\tau}{2}+w_3' \quad 2Kw_3' = \int_0^{\frac{\delta-\beta}{\delta-\alpha}}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

II Bei $c_{22} < c_{11}$ und 4 reellen Wurzeln ist im Falle

A) $\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} < 0$, also: $w_3 = -\frac{\tau}{2} - w_3' i$

$$2Kw_3' = \int\limits_0^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}}$$

B) $\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} > 1$, aber $< \frac{1}{k^2}$, also: $w_3 = -\frac{1}{2} - w_3' i$

$$2Kw_3' = \int\limits_0^{\frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}}.$$

III. Bei $c_{22} < c_{11}$ und 2 imaginären Wurzeln entsprechen sich $z=0$, $u=\beta$ und $z^2 = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$, $u=\infty$; man setze demgemäss:

$$\frac{w_3}{\tau'} = -v_3, \quad 2Kv_3 = \frac{\sqrt{-g'f'\varrho}}{2} \int\limits_\beta^\infty \frac{du}{\sqrt{H(u)}}.$$

Mit Hilfe von $\mathfrak{a}-u$ und $\mathfrak{a}+u$ ist direct gefunden:

$$s^2 = f'(\mathfrak{a}-u)(\mathfrak{a}+u).$$

Ist $b = +\sqrt{\frac{g}{g'}}$, so lassen sich auch

$$\sigma^2 = g - g'u^2 = g'(b-u)(b+u) \text{ und } \cos\psi = \frac{h-h'u}{s\sigma}$$

leicht finden.

Die Lage des Körpers zur Zeit t aus φ und u kennen zu lernen.

Die zweite Hälfte der in der Einleitung erwähnten 12 Gleichungen lautet:

$$(D) \quad \begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w} = A \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial w} = B \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w} = C \\ \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \mathsf{A} + \beta C - \gamma B \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \mathsf{B} + \gamma A - \alpha C \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \Gamma + \alpha B - \beta A, \end{cases}$$

worin A, B, C, A, B, Γ Constanten sind, zwischen denen die Bedingungsgleichungen existiren:

$$A^2 + B^2 + C^2 = M$$
$$A\mathsf{A} + B\mathsf{B} + C\Gamma = N.$$

Ohne das Problem zu beschränken, kann man $B = 0$ und $C = 0$ setzen, wodurch nur der ξ-Axe die Richtung einer Geschwindigkeit mit den Componenten $\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{t=0}$ $\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)$ gegeben wird, und ebenso kann man $\mathsf{B} = 0$ und $\Gamma = 0$ wählen, wodurch die bis dahin nur der Richtung nach bestimmte ξ-Axe parallel sich selbst verschoben wird.

Statt durch die 9 coss. $\alpha\beta\gamma$ mit indd. wollen wir die Lage des Körpers nun durch 3 Winkel Θ, Φ und Ψ bestimmen, die wir definiren durch die Substitutionsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\Theta \\
\alpha_2 &= -\sin\Phi\sin\Theta \\
\alpha_3 &= \cos\Phi\sin\Theta \\
\beta_1 &= \sin\Psi\sin\Theta \\
\beta_2 &= \cos\Phi\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos\Theta \\
\beta_3 &= \sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi\cos\Theta \\
\gamma_1 &= -\cos\Psi\sin\Theta \\
\gamma_2 &= \cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi\cos\Theta \\
\gamma_3 &= \sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\Theta.
\end{aligned}$$

Setzt man dann in System (D) den Ausdruck für T, wie er für Rotationskörper gilt, ein, so folgt:

$$\cos\Theta = \frac{1}{A}c_{11}u, \quad \sin\Theta = \frac{1}{A}c_{22}s, \quad \Phi = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

d. h. Θ und Φ sind bestimmbar durch die bereits berechneten Grössen u und φ. Nicht ganz so direct ist dies für Ψ zu erweisen; es ergiebt sich:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{A}{c_{22}}\frac{h - h'u}{f - f'u^2} \text{ d. h. } d\Psi = \mathfrak{a}\frac{h - h'u}{\mathfrak{a}^2 - u^2}\frac{du}{\sqrt{H(u)}}.$$

Auf Normalintegrale reducirt ist daher:

$$d\Psi = \frac{1}{f'}\left\{\frac{h - h'\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} - \alpha}\frac{dz}{(z^2 - \pi)\sqrt{R(z)}} + \frac{h + h'\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} + \alpha}\frac{dz}{(z^2 - \chi)\sqrt{R(z)}}\right\},$$

Ψ enthält daher nur bereits berechnete Normalintegrale. Schreibt man den Ausdruck (C_2) in der Form:

$$\varphi = \frac{\eta(\alpha - \beta)}{2\varepsilon}(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 \text{ wo: } \underset{(2)}{\varphi_1} = \frac{h \mp h'\mathfrak{a}}{(\mathfrak{a} \mp \alpha)^2}\int\frac{dz}{\underset{(\chi)}{(z^2 - \pi)}\sqrt{R(z)}},$$

so ist

$$\Psi = \frac{1}{f'}\left\{(\mathfrak{a} - \alpha)\varphi_1 + (\mathfrak{a} + \alpha)\varphi_2\right\} + \text{const.}$$

Die Integrationsconstante lässt sich aus der Gleichung

$$\text{const} = \text{arc}\left(\text{tg} = -\frac{\beta_1}{\gamma_1}\right)_{t=0}$$

zu 0 bestimmen, wenn man die Richtungen der η- und ζ-Axen passend wählt.

Die Lage des Körpers zur Zeit t wäre also vollkommen bekannt, wenn man noch α, β und γ berechnen könnte. β und γ ergeben sich als Functionen von u, s und Ψ:

$$\gamma = \frac{1}{A^2}\left\{\frac{c_{11}c_{55}u(h-h'u)}{s} - c_{22}c_{44}ps\right\}\sin\Psi + \frac{c_{55}}{A}\frac{\sqrt{H(u)}}{s}\cos\Psi$$

$$\beta = \frac{1}{A^2}\left\{\frac{c_{11}c_{55}u(h-h'u)}{s} - \frac{c_{55}A\sqrt{H(u)}}{s}\right\}\sin\Psi - \frac{c_{44}c_{22}ps}{A^2}\cos\Psi.$$

Die Berechnung von α lässt sich aber nicht so direct ausführen; aus der Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$$

erhält man:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{A}{c_{22}}\left(1 - c_{11}(c_{11}-c_{22})\frac{u^2}{A^2}\right),$$

d. h.

$$d\alpha = -\sqrt{ff'}\frac{du}{\sqrt{H(u)}} + \frac{f'}{f}\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{22}}\frac{u^2du}{\sqrt{H(u)}}.$$

Auf Normalintegrale reducirt würde das

$$\int\frac{u^2du}{\sqrt{H(u)}}$$

auch auf ein 3tes Integral führen, aber mit dem Coefficienten

$$\sqrt{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}\left\{\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right\}$$

multiplicirt; weil aber $H(u)$ kein Glied mit u^3 enthält, ist

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$$ und wird daher:

$$d\alpha = -\left(\frac{\sqrt{ff'}}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{K}}{\varepsilon}\right)\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{\mathrm{L}k^2}{\varepsilon}\frac{z^2dz}{\sqrt{R(z)}} - d\left(zf(z^2)\sqrt{R(z)}\right),$$

worin

$$\mathrm{K} = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}{2} - \alpha^2,\quad \mathrm{L} = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{2},$$

$$f(z^2) = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{2}\,\frac{1}{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}-z^2}.$$

Wir brauchen also nur

$$\int\frac{z^2dz}{\sqrt{R(z)}} \text{ und } zf(z^2)\sqrt{R(z)}$$

durch ϑ-Functionen auszudrücken. Mit der Bezeichung

$$J = \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ist aber bekanntlich:

$$\int_0^z \frac{z^2\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{J}{K}\,w - \frac{1}{k^2}\,\frac{d\lg\vartheta_0\left(\frac{w}{2K}\right)}{dw}$$

$$-zf(z^2)\sqrt{R(z)} = -\mathrm{L}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}\right)\vartheta_2\left(\frac{w}{2K}\right)\vartheta_3\left(\frac{w}{2K}\right)\vartheta_0^2(w_3)}{\vartheta_3^2\,\vartheta_0\left(\frac{w}{2K}\right)\vartheta_1\left(w_3+\frac{w}{2K}\right)\vartheta_1\left(w_3-\frac{w}{2K}\right)}$$

Die Integrationsconstante für α kann man beliebig wählen und damit über die Lage des Anfangspunktes des ξ, η, ζ-Systems entscheiden.

Hamburg.

Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante.

par Henry d'Ovidio à Turin.

Depuis 1873 j'ai publié différents travaux sur la Géométrie *métrico-projective* (voir les *Annali di Matematica* et les Actes des Académies des Lincei, de Turin et de Naples). Je remets à une prochaîne occasion de rendre compte de ces travaux, ainsi que d'autres publiés récemment en Italie sur le même sujet. Aujourd'hui je donne un Résumé d'un long Mémoire lu à l'Académie des Lincei (Séance du 8 Avril 1877), dans lequel j'ai traité d'une manière tout-à-fait générale la théorie des fonctions métriques pour les espaces (Mannigfaltigkeiten) de plusieurs dimensions, sur la base de la dualité et de la projectivité.

Les définitions que l'on rencontre dans les premiers numéros sont nécessaires pour l'intelligence de ce qui suit, et d'ailleurs elles ne présentent aucune difficulté.

§ I. Considérons n variables, dont chacune puisse prendre les infinies valeurs réelles; et fixons notre attention sur les rapports de $n-1$ de ces variables à la dernière. Chaque groupe de valeurs de ces rapports constitue un *élément* d'une *variété* (*Mannigfaltigkeit*) de ∞^{n-1} éléments, ou bien un *point d'un espace de* $n-1$ *dimensions.* Les valeurs correspondantes des n variables sont les *coordonées homogènes* de ce point; on peut les multiplier toutes par un même nombre arbitraire.

Le point qui a pour coordonnées $x_1, \cdot\cdot, x_n$ sera représenté par x.

§ II. r points $x', \cdot\cdot, x^r$ étant donnés ($r < n$), le *lieu* des points

$$\lambda' x' + \cdot\cdot + \lambda^r x^r \quad (\lambda' \cdot\cdot \lambda^r \text{ indéterminées})$$

est un *rpoint*, que nous désignerons par R ou par $x' \cdot\cdot x^r$. C'est un espace de $r-1$ dimensions, *partiel* par rapport à l'espace proposé de $n-1$ dimensions.

Un point x appartient à R lorsque les équations

$$x_i + \lambda' x_i' + \cdot\cdot + \lambda^r x_i^r = 0 \quad (i = 1 \cdot\cdot n)$$

sont compatibles entr'elles, ce qui exige $n-r$ conditions distinctes.

R est déterminé par r points, avec la condition qu'ils n'appartiennent pas à un même $(r-k)$point $(k=1, 2 \cdot\cdot)$, ce qui exigerait $(n-r+1)k$ conditions. Au lieu de $x', \cdot\cdot, x^r$ il est permis de prendre r autres points

$$\lambda' x' + \cdot\cdot + \lambda^r x^r, \quad \mu' x' \cdot\cdot + \mu^r x^r, \cdot\cdot\cdot,$$

pourvu que le déterminant $\Sigma \pm \lambda' \mu'' \cdot\cdot$ ne soit pas zéro.

Un 1point n'est qu'un point simple, un 2point (ou bipoint) s'appelle aussi une *droite*, et un $(n-1)$point un *plan*. Un $n$point c'est tout l'espace proposé.

Chaque point x de R satisfait à $n-r$ équations linéaires

$$(1) \qquad \xi_1' x_1 + \cdot\cdot + \xi_n' x_n = 0, \quad \xi_1'' x_1 + \cdot\cdot + \xi_n'' x_n = 0, \cdot\cdot\cdot;$$

ce sont *les $n-r$ équations de l' $r$point R.* On peut les remplacer par d'autres de la forme

$$\begin{gathered}(\lambda' \xi_1' + \lambda'' \xi_1'' + \cdot\cdot) x_1 + \cdot\cdot + (\lambda' \xi_n' + \lambda'' \xi_n'' + \cdot\cdot) x_n = 0 \\ (\mu' \xi_1' + \mu'' \xi_1'' + \cdot\cdot) x_1 + \cdot\cdot + (\mu' \xi_n' + \mu'' \xi_n'' + \cdot\cdot) x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\end{gathered}$$

pourvu que $\Sigma \pm \lambda' \mu'' \cdot\cdot$ ne soit pas zéro.

Une seule équation représente un plan.

Un $r$point peut être regardé comme *l'enveloppe* de ses ∞^{n-r-1} plans, et alors il reçoit le nom de *$(n-r)$plan.* Une droite est un $(n-2)$plan, un point est un $(n-1)$plan.

Les multipoints et les multiplans constituent les deux systèmes de *formes fondamentales*, qui se correspondent deux à deux suivant la loi de *dualité.* La droite et le biplan sont de la 1re espèce, etc.

§ III. Un $r$point R et un r'point R' en général n'ont pas de points communs si $r+r' \leqq n$, et ils ont un $k$point commun si $r+r'=n+k$ $(k=1, 2 \cdot\cdot)$. Mais R et R' peuvent bien avoir un $k$point commun quoique $r+r' < n+k$, et les conditions pour que cela arrive sont en nombre de $(n+k-r-r')k$. Dans ce cas R et R' appartiennent à un même $(n+k-r-r')$point, c'est-à-dire que, considérés comme des multiplans, ils auront un $(n+k-r-r')$plan commun.

Les conditions pour la coïncidence de deux $r$points ou $(n-r)$-plans sont $(n-r)r$.

Dans un même $r$point existent $\infty^{(r-r')r'}$ r'points $(r > r')$.

§ IV. Il y a des droites qui passent par un point donné et coupent R et R' en deux points différents, 1° si $r+r'=n+k$ $(k=0, 1, \cdot\cdot)$ et que R, R' aient un $k$point commun, 2° si $r+r' < n+k$ et que le point donné tombe dans le $(r+r'-k)$point K' déterminé par les points de R et de R'.

En général il y a des droites qui coupent simultanément en points distincts un $r$point, un r'point, un $(n-r)$point et un $(n-r')$point; le nombre de ces droites est le plus petit parmi $r, r', n-r, n-r'$.

§ V. On peut *associer* deux à deux les $r$points et les $(n-r)$-points en posant entre un point x de l'un et un point y de l'autre la relation réciproque

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0.$$

En d'autres termes, si les équations (1) représentent $n-r$ plans d'un $r$point, les points $(\xi_1' \cdots \xi_n')$, $(\xi_1'' \cdots \xi_n'')$, $\cdots$ détermineront l'$(n-r)$-point associé. Chaque point de l'un correspond univoquement à chaque plan de l'autre.

Un $r$point R et un r'point R' ne sont pas, en général, renfermés dans un même multipoint lorsque $r + r' > n - 1$, et ils sont renfermés dans un même $k$point lorsque $r + r' = k$. Lors même que $r + r' > k$ ils peuvent bien se trouver dans un même $k$point, mais cela exige $(r + r' - k)(n - k)$ conditions.

Par un r'point donné passent $\infty^{(r-r')(n-r)}$ $r$points.

Dans tout ce que nous venons d'exposer on peut échanger entre eux les deux éléments *point* et *plan*.

§ VI. Étant donné un $r$point R au moyen de $r$points $x' \cdots x^r$ ou bien des équations (1), les déterminants des deux matrices

$$\begin{Bmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^r & \cdots & x_n^r \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \xi_1' & \cdots & \xi_n' \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_1^{n-r} & \cdots & \xi_n^{n-r} \end{Bmatrix}$$

sont proportionnels; et si l'on pose

$$x_{b \cdots c} \equiv \overset{r}{x}_{b \cdots c} \equiv \sum \pm x_b' \cdots x_c^r, \qquad \xi_{d \cdots e} \equiv \overset{n-r}{\xi}_{d \cdots e} \equiv \sum \pm \xi_d' \cdots \xi_e^{n-r},$$

on trouve

$$x_{b \cdots c} : \xi_{d \cdots e} = \text{constante},$$

$b \cdots c d \cdots e$ désignant une permutation positive de $1 \cdots n$.

Les quantités $x_{b \cdots c}$ différentes en valeur absolue sont $\binom{n}{r} = \frac{n \cdots (n-r+1)}{1 \cdots r}$, ainsi que les $\xi_{d \cdots e}$. Entre les $x_{b \cdots c}$ passent $\binom{n}{r} - (n-r)r - 1$ relations, ainsi qu'entre le $\xi_{d \cdots e}$. On emploie les $x_{b \cdots c}$ comme les *coordonnées homogènes de l' $r$point R*, et les $\xi_{d \cdots e}$ comme les *coordonnées homogènes de l' $(n-r)$plan R*. Les rapports entre les $x_{b \cdots c}$ demeurent constants lorsqu'on y remplace les points $x' \cdots$ par d'autres points de R, ainsi que les rapports entre les $\xi_{d \cdots e}$ lorsqu'on y remplace les plans $\xi_1' x_1 + \cdots = 0$, $\cdots$ par d'autres plans de R.

Les coordonnées d'un plan $\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n = 0$ sont $\xi_1 \cdots \xi_n$. Cette équation représente le point x comme enveloppe lorsque $x_1 \cdots$ sont donnés et $\xi_1 \cdots$ variables.

§ VII. En désignant par $x_{1..r}, \cdots$ et $y_{1..r'}, \cdots$ les coordonnées d'un $r$point et d'un r'point, on peut exprimer en fonction de ces coordonnées les conditions pour que les deux multipoints aient un $k$point commun malgré que $r + r' < n + k$. On trouve

$$\sum (-1)^{\varepsilon}\, x_{b..cd..e}\, y_{b..cf..g} = 0;$$

ici $b \cdots c$, $d \cdots e$, $f \cdots g$ sont des combinaisons de $k - 1$, $r - k + 1$, $r' - k + 1$ (tous différents entre eux) parmi les indices $1 \cdots n$; $b \cdots c$ ne varie que d'une équation à l'autre, tandis que $d \cdots e f \cdots g$ subit une permutation d'un terme à l'autre dans la même équation et ε est le nombre des inversions dans chaque permutation.

Les relations entre les coordonnées d'un même $r$point sont de la forme

$$x_{b..cde}\, x_{b..cfg} + x_{b..cdf}\, x_{b..cge} + x_{b..cdg}\, x_{b..cef} = 0,$$

$b \cdots c$ étant $r - 2$ parmi $1 \cdots n$ et $defg$ quatre des indices restants.

Il s'ensuit que les $r$points existants dans un espace de $n - 1$ dimensions sont les éléments d'un espace de $(n - r)\, r$ dimensions, qui n'est qu'une partie d'un espace de $\binom{n}{r} - 1$ dimensions, et qui est caractérisé par $\binom{n}{r} - (n - r) - 1$ équations entre les coordonnées de chaque élément.

Les mêmes considérations s'appliquent immédiatement aux multiplans.

§ VIII. Soit donnée une forme quadratique

$$A_{xx} \equiv \sum a_{ip}\, x_i x_p \quad (i,\, p = 1 \cdots n,\ a_{ip} = a_{pi}):$$

les ∞^{n-2} points caractérisés par l'équation $A_{xx} = 0$ forment ce que nous appelons, d'après Cayley, *l'absolu* des points de l'espace à $n - 1$ dimensions.

Soit a le discriminant $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ de A_{xx}, et posons

$$\alpha_{ip} = \frac{1}{a}\, \frac{\partial a}{\partial a_{ip}}, \quad \alpha = \sum \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{nn};$$

nous aurons

$$a\alpha = 1, \quad a_{ip} = \frac{1}{\alpha}\, \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{ip}};$$

et si nous posons, en général,

$$a_{ij..,pq..} = \sum \pm a_{ip}\, a_{jq}.., \quad \alpha_{ij..,pq..} = \sum \pm \alpha_{ip}\, \alpha_{jq}..,$$

il vient

$$\alpha_{ij..,pq..} = \frac{1}{a}\, a_{kl..,rs..}, \quad a_{ij..,pq..} = \frac{1}{\alpha}\, \alpha_{kl..,rs..},$$

$ij \cdots kl \cdots$ et $pq \cdots rs \cdots$ désignant des permutations positives de $1 \cdots n$.

La forme

$$A_{\xi\xi} \equiv \sum \alpha_{ip}\, \xi_i \xi_p$$

est la *réciproque* (*adjuncta*) de A_{xx}, à cause des relations indiquées entre les a_{ip} et le α_{ip}.

Considérons maintenant les deux systèmes de formes quadratiques

$$A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{x}} \equiv \sum a_{ij\ldots,pq\ldots} \overset{\nu}{x}_{ij\ldots} \overset{\nu}{x}_{pq\ldots}, \quad A_{\overset{\nu}{\xi}\overset{\nu}{\xi}} \equiv \sum \alpha_{ij\ldots,pq\ldots} \overset{\nu}{\xi}_{ij\ldots} \overset{\nu}{\xi}_{pq\ldots}$$
$$(\nu = 1^{*}), 2, \cdot\cdot n-1),$$

où l'on peut remarquer que les discriminants de $A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{x}}$, $A_{\overset{\nu}{\xi}\overset{\nu}{\xi}}$ sont égaux à $a^{\binom{n-1}{\nu-1}}$, $\alpha^{\binom{n-1}{\nu-1}}$.

Si l'on suppose (ce qui est permis) que, pour un même νpoint ou $(n-\nu)$plan $\overset{\nu}{x}$ ou $\overset{n-\nu}{\xi}$, on ait toujours

$$\overset{\nu}{x}_{ij\ldots} : \overset{n-\nu}{\xi}_{kl\ldots} = \sqrt{\alpha} : 1 = 1 : \sqrt{a},$$

on aura

$$A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{x}} = A_{\overset{n-\nu}{\xi}\overset{n-\nu}{\xi}}.$$

Et en général, si l'on forme les fonctions bilinéaires

$$A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{y}} \equiv \sum a_{ij\ldots,pq\ldots} \overset{\nu}{x}_{ij\ldots} \overset{\nu}{y}_{pq\ldots}, \quad A_{\overset{\nu}{\xi}\overset{\nu}{\eta}} \equiv \sum \alpha_{ij\ldots,pq\ldots} \overset{\nu}{\xi}_{ij\ldots} \overset{\nu}{\eta}_{pq\ldots},$$

on trouve

$$A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{y}} = A_{\overset{n-\nu}{\xi}\overset{n-\nu}{\eta}},$$

en supposant que $\overset{\nu}{x}$, $\overset{\nu}{y}$ se rapportent à deux νpoints et $\overset{n-\nu}{\xi}$, $\overset{n-\nu}{\eta}$ aux mêmes νpoints considérés comme des $(n-\nu)$plans.

§ IX. Les deux substitutions réciproques

$$x_i = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\xi\xi}}{\partial \xi_i}, \qquad \xi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{xx}}{\partial x_i},$$

qui servent à transformer A_{xx} et $A_{\xi\xi}$ l'une en l'autre, établissent une correspondance univoque entre les points et plans dans l'espace proposé; nous appelons *conjugués* un point et un plan correspondants.

Les équations d'un plan ξ' et d'un point x' conjugués seront respectivement

$$\sum \xi_i' x_i = 0 \text{ ou } A_{xx'} = 0, \qquad \sum x_i' \xi_i = 0 \text{ ou } A_{\xi\xi'} = 0.$$

Les plans conjugués aux points d'un νpoint enveloppent un νplan ou $(n-\nu)$point, dont les points ont pour conjugués les plans du premier; ces deux multipoints sont appelés *conjugués*. Ils n'ont pas, en général, de points communs.

---

*) Pour $\nu = 1$ on retombe sur A_{xx} et $A_{\xi\xi}$ — Il faut remarquer que dans les groupes $ij\cdot\cdot$, $pq\cdot\cdot$ l'ordre des indices est indifférent, pourvu que chaque groupe ne soit pris qu'une fois seulement.

Deux points $x\,y$ et leurs plans conjugués $\xi\,\eta$ étant donnés, on a

$$A_{xy} = A_{\xi\eta} = \sum x_i \eta_i = \sum \xi_i y_i = -\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\alpha) = -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} a),$$

en faisant pour abrèger

$$\begin{pmatrix} x x' & \cdot \\ y y' & \cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot & x_1 & x_2 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & x_1' & x_2' & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_1' & \cdot & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot \\ y_2 & y_2' & \cdot & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Et en général, si les points $xx'\cdot\cdot$, $yy'\cdot\cdot$ déterminent deux νpoints, et leurs plans conjugués $\xi\xi'\cdot\cdot$, $\eta\eta'\cdot\cdot$ déterminent les deux νplans conjugués, on a

$$\sum \pm A_{xy} A_{x'y'} \cdot\cdot = \frac{(-1)^\nu}{\alpha}\begin{pmatrix} xx'\cdot\cdot \\ yy'\cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha) = A_{\underset{xx}{\nu\nu}}$$

$$= \sum \pm A_{\xi\eta} A_{\xi'\eta'} \cdot\cdot = \frac{(-1)^\nu}{a}\begin{pmatrix} \xi\xi'\cdot\cdot \\ \eta\eta'\cdot\cdot \end{pmatrix}a) = A_{\underset{\xi\eta}{\nu\nu}}\ ^{*)}.$$

Pour $\nu > n$ ces déterminants sont nuls, et pour $\nu = n$

$$\sum \pm A_{xy} A_{x'y'} \cdots = \sum \pm x_1 x_2' \cdots \sum \pm y_1 y_2' \cdots = \text{etc.}$$

Les formes $A_{\underset{xx}{\nu\nu}}$, $A_{\underset{\xi\xi}{\nu\nu}}$ sont aussi réciproques; on les transforme l'une en l'autre au moyen des substitutions

$$\overset{\nu}{x}_{ij\,..} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial A_{\underset{\xi\xi}{\nu\nu}}}{\partial \overset{\nu}{\xi}_{ij\,..}}, \quad \overset{\nu}{\xi}_{ij\,..} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial A_{\underset{xx}{\nu\nu}}}{\partial \overset{\nu}{x}_{ij\,..}},$$

$\overset{\nu}{x}$ et $\overset{\nu}{\xi}$ se rapportant à un multipoint et un multiplan conjugués.

§ X. Soient x, y deux points donnés, et $\lambda_1 x + \mu_1 y$, $\lambda_2 x + \mu_2 y$ deux points de la droite xy; $\frac{\lambda_1}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ sera le *rapport anharmonique* de ces deux couples de points. Le logarithme du rapport anharmonique des points $x\,y$ par rapport aux deux points où la droite $x\,y$ coupe l'absolu $A_{xx} = 0$, divisé par $2\sqrt{-1}$, sera la *distance* entre x et y; et en la désignant par (xy) on aura

$$\cos^2(xy) = \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}A_{yy}}, \quad \sin^2(xy) = \frac{\Sigma \pm A_{xx}A_{yy}}{A_{xx}A_{yy}}.$$

La fonction (xy) a pour période $\pi = 3{,}141\cdots$; on choisit toujours la valeur comprise entre 0 et π.

Pour trois points situés sur une même droite on a $(xy) + (yz) = (xz)$.

---

*) Le déterminant $\Sigma \pm A_{xx} A_{x'x'} \cdots$ peut se nommer *le déterminant du νpoint* $xx'\cdots$.

Le lieu des points *orthogonaux* à y est le plan $A_{xy} = 0$ conjugué à y; point et plan *orthogonaux*. Les points de l'absolu sont à distance infinie de chaque point de l'espace. La distance (xy) est nulle si la droite xy est *tangente* à l'absolu. Les points communs à l'absolu et au plan $A_{xy} = 0$ sont à distance indeterminée de y.

L'espace proposé est de courbure constante. Chaque multipoint est un espace partiel par rapport à tout l'espace proposé, et il est aussi de courbure constante.

§ XI. Dans chaque $r$point R il y a des points orthogonaux à un point donné, et il forment un $(r-1)$point. Un point est *orthogonal* à R, c'est-à-dire à tout les points de R, s'il est orthogonal à r points indépendants de R.

Dans R il y a $\infty^{\frac{1}{2}s(2r-s-1)}$ groupes de s points orthogonaux entre eux, et dans l'espace proposé $\infty^{\binom{n}{2}}$ groupes de n points pareils.

Tous les points orthogonaux à R forment l' $(n-r)$point conjugué R_0.

Un $r$point R et un r'point R' étant donnés $(r \geq r')$, R' ne renferme, en général, des points orthogonaux à R, mais il peut arriver que R' renferme un $l$point L de points orthogonaux à R, et par conséquent R renferme un l'point L' $(r - r' + l = l')$ de points orthogonaux à R'; dans ce cas R et R' seront appelés *l fois orthogonaux* entre eux. R' et R_0 se couperont suivant L, R et R_1 (conjugué de R') suivant L'.

R et R' peuvent être au surplus r' fois orthogonaux; alors ils sont *parfaitement* orthogonaux, et R' est compris dans R_0, R dans R_1.

§ XII. Toute droite qui coupe R_0 est orthogonale à R; toute droite qui coupe R et R_0 est *perpendiculaire* à R (et à R_0).

Il y a des droites qui coupent simultanément $R\, R'\, R_0\, R_1$ en points distincts, c'est-à-dire qui sont perpendiculaires à R et R' (à R_0 et R_1 aussi) en points distincts. En général, c'est-à-dire si R et R' 1°. ne présentent aucune orthogonalité, 2°. n'ont pas de points communs lorsque $r + r' \leq n$, 3°. n'ont qu'un $k$point commun lorsque $r + r' = n + k$; le nombre des droites en question est r' ou $r' - k$ $(r \geq r')$. Elles sont parfaitement orthogonales entr'elles ainsi qu'aux multipoints communs à $R\, R'\, R_0\, R_1$ (s'il y en a), et elles coupent $R\, R'\, R_0\, R_1$ en groupes de points mutuellement orthogonaux.

§ XIII. Les mêmes propriétés ont lieu lorsque R et R' ont un $k$point commun tout en étant $r + r' < n + k$, lorsqu'ils sont l fois orthogonaux, et lorsque les deux cas se présentent ensemble; mais le nombre des droites se réduit alors respectivement à $r' - k$, $r' - l$, $r' - k - l$. Nous appellerons toujours ϱ le nombre de ces droites.

§ XIV. Par un point x on peut mener une perpendiculaire à R, et le point y où elle rencontre R est la *projection* de x sur R. La même droite projecte x sur R_0.

§ XV. Parmi les points de R y est celui dont la distance à x est un *minimum*; (xy) s'appelle donc *la distance entre x et R*.

Les ϱ couples de points où R et R' sont coupés par leurs perpendiculaires communres donnent les distances *minima* entre les points de R et ceux de R', c'est-à-dire *les ϱ distances entre R et R'*. (On peut dire que l'existence d'un $k$point commun à R et R' réduit à zéro k distances, et une orthogonalité d'ordre l réduit à $\frac{\pi}{2}$ l distances.)

Les distances entre R et R' sont égales aux distances entre R_0 et R_1; elles sont complémentaires à $\frac{\pi}{2}$ des distances entre R' et R_0, R et R_1.

§ XVI. Le *moment* de R et R' est le produit des sinus des ϱ distances entre R et R'. Supposons que les points $z' \cdot\cdot z^k$ déterminent le $k$point K commun à RR', et que $x' \cdot\cdot x^{r-k}$ et $y' \cdot\cdot y^{r'-k}$ avec $z' \cdot\cdot z^k$ déterminent respectivement R et R'; nous aurons la formule importante

$$m^2\,(RR') = \frac{\Sigma \pm A_{z'z'} \ldots \Sigma \pm A_{x'x'} \ldots A_{y'y'} \ldots A_{z'z'} \ldots}{\Sigma \pm A_{x'x'} \ldots A_{z'z'} \ldots \Sigma \pm A_{y'y'} \ldots A_{z'z'} \ldots},\text{*)}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$m^2\,(RR') = \frac{\begin{pmatrix} z' \cdot\cdot \\ z' \cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha \begin{pmatrix} x' \cdot\cdot y' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \\ x' \cdot\cdot y' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha}{\begin{pmatrix} x' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \\ x' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha \begin{pmatrix} y' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \\ y' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha}.$$

Lorsque $r + r' = n + k$, $\Sigma \pm A_{x'x'} \ldots A_{y'y'} \ldots A_{z'z'} \ldots$ se réduit à

$$a \left\{\Sigma \pm x_1' \cdot\cdot y'_{r-k+1} \cdot\cdot z'_{n-k+1} \cdot\cdot\right\}^2.$$

Et si RR' n'ont pas de points communs on a

$$m^2(RR') = \frac{\Sigma \pm A_{x'x'} \ldots A_{y'y'} \ldots}{\Sigma \pm A_{x'x'} \ldots \Sigma \pm A_{y'y'} \ldots},$$

dont le numérateur devient $a\left\{\Sigma \pm x_1' \cdot\cdot y'_{r+1} \cdot\cdot\right\}^2$ lorsque $r + r' = n$.

§ XVII. Le *comoment* de R et R' est le produit des cosinus des distances entre R et R', c'est-à-dire le moment de R et R_1 ou de R_0 et R'.

Supposons que RR' soient l fois orthogonaux, et que les groupes de points

$u' \cdot\cdot u^{l'}$, $v' \cdot\cdot v^l$, $x' \cdot\cdot x^{r-l'}\, u' \cdot\cdot u^{l'}$, $y' \cdot\cdot y^{r'-l}\, v' \cdot\cdot v^l$ $(r - l' = r' - l)$

*) Le dénominateur se compose des déterminants de R et de R', le numerateur de ceux de K et de K', K' étant l' $(r + r' - k)$point déterminé par les points de R et R' ensemble.

déterminent respectivement $L' \, L \, R \, R'$; nous aurons

$$\mathrm{cm}^2\,(RR') = \frac{\Sigma \pm A_{u'u'} \cdot\cdot \Sigma \pm A_{v'v'} \cdot\cdot}{\Sigma \pm A_{x'x'} \cdot\cdot A_{u'u'} \cdot \Sigma \pm A_{y'y'} \cdot\cdot A_{v'v'} \cdot\cdot} \left\{ \Sigma \pm A_{x'y'} \cdot\cdot \right\}^2 .$$

Voici quelques autres expressions du comoment. Si $R \, R'$ n'ont pas d'orthogonalité on a

$$\mathrm{cm}^2\,(RR') = \frac{(-1)^{r'}}{\Sigma \pm A_{x'x'} \cdot\cdot \Sigma \pm A_{y'y'} \cdot\cdot} \begin{vmatrix} 0 & \cdot & 0 & A_{y'x'} & \cdot & A_{y'x^r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & A_{y^{r'}x'} & & A_{y^{r'}x^r} \\ A_{x'y'} & \cdot & A_{x'y^{r'}} & A_{x'x'} & \cdot & A_{x'x'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{x^r y'} & \cdot & A_{x^r y^{r'}} & A_{x^r x'} & \cdot & A_{x^r x'} \end{vmatrix},$$

et lorsqu' on y ajoute l'hypothèse $r = r'$

$$\mathrm{cm}^2\,(RR') = \frac{\left\{ \Sigma \pm A_{x'y'} \cdot\cdot A_{x^r y^r} \right\}^2}{\Sigma \pm A_{x'x'} \cdot\cdot \Sigma \pm A_{y'y'} \cdot\cdot} .$$

§ XVIII. En appelant ν. *ème moment* de R et R' la racine carrée M_ν de la somme des produits ν à ν des sinus-carrés des ϱ distances entre R et R', on trouve

$$M_\nu{}^2 = S_\nu - \binom{l'}{1} S_{\nu+1} + \binom{l'+1}{2} S_{\nu+2} - + \cdot\cdot + (-1)^{\varrho-\nu} \binom{l'+\varrho-\nu-1}{\varrho-\nu} S_\varrho .$$

Ici on pose, en gardant les notations du § XXI,

$$S_\nu = \frac{\Sigma \left(\Sigma \pm A_{x^b x^f} \cdot\cdot A_{z'z'} \cdot\cdot \right) \left(\Sigma \pm A_{x^c x^g} \cdot\cdot A_{y'y'} \cdot\cdot A_{z'z'} \cdot\cdot \right)}{\Sigma \pm A_{x'x'} \cdot\cdot A_{z'z'} \cdot\cdot \Sigma \pm A_{y'y'} \cdot\cdot A_{z'z'} \cdot\cdot},$$

où $x^b \cdot\cdot x^c \cdot\cdot$, $x^f \cdot\cdot x^g \cdot\cdot$ sont des permutations positives de $x' \cdot\cdot x^r$, dans lesquelles les groupes $x^b \cdot\cdot$, $x^f \cdot\cdot$ de $\varrho - \nu$ éléments ne présentent pas d'inversions et $x^c \cdot\cdot$, $x^g \cdot\cdot$ en présentent le moins possible.

Ce que nous avons nommé simplement le *moment* de R et R' serait leur ϱ. ème moment.

On peut aussi employer la formule

$$M_\nu{}^2 = S_\nu' - \binom{l}{1} S_{\nu+1}' + \binom{l+1}{2} S_{\nu+2}' - + \cdot\cdot + (-1)^{\varrho-\nu} \binom{l+\varrho-\nu-1}{\varrho-\nu} S_\varrho',$$

$S_\nu' \cdot\cdot$ différant de $S_\nu \cdot\cdot$ par l'échange des y avec les x.

Cela posé, l'équation aux sinus des distances D entre R et R' sera

$$\sin^{2\varrho} D - M_1{}^2 \sin^{2(\varrho-1)} D + M_2{}^2 \sin^{2(\varrho-2)} D - + \cdot\cdot + (-1)^\varrho M_\varrho{}^2 = 0.$$

§ XIX. De même, en appelant ν.*ème comoment* de R et R' la racine carrée C_ν de la somme des produits ν à ν des cosinus-carrés des distances entre R et R', on a

$$C_\nu{}^2 = S^{(\nu)} - \binom{k}{1} S^{(\nu+1)} + \binom{k+1}{2} S^{(\nu+2)} - + \cdot\cdot + (-1)^{\varrho-\nu} \binom{k+\varrho-\nu-1}{\varrho-\nu} S^{(\varrho)}.$$

Ici on pose (voir § XVII)

$$S^{(\nu)} = \frac{\Sigma(\Sigma \pm A_{x^b x^f} \cdots A_{u'u'} \cdots)(\Sigma \pm A_{y^i y^p} \cdots A_{v'v'} \cdots)(\Sigma \pm A_{x^c y^j} \cdots)(\Sigma \pm A_{x^g y^q} \cdots)}{\Sigma \pm A_{x'x'} \cdots A_{u'u'} \cdots \Sigma \pm A_{y'y'} \cdots A_{v'v'} \cdots},$$

$x^b \cdots x^c \cdots$, $x^f \cdots x^g \cdots$ et $y^i \cdots y^j \cdots$, $y^p \cdots y^q \cdots$ étant des permutations positives de $x' \cdots x^{r-l'}$ et $y' \cdots y^{r'-l}$ respectivement, où les premiers $\varrho - \nu$ éléments $x^b \cdots$, $x^f \cdots$, $y^i \cdots$, $y^p \cdots$ ne présentent pas d'inversions et les autres le moins possible.

L'équation aux cosinus des distances D est

$$\cos^{2\varrho} D - C_1^2 \cos^{2(\varrho-1)} D + C_2^2 \cos^{2(\varrho-2)} D - + \cdots + (-1)^\varrho C_\varrho^2 = 0.$$

§ XX. Deux plans $\xi\,\eta$ n'admettent qu'une seule distance, donnée par la formule

$$\cos^2(\xi\eta) = \frac{A^2_{\xi\eta}}{A_{\xi\xi}\, A_{\eta\eta}}.$$

On choisit pour *absolu* des plans l'ensemble des plans ξ qui satisfont à l'équation $A_{\xi\xi} = 0$. En nommant *rapport anharmonique* de deux couples de plans d'un même biplan, ξ, η et $\lambda_1\xi + \mu_1\eta$, $\lambda_2\xi + \mu_2\eta$, la quantité $\frac{\lambda_1}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\mu_2}$, et *angle* de deux plans $\xi\,\eta$ le logarithme (divisé par $2\sqrt{-1}$) de leur rapport anharmonique par rapport aux deux plans communs au biplan $\xi\eta$ et à l'absolu; on trouve que *l'angle de deux plans est égal à leur distance* lorsqu'on les regarde comme des $(n-1)$ points.

Tout ce qui a été exposé au § X s'applique aux plans, avec un accord parfait même dans la nomenclature.

§ XXI. Il en est de même de la notion d'orthogonalité établie au § XI. Ainsi, un biplan peut être perpendiculaire à un multiplan *en* un certain plan.

Deux multiplans $R\,R'$ admettent des biplans perpendiculaires communs (§§ XIII et XIV), et les angles compris entre les couples de plans où chaque biplan est perpendiculaire à R et R' sont les *angles* entre R et R'. Ils sont égaux aux distances entre R et R' regardés comme des multipoints.

On obtient les expressions des moments et des comoments des multiplans en changeant les coordonnées des points en celles des plans dans les formules des §§ XVI, $\cdots$

§ XXII. On peut exprimer les moments de deux multipoints R et R' en fonction de leurs coordonnées $x_{1\ldots r}, \cdots$ et $y_{1\ldots r'}, \cdots$

Posons d'abord

$$\frac{1}{\omega} = A_{\substack{r\,r\\x\,x}} A_{\substack{r'r'\\y\;y}}.$$

Alors, si $r + r' < n$ et que $R\,R'$ n'aient pas de points communs, on a

$$\mathrm{m}^2(RR') = \omega \sum a_{c\ldots\, d\ldots,\; g\ldots\, h\ldots}\; x_{c}\ldots y_{d}\ldots x_{g}\ldots y_{h}\ldots,$$

$c\cdots d\cdots$ et $g\cdots h\cdots$ désignant des arrangements de $1\cdots n$, dans lesquels les premiers r éléments $c\cdots$ et $g\cdots$, ainsi que les derniers r' $d\cdots$ et $h\cdots$, ne présentent aucune inversion.

Si $r+r'=n$ et RR' n'ont pas de points communs,

$$\mathrm{m}^2(RR') = \omega a\left\{\sum x_{c..}y_{d..}\right\}^2,$$

$c\cdots d\cdots$ désignant des permutations positives de $1\cdots n$ ($c\cdots$ sans inversions et $d\cdots$ avec le moins possible).

Si $r+r'=n+k$ et que RR' aient un $k$point commun,

$$\mathrm{m}^2(RR') = \omega a \sum a_{b..,f..}x_{b..c..}y_{b..d..}x_{f..g..}y_{f..h..},$$

$b\cdots c\cdots d\cdots$ et $f\cdots g\cdots h\cdots$ désignant des permutations positives de $1\cdots n$, où les k éléments $b\cdots$ et $f\cdots$, ainsi que $c\cdots$ et $g\cdots$, ne présentent aucune inversion, et $d\cdots$, $h\cdots$ le moins possible.

Si enfin $r+r'<n+k$ et RR' ont un $k$point commun,

$$\mathrm{m}^2(RR') = \omega \sum a_{b..,f..}a_{b..c..d..,f..g..h..}x_{b..c..}y_{b..d..}x_{f..g..}y_{f..h..},$$

$b\cdots c\cdots d\cdots$ et $f\cdots g\cdots h\cdots$ désignant des arrangements de $1\cdots n$, où les groupes de k éléments $b\cdots$ et $f\cdots$, ainsi que les autres, ne présentent aucune inversion.

On a aussi

$$S_\nu = \omega \sum a_{b..c..,f..g..}a_{b..d..e..,f..h..i..}x_{b..c..d..}y_{b..e..}x_{f..g..h..}y_{f..i..},$$

$b\cdots c\cdots d\cdots e\cdots$ et $f\cdots g\cdots h\cdots i\cdots$ désignant des arrangements de $1\cdots n$, où $b\cdots$ et $f\cdots$ (k éléments), $c\cdots$ et $g..$ ($\varrho-\nu$ éléments), etc. ne présentent aucune inversion.

Il y a des formules analogues pour les comoments.

§ XXIII. Si R et R' sont deux $r$points, on a

$$\mathrm{cm}^2(RR') = \frac{A_{\substack{rr\\xy}}^2}{A_{\substack{rr\\xx}}A_{\substack{rr\\yy}}}.$$

Choisissons pour *absolu* de l'espace à $(n-r)r$ dimensions qui a pour *éléments* les $r$points, l'ensemble de ceux $r$points qui satisfont à l'équation $A_{\substack{rr\\xx}}=0$; alors le comoment de deux $r$points est égal au cosinus de la distance entre deux éléments d'un tel espace, qui n'est d'ailleurs qu'une partie d'un espace à $\binom{n}{r}-1$ dimensions, dont on ait pris pour absolu

$$A_{XX} \equiv \sum a_{ij..,pq..}X_{ij..}X_{pq..} = 0,$$

$X_{1..r},\cdots$ désignant les $\binom{n}{r}$ coordonnées d'un élément.

Puisqu'on a $A_{\overset{n-r}{\xi}\overset{n-r}{\xi}} = A_{\overset{r}{x}\overset{r}{x}}$ lorsque $\overset{n-r}{\xi}$ se rapporte à un $r$point $\overset{r}{x}$ regardé comme un $(n-r)$plan, nous prendrons $A_{\overset{n-r}{\xi}\overset{n-r}{\xi}} = 0$ pour *absolu* de l'espace qui a pour ses éléments les $(n-r)$plans, et qui n'est qu'une partie d'un espace à $\binom{n}{r} - 1$ dimensions ayant pour absolu

$$A_{\Xi\Xi} = \sum \alpha_{kl\ldots,\, rs\ldots} \Xi_{kl\ldots} \Xi_{rs\ldots} = 0.$$

Les deux espaces de $\binom{n}{r} - 1$ dimensions peuvent s'identifier en établissant la relation $X_{ij\ldots} : \Xi_{kl\ldots} =$ constante ($ij \cdot\cdot kl \cdot\cdot$ étant une permutation positive de $1 \cdot\cdot n$).

L'absolu des points $A_{xx} = 0$ est l'ensemble des points *autorthogonaux*, qui tombent par conséquent dans leurs plans conjugués. Et l'absolu des plans $A_{\xi\xi} = 0$ résulte de l'ensemble des plans autorthogonaux, qui passent par leurs points conjugués. Lorsque un point appartient à $A_{xx} = 0$ le plan conjugué appartient à $A_{\xi\xi} = 0$, et réciproquement.

L'absolu des $r$points est l'aggrégat des $r$points dans lesquels existe un point orthogonal à tout l'$r$point, c'est-à-dire un point qui appartient aussi à l'$(n-r)$point conjugué, où il remplit le même rôle. (Ainsi l'absolu des droites est formé des droites tangentes à l'absolu des points.) Chacun de ces $r$points R renferme ∞^{r-2} points de $A_{xx}=0$, distribués sur ∞^{n-3} droites (ce sont deux pour un tripoint) issues du point X orthogonal à R, et toute droite menée par X dans R touche $A_{xx} = 0$ en X. On dit alors que R est *tangent* à l'absolu des points en X.

R pourrait bien toucher $A_{xx}=0$ *suivant* une droite, un tripoint, etc.

Tout cela s'applique aux multiplans *mutatis mutandis*.

§ XXIV. Désignons par $\sin^2(x' \cdot\cdot x^r)$ le déterminant

$$\sum \pm \cos(x'x') \cdot\cdot \cos(x^r x^r) = \frac{\Sigma \pm A_{x'x'} \cdot\cdot A_{x^r x^r}}{A_{x'x'} \cdot\cdot A_{x^r x^r}};$$

on peut appeler $(x' \cdot\cdot x^r)$ *l'amplitude* du groupe des points $x' \cdot\cdot x^r$. Elle se réduit à zéro pour $r > n$ et à l'unité pour $r = 1$.

Posons encore

$$\sin^2(RR' \cdot\cdot) = \sum \pm \mathrm{cm}(RR)\ \mathrm{cm}(R'R') \cdots,$$

où il faut remarquer que les comoments deviennent quelquefois des simples cosinus, p. ex. si $RR' \cdots$ sont des plans.

Voici maintenant quelques théorèmes analogues à ceux qui se rapportent aux triangles plans et sphériques, aux tétraèdres, etc.

1⁰. Deux groupes de r points $x' \cdot\cdot x^r$, $y' \cdot\cdot y^r$ étant donnés, on a

$$\sin(x'\cdot\cdot)\sin(y'\cdot\cdot)\,\mathrm{cm}(x'\cdot\cdot,\,y'\cdot\cdot)=\sum\pm\cos(x'y')\cdots=\frac{\Sigma\pm A_{x'y'}\cdots}{\{A_{x'x'}\cdots A_{y'y'}\cdots\}^{\frac{1}{2}}}.$$

et en particulier

$$\sin(x'\cdot\cdot x^n)\sin(y'\cdot\cdot y^n)=\sum\pm\cos(x'y')\cdot\cdot\cos(x^ny^n)$$
$$=a\frac{\Sigma\pm x_1'\cdot\cdot x_n^n\,\Sigma\pm y_1'\cdot\cdot y_n^n}{\{A_{x'x'}\cdots A_{y'y'}\cdots\}^{\frac{1}{2}}}.$$

2⁰. En divisant r points en deux groupes $x'\cdot\cdot x^k$, $x^{k+1}\cdot\cdot x^r$, on a

$$\sin(x'\cdot\cdot x^r)=\sin(x'\cdot\cdot x^k)\sin(x^{k+1}\cdot\cdot x^r)\,\mathrm{m}\,(x'\cdot\cdot x^k,\;x^{k+1}\cdot\cdot x^r);$$

et en les divisant en trois groupes $x'\cdot\cdot x^k$, $x^{k+1}\cdot\cdot x^s$, $x^{s+1}\cdot\cdot x^r$,

$$\sin(x'\cdot\cdot x^k)\sin(x'\cdot\cdot x^r)$$
$$=\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot x^s)\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{s+1}\cdot\cdot x^r)\,\mathrm{m}\,(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot x^s,x'\cdot\cdot x^kx^{s+1}\cdot\cdot x^r).$$

3⁰. Si parmi les points $x'\cdot\cdot x^r$ on en choisit k, $x'\cdot\cdot x^k$, et que l'on fasse les combinaisons s à s $(x^{k+1}\cdot\cdot,\;x^l\cdot\cdot,\;\text{etc.})$, des autres; on obtient

$$\sin^{\binom{r-k-1}{s}}(x'\cdot\cdot x^k)\sin^{\binom{r-k-1}{s-1}}(x'\cdot\cdot\cdot x^r)$$
$$=\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot)\sin(x'\cdot\cdot x^kx^l\cdot\cdot)\cdots\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot,\,x'\cdot\cdot x^kx^l\cdot\cdot,\,\cdots).$$

D'ici on tire

$$\sin(x''\cdot\cdot x^r):\sin(x'x'''\cdot\cdot x^r,\cdots,x'x''\cdot\cdot x^{r-1})=\text{constante}.$$

4⁰. On a aussi

$$\mathrm{cm}^{\binom{r-k-1}{s}}(x'\cdot\cdot x^k,y'\cdot\cdot y^k)\,\mathrm{cm}^{\binom{r-k-1}{s-1}}(x'\cdot\cdot x^r,\,y'\cdot\cdot y^r)\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot,x'\cdot\cdot x^kx^l\cdot\cdot,\cdots)\cdot$$
$$\cdot\sin(y'\cdot\cdot y^ky^{k+1}\cdot\cdot,\,y'\cdot\cdot y^ky^l\cdot\cdot,\,\cdots)$$
$$=\sum\pm\mathrm{cm}\,(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot,\,y'\cdot\cdot y^ky^{k+1}\cdot\cdot)\,\mathrm{cm}\,(x'\cdot\cdot x^kx^l\cdot\cdot,\,y'\cdot\cdot y^ky^l\cdot\cdot)\cdots$$

5⁰. Si les points $x'\cdot\cdot x^r$ déterminent un $r$point R, et qu'on les projecte sur un r'point R' $(r\leq r')$ en $z'\cdot\cdot z^r$, on a

$$\frac{\sin(z'\cdot\cdot z^r)}{\sin(x'\cdot\cdot x^r)}=\frac{\mathrm{cm}\,(RR')}{\cos(x'z')\cdots\cos(x^rz^r)}.$$

NB. Toutes ces propositions subsistent aussi pour les multiplans avec une dualité parfaite.

§ XXV. Considérons les n points *fondamentaux* P_1 $(10\cdot\cdot0)$, P_2 $(010\cdot\cdot0)$, $\cdots$, ansi que les multipoints déterminés par eux, et que nous dirons aussi *fondamentaux.* On a pour un $r$point R $(x_{1\cdot\cdot r},\cdots)$

$$\frac{x_{b\cdot\cdot}}{\sqrt{A_{\substack{rr\\xx}}}}=\sqrt{\alpha_{b\cdot\cdot,\,b\cdot\cdot}}\,\mathrm{m}\,(R,\,P_c\cdot\cdot),$$

$b\cdot\cdot c\cdot\cdot$ étant une permutation de $1\cdot\cdot n$; c'est-à-dire que les coordonnées $x_{b\cdot\cdot}$ de R sont proportionelles aux moments de R avec les $(n-r)$points fondamentaux $P_c\cdot\cdot$, multipliés par les nombres $\sqrt{\alpha_{b\cdot\cdot,\,b\cdot\cdot}}$. Ces moments sont liés par une équation quadratique

$$1 = \sum a_{c\ldots,\,g\ldots}\, \alpha_{c\ldots,\,g}\, . \frac{\mathrm{m}\,(R, P_c\cdot\cdot)\,\mathrm{m}\,(R, P_g\cdot\cdot)}{\mathrm{cm}\,(P_c\cdot\cdot\,,\, P_g\cdot\cdot)}\, .$$

Pour un $r$plan on a

$$\frac{\xi_{b\ldots}}{\sqrt{A_{\substack{rr\\ \xi\xi}}}} = \sqrt{a_{b\ldots,\,b\ldots}}\;\mathrm{m}\,(R, P_b\cdot\cdot)\, .$$

La transformation des coordonnées est règlée par la formule

$$X_{b\ldots} = \sum x_{p\ldots}\, y^{c\ldots}_{q\ldots},$$

$X_{b\ldots}$, $x_{p\ldots}$ désignant les nouvelles et les anciennes coordonnées d'un $r$point, et $y^{c\ldots}_{q\ldots}$ les coordonnées des nouveaux $(n-r)$points fondamentaux.

§ XXVI. Un $r$point R et un r'point R' sont parallèles lorsqu'ils ont en commun un $k$point K appartenant à l'absolu des $k$points, c'est-à-dire tangent à l'absolu des points. Il arrive dans ce cas qu'une des ϱ distances entre R et R' s'annulle, ainsi que le moment (le ϱ. ème) de R et R'. Les moments des ordres inférieurs n'éprouvent cependant aucune altération, mais dans leur composition il est inutile de compter la distance qui vient de s'évanouir; p. ex. le produit des sinus des $\varrho - 1$ distances effectives est $\sqrt{S_{\varrho-1}}$. On peut faire abstraction de la distance nulle aussi dans les comoments, en remplaçant la première équation du § XIX par la suivante

$$C^2_\nu = S^{(\nu+1)} - \binom{k+1}{1} S^{(\nu+2)} + \cdot\cdot \pm \binom{k+\varrho-\nu-1}{\varrho-\nu-1} S^{(\varrho)}\, .$$

Il y a des parallèlismes d'ordre supérieur: R et R' sont dits *m fois parallèles* si K touche l'absolu des points suivant un $m$point M. Dans ce cas m distances s'annulent; le produit des sinus des $\varrho - m$ qui restent est $\sqrt{S_{\varrho-m}}$, etc.

Si $R R'$ sont m fois parallèles, leurs conjugués $R_0 R_1$ appartiennent à un même $(n-k)$point K_0 (le conjugué de K) qui touche l'absolu des points suivant le même $m$point M, et on peut appeler R_0 et R_1 *antiparallèles m fois*. Réciproquement, si deux multipoints sont antiparallèles, leurs conjugués seront parallèles.

Tout cela s'applique aux multiplans. Deux multiplans m fois parallèles, regardés comme des multipoints, seront m fois antiparallèles; et réciproquement.

§ XXVII. Il y a un cas où la parfaite dualité que nous avons toujours signalée entre les points et les plans, ainsi qu'entre les formes engendrées par eux, ne subsiste plus; c'est-à-dire lorsqu'on suppose que le discriminant a de A_{xx}, ou bien celui (α) de $A_{\xi\xi}$, soit nul. Le cas $\alpha = 0$ se produit dans l'espace Euclidien à 1, 2, 3 dimensions; nous allons étudier le cas $a = 0$, qui ne diffère de celui-là que par l'échange des mots *point* et *plan*.

Pour $a = 0$, l'absolu des points se réduit à un point *principal* X orthogonal à tout l'espace, avec ∞^{n-2} autres points distribués sur ∞^{n-3} droites passantes par X.

L'absolu des plans se réduit à $\left\{\Sigma \sqrt{a_{j..,j}} \,.\, \xi_i\right\}^2 = 0$ ($ij\cdot\cdot$ désignant les permutations positives de $1 \cdot\cdot n$); c'est l'ensemble des plans passants par X comptés deux fois.

L'angle $(\xi\xi')$ de deux plans quelconques se réduit à zéro; mais on peut le remplacer, toutes les fois qu'il s'agit de comparer des angles entre eux, par la fonction algèbrique $[\xi\xi']$ définie par l'équation

$$[\xi\xi']^2 = \lim \left\{\frac{\sin(\xi\xi')}{\sqrt{a}}\right\}^2 = \frac{\Sigma a_{d..,h..}(\xi_b\xi_c' - \xi_b'\xi_c)(\xi_f\xi_g' - \xi_f'\xi_g)}{\left\{\Sigma \sqrt{a_{c..,c..}}\,\xi_b \cdot \Sigma \sqrt{a_{c..,c..}}\,\xi_b'\right\}^2},$$

$bcd\cdot\cdot$, $fgh\cdot\cdot$ désignant des permutations positives de $1 \cdot\cdot\cdot n$.

Il faut dire le même de l'amplitude d'un groupe quelconque de $r$plans $(\xi\xi'\cdot\cdot)$; elle est nulle, mais on peut la remplacer par $[\xi\xi'\cdot\cdot]$, en posant

$$[\xi\xi'\cdot\cdot]^2 = \lim \left\{\frac{\sin(\xi\xi'\cdot\cdot)}{a^{\frac{1}{2}(r-1)}}\right\}^2 = \frac{\Sigma a_{d..,h..}(\Sigma \pm \xi_b\xi_c'\cdot\cdot)(\Sigma \pm \xi_f\xi_g'\cdot\cdot)}{\left\{\Sigma \sqrt{a_{c..,c..}}\,\xi_b \cdot \Sigma \sqrt{a_{c..\,c..}}\,\xi_b'\cdots\right\}^2},$$

$bc\cdot\cdot d\cdot\cdot$, $fg\cdot\cdot h\cdot\cdot$ étant des permutations positives de $1\cdot\cdot n$.

§ XXVIII. Toujours pour $a = 0$, un plan quelconque a pour conjugué le point X, et un $r$point a pour conjugué un $r$plan dont les plans passent par X.

Si $r + r' = n + k$ $(k = 0, 1, \cdot\cdot)$ et que les deux multipoints R, R' aient un $k$point commun, une des ϱ distances entre R et R' s'évanouit toujours, mais on peut la remplacer par *l'angle* de deux plans convenables (suivant le dernier sens du mot *angle*). Il est aisé d'obtenir l'expression de cet angle, ainsi que l'équation aux sinus des $\varrho - 1$ distances restantes, au moyen des moments des ordres $\varrho - 1$, $\varrho - 2, \cdot\cdot$ La formule de l'angle est $\frac{1}{a}\cdot\frac{m(RR')}{\sqrt{S_{\varrho-1}}}$, $m(RR')$ et $S_{\varrho-1}$ ayant les expressions données au § XXII.

Lorsque R et R' sont m fois parallèles, m distances vont à zéro; et par conséquent il y aura $\varrho - m - 1$ distances plus l'angle si $r + r' = n + k$, et $\varrho - m$ distances sans angle si $r + r' < n + k$ (on suppose que R et R' aient un $k$point commun).

Si enfin R et R' sont deux *multiplans* parallèles, ils auront $\varrho - 1$ distances et un angle.

Il est bon de remarquer que, si l'on prend X pour un des n points fondamentaux en lui donnant pour coordonnées $0\cdot\cdot 0\,1$, et que l'on suppose les autres $n - 1$ points deux à deux orthogonaux, on peut écrire

$$A_{xx} = x_1{}^2 + \cdot\cdot + x_{n-1}^2.$$

En supposant encore $\xi_n = 1$ pour chaque plan, on obtient

$$[\xi\xi']^2 = (\xi_1 - \xi_1')^2 + \cdot\cdot + (\xi_{n-1} - \xi'_{n-1})^2,$$

$$[\xi\xi'\cdot\cdot\cdot]^2 = \sum \begin{vmatrix} \xi_b\,\xi_b'\cdot\cdot 1 \\ \xi_c\,\xi_c'\cdot\cdot 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix}^2$$

$bc\cdot\cdot$ désignant les combinaisons r à r de $1\cdots n-1$; et

$$[\xi\xi'\cdot\cdot\xi^{n-1}] = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdot\,\xi_{n-1} & 1 \\ \xi_1' & \xi_2' & \cdot\,\xi_{n-1}' & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\;\cdot & \cdot \\ \xi_1^{n-1} & \xi_2^{n-1} & \cdot\,\xi_{n-1}^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

Turin, 3. Avril 1877.

Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie.

Von

Martin Krause in Breslau.

Die von Jacobi begründete Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen ist in neuerer Zeit der Gegenstand einer Reihe von Arbeiten geworden, unter denen wir diejenigen von Sohnke*), Schröter**), Hermite***), Königsberger†), Joubert††) hervorheben. Indessen beschränken sich alle diese Arbeiten auf den Fall einer unpaaren Transformation und selbst dieser hat erst im vorigen Jahre durch das schon angegebene Werk von Joubert in gewisser Weise seinen endgültigen Abschluss gefunden. Erst in diesem nämlich ist die Existenz von Modulargleichungen für den allgemeinsten unpaaren Transformationsgrad nachgewiesen worden.

Der Fall einer paaren Transformation dagegen hat bisher wenig Berücksichtigung gefunden. Ausführlich ist nur die Transformation zweiten Grades von Hermite†††) behandelt worden, überdies hat Joubert†*) die Transformation vierten Grades zur Herstellung gewisser in der Theorie der complexen Multiplication auftretender Gleichungen benutzt, endlich hat eben derselbe für den Transformationsgrad 2^μ einen speciellen Satz ohne Beweis angeführt. Hiermit ist aber die Literatur über diesen Gegenstand erschöpft, wenigstens insoweit,

---

*) Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum, Crelle 16.

**) De aequationibus modularibus. Diss. in. Regiomonti 1854.

***) Sur la théorie des équations modulaires ... Paris 1859.

†) Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, 1874.

††) Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Paris 1876.

†††) Sur la théorie des fonctions elliptiques. Comptes rendus tome LVII. 1863.

†*) Sur la théorie des fonctions elliptiques... Paris, 1860. oder comptes rendus tome 50.

als dieselbe dem Verfasser des vorliegenden Aufsatzes bekannt geworden ist.

Es hat nun die folgende Arbeit den Zweck, diese Lücke auszufüllen. Es soll gezeigt werden, dass auch für einen paaren Transformationsgrad Modulargleichungen existiren, die sich zwar in mehrfachen Beziehungen von denen der unpaaren Transformation unterscheiden, die aber an Einfachheit und Symmetrie der Form von ihnen nicht übertroffen werden. Ueberdies gewinnen diese Gleichungen dadurch an Bedeutung, dass auch sie eine Reihe wichtiger Anwendungen auf das Gebiet der Algebra, complexen Multiplication und Zahlentheorie zulassen. Es soll dieser Umstand nicht völlig ausgeführt werden, vielmehr beschränken wir uns darauf, nachzuweisen, wie aus den genannten Gleichungen mit leichter Mühe ein Theil jener Summenformeln hergeleitet werden kann, die Kronecker*) für die Classenanzahl von Formen mit negativer Determinante aufgestellt hat.

§ 1.

Existenzbeweis von Modulargleichungen für einen beliebigen paaren Transformationsgrad.

Wir beweisen zunächst die Existenz von Modulargleichungen für den Transformationsgrad $m = 2^\alpha$.

Wir setzen:

$$C = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\,;\; iC' = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\,;\; \tau = \frac{iC'}{C}\,;\; q = e^{\pi\tau i}.$$

Ferner:

$$\varphi(\tau) = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots} = \sqrt[4]{c} = u$$

$$\psi(\tau) = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots} = \sqrt[4]{c_1} = u_1$$

und nehmen an, dass auf τ eine paare Transformation m^{ten} Grades ausgeübt werde, so dass aus τ wird:

$$\tau_1 = \frac{\beta_0 - \alpha_0\tau}{\alpha_1\tau - \beta_1},\ \text{wenn}\ \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = m\ \text{ist}.$$

Solcher Zahlensysteme $\alpha_0\beta_0\alpha_1\beta_1$ giebt es unendlich viele, doch zerfallen dieselben in eine endliche Anzahl von Classen, als deren Repräsentanten man stets ein und nur ein System von der Form wählen

*) Crelle Bd. 57. pag. 247.

kann: $\alpha_0 = \delta'$; $\alpha_1 = 0$; $\beta_0 = \xi'$; $\beta_1 = \delta_1'$, wenn δ' ein Theiler von m, $\delta_1' = \frac{m}{\delta'}$ und ξ' eine ganze Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots \delta_1' - 1$ ist. Von diesen Classen schliessen wir alle diejenigen aus, bei deren Repräsentanten die Grössen δ', ξ', δ_1' einen gemeinsamen Theiler haben, da dieselben auf Transformationen niederer Grade verbunden mit Multiplication der elliptischen Functionen führen.

Die so definirten Repräsentanten zerfallen in zwei Abtheilungen. In die erste gehören alle diejenigen, in welchen δ' ungerade und ξ' gerade ist, — für sie drückt die Sinusamplitude des transformirten Integrals sich als rationale Function der Sinusamplitude des ursprünglichen aus. In die zweite Abtheilung gehören alle übrigen Repräsentanten — für diese drücken sich nur die elliptischen Functionen des einen Integrals als rationale Functionen der drei elliptischen Functionen des anderen Integrals aus. Wir wollen die zu diesen beiden Fällen gehörenden Transformationen durch die Namen der rationalen und irrationalen von einander unterscheiden.

Für die rationale Transformation ist nun allgemein:

$$\psi^2\left[\frac{\delta'\tau - 2\xi}{\delta_1'}\right] = (-c_1)^{\frac{m}{2}} [tn(\overline{w}) \cdot tn(3w) \cdots tn((m-1)\overline{w})]^2,$$

wenn:

$$w = \frac{(2p\delta_1' - 2(2q+1)\xi)\, C + (2q+1)\delta' i C'}{m}$$

ist und n und q zwei beliebige Zahlen bedeuten, für welche die Ausdrücke:

$$2p\delta_1' - 2(2q+1)\xi \text{ und } (2q+1)\delta'$$

zu einander relativ prim sind.

Ist daher $m = 2^\alpha$, so wird gesetzt werden können:

$$\psi^2\left[\frac{\tau - 2\xi}{m}\right] = (-c_1)^{\frac{m}{2}} \left[tn\left((2q+1)\frac{iC' - 2\xi C}{m}\right)\right.$$
$$\cdot \left.\left(3(2q+1)\frac{iC' - 2\xi C}{m}\right) \cdots tn\left((m-1)(2q+1)\frac{iC' - 2\xi C}{m}\right)\right]^2.$$

Da nun allgemein $tn(2s+1)u$ eine rationale Function von $tn\,u$ ist, deren Zähler eine ungerade, deren Nenner eine gerade Function von $tn\,u$ ist, so wird:

$$\psi^2\left[\frac{\tau - 2\xi}{m}\right] = (-c_1)^{\frac{m}{2}} f\left[tn^2\left((2q+1)\frac{iC' - 2\xi C}{m}\right)\right],$$

wo $f(u)$ eine rationale Function von u bedeutet.

Wir wollen jetzt an Stelle von $2q+1$ der Reihe nach setzen: $1, 3, 5, \cdots m-1$, so wird:

$$\psi^2\left[\frac{\tau-2\xi}{m}\right]=(-c_1)^{\frac{m}{2}}f\left[tn^2\left(\frac{iC'-2\xi C}{m}\right)\right]$$

$$=(-c_1)^{\frac{m}{2}}f\left[tn^2\left(3\,\frac{iC'-2\xi C}{m}\right)\right]\cdots=(-c_1)^{\frac{m}{2}}f\left[tn^2\left((m-1)\,\frac{iC'-2\xi C}{m}\right)\right],$$

oder:

$$\psi^2\left[\frac{\tau-2\xi}{m}\right]=\frac{2}{m}(-c_1)^{\frac{m}{2}}\sum_1^{\frac{m}{2}}{}_r f\left[tn^2\left((2r-1)\,\frac{iC'-2\xi C}{m}\right)\right].$$

Ferner setzen wir an Stelle von ξ der Reihe nach $0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots + \frac{m}{2}$, so wird:

$$\psi^2\left[\frac{\tau}{m}\right]\quad=\frac{2}{m}(-c_1)^{\frac{m}{2}}\sum_1^{\frac{m}{2}}{}_r f\left[tn^2\left((2r-1)\,\frac{iC'}{m}\right)\right]$$

$$\psi^2\left[\frac{\tau\mp 2}{m}\right]=\frac{2}{m}(-c_1)^{\frac{m}{2}}\sum_1^{\frac{m}{2}}{}_r f\left[tn^2\left((2r-1)\,\frac{iC'\mp 2C}{m}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi^2\left[\frac{\tau-m}{m}\right]=\frac{2}{m}(-c_1)^{\frac{m}{2}}\sum_1^{\frac{m}{2}}{}_r f\left[tn^2\left((2r-1)\,\frac{iC'-mC}{m}\right)\right],$$

also:

$$\frac{\psi^{2p}\left[\frac{\tau}{m}\right]+\psi^{2p}\left[\frac{\tau\mp 2}{m}\right]+\cdots\psi^{2p}\left[\frac{\tau-m}{m}\right]}{(-c_1)^{\frac{pm}{2}}}$$

$$=\left(\frac{2}{m}\right)^p\sum_{r_1}\left[\sum_r f\left[tn^2\left(\frac{(2r-1)iC'-2r_1C}{m}\right)\right]\right]^p$$

$$r=1\cdots\cdots\frac{m}{2};\ r_1=0, \pm 1, \pm 2\cdots\frac{m}{2}.$$

Da die Argumente von tn^2 nicht um ganze Vielfache von $2C$ oder $2iC'$ von einander verschieden sind, da ferner der Ausdruck:

$$tn^2\left(\frac{(2\varrho+1)iC'+2\varrho_1C}{m}\right)$$

für alle ganzzahligen Combinationen der ϱ und ϱ_1 überhaupt nur $\frac{m^2}{2}$ von einander verschiedene Werthe annimmt, die man aus den Combinationen:

$$2\varrho_1:0,\ m;\qquad\qquad 2\varrho_1\quad:2,\ 4\cdots\cdots m-2$$
$$2\varrho+1:1,\ 3,\cdots\cdots m-1;\ 2\varrho+1:\pm 1, \pm 3\cdots\cdots\pm m-1$$

erhalten kann, so ist die Grösse:

$$\frac{\psi^{2p}\left[\frac{\tau}{m}\right]+\psi^{2p}\left[\frac{\tau\mp 2}{m}\right]+\cdots\psi^{2p}\left[\frac{\tau-m}{m}\right]}{(-c_1)^{\frac{mp}{2}}}$$

eine rationale symmetrische Function der Ausdrücke:

$$tn^2\left(\frac{(2\varrho+1)iC'+2\varrho_1 C}{m}\right).$$

Nun ist aber für ein gerades m:

$$\mathrm{sn}(mv)=m\cdot\mathrm{sn}\,v\cdot\mathrm{cn}\,v\cdot\mathrm{dn}\,v\cdot\frac{\prod\left(1-\dfrac{tn^2 v}{tn^2\left(\dfrac{2\varrho iC'+2\varrho_1 C}{m}\right)}\right)}{\prod\left(1-\dfrac{tn^2 v}{tn^2\left(\dfrac{(2\varrho+1)iC'+2\varrho_1 C}{m}\right)}\right)}$$

und andrerseits:

$$\mathrm{sn}\,(mv)=\mathrm{sn}\,v\cdot\mathrm{cn}\,v\cdot\mathrm{dn}\,v$$

mal einer rationalen Function von $tn^2 v$, deren Coefficienten ganze Functionen von u^8 sind.

Daraus folgt, dass jede rationale symmetrische Function der Grössen:

$$tn^2\left(\frac{(2\varrho+1)iC'+2\varrho_1 C}{m}\right)$$

eine rationale Function von u^8 ist.

Wir wollen von jetzt an im Folgenden annehmen, dass in $m=2^\alpha$ $\alpha>2$ sei, da die Fälle $m=2$ und $m=4$, wie bemerkt, schon behandelt worden sind.

Alsdann ergiebt sich als erstes Resultat: Die Grössen

$$\psi^2\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right],\ \psi^2\left[\frac{\tau\mp 2}{2^\alpha}\right]\ldots\ldots\ \psi^2\left[\frac{\tau-2^\alpha}{2^\alpha}\right]$$

sind Wurzeln einer Gleichung, die in Bezug auf die Unbekannte

$$v_1{}^2=\psi^2\left[\frac{\tau-2\xi}{2^\alpha}\right]$$

vom Grade 2^α ist und deren Coëfficienten rationale Functionen von u^8 sind.

Bezeichnen wir diese Gleichungen mit:

$$F(v_1{}^2,\ u^8)=0,$$

so haben die Gleichungen $F(u^2,\ v_1{}^8)=0$ die Lösungen: — $v_1{}^8$ als Unbekannte aufgefasst —

$$\psi^8\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right],\ \psi^8\left[\frac{\tau\mp 8}{2^\alpha}\right],\ \ldots.\ \psi^8\left[\frac{\tau-2^\alpha}{2^\alpha}\right].$$

In der That, setzen wir an Stelle von τ: $-\dfrac{2^\alpha}{\tau\mp 8\xi}$, so geht u^8 über in $v_1{}^8=\psi^8\left[\dfrac{\tau\mp 8\xi}{2^\alpha}\right]$, ferner $v_1{}^2$ in $\psi^2\left[-\dfrac{1}{\tau\mp 8\xi}\right]$, d. h. in $u^2=\varphi(\tau)^2$.*)

*) Hermite: Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Comptes rendus, tome 46., 1858; oder: Königsberger: Die lineare Transformation der Hermiteschen φ Function. Mathem. Annalen Band III.

Ebenso einfach lässt sich zeigen, dass die Gleichungen $F(v_1^2, u^8) = 0$ und $F(u^2, v_1^8) = 0$, wenn man v_1^2 als Unbekannte auffasst, *nur* die Lösungen $\psi^2\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right]$, $\psi^2\left[\frac{\tau\mp 8\xi}{2^\alpha}\right]_{\xi=1\ldots 2^{\alpha-3}-1}$, $\psi^2\left[\frac{\tau-2^\alpha}{2^\alpha}\right]$ gemeinsam haben, so dass sich das zweite Resultat ergiebt:

Es sind die Grössen $\psi^2\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right]$, $\psi^2\left[\frac{\tau\mp 8}{2^\alpha}\right]\cdots\psi^2\left[\frac{\tau-2^\alpha}{2^\alpha}\right]$ Wurzeln einer algebraischen Gleichung, die in Bezug auf die Unbekannte $v_1^2 = \psi^2\left[\frac{\tau-8\xi}{2^\alpha}\right]$ vom Grade $2^{\alpha-2}$ ist und deren Coefficienten rationale Functionen von u^2 sind.

Eine jede rationale symmetrische Function der Grössen

$$\psi^2\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right]\cdots\psi^2\left[\frac{\tau-2^\alpha}{2^\alpha}\right]$$

ist also eine rationale Function von u^2.

Hieraus folgt die Existenz von Modulargleichungen für einen beliebigen paaren Transformationsgrad, der durch acht theilbar ist.

Ist $n = b^\beta c^\gamma\cdots$ eine beliebige ungerade Zahl, δ ein beliebiger Theiler derselben, $\delta\delta_1 = n$, lässt man ferner x alle Werthe $0, 1, 2, \cdots \delta_1 - 1$ durchlaufen, mit Ausnahme derer, welche zu gleicher Zeit Theiler von δ und δ_1 sind, so besteht nach Joubert zwischen den Grössen $v_1^2 = \psi^2\left[\frac{\delta\tau - 8x}{\delta_1}\right]$ und $u_1^2 = \psi^2(\tau)$ eine algebraische Gleichung, die in Bezug auf v_1^2 vom Grade $T = b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(b+1)(c+1)\cdots$ ist. Eine jede rationale symmetrische Function der Grössen v_1^2 ist also eine rationale Function von $\psi^2(\tau)$.

Denken wir uns nun $m = 2^\alpha n$ gesetzt und die Grössen gebildet: $\psi^2\left[\frac{\delta\tau - 8\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$, wo δ und δ_1 die frühere Bedeutung haben und ξ alle Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \cdots, 2^{\alpha-3}\delta_1$, mit Ausnahme derer bedeutet, die zu gleicher Zeit Theiler von δ und δ_1 sind, so zeigt eine leichte Ueberlegung, dass dieselben in die Form gebracht werden können:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau_\varkappa - 8x}{\delta_1}\right],$$

wenn δ, δ_1, x die frühere Bedeutung haben, wenn ferner

$$\tau_\varkappa = \frac{\tau - 8\varkappa}{2^\alpha}$$

ist und $\varkappa$ alle Werthe $0, \pm 1, \cdots 2^{\alpha-3}$ annimmt.

Dann folgt nach dem früher Bemerkten, dass eine jede rationale symmetrische Function der Grössen $\psi^2\left[\frac{\delta\tau - 8\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$ eine rationale symmetrische Function der Grössen $\psi^2[\tau_\varkappa]$, mithin eine rationale Function der Grösse $u^2 = \varphi^2(\tau)$ ist.

Unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungen ergiebt sich also als drittes Resultat der *Lehrsatz*:

Zwischen den Grössen $v_1^2 = \psi^2\left[\frac{\delta\tau - 8\xi}{2^\alpha \delta_1}\right]$ *und* $u^2 = \varphi^2(\tau)$ *besteht eine algebraische Gleichung, die in Bezug auf* v_1^2 *vom Grade* $2^{\alpha-2}\,T$ *ist.*

Diese Gleichungen, die wir mit:

$$f(v_1^2, u^2) = 0$$

bezeichnen, sollen den späteren Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Es wird sich zeigen, dass dieselben als Fundamentalgleichungen angesehen werden können.

Schliesslich bemerken wir, dass für die geraden Transformationszahlen, welche nur durch 2 oder nur durch 4 theilbar sind, ähnliche Gleichungen existiren, doch sehen wir von der Aufstellung derselben ab.

§ 2.

Haupteigenschaften der eingeführten Gleichungen.

1) *Die eingeführten Gleichungen sind reciprok in Bezug auf* v_1^2.

Der Beweis ist unmittelbar klar, da die Wurzeln in die Form gebracht werden können:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau}{2^\alpha\delta_1}\right],\ \psi^2\left[\frac{\delta\tau}{2^\alpha\delta_1}+1\right],\ \psi^2\left[\frac{\delta\tau-8}{2^\alpha\delta_1}\right],\ \psi^2\left[\frac{\delta\tau-8}{2^\alpha\delta_1}+1\right] \text{ etc.}$$

und allgemein $\psi^2[\tau+1] = \frac{1}{\psi^2[\tau]}$ ist.

Es sind die Wurzeln der eingeführten Gleichungen also erstens die zu denjenigen Repräsentanten der rationalen Transformation gehörenden Functionen ψ^2, bei welchen $b_0 \equiv 0 \bmod 8$ ist, zweitens die reciproken Werthe derselben. —

2) *Die Gleichungen sind reciprok in Bezug auf* u^2.

Setzen wir an Stelle von τ: $\frac{\tau}{\tau+1}$, so geht u^2 in $\frac{1}{u^2}$ über, während die Wurzeln der Gleichung die Gestalt annehmen:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\,\frac{\tau}{\tau+1} - 8\xi}{2^\alpha\delta_1}\right] = \psi^2\left[\frac{(\delta-8\xi)\,\tau - 8\xi}{2^\alpha\delta_1\tau + 2^\alpha\delta_1}\right].$$

Die Reihe der auf diese Weise entstehenden Functionen ist identisch mit der Reihe der ursprünglichen Wurzeln, d. h. es ist:

$$\psi^2\left[\frac{(\delta-8\xi)\,\tau-8\xi}{2^\alpha\delta_1\tau+2^\alpha\delta_1}\right] = \psi^2\left[\frac{d\tau-8x}{2^\alpha d_1}\right],$$

wo d, d_1, x analoge Bedeutung wie δ, δ_1, ξ haben.

In der That, allgemein ist:

$$\psi^2[\tau] = \psi^2[\tau_1], \text{ wenn:}$$

$\tau = \dfrac{b_0 - a_0\tau_1}{a_1\tau_1 - b_1}$ und $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$ ist, so zwar, dass:

$a_0 \equiv b_1 \equiv 1 \bmod 2$; $a_1 \equiv 0 \bmod 8$; $b_0 \equiv 0 \bmod 2$ ist.

Hieraus folgt, dass in unserem Falle sein müsste:

$$\frac{(\delta - 8\xi)\tau - 8\xi}{2^\alpha \delta_1 \tau + 2^\alpha \delta_1} = \frac{b_0 2^\alpha d_1 + a_0 8x - a_0 d\tau}{a_1 d\tau - a_1 8x - b_1 2^\alpha d_1},$$

oder dass sonst die Gleichungen stattfinden müssen:

$$\begin{aligned} &1)\ \delta - 8\xi = -a_0 d, \\ &2)\ -8\xi = b_0 2^\alpha d_1 + a_0 8x, \\ &3)\ 2^\alpha \delta_1 = a_1 d, \\ &4)\ 2^\alpha \delta_1 = -b_1 2^\alpha d_1 - a_1 8x. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich d als ungerade Zahl — als grösster gemeinsamer Theiler von $\delta - 8\xi$ und $2^\alpha\delta_1$ —, während d_1 aus $d_1 = \frac{n}{d}$ bestimmt ist, ferner folgt aus 1) a_0 als ungerade, aus 3) a_1 als gerade durch acht theilbare Zahl, endlich ist $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$.

$8x$ ergiebt sich aus einer der beiden gleichwerthigen, auflösbaren Congruenzen:

$$8a_0 x \equiv -8\xi \bmod 2^\alpha d_1,$$

$$8a_1 x \equiv -2^\alpha \delta_1 \bmod 2^\alpha d_1$$

und zwar erhält man zwei nach dem Modul $2^{\alpha+1} d_1$ incongruente Lösungen. Einer jeden entsprechen ganzzahlige Werthe von b_0 und b_1, so zwar, dass b_1 jedenfalls ungerade ist. Da ferner die beiden incongruenten Lösungen die Gestalt haben $8x$ und $8x + 2^\alpha d_1$, so kann eine derselben immer so gewählt werden, dass b_0 eine gerade Zahl ist.

Aehnlich folgt:

3) *Die Gleichungen ändern sich nicht, wenn man u^2 mit $v_1{}^2$ vertauscht.*

4) *Die Gleichungen sind irreductibel*, d. h. eine jede algebraische Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von u^2 sind und welche mit ihnen eine Lösung gemeinsam hat, hat alle gemeinsam. Der Beweis hierfür ist analog demjenigen bei den Modulargleichungen unpaarer Transformation und mag daher fortgelassen werden.

Es soll jetzt gezeigt werden, inwiefern die Gleichungen Fundamentalgleichungen genannt werden können.

Dazu beweisen wir, dass aus ihnen durch einfache Transformationen eine Reihe anderer Gleichungen abgeleitet werden kann, deren Wurzeln die zu den übrigen Repräsentanten der rationalen oder irrationalen Transformation gehörenden ψ^2 oder φ^2 Functionen und deren reciproke Werthe sind.

Setzen wir an Stelle von $\tau : \tau + 4$ d. h. an Stelle von $\varphi^2(\tau) : -\varphi^2(\tau)$, so haben die Wurzeln der neuen Gleichung die Gestalt:

$$v_1^2 = \psi^2 \left[\frac{\delta\tau - 8\xi + 4}{2^\alpha \delta_1}\right].$$

Setzen wir an Stelle von τ: $\tau \pm 2$ d. h. an Stelle von $\varphi^2(\tau) : \pm i\varphi^2(\tau)$, so haben die Wurzeln der transformirten Gleichungen die Gestalt:

$$v_1^2 = \psi^2 \left[\frac{\delta\tau - 8\xi \pm 2\delta}{2^\alpha \delta_1}\right].$$

Damit ist der Fall der rationalen Transformation erledigt.

Wir setzen jetzt an Stelle von τ: $\frac{-1}{\tau}$ d. h. an Stelle von $\varphi^2(\tau) : \psi^2(\tau)$, so gehen die Wurzeln über in: $\psi^2\left[\frac{-\delta - 8\xi\tau}{2^\alpha \delta_1 \tau}\right]$. Dieselben können in die Form gebracht werden: $\psi^2 \left[\dfrac{b_0 - a_0 \dfrac{d'\tau - x}{d_1'}}{a_1 \dfrac{d'\tau - x}{d_1'} - b_1}\right]$, wobei $d_1' d' = m$ ist und die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} -\delta &= b_0 d_1' + a_0 x, \\ 8\xi &= a_0 d', \\ 0 &= a_1 x + b_1 d_1', \\ 2^\alpha \delta_1 &= a_1 d'. \end{aligned}$$

Die Discussion dieser Gleichungen giebt folgendes Resultat: So oft $8\xi \equiv 0 \bmod 2^{\alpha+1}$ ist, gehen die Wurzeln über in $\varphi^2\left[\frac{2^\alpha d\tau - x}{d_1}\right]$, so oft $8\xi \equiv 2^\alpha \bmod 2^{\alpha+1}$ ist, gehen die Wurzeln über in $\dfrac{1}{\varphi^2\left[\frac{2^\alpha d\tau - x}{d_1}\right]}$, in allen übrigen Fällen in $e^{-2^{\nu-2} d_1 x\pi i} \psi^2\left[\frac{2^{\alpha-\nu} d\tau - x}{2^\nu d_1}\right]$, wobei d und d_1 die ungeraden Theiler von d' und d_1' sind und nebst x und ν aus den aufgestellten Gleichungen bestimmt sind. ν ist von Null verschieden, $\alpha - \nu$ grösser als 2. Aehnlich folgt, dass wenn an Stelle von $\varphi^2(\tau)$: $\frac{-1}{\psi^2(\tau)}$ gesetzt wird, die Lösungen der transformirten Gleichung die Form haben: $e^{-2^{\alpha-4} d_1 x\pi i} \psi^2\left[\frac{4d\tau - x}{2^{\alpha-2} d_1}\right]$, und wenn an Stelle von $\varphi^2(\tau)$: $\frac{\pm i}{\psi^2(\tau)}$ gesetzt wird, die Form: $e^{-2^{\alpha-3}\pi i} \psi^2\left[\frac{2d\tau - x}{2^{\alpha-1} d_1}\right]$.

Wie wir sehen, haben wir auf diese Weise Gleichungen erhalten, deren Lösungen sämmtliche ψ^2 resp. φ^2 Functionen und deren reciproke Werthe sind, welche zu Repräsentanten der Form gehören: $\alpha_0 \equiv \alpha_1 \equiv \beta_0 \equiv 0 \bmod 2, \beta_1 \equiv 1 \bmod 2$ und $\alpha_0 \equiv \alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 0 \bmod 2, \beta_0 \equiv 1 \bmod 2$.

Die noch fehlenden repräsentirenden ψ^2 Functionen und deren reciproke Werthe sind Wurzeln von Gleichungen, die entstehen, wenn in der ursprünglichen an Stelle von $\varphi^2(\tau)$: $e^{\frac{s i \pi}{4}} \frac{\psi^2(\tau)}{\varphi^2(\tau)}$ $s=1,3,5,7$ gesetzt wird.

Damit ist die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung nachgewiesen worden.

Eine weitere Ueberlegung zeigt, dass aus den zu Grunde gelegten Gleichungen eine Reihe anderer Modulargleichungen abgeleitet werden kann, welche ähnliche Eigenschaften zeigen. Setzen wir z. B. an Stelle von u^2 in der ursprünglichen Gleichung $-u^2$ und multipliciren die auf diese Weise entstandene mit ihr, so erhalten wir eine Gleichung, deren Coefficienten ganze Functionen von u^4 sind und deren Lösungen die Form haben: $\psi^2\left[\frac{\delta\tau-4\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$, ebenso können Gleichungen abgeleitet werden, deren Coefficienten ganze Functionen von u^4, deren Lösungen die Grössen $\psi^4\left[\frac{\delta\tau-4\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$ sind oder deren Coefficienten ganze Functionen von u^8, deren Lösungen die Grössen $\psi^8\left[\frac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$ sind u. s. w.

Alle diese Gleichungen, die einen bedeutenden Theil derjenigen bilden, die überhaupt in der Theorie der paaren Transformation vorkommen können, haben nicht die einfache Gestalt, wie die zu Grunde gelegten, so dass letztere als Fundamentalgleichungen angesehen werden können.

§ 3.

Wurzelentwickelungen.

Es möge das Problem der Wurzelentwickelung dahin verallgemeinert werden, dass wir nicht nur die Fundamentalgleichungen berücksichtigen, sondern auch diejenigen, welche aus ihnen durch Aenderung von u^2 in $-u^2$ oder in $\pm iu^2$ entstanden sind.

Bekanntlich genügt der zu der Transformation m^{ten} Grades $\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ \xi & 2^\alpha\delta_1 \end{vmatrix}$ gehörende Multiplicator der Gleichung:

$$M^2 = \frac{1}{m}\,\frac{v^4(1-v^8)}{u^4(1-u^8)}\,\frac{du^4}{dv^4}.$$

Diese Formel kann geschrieben werden:

$$M^2 = -\frac{1}{m}\,\frac{v_1^2}{u^2}\,\frac{v^8}{u_1^8}\,\frac{du^2}{dv_1^2}.$$

Daraus folgt, dass der Quotient $\frac{dv_1^2}{du^2}$ an allen endlichen Stellen endlich sein muss, mit Ausnahme der Stellen $u^2=0$, $u^2=e^{\frac{2si\pi}{4}}$. Werden daher an einer beliebigen endlichen Stelle $u^2=u_0^2$, welche von 0 und $e^{\frac{2si\pi}{4}}$ verschieden ist, p Wurzeln v_1^2 einander gleich, gleich v_0^2, so lauten die Wurzelentwickelungen an der Stelle $u_0^2 v_0^2$:

$$v_1^2 - v_0^2 = a_1(u^2 - u_0^2) + b_1(u^2 - u_0^2)^2 + \cdots$$
$$v_1^2 - v_0^2 = a_2(u^2 - u_0^2) + b_2(u^2 - u_0^2)^2 + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$v_1^2 - v_0^2 = a_p(u^2 - u_0^2) + b_p(u^2 - u_0^2)^2 + \cdots.$$

Es bleibt übrig die Stellen $u^2 = 0$ und $u^2 = e^{\frac{2si\pi}{4}}$ in Betracht zu ziehen.

Aus dem für $\varphi(r)$ aufgestellten Ausdrucke folgt:

$$e^{\pi i\tau} = u^8 (B_0 + B_1 u^8 + B_2 u^{16} + \cdot\cdot)$$

mithin wird:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau - 2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right] = 1 + \sum_{\beta\gamma} \alpha_{\beta\gamma} u^{\frac{8\delta\beta + 8.2^\alpha\delta_1\gamma}{2^\alpha\delta_1}} e^{-\frac{2\xi\pi i}{2^\alpha\delta_1}}.$$

Für $u^2 = 0$, werden somit alle Wurzeln gleich 1.

Um die analogen Wurzelentwickelungen für den Punkt $u^2 = 1$ zu erhalten, möge zunächst untersucht werden, welchen Werth die Wurzeln der definirten Gleichungen im Punkte $u^2 = 1$ annehmen.

Setzen wir $\tau = -\frac{1}{\tau_1}$, so haben, wie gezeigt, je nachdem:

$$2\xi \equiv 0 \bmod 2^{\alpha+1} \text{ oder } 2\xi \equiv 2^\alpha \bmod 2^{\alpha+1} \text{ oder } 2\xi \quad 2^{\alpha-\nu} \bmod 2^{\alpha+1}$$

ist, die Wurzeln die Gestalt:

$$\varphi^2\left[\frac{2^\alpha d\tau_1 - x}{d_1}\right], \quad \frac{1}{\varphi^2\left[\frac{2^\alpha d\tau_1 - x}{d_1}\right]}, \quad \varepsilon\psi^2\left[\frac{2^{\alpha-\nu} d\tau_1 - x}{2^\nu d_1}\right]$$

wobei ε die Werthe $\pm i$, -1, $+1$ annimmt, je nachdem ν gleich 1, 2 oder einem höheren Werthe als 2 ist.

$u^2 = 1$ entspricht u. a. $\tau = 0$ d. h. $\tau_1 = -\infty$. Für $\tau_1 = -\infty$ wird aber $\varphi^2\left[\frac{2^\alpha d\tau_1 - x}{d_1}\right] = 0$, $\psi^2\left[\frac{2^{\alpha-\nu} d\tau_1 - x}{2^\nu d_1}\right] = 1$, mithin nehmen die Wurzeln je nach dem Werthe von ξ die Gestalt an: 0, ∞, ε.

Aehnlich wie bei $u^2 = 0$ folgt nun, dass, wenn:

$$2\xi \equiv 0 \bmod 2^{\alpha+1}$$

ist, wird:

$$\psi^8\left[\frac{\delta\tau - 2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right] = A(u^8 - 1)^{\frac{2^\alpha d}{d_1}} e^{-\frac{xi\pi}{d_1}} \left(1 + \sum_{\beta\gamma} a_{\beta\gamma} (u^8 - 1)^{\frac{2^\alpha d\beta + d_1\gamma}{d_1}} e^{-\frac{xi\pi\beta}{d_1}}\right)$$

wenn dagegen:

$$2\xi \equiv 2^{\alpha-\nu} \bmod 2^{\alpha+1}$$

ist:

$$\psi^8\left[\frac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]=1+\sum_{\beta\gamma}a_{\beta\gamma}(u^8-1)^{\frac{2^{\alpha-\nu}d\beta+2^\nu d_1\gamma}{2^\nu d_1}}e^{-\frac{x\beta\pi i}{2^\nu d_1}}$$

wobei die Grössen d, d_1, ν, x bestimmt sind aus:

$$-\delta=b_0 2^\nu d_1+a_0 x$$

$$2\xi=a_0 2^{\alpha-\nu}d$$

$$0=a_1 x+b_1 2^\nu d_1$$

$$2^\alpha\delta_1=a_1 2^{\alpha-\nu}d.$$

Dann ergeben aber die vorhin angestellten Betrachtungen die Entwickelungen:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]=\sqrt[4]{A}(u^2-1)^{\frac{2^{\alpha-2}d}{d_1}}e^{-\frac{x i\pi}{4d_1}}\left(1+\sum_{\beta\gamma}r_{\beta\gamma}(u^2-1)^{\frac{\beta 2^\alpha d+\gamma d_1}{d_1}}e^{-\frac{x\beta\pi i}{d_1}}\right)$$

$$2\xi\equiv 0 \mod 2^{\alpha+1}.$$

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]=\varepsilon\left(1+\sum_{\beta\gamma}r_{\beta\gamma}(u^2-1)^{\frac{\beta 2^{\alpha-\nu}d+\gamma 2^\nu d_1}{2^\nu d_1}}e^{-\frac{x\beta\pi i}{2^\nu d_1}}\right)$$

$$2\xi\equiv 2^{\alpha-\nu} \mod 2^{\alpha+1}.$$

Für die Punkte $u^2=-1$, $u^2=\pm i$ ergeben sich ähnliche Entwickelungen.

Hiermit ist das Problem der Wurzelentwickelung vollkommen gelöst.

Es hat sich das Resultat ergeben, dass *die Riemann'sche Fläche der Grösse v_1^2, welche aus $f(v_1^2, u^2)=0$ als Function von u^2 bestimmt ist, aus $2^{\alpha-2}T$ Blättern besteht, welche nur in den Punkten $u^2=0$; $u^2=e^{\frac{2s i\pi}{4}}$; $u^2=\infty$ mit einander zusammenhängen und hier in einer a priori bestimmten Weise.*

§ 4.

Numerische Beispiele.

Es mögen für die einfachsten Fälle die Fundamentalgleichungen wirklich aufgestellt werden. Dieselben lauten:

1) $n=8$.

$$(1-u^2)^2(1-v_1^2)^2-8u^2v_1^2=0.$$

2) $n=16$.

$$(1-u^2)^4(1-v_1^2)^4-64(1+u^4)(1+v_1^4)u^2v_1^2=0.$$

3) $n = 24$.

$$[(1-u^2)^2(1-v_1^2)^2-8u^2v_1^2]^2-256(1-u^4)(1-v_1^4)(1-u^8)(1-v_1^8)u^2v_1^2=0.$$

4) $n = 32$.

$$(1-u^2)^8(1-v_1^2)^8-64\cdot 16(1+u^2)^4(1+v_1^2)^4(1+u^4)(1+v_1^4)u^2v_1^2=0.$$

5) $n = 40$.

$$[(1-u^2)^2(1-v_1^2)^2-8u^2v_1^2]^6-16\cdot 64(1-u^4)(1-v_1^4)(1-u^8)(1-v_1^8)u^2v_1^2[3(1+6v_1^4+v_1^8)(1+6u^4+u^8)+20u^2(1+u^4)(1-v_1^4)^2+20v_1^2(1+v_1^4)(1-u^4)^2]=0.$$

Zu diesen Gleichungen gelangt man entweder durch successive Anwendung der Transformation zweiten Grades auf die entsprechenden Modulargleichungen, die zu einer Transformation zweiten oder unpaaren Grades gehören oder aber durch Anwendung der Sohnke'schen Entwickelungen*) unter Hinzunahme der Formeln:

$$\psi(\tau)=1-2q+2q^2-4q^3+6q^4-8q^5+12q^6-16q^7+22q^8-30q^9+40q^{10}\cdots$$

$$\psi^2(\tau)=1-4q+8q^2-16q^3+32q^4-56q^5+96q^6-160q^7+256q^8-404q^9+624q^{10}\cdots$$

. . . .

§ 5.

Anwendungen auf die Zahlentheorie.

Wir gehen zunächst von den Gleichungen aus, welche zwischen u^8 und v_1^8 bestehen, deren Wurzeln also die Grössen:

$$v_1^8 = \psi^8\left[\frac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$$

sind. In denselben möge $v_1^8 = u^8$ gesetzt werden, es fragt sich, welches die Wurzeln der so definirten Gleichungen sind. Die Argumente derselben müssen der Gleichung genügen:

$$\tau = \frac{b_0 - a_0\dfrac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}}{a_1\dfrac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}-\beta_1}, \text{ wobei:}$$

$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$ und $a_0 \equiv b_1 \equiv 0 \bmod 2$, $a_1 \equiv b_0 \equiv 1 \bmod 2$ ist, oder der Gleichung $P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$, wobei:

$$P = a_1\delta$$
$$2Q = a_0\delta - b_1 2^\alpha\delta_1 - a_1 2\xi$$
$$-R = a_0 2\xi + b_0 2^\alpha \delta_1 \text{ gesetzt ist.}$$

Die Determinante der Gleichung hat die Form:

$$\Delta = a^2 - n$$

*) Crelle 16. pag. 113.

und zwar kann a einen jeden Werth annehmen, für welchen a^2 eine positive ganze Zahl kleiner als n ist. Die Discussion der aufgestellten Gleichungen ergiebt folgendes Resultat:*)

Eine jede Classe der überhaupt möglichen Determinanten, in welcher die Coefficienten der in ihr enthaltenen Formen nicht denselben Theiler mit m haben und in welchen mindestens einer der beiden äusseren Coefficienten derselben ungerade ist, liefert zwei von einander verschiedene Werthe von u^8, welche einer oder 2μ Wurzeln gleich werden, je nachdem $a = 0$ oder die Zahl der eigentlichen Darstellungen von m durch die Form $(1, 0, -\Delta')$ gleich μ ist, — vorausgesetzt, dass $\frac{\Delta}{\Delta'}$ gleich dem grössten in Δ enthaltenen ungeraden Quadrat ist.

Ebenso gross ist der Grad der Vielfachheit von u^8 in:

$$f(u^8, u^8) = 0$$

wie eine einfache Betrachtung lehrt, die analog derjenigen am Anfange des dritten Paragraphen ist.

Es bleibt übrig, den Punkt $u^8 = 1$ zu betrachten.

Dazu möge die Modulargleichung nach steigenden Dimensionen von $1 - u^8$ und $1 - v_1^8$ d. h. von u_1^8 und v^8 geordnet werden, so dass, wenn die r^{te} Dimension die niedrigste ist, sich ergiebt:

$$f(v_1^8, u^8) = (a_0 u_1^{8r} + a_1 u_1^{8(r-1)} v^8 + \cdots a_r v^{8r}) + (u_1^8, v^8)_{r+1} + \cdots.$$

Setzen wir

$$\frac{v^8}{u_1^8} = w,$$

so werden die dem Werthe $u^8 = 1$ entsprechenden Werthe von w bestimmt sein durch: $a_0 + a_1 w + \cdots a_r w^r = 0$.

Behufs der weiteren Schlüsse mögen zwei neue Functionen eingeführt werden.

Sei d_1 ein beliebiger gerader Theiler von m, der nicht durch 2^α theilbar ist, ferner $\sigma(d_1)$ die doppelte Anzahl aller positiven Zahlen, welche kleiner als d_1 sind und mit d_1 und $\frac{m}{d_1}$ keinen gemeinsamen Theiler haben, so werde gesetzt:

$$\mathfrak{T} = \sum \sigma(d_1)$$

wo die Summe über alle diejenigen Werthe von d_1 auszudehnen ist, welche kleiner als $\sqrt{m}$ sind.

---

*) Siehe die entsprechenden Betrachtungen in der Arbeit: Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. Math. Annalen Bd. XII, oder auch Joubert: Sur la théorie des Fonctions elliptiques. pag. 22 sequ. od. comptes rendus tome 50. pag. 1041 sequ.

Ist ferner m ein volles Quadrat, so möge mit t die doppelte Anzahl der Zahlen bezeichnet werden, welche zu $\sqrt{m}$ relativ prim sind und mit m keinen gemeinsamen Theiler haben, ist dagegen m kein volles Quadrat, so sei $t = 0$.

Dann folgt aus den Entwickelungen des dritten Paragraphen, dass die Gleichung:

$$a_0 + a_1 w + \cdots a_r w^r = 0$$

die Form annimmt:

$$w^{\mathfrak{T}} (a_{\mathfrak{T}} + a_{\mathfrak{T}+1} w + \cdots a_{\mathfrak{T}+t} w^t) = 0.$$

Mithin wird die Modulargleichung:

$$f(v_1^8, u^8) = v^{8\mathfrak{T}} u^{8(r-\mathfrak{T}-t)} (a_{\mathfrak{T}} u_1^{8t} + a_{\mathfrak{T}+1} u_1^{8(t-1)} v^8 + \cdots a_{\mathfrak{T}+1} v^{8t}) + (u_1^8, v^8)_{r+1} + \cdots$$

Da dieselbe ungeändert bleibt, wenn man u_1^8 und v^8 vertauscht, so folgt, dass:

$$r = 2\mathfrak{T} - t$$

ist. Ebenso gross ist der Grad der Vielfachheit der Wurzel $u^8 = 1$ in $f(u^8, u^8) = 0$.

Nennen wir daher $F_1(\Delta)$ die Summe der vorhin definirten Classen der Determinante $-\Delta$, so folgt:

$$F_1(m) + 2F_1(m-1) + 2F_1(m-2^2) + \cdot = 2^\alpha T - \mathfrak{T} - \frac{t}{2}.$$

Wie eine einfache Betrachtung zeigt, geht diese Summenformel in die erste Summenformel von Kronecker über, wenn die Classen derjenigen Formen hinzugenommen werden, in welchen die drei Coefficienten mit m einen von 2 verschiedenen gemeinsamen Theiler haben.

Aehnliche Resultate ergeben sich, wenn von den Gleichungen ausgegangen wird, die zwischen u^4 und $v_1^4 = \psi^4 \left[\frac{\delta\tau - 4\xi}{2^\alpha \delta_1}\right]$ bestehen. Alsdann wird:

$$F_1(m) + 2F_1(m-2^2) + 2F_1(m-4^2) + \cdots = 2^{\alpha-1} T - \mathfrak{T}_1 - \frac{t}{2}$$

wenn $\mathfrak{T}_1$ eine ähnliche Bedeutung wie $\mathfrak{T}$ hat unter der Hinzunahme, dass d_1 weder durch 2^α noch durch $2^{\alpha-1}$ jedoch durch 4 theilbar ist.

Auch diese Formel ist implicite in denen von Kronecker enthalten.

Für $m \equiv 0 \bmod 16$ ergiebt sich unter Hinzunahme der zuletzt definirten Classen wieder die erste Formel, für $m \equiv 8 \bmod 16$ dagegen die zweite. Allerdings müssen in diesem Falle die von Kronecker aufgestellten Relationen zu Hilfe genommen werden: Es ist:

$$F(4n) = 2F(n) - 1 \text{ oder } F(4n) = 2F(n),$$

je nachdem n ein volles ungerades Quadrat ist, oder nicht.

Gehen wir schliesslich von den Gleichungen zwischen u^2 und $v_1{}^2 = \psi^2 \left[\frac{\delta\tau - 8\xi}{2^\alpha \delta_1}\right]$ aus, so ergiebt sich, wenn $m \equiv 8 \bmod 16$:

$$F_1(m) + 2F_1(m - 4^2) + 2F_1(m - 8^2) + \cdots = 2T.$$

Diese Formel liefert im Vereine mit den früheren die dritte von Kronecker.

Ist $m \equiv 16 \bmod 32$, so wird:

$$F_1(m) + 2F_1(m - 4^2) + 2F_1(m - 8^2) + \cdots = 4T - \mathfrak{T}_2 - \frac{t}{2}$$

wo $\mathfrak{T}_2$ eine analoge Bedeutung wie $\mathfrak{T}$ hat, unter der Hinzunahme, dass $d_1 \equiv 4 \bmod 8$ ist. Diese Formel liefert die fünfte von Kronecker.

Die weiteren Fälle ergeben keine neuen Resultate.

Diese Beispiele mögen genügen, um die Anwendbarkeit der aufgestellten Gleichungen darzuthuen.

Breslau den 7. Juni 1877.

Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen, insbesondere derjenigen dritter Ordnung ($\varrho = 4$).

Von

Alfred Pringsheim in München.

Die allgemeine ϑ-Function mit ϱ Variablen, welche durch den Ausdruck definirt wird

$$\vartheta(v_1, \cdots v_\varrho) = \sum_{-\infty\,\nu_1 \ldots \nu_\varrho}^{+\infty\,(\varrho)} e^{\sum\limits_{1}^{\varrho}{}_{\alpha} \nu_\alpha (\nu_1 \tau_{\alpha 1} + \cdots + \nu_\varrho \tau_{\alpha\varrho})\pi i} \cdot e^{(2\nu_1 v_1 + \ldots . 2\nu_\varrho v_\varrho)\pi i}$$

wird charakterisirt durch ein System von Constanten oder Moduln:

$$\begin{matrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1\varrho} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2\varrho} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \tau_{\varrho 1} & \tau_{\varrho 2} & \cdots & \tau_{\varrho\varrho}, \end{matrix}$$

deren Anzahl vermöge der Bedingung

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

gleich $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ ist. Diese $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Moduln sind von einander durchaus unabhängig und nur — behufs der Convergenz jener ϱ-fach unendlichen ϑ-Reihe — der Beschränkung unterworfen, dass die Quadratzerlegung des reellen Theiles von

$$\sum_{1}^{\varrho}{}_{\alpha} \nu_\alpha (\nu_1 \tau_{\alpha 1} + \cdots + \nu_\varrho \tau_{\alpha\varrho})\pi i$$

lauter negative Coëfficienten besitzt.

Diejenigen ϑ-Functionen, welche bei der Umkehrung der Abel'schen Integrale auftreten, bilden eine speciellere Gattung der eben erwähnten allgemeinen, insofern zwischen den $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Moduln eine Anzahl von Relationen stattfinden muss. Riemann hat gezeigt

(s. Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 54), dass die Umkehrungsfunctionen der allgemeinsten Abel'schen Integrale erster Gattung, d. h. solcher allenthalben endlich bleibender Integrale, deren Differential eine $2\varrho + 1$ fach zusammenhängende algebraische Function ist, nur $3\varrho - 3$ unabhängige Constanten enthalten, dass also zwischen den $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ ϑ-Moduln $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2} - (3\varrho - 3)$ oder $\frac{(\varrho-2)(\varrho-3)}{2}$ Relationen stattfinden müssen. Die Anzahl der unabhängigen Constanten vermindert sich noch mehr für speciellere Gattungen Abel'scher Integrale, und zwar reducirt sie sich für den einfachsten Fall, nämlich den der hyperelliptischen Integrale, auf $2\varrho - 1$. Diese Integrale, welche bekanntlich die Variable nur in rationaler Verbindung mit einer Quadratwurzel aus einem Polynom $2\varrho + 1^{\text{ten}}$ Grades enthalten, scheinen zwar zunächst $2\varrho + 1$ unabhängige Constanten (Verzweigungswerthe) zu besitzen: allein es lässt sich stets deren Anzahl durch eine lineare Transformation auf $2\varrho - 1$ reduciren, und ebenso gross kann also auch nur die Anzahl der unabhängigen ϑ-Moduln sein. Daraus folgt nun, dass zwischen den Moduln *hyperelliptischer* ϑ-Functionen $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2} - (2\varrho - 1)$ oder $\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$ Relationen bestehen müssen.

Welcher Art diese Relationen sein müssen, ergiebt sich aus einem von Herrn Weierstrass herrührenden Satze über das Verschwinden hyperelliptischer ϑ-Functionen, welcher folgendermassen lautet:

Bezeichnet man mit η den Index einer hyperelliptischen ϑ-Function mit ϱ Variablen von folgender Zusammensetzung

$$\eta = (1, 3, 5 \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho)$$

oder

$$\eta = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{\varrho+1}),$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho, \varepsilon_{\varrho+1}$ ϱ resp. $\varrho + 1$ beliebige Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho$ bezeichnen, dann ist stets

$$\vartheta_\eta (0, 0 \cdots 0) \gtrless 0$$

Bildet man dagegen

$$\eta' = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r),$$

wo $r < \varrho$ (oder $> \varrho + 1$ — insofern man bekanntlich jede Combination von $\varrho + 1 + \alpha$ Indices durch diejenigen $\varrho - \alpha$ ersetzen kann, welche noch zur Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho$ fehlen), so wird stets

$$\vartheta_{\eta'} (0, 0, \cdots 0) = 0.$$

(Dieser Satz findet sich in einer Abhandlung meines verehrten Lehrers Herrn Königsberger über Transformation der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal Bd. 64.) Der Beweis dieses Satzes beruht wesentlich darauf, dass die Argumente und Moduln der betreffenden ϑ-

Functionen in der bekannten Weise von einem entsprechenden Systeme hyperelliptischer Integrale 1ter Gattung abhängen, und es bildet daher dieses Verschwinden aller ϑ-Functionen, deren Index die Form η' hat, für die Nullwerthe der Argumente zunächst jedenfalls eine *nothwendige* Bedingung dafür, dass das System ein hyperelliptisches ist.

Diese Bedingung hat die Form von Relationen zwischen den ϑ-Moduln $\tau_{11} \cdots \tau_{\varrho\varrho}$, sobald sich unter den ϑ-Functionen von der Form $\vartheta_{\eta'}(v_1 \cdots v_\varrho)$ *gerade* Theta's befinden, welche also nicht für die Nullwerthe der Argumente an sich verschwinden würden. Es ist nun aber leicht zu zeigen, dass sich für $\varrho \geqq 3$ unter den Functionen, deren Index die Form η' hat, in der That stets eine Anzahl gerader Theta's befinden müssen.

Zunächst ist klar, dass die Indices *aller* überhaupt existirenden $2^{2\varrho}$ ϑ-Functionen sich auf eine der beiden Formen η oder η' bringen lassen müssen, und dass alsdann *alle ungeraden* Theta's Indices von der Form η' haben müssen — da sie ja für die Nullwerthe der Argumente in jedem Falle verschwinden. Nun lautet die Bedingung dafür, dass $\vartheta_\lambda(v_1 \cdots v_\varrho)$ eine ungerade Function sein soll:

$$m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda + \cdots + m_\varrho^\lambda n_\varrho^\lambda \equiv 1 \pmod 2,$$

wo m_α^λ, n_α^λ die Charakteristiken von ϑ_λ bedeuten. Die Anzahl aller möglichen ungeraden ϑ-Functionen wird daher gleich sein der Anzahl der Lösungen dieser Congruenz, wenn nur solche Lösungen in Betracht gezogen werden, welche nach dem Modul 2 *incongruent sind*, also alle Combination von der Form (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) — mithin gleich $2^{\varrho-1}(2^\varrho - 1)$.

[NB. Ich will bei dieser Gelegenheit bemerken, dass sich die Anzahl der nach dem Modul 2 incongruenten Lösungen der obigen Congruenz noch in anderer Form darstellen lässt, und dass sich aus der Vergleichung dieser beiden verschiedenen Darstellungen eine a priori wohl nicht ersichtliche ganzzahlige Identität ergiebt. Befriedigt man nämlich zunächst jene Congruenz in der Weise, dass man dem ersten Gliede den Werth 1 giebt, während man alle übrigen verschwinden lässt, so bleiben für jedes der $\varrho - 1$ verschwindenden Glieder noch die drei Möglichkeiten (0, 0), (0, 1), (1, 0), im ganzen also $3^{\varrho-1}$ Combinationen, und man erhält daher, wenn man nun jenes eine nicht verschwindende Glied alle möglichen ϱ Stellen einnehmen lässt, $\varrho \cdot 3^{\varrho-1}$ Lösungen. Lässt man jetzt 3 Glieder den Werth 1 annehmen und die übrigen $\varrho - 3$ verschwinden, so ergeben sich durch Erschöpfung aller möglichen Combinationen $\frac{\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3^{\varrho-3}$ Lösungen, u. s. f. Man gelangt auf diese Weise schliesslich zu einem Ausdrucke von der Form

$$\sum_{0}^{\varrho'}{}_{\alpha} \frac{\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\cdots(\varrho-2\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2\alpha+1)} 3^{\varrho-(2\alpha+1)},$$

wo die Summation über α zu erstrecken ist über alle ganzen Zahlen von 0 bis ϱ' und $\varrho' = \frac{\varrho-1}{2}$, wenn ϱ ungerade, $\varrho' = \frac{\varrho}{2} - 1$, wenn ϱ gerade.

Hieraus ergiebt sich dann die erwähnte Identität in der Form

$$\sum_{0}^{\varrho'}{}_{\alpha} \frac{\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-2\alpha)}{1\cdot 2\cdots(2\alpha+1)} 3^{\varrho-(2\alpha+1)} = 2^{\varrho-1}(2^{\varrho}-1)$$

welche sich unmittelbar verificiren lässt, indem man

$$2^{\varrho-1}(2^{\varrho}-1) = \tfrac{1}{2}(2^{2\varrho}-2^{\varrho}) = \tfrac{1}{2}\{(3+1)^{\varrho}-(3-1^{\varrho}\}$$

nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt.]

Aus dem Ausdrucke für die Anzahl aller ungeraden ϑ-Functionen ergiebt sich die Anzahl aller geraden gleich $2^{2\varrho} - 2^{\varrho-1}(2^{\varrho}-1) = 2^{\varrho-1}(2^{\varrho}+1)$.

Ferner ist die Anzahl aller ϑ-Functionen, deren Index die Form η hat und welche sämmtlich gerade sein müssen, da sie für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwinden, gleich

$$\frac{(2\varrho+1)(2\varrho)(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\varrho}.$$

Mithin wäre die Zahl derjenigen geraden Theta's, welche etwa noch unter den Functionen mit den Indices η' enthalten sind, gleich

$$2^{\varrho-1}(2^{\varrho}+1) - \frac{(2\varrho+1)(2\varrho)(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\varrho}$$

und dieser Ausdruck wird nur $= 0$ für $\varrho = 2$, dagegen stets > 0 für $\varrho \geqq 3$.

Daraus folgt, dass für $\varrho = 2$, die hyperelliptischen Theta's keiner besonderen Beziehung zwischen den Modulen bedürfen, sondern dass sie gleichzeitig die allgemeinsten Theta's mit 2 Variablen sind. Es hat dies seinen Grund darin, dass die 3 charakteristischen Zahlen

- $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ d. h. die Anzahl der in den allgemeinen ϑ-Function vorhandenen Moduln,
- $3\varrho - 3$ d. h. die höchste mögliche Anzahl unabhängiger Constanten, welche in den Umkehrungsfunctionen Abel-scher Integrale 1ter Gattung vorkommen können,
- $2\varrho - 1$ d. h. die Anzahl eben dieser Constanten für den speciellen Fall der hyperelliptischen Integrale

für $\varrho = 2$ sämmtlich denselben Werth 3 annehmen.

Für $\varrho = 3$ ist die Anzahl gerader Theta's, deren Index die Form η' hat, gleich 1 und es ist daher das Verschwinden *einer* geraden ϑ-Function — nämlich $\vartheta_{135}(v_1, v_2, v_3)$ die Bedingung dafür, dass das

System ein hyperelliptisches sei: in der That bleiben in Folge dieser einen Bedingung von den 6 vorhandenen ϑ-Moduln nur $2\varrho - 1 = 5$ unabhängig. Was die allgemeinste ϑ-Function mit 3 Variablen und 6 unabhängigen ϑ-Moduln betrifft, so führt diese zwar nicht mehr auf hyperelliptische Functionen, aber immerhin — weil hier $3\varrho - 3 = 6$ ist — noch auf eindeutige Umkehrungen Abel'scher Integrale erster Gattung.

Etwas Aehnliches findet nicht mehr statt, sobald $\varrho > 3$ wird. Denn schon für $\varrho = 4$ — in welchem Falle die Anzahl der überhaupt vorhandenen ϑ-Moduln $= 10$ ist — wird die Anzahl der unabhängigen Constanten im allgemeinsten Falle: $3\varrho - 3 = 9$, und erniedrigt sich für hyperelliptische Functionen auf $2\varrho - 1 = 7$. Und es ist klar, dass mit wachsendem ϱ die Differenz zwischen der Anzahl der vorhandenen ϑ-Moduln und der unabhängig anzunehmenden Constanten der betreffenden Classe Abel'scher Functionen immer mehr zunimmt, da ja die Zahl der ϑ-Moduln $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ die Zahl ϱ im Quadrat, dagegen die Anzahl der möglichen unabhängigen Constanten $3\varrho - 3$ die Zahl ϱ nur linear enthält. Es werden also für $\varrho > 3$ die allgemeinsten ϑ-Functionen nicht mehr auf *eindeutige* Umkehrungen Abel'scher Integrale erster Gattung führen, und es werden umgekehrt die betreffenden Abel'schen Functionen nicht die allgemeinsten 2ϱfach periodischen Functionen darstellen. Setzt man also

$$u_1 = \sum_1^\varrho{}_\alpha \psi_1(x_\alpha)$$

$$u_2 = \sum_1^\varrho{}_\alpha \psi_2(x_\alpha)$$

$$\vdots$$

$$u_\varrho = \sum_1^\varrho{}_\alpha \psi_\varrho(x_\alpha)$$

und bestimmt $\psi_1(x) \cdots \psi_\varrho(x)$ in der Weise als Abel'sche Integrale 1ter Gattung, dass jede rationale symmetrische Function von $(x_1, \cdots x_\varrho)$ sich als eindeutige Function von $(u_1 \cdots u_\varrho)$ ergiebt, so gelangt man zu einer *speciellen* Gattung von 2ϱfach periodischen Functionen, insofern zwischen den darin vorkommenden $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Moduln so viele Relationen bestehen müssen, dass nur $3\varrho - 3$ willkürlich bleiben. In Folge dessen ist Herr Weierstrass, um zu den allgemeinsten 2ϱfach periodischen Functionen zu gelangen, zu einer Verallgemeinerung des Umkehrproblem's geführt worden, welche folgendermassen lautet: Es sollen die Functionen $\psi_1(x) \cdots \psi_\varrho(x)$ so bestimmt werden, dass zu *einem* Systeme der Grössen $(u_1 \cdots u_\varrho)$ zwar nicht mehr *ein einziges* System, wohl aber nur eine *endliche* Anzahl von Systemen der Grössen $(x_1 \cdots x_\varrho)$ gehören. Alsdann lässt sich zeigen, dass $x_1 \cdots x_\varrho$ die Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades sind, deren Coefficienten sich *algebraisch* durch die partiellen Ableitungen einer eindeutigen, 2ϱfach periodischen Function von $(u_1 \cdots u_\varrho)$ ausdrücken lassen. Herr Weierstrass hat damit den Existenzbeweis dieser verallgemeinerten Abel'schen Functionen gegeben, während deren wirkliche Darstellung in Folge bedeutender, sich hierbei ergebender algebraischer Schwierigkeiten bisher noch nicht gelungen ist. (S. Monatsberichte der Berliner Akademie, 1869.)

Was nun die hyperelliptischen ϑ-Functionen beliebiger Ordnung betrifft, so müssen, wie oben bemerkt wurde, zwischen ihren Moduln $\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$ Relationen bestehen, derart, dass

$$2^{\varrho-1}(2^\varrho+1) - \frac{(2\varrho+1)\,2\varrho\,(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\varrho} = \mu$$

gerade ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente verschwinden. Da aber jedes solche gerade $\vartheta_\lambda(0, 0, \cdots 0)$ gleich Null gesetzt *eine* Bedingung für die ϑ-Moduln repräsentirt und für $\varrho > 3$

$$2^{\varrho-1}(2^\varrho+1) - \frac{(2\varrho+1)\,2\varrho\,(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\varrho} > \frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$$

ist, so können diese μ Bedingungen nicht sämmtlich von einander unabhängig sein, sondern es muss ein Zusammenhang von der Beschaffenheit *zwischen ihnen bestehen, dass nur* $\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$ von den überhaupt vorhandenen $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ ϑ-Moduln dadurch beschränkt werden, während noch $2\varrho-1$ völlig unabhängig bleiben.

In Folge dieser für hyperelliptische ϑ-Functionen als *nothwendig* sich ergebenden Bedingungen — (ich werde späterhin für den speciellen Fall $\varrho = 4$ zeigen, dass diese Bedingungen auch die *hinreichenden* dafür sind, dass ein System von ϑ-Functionen die Umkehrungsfunctionen eines hyperelliptischen Systemes liefert) — gestaltet sich das Additionstheorem, sowie eine Reihe daraus abgeleiteter Beziehungen bei weitem einfacher als für die allgemeinen ϑ-Functionen.

Für *allgemeine* Theta's stellt sich das Additionstheorem zunächst in der Form dar:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \vartheta(u_1+v_1+w_1, \cdots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)\,\vartheta(u_1-v_1, \cdots u_\varrho-v_\varrho) \\ \qquad = \sum_\lambda C_\lambda \cdot \vartheta_\lambda(u_1 \cdots u_\varrho)\,\vartheta_\lambda(u_1+v_1, \cdots u_\varrho+v_\varrho), \end{cases}$$

wo die Summation nach λ über 2^ϱ beliebige Indices auszuführen ist und C_λ eine Grösse bedeutet, die vom Index λ und den Argumenten

v_α und w_α, *nicht* aber von u_α abhängig ist. Genügt nun ein System der Bedingung, dass alle Theta's, deren Index die Form hat:

$$\eta' = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r) \text{ (wo } r < \varrho)$$

für die Nullwerthe der Argumente verschwinden, so lassen sich jene Coëfficienten C_λ in der Weise durch ϑ-Functionen mit Nullargumenten und den Argumenten v_α, w_α ausdrücken, dass Gl. (A) übergeht in:

$$\text{(B)} \quad \vartheta_\eta(0\cdots 0)\vartheta_\eta(w_1\cdots w_\varrho)\vartheta(u_1+v_1+w_1, \cdots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)\vartheta(u_1-v_1, \cdots u_\varrho-v_\varrho)$$

$$= \sum_\gamma (-1)^{\sum_1^\varrho \alpha\, n_\alpha^\gamma m_\alpha^\eta}\, \vartheta_\gamma(u_1 \cdots u_\varrho)\, \vartheta_\gamma(u_1 + w_1, \cdots u_\varrho + w_\varrho)$$

$$\times\, \vartheta_{\eta\gamma}(v_1 \cdots v_\varrho)\, \vartheta_{\eta\gamma}(v_1 + w_1, \cdots v_\varrho + w_\varrho),$$

wo dann die Indices γ und η folgendermassen zu bestimmen sind: Man wählt ϱ beliebige Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, $\cdots$ 2ϱ, — es seien dies $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_\varrho$ — und setzt

$$\eta = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho),$$

bestimmt alsdann noch einen beliebigen Index δ und bezeichnet mit γ jeden der 2^ϱ Indices, welche entstehen, wenn man δ mit allen möglichen Combinationen von $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ zur 0^{ten}, 1^{ten}, $\cdots$ ϱ^{ten} Classe verbindet, so dass also γ die folgenden Formen annimmt:

$$\begin{array}{l} \delta \\ \delta\varepsilon_1, \delta\varepsilon_2, \cdots \delta\varepsilon_\varrho \\ \delta\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta\varepsilon_1\varepsilon_3, \cdots\cdots \delta\varepsilon_{\varrho-1}\varepsilon_\varrho \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\varrho \end{array}$$

(vgl. die oben erwähnte Königsberger'sche Abhandlung, Crelle's Journal Bd. 64.).

Setzt man jetzt in Gl. (B) $v_\alpha = 0$, $w_\alpha = 0$, so wird

$$\text{(C, 1)} \quad \vartheta_\eta^2 \vartheta^2(u_1 \cdots u_\varrho) = \sum_\gamma (-1)^{\gamma|\eta} \vartheta_{\eta\gamma}^2 \vartheta_\gamma^2(u_1 \cdots u_\varrho) \left(\begin{array}{c} \text{wo das Symbol} \\ (-1)^{\gamma|\eta} = (-1)^{\sum_1^\varrho \alpha\, n_\alpha^\gamma m_\alpha^\eta} \end{array} \right)$$

eine Gleichung, welche eine lineare homogene Relation — zunächst zwischen $1 + 2^\varrho$ ϑ-Quadraten liefert: diese Anzahl wird indessen dadurch beträchtlich erniedrigt, dass in Folge der oben gemachten Voraussetzung ein Theil der Coëfficienten von der Form $\vartheta_{\eta\gamma}^2$ verschwinden muss. Um dies zu beweisen, wähle ich für $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ die Reihe der geraden Zahlen 0, 2, $\cdots$ $2\varrho - 2$, für δ die in der Reihe der überhaupt möglichen, einfachen, geraden Indices noch fehlende Zahl 2ϱ; alsdann nimmt γ die Form an:

$$\begin{array}{l} 2\varrho \\ (0,\ 2\varrho),\ (2,\ 2\varrho),\cdots(2\varrho-2,\ 2\varrho) \\ (0,\ 2,\ 2\varrho),\ (0,\ 4,\ 2\varrho),\cdots\cdots(2\varrho-4,\ 2\varrho-2,\ 2\varrho) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (0,\ 2,\cdots 2\varrho-2,\ 2\varrho). \end{array}$$

Bildet man jetzt $\eta\gamma$, wo

$$\eta = (1,\ 3,\cdots 2\varrho-1,\ 0,\ 2,\cdots 2\varrho-2) = 2\varrho\,,$$

so resultirt für den Anfangswerth $\gamma=2\varrho$ das Fundamentaltheta; ferner nimmt $\eta\gamma$ für die γ der zweiten Horizontalreihe die Werthe an

$$0,\ 2,\cdots\cdots 2\varrho-2,$$

hingegen für alle anderen γ solche Werthe, welche ausser den ungeraden Zahlen $1,\ 3,\cdots 2\varrho-1$ *weniger* als ϱ Zahlen aus der Reihe $0,\ 2,\cdots\cdot 2\varrho$ enthalten, so dass die betreffenden $\vartheta_{\eta\gamma}\,(0,\ 0,\cdots 0)$ verschwinden müssen, und somit auf der rechten Seite der Gleichung (C, 1) nur die $\varrho+1$ Glieder stehen bleiben, welche den Werthen γ der beiden ersten Horizontalreihen entsprechen.

Wendet man jetzt noch auf Gl. (C, 1) die Substitution (η) an, worunter hier, wie späterhin zu verstehen ist, dass jedes der Argumente

$$u_\alpha \text{ um } \tfrac{1}{2}\,m_\alpha^\eta + \tfrac{1}{2}\,n_1^\eta\,\tau_{1\alpha} + \cdots + \tfrac{1}{2}\,n_\varrho^\eta\tau_{\varrho\alpha}$$

vermehrt werden soll, und bezeichnet mit $a_0,\cdots a_\varrho$ Factoren von der Form ± 1, so ergiebt sich

$$\vartheta^2\vartheta^2(u_1\cdots u_\varrho) + a_0\,\vartheta_0^2\,\vartheta_0^2\,(u_1\cdots) + a_1\,\vartheta_2^2\,\vartheta_2^2\,(u_1,\cdots) + \cdots\cdots a_\varrho\,\vartheta_{2\varrho}^2\,\vartheta_{2\varrho}^2\,(u_1\cdots) = 0,$$

d. h.: Zwischen den $\varrho+2$ Quadraten der Theta's mit einfachem, *geradem* Index und des Fundamentaltheta's findet eine homogene lineare Relation statt. Oder — wenn wir dem Fundamentaltheta, wie üblich, noch den Index $2\varrho+1$ geben: Zwischen den Quadraten aller überhaupt möglichen $\varrho+2$ *geraden* ϑ-Functionen mit einfachem Index findet eine lineare homogene Relation statt.

Um diese Beziehungen nun auch auf ungerade Theta's auszudehnen, werde auf Gl. (C, 1) zunächst eine Substitution angewendet, deren Index $\varkappa$ heissen möge; dann geht dieselbe über in:

$$\text{(C, 2)} \qquad \vartheta_\eta^2\vartheta_\varkappa^2\,(u_1\cdots u_\varrho) = \sum_\gamma (-1)^{\varkappa|\gamma+\gamma|\eta}\,\vartheta_{\eta\gamma}^2\,\vartheta_{\gamma\varkappa}^2\,(u_1\cdots u_\varrho).$$

Ich wähle nun wieder für $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ die Reihe der geraden Zahlen $0, 2, \cdots 2\varrho - 2$, also wie früher

$$\eta = (1, 3, 5 \cdots 2\varrho - 1, 0, 2, \cdots 2\varrho - 2) = 2\varrho$$

setze aber jetzt

$$\delta = \varkappa,$$

wo $\varkappa$ irgend eine Zahl aus der Reihe der ungeraden $1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1$ bedeuten, also als Index einer ungeraden ϑ-Function angehören soll. Dann nimmt γ die folgenden Formen an:

$$\begin{array}{l} \varkappa \\ (0, \varkappa), (2, \varkappa), \cdots\cdots (2\varrho - 2, \varkappa) \\ (0, 2, \varkappa), (0, 4, \varkappa), \cdots\cdots (2\varrho - 4, 2\varrho - 2, \varkappa) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (0, 2, \cdots 2\varrho - 4, 2\varrho - 2, \varkappa) \end{array}$$

und es enthält somit $\eta\gamma$ wiederum für alle γ von der dritten Horizontalreihe ab neben den Zahlen $1, 3, \cdots\cdot 2\varrho - 1$ weniger als ϱ andere Zahlen, so dass also $\vartheta_{\eta\gamma}$ für alle diese verschwindet, während für die γ der ersten und zweiten Horizontalreihe $\eta\gamma$ die Werthe erhält:

$$\begin{array}{l} (\varkappa, 2\varrho) \\ (0, \varkappa, 2\varrho), (2, \varkappa, 2\varrho), \cdots\cdots (2\varrho - 2, \varkappa, 2\varrho), \end{array}$$

für welche $\vartheta_{\eta\gamma}$ *nicht* verschwindet. Gleichzeitig ergeben sich für den Index $\gamma\varkappa$ die Werthe

$$\begin{array}{l} 2\varrho + 1 \\ 0 \quad 2 \cdots\cdots 2\varrho - 2, \end{array}$$

so dass, wenn wir mit $b_0 \cdots\cdot b_\varrho$ Factoren von der Form ± 1 bezeichnen, aus Gl. (C, 2) die folgende Beziehung resultirt:

$$\text{(II)} \quad \vartheta_{2\varrho}^2 \vartheta_\varkappa^2 (u_1 \cdots u_\varrho) + b_0 \vartheta_{0,\varkappa,2\varrho}^2 \vartheta_0^2 (u_1 \cdots) + b_1 \vartheta_{2,\varkappa,2\varrho}^2 \vartheta_2^2 (u_1 \cdots) + \cdots\cdot + b_{\varrho-1} \vartheta_{2\varrho-2,\varkappa,2\varrho}^2 \vartheta_{2\varrho-2}^2 (u_1 \cdots) + b_\varrho \vartheta_{\varkappa,2\varrho}^2 \vartheta_{2\varrho+1}^2 (u_1 \cdots) = 0$$

also eine homogene lineare Relation zwischen $\varrho + 2$ Quadraten von ϑ-Functionen mit einfachem Index, von denen eine — $\vartheta_\varkappa (u_1 \cdots u_\varrho)$ — beliebig ungerade, die übrigen gerade sind. In der Reihe der letzteren fehlt hier $\vartheta_{2\varrho} (u_1 \cdots u_\varrho)$. Allein es ist klar, dass man mit Hilfe von Gl. (I) irgend ein gerades $\vartheta(u_1 \cdots u_\varrho)$ aus Gl. (II) eliminiren und dafür $\vartheta_{2\varrho} (u_1 \cdots u_\varrho)$ eintreten lassen kann, und dass man eben dasselbe auch ganz direct erreichen könnte, wenn man oben in der Reihe der $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ statt der Zahl 2ϱ irgend eine andere gerade Zahl weglässt.

Geben wir nun ferner in Gleichung (II) dem Index $\varkappa$ alle möglichen ϱ Werthe aus der Reihe $1, 3 \cdots 2\varrho - 1$, so erhalten wir ϱ Gleichungen, welche alle dieselben $\varrho + 1$ geraden und je eine ungerade ϑ-Function mit den Argumenten $u_1 \cdots u_\varrho$ enthalten. Aus $r + 1$ beliebigen dieser Gleichungen kann man stets r gerade Theta's eliminiren und es ergiebt sich dann also eine homogene lineare Relation zwischen $\varrho + 2$ ϑ-Quadraten, unter denen $r + 1$ ungeraden und $\varrho - r + 1$ geraden ϑ-Functionen angehören. Da aber ausserdem, wie vorher bemerkt wurde, die Wahl der $\varrho + 1$ geraden Theta's mit einfachem Index in Gleichung (II) eine durchaus beliebige ist, so folgt:

> Zwischen beliebigen $r + 2$ hyperelliptischen ϑ-Quadraten mit den Argumenten $u_1 \cdots u_\varrho$, deren Indices Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho + 1$ sind, findet eine homogene lineare Relation statt.

Hierbei ist freilich zunächst nicht ersichtlich, ob die Coefficienten dieser Relationen sich gleichfalls wie in Gleichung (I) und (II) in der Form einfacher ϑ-Quadrate mit Nullargumenten darstellen. Allein nachdem einmal die Existenz jener Relationen erwiesen, lässt sich dies leicht zeigen.

Wir bezeichnen mit

$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\varrho-1} \alpha_\varrho$ die Reihe der geraden Zahlen $0, 2, 4 \cdots 2\varrho - 2, 2\varrho$

$\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\varrho-1} \beta_\varrho$ „ „ „ ungeraden „ $1, 3 \cdots 2\varrho - 3, 2\varrho - 1$

in irgend einer beliebigen Reihenfolge. Dann muss — wenn wir vorläufig die Relationen, in denen das Fundamentaltheta $\vartheta_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ vorkommt, bei Seite lassen — jede der in Rede stehenden Beziehungen sich in die Form setzen lassen:

$$
\text{(III)} \quad \vartheta^2_{\alpha_0}(u_1 \cdots) = A_1 \vartheta^2_{\alpha_1}(u_1 \cdots) + A_2 \vartheta^2_{\alpha_2}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + A_\varkappa \vartheta^2_{\alpha_\varkappa}(u_1 \cdots)
$$
$$
+ B_1 \vartheta^2_{\beta_1}(u_1 \cdots) + B_2 \vartheta^2_{\beta_2}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + B_\lambda \vartheta^2_{\beta_\lambda}(u_1 \cdots)
$$

wo $\varkappa$ und λ ganze Zahlen sind, welche der Bedingung $\varkappa + \lambda = \varrho + 1$ genügen, und $A_1 \cdots A_\varkappa$ $B_1 \cdots B_\lambda$ gewisse Constanten bezeichnen.

Ich setze jetzt zur Abkürzung die combinirten Indices

$$(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{\varrho-1}, \beta_\varrho) = (1, 3, 5 \cdots\cdots 2\varrho - 1) = \varepsilon$$

$$(\alpha_1 \; \alpha_2 \cdots \alpha_\varkappa \beta_1 \beta_2 \cdots\cdots \beta_\lambda) = \xi \qquad (\text{also } \varepsilon\xi = \alpha_1 \cdots \alpha_\varkappa \beta_{\lambda+1} \cdots \beta_\varrho)$$

und denke mir auf Gleichung (III) die folgenden $\varrho + 1$ Substitutionen halber Perioden angewendet:

$$(\varepsilon \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{\varkappa-1} \alpha_\varkappa \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\lambda-1} \beta_\lambda) = \varepsilon \xi \alpha_1$$
$$(\varepsilon \alpha_3 \alpha_4 \cdots \alpha_\varkappa \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots \beta_\lambda \quad \alpha_1) = \varepsilon \xi \alpha_2$$
$$\vdots$$
$$(\varepsilon \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\varkappa-2} \alpha_{\varkappa-1} \alpha_\varkappa \beta_1 \cdots \beta_{\lambda-2} \beta_{\lambda-1}) = \varepsilon \xi \beta_\lambda$$

und alsdann die Argumente $u_1 \cdots u_\varrho$ sämmtlich $= 0$ gesetzt. Dann wird die *linke* Seite der aus (III) resultirenden Gleichungen stets Indices annehmen, welche aus ε und $\varrho + 1$ anderen Indices zusammengesetzt sind, und es werden somit die auf diese Weise sich ergebenden

$$\vartheta_{\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon \xi}\, \vartheta_{\alpha_0 \alpha_2 \varepsilon \xi} \cdots \cdots \vartheta_{\alpha_0 \alpha_\varkappa \varepsilon \xi}\, \vartheta_{\alpha_0 \beta_1 \varepsilon \xi} \cdots \cdots \vartheta_{\alpha_0 \beta_\lambda \varepsilon \xi}$$

nicht verschwinden. — Auf der rechten Seite wird für die erste Substitution das Glied mit A_1 den Index $\varepsilon\xi$ erhalten, und zwar kann $\vartheta_{\varepsilon\xi}(0 \cdots 0)$ *nicht* verschwinden, da ja $\varepsilon\xi$ ausser ε noch $\varrho + 1$ andere Indices $(\alpha_1 \cdots \alpha_\varkappa\, \beta_1 \cdots \beta_\lambda)$ enthält. Hingegen werden alle anderen Glieder Indices erhalten, welche ausser ε nur noch $\varrho - 1$ Zahlen enthalten (da sich von den ϱ Zahlen, welche jeder Substitutions-Index ausser 2 noch enthält, immer eine forthebt) und müssen folglich verschwinden. Ebenso erhält für die zweite Substitution das Glied mit $A_2 \cdots \cdots$, für die letzte das mit B_λ den Index $\varepsilon\xi$, während wiederum alle übrigen Glieder verschwinden. Es ergeben sich somit zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten $A_1 \cdots A_\varkappa\, B_1 \cdots B_\lambda$ folgende Gleichungen:

$$\vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon \xi} = \pm A_1 \vartheta^2_{\varepsilon \xi}, \cdots \cdots, \vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_\varkappa \varepsilon \xi} = \pm A_\varkappa \vartheta^2_{\varepsilon \xi}$$
$$\vartheta^2_{\alpha_0 \beta_1 \varepsilon \xi} = \pm B_1 \vartheta^2_{\varepsilon \xi}, \cdots \cdots, \vartheta^2_{\alpha_0 \beta_\lambda \varepsilon \xi} = \pm B_\lambda \vartheta^2_{\varepsilon \xi},$$

sodass — wenn wir mit $a_1 \cdots \cdots a_\varkappa\; b_1 \cdots \cdots b_\lambda$ Factoren von der Form ± 1 bezeichnen — Gleichung (III) in die folgende übergeht:

$$\text{(IV)}\ \vartheta^2_{\varepsilon\xi}\, \vartheta^2_{\alpha_0}(u_1 \cdots) + a_1 \vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon \xi}\, \vartheta^2_{\alpha_1}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + a_\varkappa \vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_\varkappa \varepsilon \xi}\, \vartheta^2_{\alpha_\varkappa}(u_1 \cdots)$$
$$+ b_1\, \vartheta^2_{\alpha_0 \beta_1 \varepsilon \xi}\, \vartheta^2_{\beta_1}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + b_\lambda \vartheta^2_{\alpha_0 \beta_\lambda \varepsilon \xi}\, \vartheta^2_{\beta_\lambda}(u_1 \cdots) = 0.$$

Jetzt bleibt nur noch der oben ausgeschlossene Fall zu betrachten, dass Gleichung (III) etwa das Fundamentaltheta $\vartheta_{2\varrho+1}(u_1 \cdots \cdots u_\varrho)$ enthalte. In diesem Falle möge dasselbe unter $\vartheta_{\alpha_0}(u_1 \cdots \cdots u_\varrho)$ verstanden werden: dann sind die Indices, welche die linke Seite in Folge der gemachten Substitutionen annimmt, die Indices dieser Substitutionen selbst, und da diese sämmtlich aus ε und ϱ anderen Zahlen zusammengesetzt sind, so wird auch in diesem Falle die linke Seite für keine der gemachten Substitutionen verschwinden, während auf der rechten Seite alles genau so bleibt wie früher. Es wird somit schliesslich in Gleichung (IV) statt $\vartheta^2_{\alpha_0}(u_1 \cdots u_\varrho) \cdots \vartheta_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ zu setzen und in den zusammengesetzten Indices der Coefficienten die Zahl α_0 einfach wegzulassen sein. — Wir können jetzt dem bereits oben ausgesprochenen Satze folgende noch präcisere Form geben:

Genügt ein System von ϑ-Functionen mit ϱ Argumenten der Bedingung, dass alle geraden Theta's, deren Index die Form $\eta' = (1, 3, \cdots 2\varrho - 1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r)$, wo $r < \varrho$, hat, für die Nullargumente verschwinden, so findet zwischen $r+2$ beliebigen ϑ-Quadraten mit einfachem Index eine homogene lineare Relation statt, deren Coefficienten einfache und nicht verschwindende ϑ-Quadrate mit Nullargumenten sind. —

Denkt man sich die Zahlen $0, 1, 2, \cdots 2\varrho+1$ in der Weise zu je $\varrho+2$ combinirt, dass man die Indices jedesmal um eine Stelle cyclisch vorrücken lässt, so kann man $2\varrho+2$ Relationen von der Form (IV) erhalten, und wenn man auf jede derselben alle möglichen $2^{2\varrho}-1$ Substitutionen halber Perioden anwendet, so ergeben sich im Ganzen $2^{2\varrho}(2\varrho+2)$ derartige Beziehungen — eine Zahl, welche den von Rosenhain aufgestellten 96 Relationen für die hyperelliptischen Functionen 1ter Ordnung entspricht.

Ich bemerke, dass der soeben ausgesprochene Satz und seine Folgerung mit den beiden Sätzen übereinkommt, welche Herr Weierstrass in seiner Theorie der Abel'schen Functionen folgendermassen ausspricht (Crelle's Journal, a. a. O. § 5.):

I. Durch je ϱ von den Quadraten der Grössen

$$p_1, p_2, \cdots\cdots p_{2\varrho+1}$$

können die übrigen linear ausgedrückt werden.

II. Ebenso können durch je ϱ Quadrate der Grössen

$$p_\gamma, p_{1\gamma}, p_{2\gamma}, \cdots p_{(2\varrho+1)\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \text{ eine der Zahlen } 1, 2 \cdots 2\varrho+1 \\ \text{wo } p_{\gamma\gamma} \text{ fortzulassen ist} \end{pmatrix}$$

die übrigen linear ausgedrückt werden

(wo

$$p_\alpha \quad = \quad al_\alpha(u_1, u_2 \cdots u_\varrho) = \frac{\vartheta_{2\alpha-1}(v_1 \cdots v_\varrho)}{\vartheta(v_1 \cdots v_\varrho)} \quad \alpha = 1, 2, \cdots \varrho$$

$$p_{\varrho+\beta} = al_{\varrho+\beta}(u_1, u_2 \cdots u_\varrho) = \frac{\vartheta_{2\beta}(v_1 \cdots v_\varrho)}{\vartheta(v_1 \cdots v_\varrho)} \quad \beta = 0, 1, 2 \cdots \varrho).$$

Man erhält nämlich offenbar den ersten dieser beiden Sätze aus Gleichung (III), wenn man darin $\alpha_0 = 2\varrho+1$ setzt, die übrigen Indices irgendwie aus der Reihe $0, 1, \cdots 2\varrho$ wählt und die ganze Gleichung durch $\vartheta^2_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ dividirt; und ebenso den zweiten jener Sätze, wenn man noch auf Gleichung (III) — in welcher wiederum $a_0 = 2\varrho+1$ zu nehmen ist, falls die Endgleichung ein Theta mit einfachem Index (dem p_γ entsprechend) enthalten soll — eine Substitution halber Perioden anwendet, deren Index einer derjenigen ist, welche in der Gleichung selbst vorkommen, und schliesslich wieder durch $\vartheta^2_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ dividirt.

Ich beweise jetzt einen analogen Satz für gewisse Producte von je 2 ϑ-Functionen, nämlich solche, deren zweiter Factor durch die nämliche Substitution halber Perioden aus dem ersten hergeleitet ist, wie in $\vartheta_\alpha(u_1\cdots)\,\vartheta_{\alpha\mu}(u_1\cdots)$, $\vartheta_\beta(u_1\cdots)\,\vartheta_{\beta\mu}(u_1\cdots)$ etc.

Ich zeige:

Zwischen $\varrho+1$ ϑ-Producten von der Form $\vartheta_\alpha(u_1\cdots)\,\vartheta_{\alpha\mu}(u_1\cdots)$, wo α einen variablen Index aus der Reihe $0, 1, \cdots 2\varrho$, μ einen festen Index (aus derselben Reihe und von α verschieden) bedeutet, findet eine homogene lineare Relation statt.

Zu diesem Behufe vermehre ich in Gleichung (B) (S. 441.)

$$v_a \text{ um } -\tfrac{1}{2}m_a^\beta \qquad -\tfrac{1}{2}n_1^\beta\tau_{a1} \qquad -\cdots\cdots-\tfrac{1}{2}n_\varrho^\beta\tau_{a\varrho}$$

$$w_a \text{ um } +\tfrac{1}{2}\left(m_a^\alpha+m_a^\beta\right)+\tfrac{1}{2}\left(n_1^\alpha+n_1^\beta\right)\tau_{a1}+\cdots\cdots+\tfrac{1}{2}\left(n_\varrho^\alpha+n_\varrho^\beta\right)\tau_{a\varrho}.$$

Alsdann ergiebt sich

$$(\mathrm{D},1)\ \vartheta_\eta(0,\cdots 0)\,\vartheta_{\eta\alpha\beta}(w_1\cdots)\,\vartheta_\alpha(u_1+v_1+w_1,\cdots)\,\vartheta_\beta(u_1-v_1,\cdots)$$
$$=\sum_\gamma(-1)^{C_\gamma}\vartheta_\gamma(u_1\cdots)\,\vartheta_{\gamma\alpha\beta}(u_1+w_1,\cdots)\,\vartheta_{\eta\gamma\beta}(v_1\cdots)\,\vartheta_{\eta\gamma\alpha}(v_1+w_1\cdots)$$

wo C_γ eine aus den Charakteristiken der vorkommenden Indices zusammengesetzte ganze Zahl bedeutet, welche sich folgendermassen bestimmt: Man setze

$$m_a^{\eta\gamma}=m_a^\eta+m_a^\gamma+2H_a$$

$$m_a^\eta+m_a^\alpha+m_a^\beta=-2M_a+m_a^\nu \qquad m_a^\eta+m_a^\gamma-m_a^\beta+2H_a=-2M_a''+m_a^{\nu''}$$

$$m_a^\gamma+m_a^\alpha+m_a^\beta=-2M_a'+m_a^{\nu'} \qquad m_a^\eta+m_a^\gamma+m_a^\alpha+2H_a=-2M_a'''+m_a^{\nu'''}$$

(wo die ganzen Zahlen H_a, M_a, M_a' etc. durch die Bedingung völlig bestimmt sind, dass die eingeführten Hilfsgrössen m_a^ν, $m_a^{\nu'}$ etc. nur die Werthe 0 oder -1 annehmen sollen).

Dann ist

$$C_\gamma=\sum_1^\varrho{}_a\Big\{n_a^\gamma m_a^\eta+n_a^\alpha m_a^\gamma+H_a\left(n_a^\alpha+n_a^\beta\right)+M_a\left(n_a^\eta+n_a^\alpha+n_a^\beta\right)$$
$$+M_a'\left(n_a^\gamma+n_a^\beta+n_a^\alpha\right)+M_a''\left(n_a^\eta+n_a^\gamma+n_a^\beta\right)+M_a'''\left(n_a^\eta+n_a^\gamma+n_a^\alpha\right)\Big\}.$$

Setzt man nun in Gleichung (D, 1) $v_a=0$, $w_a=0$, so wird:

$$(\mathrm{D},2)\ \vartheta_\eta\vartheta_{\eta\alpha\beta}\vartheta_\alpha(u_1\cdots)\,\vartheta_\varrho(u_1\cdots)=\sum_\gamma(-1)^{C_\gamma}\vartheta_{\eta\gamma\alpha}\vartheta_{\eta\gamma\beta}\vartheta_\gamma(u_1\cdots)\,\vartheta_{\gamma\alpha\beta}(u_1\cdots).$$

Ich bezeichne jetzt mit $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_{\varrho+2}$ $\varrho+2$ verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, \cdots 2\varrho$ und setze

$$\alpha=\varepsilon_{\varrho+1};\ \beta=\varepsilon_{\varrho+1}\varepsilon_{\varrho+2};\ \eta=(1,\,3,\cdots 2\varrho-1,\ \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_\varrho).$$

Dann ist zunächst ersichtlich, dass der Coefficient der linken Seite in Gleichung (D, 2) *nicht* verschwindet. Wird ferner $\delta=2\varrho+1$ (Index des Fundamentaltheta's) gesetzt, so nimmt γ die Werthe an

$$\begin{array}{l}
2\varrho+1 \\
\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \varepsilon_\varrho \\
\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \varepsilon_{\varrho-1}\varepsilon_\varrho \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdot \cdot \cdot \varepsilon_\varrho .
\end{array}$$

Daraus folgt zunächst, dass auf der rechten Seite der Gleichung (D, 2) $\vartheta_{\eta\gamma\alpha}$ für alle γ, ausser für diejenigen der ersten und zweiten Horizontalreihe verschwindet.

Ausserdem verschwindet aber noch $\vartheta_{\eta\gamma\beta}$ für $\gamma = 2\varrho+1$, während für $\gamma = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho$ weder $\vartheta_{\eta\gamma\alpha}$, noch $\vartheta_{\eta\gamma\beta}$ verschwindet. Es ergiebt sich somit, wenn man nunmehr die betreffenden Werthe von $\gamma\alpha\beta$ bildet, dass zwischen den Producten:

$$\vartheta_{\varepsilon_{\varrho+1}}(u_1 \cdot\cdot\cdot)\,\vartheta_{\varepsilon_{\varrho+1}\varepsilon_{\varrho+2}}(u_1\cdot\cdot\cdot)$$

und

$$\vartheta_{\varepsilon_1}(u_1\cdot\cdot\cdot)\,\vartheta_{\varepsilon_1\varepsilon_{\varrho+2}}(u_1\cdot\cdot\cdot)\cdot\cdot\cdot\cdot\,\vartheta_{\varepsilon_\varrho}(u_1\cdot\cdot\cdot)\,\vartheta_{\varepsilon_\varrho\varepsilon_{\varrho+2}}(u_1\cdot\cdot\cdot)$$

eine homogene lineare Relation besteht — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist. Derselbe entspricht wiederum einem Satze von Herrn Weierstrass, welcher folgendermassen lautet:

Durch je ϱ von den Producten

$$p_1 p_{1\gamma} \quad p_2 p_{2\gamma} \cdot\cdot\cdot\cdot p_{2\varrho+1} p_{2\varrho+1,\gamma} \quad (\text{wo } p_{\gamma\gamma} \text{ fortzulassen ist})$$

lässt sich jedes der übrigen linear und homogen ausdrücken. —

Ich bemerke schliesslich noch, dass die Anzahl der in jeder der soeben betrachteten Relationen enthaltenen ϑ-Functionen sich noch beträchtlich reducirt, sobald man die Argumente zu Null werden lässt. Bezeichnet man z. B. mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ irgend drei Zahlen aus der Reihe $0, 2, \cdots 2\varrho$ — resp. auch die Zahl $2\varrho+1$ — so muss nach Gl. (IV) (S. 445) u. a. auch eine Relation von folgender Form bestehen:

$$\vartheta^2_{\varepsilon\xi}\,\vartheta^2_{\alpha_0}(u_1\cdots)+a_1\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_1\varepsilon\xi}\,\vartheta^2_{\alpha_1}(u_1\cdots)+a_2\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_2\varepsilon\xi}\,\vartheta^2_{\alpha_2}(u_1\cdots)+P=0$$

wo P ein Aggregat von $\varrho - 1$ ϑ-Quadraten bezeichnen soll, deren Indices der Reihe $1, 3, \cdots 2\varrho-1$ angehören. In diesem Falle ist in Gl. (IV) $\lambda = \varrho - 1$ zu setzen, und daher:

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{\varrho-1}) \quad \varepsilon\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_\varrho).$$

Setzen wir jetzt in obiger Gleichung $u_1 = u_2 = \cdots = u_\varrho = 0$, so muss P verschwinden, und es wird daher, wenn wir noch statt β_ϱ, welches ja einen beliebigen Index der Reihe $1, 3, \cdots 2\varrho-1$ bezeichnet, einfach β schreiben:

$$(\text{V}, 1) \qquad \vartheta^2_{\alpha_1\alpha_2\beta}\,\vartheta^2_{\alpha_0}+a_1\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_2\beta}\,\vartheta^2_{\alpha_1}+a_2\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_1\beta}\,\vartheta^2_{\alpha_2}=0$$

und für den speciellen Fall, das α_0 den Index des Fundamentaltheta's bedeutet:

$$(\mathrm{V}, 2) \qquad \vartheta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \beta} \vartheta^2_{2\varrho+1} + a_1 \vartheta^2_{\alpha_2 \beta} \vartheta^2_{\alpha_1} + a_2 \vartheta^2_{\alpha_1 \beta} \vartheta^2_{\alpha_2} = 0.$$

Es findet somit zwischen je drei ϑ-Quadraten gerader ϑ-Functionen mit einfachem Index und Nullargumenten eine homogene lineare Relation statt.

Ich wende mich jetzt zu dem speciellen Fall $\varrho = 4$ und will mit Hilfe von ϑ-Functionen mit 4 Variablen, welche der Bedingung für hyperelliptische Systeme genügen, das Umkehrproblem für die hyperelliptischen Integrale 1ter Gattung und 3ter Ordnung nach derselben Methode behandeln, welche Rosenhain in seinem „Mémoire sur les Fonctions de deux Variables et à quatre Périodes etc." für die hyperelliptischen Functionen 1ter Ordnung angewendet hat. Ich werde demgemäss eine Anzahl von Relationen zwischen 10 ϑ-Functionen mit den Indices 0, 1, 2, $\cdots$ 8, 9 (wo 9 der Index des Fundamentaltheta's) und mit vier veränderlichen Argumenten $u_1, \cdots u_4$, sowie eine Reihe von Beziehungen für die Theta's mit Nullargumenten entwickeln, werde alsdann zeigen, dass sich die Quotienten aller Theta's mit Nullargumenten durch 7 (bez. 9) Constanten, die aller Theta's mit variablen Argumenten als symmetrische Functionen von 4 Variablen $x_1 \cdots x_4$ und eben jenen Constanten darstellen lassen, und dass endlich die auf diese Weise eingeführten Grössen $x_1 \cdots x_4$ einem hyperelliptischen Differentialgleichung-Systeme 3ter Ordnung genügen, mithin jene ϑ-Quadrate die Lösungen für das Umkehrproblem der betreffenden hyperelliptischen Integrale 3ter Ordnung liefern. —

Die Anzahl derjenigen ϑ-Functionen, deren Index die Form $\eta' = (1, 3, 5, 7, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)$ — wo $r < 4$ — hat, beträgt hier 130; unter diesen sind 120 *ungerade* und verschwinden also an sich schon für die Nullargumente, während die folgenden 10 mit den Indices

1357,1 1357,3 1357,5 1357,7 1357,0 1357,2 1357,4 1357,6 1357,8 1357

oder

157 357 137 135 2468 0468 0268 0248 0246 1357

gerade sind und also erst in Folge unserer besonderen Annahme für die Nullargumente verschwinden werden. —

Zunächst gebe ich nun eine Uebersicht über die Indices und Charakteristiken der überhaupt existirenden 256 ϑ-Functionen mit 4 Argumenten, da eine solche für jede weitere Rechnung durchaus unentbehrlich.

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
	0	—1	—1	—1	—1	0	0	0	0
*	1	—1	—1	—1	—1	1	0	0	0
	2	0	—1	—1	—1	1	0	0	0
*	3	0	—1	—1	—1	0	1	0	0
	4	0	0	—1	—1	0	1	0	0
*	5	0	0	—1	—1	0	0	1	0
	6	0	0	0	—1	0	0	1	0
*	7	0	0	0	—1	0	0	0	1
	8	0	0	0	0	0	0	0	1
	9	0	0	0	0	0	0	0	0
	01	0	0	0	0	1	0	0	0
*	02	—1	0	0	0	1	0	0	0
	03	—1	0	0	0	0	1	0	0
*	04	—1	—1	0	0	0	1	0	0
	05	—1	—1	0	0	0	0	1	0
*	06	—1	—1	—1	0	0	0	1	0
	07	—1	—1	—1	0	0	0	0	1
*	08	—1	—1	—1	—1	0	0	0	1
	12	—1	0	0	0	0	0	0	0
*	13	—1	0	0	0	1	1	0	0
	14	—1	—1	0	0	1	1	0	0
*	15	—1	—1	0	0	1	0	1	0
	16	—1	—1	—1	0	1	0	1	0
*	17	—1	—1	—1	0	1	0	0	1
	18	—1	—1	—1	—1	1	0	0	1
	23	0	0	0	0	1	1	0	0
*	24	0	—1	0	0	1	1	0	0
	25	0	—1	0	0	1	0	1	0
*	26	0	—1	—1	0	1	0	1	0
	27	0	—1	—1	0	1	0	0	1
*	28	0	—1	—1	—1	1	0	0	1
	34	0	—1	0	0	0	0	0	0
*	35	0	—1	0	0	0	1	1	0
	36	0	—1	—1	0	0	1	1	0
*	37	0	—1	—1	0	0	1	0	1
	38	0	—1	—1	—1	0	1	0	1
	45	0	0	0	0	0	1	1	0
*	46	0	0	—1	0	0	1	1	0
	47	0	0	—1	0	0	1	0	1
*	48	0	0	—1	—1	0	1	0	1
	56	0	0	—1	0	0	0	0	0
*	57	0	0	—1	0	0	0	1	1
	58	0	0	—1	—1	0	0	1	1
	67	0	0	0	0	0	0	1	1

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
*	68	0	0	0	—1	0	0	1	1
	78	0	0	0	—1	0	0	0	0
	012	0	—1	—1	—1	0	0	0	0
*	013	0	—1	—1	—1	1	1	0	0
	014	0	0	—1	—1	1	1	0	0
*	015	0	0	—1	—1	1	0	1	0
	016	0	0	0	—1	1	0	1	0
*	017	0	0	0	—1	1	0	0	1
	018	0	0	0	0	1	0	0	1
	023	—1	—1	—1	—1	1	1	0	0
*	024	—1	0	—1	—1	1	1	0	0
	025	—1	0	—1	—1	1	0	1	0
*	026	—1	0	0	—1	1	0	1	0
	027	—1	0	0	—1	1	0	0	1
*	028	—1	0	0	0	1	0	0	1
	034	—1	0	—1	—1	0	0	0	0
*	035	—1	0	—1	—1	0	1	1	0
	036	—1	0	0	—1	0	1	1	0
*	037	—1	0	0	—1	0	1	0	1
	038	—1	0	0	0	0	1	0	1
	045	—1	—1	—1	—1	0	1	1	0
*	046	—1	—1	0	—1	0	1	1	0
	047	—1	—1	0	—1	0	1	0	1
*	048	—1	—1	0	0	0	1	0	1
	056	—1	—1	0	—1	0	0	0	0
*	057	—1	—1	0	—1	0	0	1	1
	058	—1	—1	0	0	0	0	1	1
	067	—1	—1	—1	—1	0	0	1	1
*	068	—1	—1	—1	0	0	0	1	1
	078	—1	—1	—1	0	0	0	0	0
*	123	—1	—1	—1	—1	0	1	0	0
	124	—1	0	—1	—1	0	1	0	0
*	125	—1	0	—1	—1	0	0	1	0
	126	—1	0	0	—1	0	0	1	0
*	127	—1	0	0	—1	0	0	0	1
	128	—1	0	0	0	0	0	0	1
*	134	—1	0	—1	—1	1	0	0	0
**	135	—1	0	—1	—1	1	1	1	0
*	136	—1	0	0	—1	1	1	1	0
**	137	—1	0	0	—1	1	1	0	1
*	138	—1	0	0	0	1	1	0	1
*	145	—1	—1	—1	—1	1	1	1	0
	146	—1	—1	0	—1	1	1	1	0
*	147	—1	—1	0	—1	1	1	0	1

(NB. Die mit einem * bezeichneten Indices gehören ungeraden, die mit ** bezeichneten hingegen solchen geraden Theta's an, welche in Folge der gemachten Voraussetzung für die Nullargumente verschwinden.)

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
	148	−1	−1	0	0	1	1	0	1
*	156	−1	−1	0	−1	1	0	0	0
**	157	−1	−1	0	−1	1	0	1	1
*	158	−1	−1	0	0	1	0	1	1
*	167	−1	−1	−1	−1	1	0	1	1
	168	−1	−1	−1	0	1	0	1	1
*	178	−1	−1	−1	0	1	0	0	0
	234	0	0	−1	−1	1	0	0	0
*	235	0	0	−1	−1	1	1	1	0
	236	0	0	0	−1	1	1	1	0
*	237	0	0	0	−1	1	1	0	1
	238	0	0	0	0	1	1	0	1
	245	0	−1	−1	−1	1	1	1	0
*	246	0	−1	0	−1	1	1	1	0
	247	0	−1	0	−1	1	1	0	1
*	248	0	−1	0	0	1	1	0	1
	256	0	−1	0	−1	1	0	0	0
*	257	0	−1	0	−1	1	0	1	1
	258	0	−1	0	0	1	0	1	1
	267	0	−1	−1	−1	1	0	1	1
*	268	0	−1	−1	0	1	0	1	1
	278	0	−1	−1	0	1	0	0	0
*	345	0	−1	−1	−1	0	0	1	0
	346	0	−1	0	−1	0	0	1	0
*	347	0	−1	0	−1	0	0	0	1
	348	0	−1	0	0	0	0	0	1
*	356	0	−1	0	−1	0	1	0	0
**	357	0	−1	0	−1	0	1	1	1
*	358	0	−1	0	0	0	1	1	1
*	367	0	−1	−1	−1	0	1	1	1
	368	0	−1	−1	0	0	1	1	1
*	378	0	−1	−1	0	0	1	0	0
	456	0	0	0	−1	0	1	0	0
*	457	0	0	0	−1	0	1	1	1
	458	0	0	0	0	0	1	1	1
	467	0	0	−1	−1	0	1	1	1
*	468	0	0	−1	0	0	1	1	1
	478	0	0	−1	0	0	1	0	0
*	567	0	0	−1	−1	0	0	0	1
	568	0	0	−1	0	0	0	0	1
*	578	0	0	−1	0	0	0	1	0
	678	0	0	0	0	0	0	1	0
	0123	0	0	0	0	0	1	0	0
*	0124	0	−1	0	0	0	1	0	0
	0125	0	−1	0	0	0	0	1	0
*	0126	0	−1	−1	0	0	0	1	0
	0127	0	−1	−1	0	0	0	0	1
*	0128	0	−1	−1	−1	0	0	0	1

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
	0134	0	−1	0	0	1	0	0	0
*	0135	0	−1	0	0	1	1	1	0
	0136	0	−1	−1	0	1	1	1	0
*	0137	0	−1	−1	0	1	1	0	1
	0138	0	−1	−1	−1	1	1	0	1
	0145	0	0	0	0	1	1	1	0
*	0146	0	0	−1	0	1	1	1	0
	0147	0	0	−1	0	1	1	0	1
*	0148	0	0	−1	−1	1	1	0	1
	0156	0	0	−1	0	1	0	0	0
*	0157	0	0	−1	0	1	0	1	1
	0158	0	0	−1	−1	1	0	1	1
	0167	0	0	0	0	1	0	1	1
*	0168	0	0	0	−1	1	0	1	1
	0178	0	0	0	−1	1	0	0	0
*	0234	−1	−1	0	0	1	0	0	0
	0235	−1	−1	0	0	1	1	1	0
*	0236	−1	−1	−1	0	1	1	1	0
	0237	−1	−1	−1	0	1	1	0	1
*	0238	−1	−1	−1	−1	1	1	0	1
*	0245	−1	0	0	0	1	1	1	0
**	0246	−1	0	−1	0	1	1	1	0
*	0247	−1	0	−1	0	1	1	0	1
**	0248	−1	0	−1	−1	1	1	0	1
*	0256	−1	0	−1	0	1	0	0	0
	0257	−1	0	−1	0	1	0	1	1
*	0258	−1	0	−1	−1	1	0	1	1
*	0267	−1	0	0	0	1	0	1	1
**	0268	−1	0	0	−1	1	0	1	1
*	0278	−1	0	0	−1	1	0	0	0
	0345	−1	0	0	0	0	0	1	0
*	0346	−1	0	−1	0	0	0	1	0
	0347	−1	0	−1	0	0	0	0	1
*	0348	−1	0	−1	−1	0	0	0	1
	0356	−1	0	−1	0	0	1	0	0
*	0357	−1	0	−1	0	0	1	1	1
	0358	−1	0	−1	−1	0	1	1	1
	0367	−1	0	0	0	0	1	1	1
*	0368	−1	0	0	−1	0	1	1	1
	0378	−1	0	0	−1	0	1	0	0
*	0456	−1	−1	−1	0	0	1	0	0
	0457	−1	−1	−1	0	0	1	1	1
*	0458	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1
*	0467	−1	−1	0	0	0	1	1	1
**	0468	−1	−1	0	−1	0	1	1	1
*	0478	−1	−1	0	−1	0	1	0	0
	0567	−1	−1	0	0	0	0	0	1
*	0568	−1	−1	0	−1	0	0	0	1

Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
0578	—1	—1	0	—1	0	0	1	0
*0678	—1	—1	—1	—1	0	0	1	0
1234	—1	—1	0	0	0	0	0	0
*1235	—1	—1	0	0	0	1	1	0
1236	—1	—1	—1	0	0	1	1	0
*1237	—1	—1	—1	0	0	1	0	1
1238	—1	—1	—1	—1	0	1	0	1
1245	—1	0	0	0	0	1	1	0
*1246	—1	0	—1	0	0	1	1	0
1247	—1	0	—1	0	0	1	0	1
*1248	—1	0	—1	—1	0	1	0	1
1256	—1	0	—1	0	0	0	0	0
*1257	—1	0	—1	0	0	0	1	1
1258	—1	0	—1	—1	0	0	1	1
1267	—1	0	0	0	0	0	1	1
*1268	—1	0	0	—1	0	0	1	1
1278	—1	0	0	—1	0	0	0	0
*1345	—1	0	0	0	1	0	1	0
1346	—1	0	—1	0	1	0	1	0
*1347	—1	0	—1	0	1	0	0	1
1348	—1	0	—1	—1	1	0	0	1
*1356	—1	0	—1	0	1	1	0	0
**1357	—1	0	—1	0	1	1	1	1
*1358	—1	0	—1	—1	1	1	1	1
*1367	—1	0	0	0	1	1	1	1
1368	—1	0	0	—1	1	1	1	1
*1378	—1	0	0	—1	1	1	0	0
1456	—1	—1	—1	0	1	1	0	0
*1457	—1	—1	—1	0	1	1	1	1
1458	—1	—1	—1	—1	1	1	1	1
1467	—1	—1	0	0	1	1	1	1
*1468	—1	—1	0	—1	1	1	1	1
1478	—1	—1	0	—1	1	1	0	0
*1567	—1	—1	0	0	1	0	0	1
1568	—1	—1	0	—1	1	0	0	1
*1578	—1	—1	0	—1	1	0	1	0

Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
1678	—1	—1	—1	—1	1	0	1	0
2345	0	0	0	0	1	0	1	0
*2346	0	0	—1	0	1	0	1	0
2347	0	0	—1	0	1	0	0	1
*2348	0	0	—1	—1	1	0	0	1
2356	0	0	—1	0	1	1	0	0
*2357	0	0	—1	0	1	1	1	1
2358	0	0	—1	—1	1	1	1	1
2367	0	0	0	0	1	1	1	1
*2368	0	0	0	—1	1	1	1	1
2378	0	0	0	—1	1	1	0	0
*2456	0	—1	—1	0	1	1	0	0
2457	0	—1	—1	0	1	1	1	1
*2458	0	—1	—1	—1	1	1	1	1
*2467	0	—1	0	0	1	1	1	1
**2468	0	—1	0	—1	1	1	1	1
*2478	0	—1	0	—1	1	1	0	0
2567	0	—1	0	0	1	0	0	1
*2568	0	—1	0	—1	1	0	0	1
2578	0	—1	0	—1	1	0	1	0
*2678	0	—1	—1	—1	1	0	1	0
3456	0	—1	—1	0	0	0	0	0
*3457	0	—1	—1	0	0	0	1	1
3458	0	—1	—1	—1	0	0	1	1
3467	0	0	0	0	0	0	1	1
*3468	0	—1	0	—1	0	0	1	1
3478	0	—1	0	—1	0	0	0	0
*3567	0	—1	0	0	0	1	0	1
3568	0	—1	0	—1	0	0	1	1
*3578	0	—1	0	—1	0	1	1	0
3678	0	—1	—1	—1	0	1	1	0
4567	0	0	0	0	0	1	0	1
*4568	0	0	0	—1	0	0	1	1
4578	0	0	0	—1	0	1	1	0
*4678	0	0	—1	—1	0	1	1	0
5678	0	0	—1	—1	0	0	0	0

Ich entwickle jetzt 5 Relationen zwischen je 6 der 10 ϑ-Functionen mit den einfachen Indices $0, 1, 2, \cdots 9$: und zwar wähle ich diese Relationen so, dass jede derselben das Fundamentaltheta $\vartheta_9(v_1 \cdots v_4)$ und die 4 geraden Functionen mit den Indices 0, 2, 4, 6, ausserdem aber je eine ungerade ϑ-Function oder das noch fehlende $\vartheta_8(v_1 \cdots v_4)$ enthält. Man könnte diese Beziehungen durch Specialisirung von $\varrho = 4$ auf demselben Wege herleiten, wie oben die Gleichung (IV): indessen wird die Rechnung zur Bestimmung der Vorzeichen eine kürzere, wenn man sich jener ebenfalls oben bereits benützten Formeln bedient, wie sie sich unmittelbar aus dem Additionstheorem durch Nullsetzen gewisser Argumente ergeben.

Man findet zunächst aus Gleichung (C_1), wenn man

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	η	δ
die Werthe	0	2	4	6	8	0246β

giebt und ausserdem auf die Gleichung noch die Substitution (η) anwendet:

$$\vartheta_8^2 \cdot \vartheta_8^2(v_1 \cdots) = \vartheta_9^2 \vartheta_9^2(v_1 \cdots) - \vartheta_0^2 \vartheta_0^2(v_1 \cdots) - \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_2^2(v_1 \cdots) - \vartheta_4^2 \vartheta_4^2(v_1 \cdots) - \vartheta_6^2 \vartheta_6^2(v_1 \cdots)$$

oder wenn ich von jetzt ab zur Abkürzung

$\vartheta_\alpha(v_1, \cdots v_4)$ mit $[\alpha]$

$\vartheta_\alpha(0, \cdots 0)$ mit α und im Falle einer Zweideutigkeit mit (α)

bezeichne:

$$\text{(VI, 1)} \quad 9^2 \cdot [9]^2 = 0^2 \cdot [0]^2 + 2^2 \cdot [2]^2 + 4^2 \cdot [4]^2 + 6^2 \cdot [6]^2 + 8^2 \cdot [8]^2.$$

Ferner ergeben sich aus Gleichung (C, 2), wenn man darin wiederum

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = 2 \quad \varepsilon_3 = 4 \quad \varepsilon_4 = 6 \quad \text{also} \quad \eta = 8$$

wählt, und sowohl δ als $\varkappa$ der Reihe nach die Werthe 1, 3, 5, 7 giebt, die folgenden 4 Beziehungen:

$$\text{(VI)} \begin{cases} 18^2 \cdot [9]^2 = 018^2 \cdot [0]^2 - 128^2 \cdot [2]^2 - 148^2 \cdot [4]^2 - 168^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [1]^2 & (2) \\ 38^2 \cdot [9]^2 = 038^2 \cdot [0]^2 + 238^2 \cdot [2]^2 - 348^2 \cdot [4]^2 - 368^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [3]^2 & (3) \\ 58^2 \cdot [9]^2 = 058^2 \cdot [0]^2 + 258^2 \cdot [2]^2 + 458^2 \cdot [4]^2 - 568^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [5]^2 & (4) \\ 78^2 \cdot [9]^2 = 078^2 \cdot [0]^2 + 278^2 \cdot [2]^2 + 478^2 \cdot [4]^2 + 678^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [7]^2 & (5) \end{cases}$$

Ehe ich mit diesen Gleichungen weiter operiren kann, muss ich nun eine Anzahl von Relationen für die ϑ-Functionen mit Nullargumenten entwickeln. Ich gebe hier drei Kategorien solcher Relationen. Die erste giebt eine Beziehung für die Theta's mit dreifachem Index und solche mit ein- und zweifachem Index und entsteht durch Specialisirung der Indices aus Gleichung (Vb). Ich ziehe es indessen wiederum vor die betreffenden Relationen aus der Formel (C, 1) herzuleiten, indem ich darin zunächst $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ setze, sodass also

$$\text{(E)} \qquad \vartheta_\eta^2 \, \vartheta_9^2 = \sum_\gamma (-1)^{\gamma|\eta} \vartheta_\gamma^2 \, \vartheta_{\eta\gamma}^2 .$$

Giebt man hierin

		ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	δ			
(VII)	die Werthe	0	2	4	7	8,	so folgt:	$9^2 \cdot 678^2 = 8^2 \cdot 67^2 + 6^2 \cdot 78^2 \cdots$	(1)
		0	2	6	7	8	—	$9^2 \cdot 478^2 = 8^2 \cdot 47^2 + 4^2 \cdot 78^2 \cdots$	(2)
		0	4	6	7	8	—	$9^2 \cdot 278^2 = 8^2 \cdot 27^2 + 2^2 \cdot 78^2 \cdots$	(3)
		2	4	6	7	8	—	$9^2 \cdot 078^2 = 8^2 \cdot 07^2 + 0^2 \cdot 78^2 \cdots$	(4)

		ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	δ			
(VII)	die Werthe	0	2	4	5	8,	so folgt:	$9^2 \cdot 568^2 = 8^2 \cdot 56^2 - 6^2 \cdot 58^2$	(5)
		0	2	4	3	8	—	$9^2 \cdot 368^2 = 8^2 \cdot 36^2 - 6^2 \cdot 38^2$	(6)
		0	2	4	1	8	—	$9^2 \cdot 168^2 = 8^2 \cdot 16^2 - 6^2 \cdot 18^2$	(7)
		0	2	6	5	8	—	$9^2 \cdot 458^2 = 8^2 \cdot 45^2 + 4^2 \cdot 58^2$	(8)
		0	4	6	5	8	—	$9^2 \cdot 258^2 = 8^2 \cdot 25^2 + 2^2 \cdot 58^2$	(9)
		2	4	6	5	8	—	$9^2 \cdot 058^2 = 8^2 \cdot 05^2 + 0^2 \cdot 58^2$	(10)
		0	2	6	3	8	—	$9^2 \cdot 348^2 = 8^2 \cdot 34^2 - 4^2 \cdot 38^2$	(11)
		0	2	6	1	8	—	$9^2 \cdot 148^2 = 8^2 \cdot 14^2 - 4^2 \cdot 18^2$	(12)
		0	4	6	3	8	—	$9^2 \cdot 238^2 = 8^2 \cdot 23^2 + 2^2 \cdot 38^2$	(13)
		2	4	6	3	8	—	$9^2 \cdot 038^2 = 8^2 \cdot 03^2 + 0^2 \cdot 38^2$	(14)
		0	4	6	1	8	—	$9^2 \cdot 128^2 = 8^2 \cdot 12^2 - 2^2 \cdot 18^2$	(15)
		2	4	6	1	8	—	$9^2 \cdot 018^2 = 8^2 \cdot 01^2 + 0^2 \cdot 18^2$	(16)
		0	2	8	7	6	—	$9^2 \cdot 467^2 = 4^2 \cdot 67^2 - 6^2 \cdot 47^2$	(17)
		0	4	8	7	6	—	$9^2 \cdot 267^2 = 2^2 \cdot 67^2 - 6^2 \cdot 27^2$	(18)
		2	4	8	7	6	—	$9^2 \cdot 067^2 = 0^2 \cdot 67^2 - 6^2 \cdot 07^2$	(19)
		0	6	8	7	4	—	$9^2 \cdot 247^2 = 2^2 \cdot 47^2 - 4^2 \cdot 27^2$	(20)
		2	6	8	7	4	—	$9^2 \cdot 047^2 = 0^2 \cdot 47^2 - 4^2 \cdot 07^2$	(21)
		4	6	8	7	2	—	$9^2 \cdot 027^2 = 0^2 \cdot 27^2 - 2^2 \cdot 07^2$	(22)
		0	2	8	5	6	—	$9^2 \cdot 456^2 = 6^2 \cdot 45^2 + 4^2 \cdot 56^2$	(23)
		0	4	8	5	6	—	$9^2 \cdot 256^2 = 6^2 \cdot 25^2 + 2^2 \cdot 56^2$	(24)
		2	4	8	5	6	—	$9^2 \cdot 056^2 = 6^2 \cdot 05^2 + 0^2 \cdot 56^2$	(25)
		0	2	8	3	6	—	$9^2 \cdot 346^2 = 6^2 \cdot 34^2 - 4^2 \cdot 36^2$	(26)
		0	2	8	1	6	—	$9^2 \cdot 146^2 = 6^2 \cdot 14^2 - 4^2 \cdot 16^2$	(27)
		0	4	8	3	6	—	$9^2 \cdot 236^2 = 6^2 \cdot 23^2 + 2^2 \cdot 36^2$	(28)
		2	4	8	3	6	—	$9^2 \cdot 036^2 = 6^2 \cdot 03^2 + 0^2 \cdot 36^2$	(29)
		0	4	8	1	6	—	$9^2 \cdot 126^2 = 6^2 \cdot 12^2 - 2^2 \cdot 16^2$	(30)
		2	4	8	1	6	—	$9^2 \cdot 016^2 = 6^2 \cdot 01^2 + 0^2 \cdot 16^2$	(31)
		0	6	8	5	4	—	$9^2 \cdot 245^2 = 2^2 . 45^2 - 4^2 \cdot 25^2$	(32)
		2	6	8	5	4	—	$9^2 \cdot 045^2 = 0^2 \cdot 45^2 - 4^2 \cdot 05^2$	(33)
		4	6	8	5	2	—	$9^2 \cdot 025^2 = 0^2 \cdot 25^2 - 2^2 \cdot 05^2$	(34)
		0	6	8	3	4	—	$0^2 \cdot 234^2 = 4^2 \cdot 23^2 + 2^2 \cdot 34^2$	(35)
		2	6	8	3	4	—	$9^2 \cdot 034^2 = 4^2 \cdot 03^2 + 0^2 \cdot 34^2$	(36)
		0	6	8	1	4	—	$9^2 \cdot 124^2 = 4^2 \cdot 12^2 - 2^2 \cdot 14^2$	(37)
		2	6	8	1	4	—	$9^2 \cdot 014^2 = 4^2 \cdot 01^2 + 0^2 \cdot 14^2$	(38)
		4	6	8	3	2	—	$9^2 \cdot 023^2 = 0^2 \cdot 23^2 - 2^2 \cdot 03^2$	(39)
		4	6	8	1	2	—	$9^2 \cdot 012^2 = 2^2 \cdot 01^2 + 0^2 \cdot 12^2$	(40)

	$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,\delta\,\varkappa$		(VIII)	(VIIIa)
(1)	0 2 4 7 8 56	—	$56^2\cdot678^2 = 67^2\cdot568^2 + 6^2\cdot5678^2$	$9^2\cdot5678^2 = 56^2\cdot78^2 + 58^2\cdot67^2$ (1)
(2)	0 2 4 7 6 58	—	$58^2\cdot678^2 = -78^2\cdot568^2 + 8^2\cdot5678^2$	
(3)	0 2 4 7 8 36	—	$36^2\cdot678^2 = 67^2\cdot368^2 + 6^2\cdot3678^2$	$9^2\cdot3678^2 = 36^2\cdot78^2 + 38^2\cdot67^2$ (2)
(4)	0 2 4 7 6 38	—	$38^2\cdot678^2 = -78^2\cdot368^2 + 8^2\cdot3678^2$	
(5)	0 2 4 7 8 16	—	$16^2\cdot678^2 = 67^2\;168^2 + 6^2\cdot1678^2$	$9^2\cdot1678^2 = 16^2\cdot78^2 + 18^2\cdot67^2$ (3)
(6)	0 2 4 7 6 18	—	$18^2\cdot678^2 = -78^2\cdot168^2 + 8^2\cdot1678^2$	
(7)	0 2 6 7 8 45	—	$45^2\cdot478^2 = 47^2\cdot458^2 + 4^2\cdot4578^2$	$9^2\cdot4578^2 = 45^2\cdot78^2 - 58^2\cdot47^2$ (4)
(8)	0 2 6 7 4 58	—	$58^2\cdot478^2 = 78^2\cdot458^2 - 8^2\cdot4578^2$	
(9)	0 4 6 7 8 25	—	$25^2\cdot278^2 = 27^2\cdot258^2 + 2^2\cdot2578^2$	$9^2\cdot2578^2 = 25^2\cdot78^2 - 58^2\cdot27^2$ (5)
(10)	0 4 6 7 2 58	—	$58^2\cdot278^2 = 78^2\cdot258^2 - 8^2\cdot2578^2$	
(11)	2 4 6 7 8 05	—	$05^2\cdot078^2 = 07^2\cdot058^2 + 0^2\cdot0578^2$	$9^2\cdot0578^2 = 05^2\cdot78^2 - 58^2\cdot07^2$ (6)
(12)	2 4 6 7 0 58	—	$58^2\cdot078^2 = 78^2\cdot058^2 - 8^2\cdot0578^2$	
(13)	0 2 6 7 8 34	—	$34^2\cdot478^2 = 47^2\cdot348^2 + 4^2\cdot3478^2$	$9^2\cdot3478^2 = 34^2\cdot78^2 + 38^2\cdot47^2$ (7)
(14)	0 2 6 7 4 38	—	$38^2\cdot478^2 = -78^2\cdot348^2 + 8^2\cdot3478^2$	
(15)	0 2 6 7 8 14	—	$14^2\cdot478^2 = 47^2\cdot148^2 + 4^2\cdot1478^2$	$9^2\cdot1478^2 = 14^2\cdot78^2 + 18^2\cdot47^2$ (8)
(16)	0 2 6 7 4 18	—	$18^2\cdot478^2 = -78^2\cdot148^2 + 8^2\cdot1478^2$	
(17)	0 4 6 7 8 23	—	$23^2\cdot278^2 = 27^2\cdot238^2 + 2^2\cdot2378^2$	$9^2\cdot2378^2 = 23^2\cdot78^2 - 38^2\cdot27^2$ (9)
(18)	0 4 6 7 2 38	—	$38^2\cdot278^2 = 78^2\cdot238^2 - 8^2\cdot2378^2$	
(19)	2 4 6 7 8 03	—	$03^2\cdot078^2 = 07^2\cdot038^2 + 0^2\cdot0378^2$	$9^2\cdot0378^2 = 03^2\cdot78^2 - 38^2\cdot07^2$ (10)
(20)	2 4 6 7 0 38	—	$38^2\cdot078^2 = 78^2\cdot038^2 - 8^2\cdot0378^2$	
(21)	0 4 6 7 8 12	—	$12^2\cdot278^2 = 27^2\cdot128^2 + 2^2\cdot1278^2$	$9^2\cdot1278^2 = 12^2\cdot78^2 + 18^2\cdot27^2$ (11)
(22)	0 4 6 7 2 18	—	$18^2\cdot278^2 = -78^2\cdot128^2 + 8^2\cdot1278^2$	
(23)	2 4 6 7 8 01	—	$01^2\cdot078^2 = 07^2\cdot018^2 + 0^2\cdot0178^2$	$9^2\cdot0178^2 = 01^2\cdot78^2 - 18^2\cdot07^2$ (12)
(24)	2 4 6 7 0 18	—	$18^2\cdot078^2 = 78^2\cdot018^2 - 8^2\cdot0178^2$	
(25)	0 2 4 5 8 36	—	$36^2\cdot568^2 = 56^2\cdot368^2 + 6^2\cdot3568^2$	$9^2\cdot3568^2 = 38^2\cdot56^2 - 36^2\cdot58^2$ (13)
(26)	0 2 4 5 6 38	—	$38^2\cdot568^2 = 58^2\cdot368^2 + 8^2\cdot3568^2$	
(27)	0 2 4 5 8 16	—	$16^2\cdot568^2 = 56^2\cdot168^2 + 6^2\cdot1568^2$	$9^2\cdot1568^2 = 18^2\cdot56^2 - 16^2\cdot58^2$ (14)
(28)	0 2 4 5 6 18	—	$18^2\cdot568^2 = 58^2\cdot168^2 + 8^2\cdot1568^2$	
(29)	0 2 4 3 8 16	—	$16^2\cdot368^2 = 36^2\cdot168^2 + 6^2\cdot1368^2$	$9^2\cdot1368^2 = 18^2\cdot36^2 - 16^2\cdot38^2$ (15)
(30)	0 2 4 3 6 18	—	$18^2\cdot368^2 = 38^2\cdot168^2 + 8^2\cdot1368^2$	
(31)	0 2 6 5 8 34	—	$34^2\cdot458^2 = 45^2\cdot348^2 + 4^2\cdot3458^2$	$9^2\cdot3458^2 = 34^2\cdot58^2 + 38^2\cdot45^2$ (16)
(32)	0 2 6 5 4 38	—	$38^2\cdot458^2 = -58^2\cdot348^2 + 8^2\cdot3458^2$	
(33)	0 2 6 5 8 14	—	$14^2\cdot458^2 = 45^2\cdot148^2 + 4^2\cdot1458^2$	$9^2\cdot1458^2 = 14^2\cdot58^2 + 18^2\cdot45^2$ (17)
(34)	0 2 6 5 4 18	—	$18^2\cdot458^2 = -58^2\cdot148^2 + 8^2\cdot1458^2$	
(35)	0 4 6 5 8 23	—	$23^2\cdot258^2 = 25^2\cdot238^2 + 2^2\cdot2358^2$	$9^2\cdot2358^2 = 23^2\cdot58^2 - 38^2\cdot25^2$ (18)
(36)	0 4 6 5 2 38	—	$38^2\cdot258^2 = 58^2\cdot238^2 - 8^2\cdot2358^2$	
(37)	2 4 6 5 8 03	—	$03^2\cdot058^2 = 05^2\cdot038^2 + 0^2\cdot0358^2$	$9^2\cdot0358^2 = 03^2\cdot58^2 - 38^2\cdot05^2$ (19)
(38)	2 4 6 5 0 38	—	$38^2\cdot058^2 = 58^2\cdot038^2 - 8^2\cdot0358^2$	
(39)	0 4 6 5 8 12	—	$12^2\cdot258^2 = 25^2\cdot128^2 + 2^2\cdot1258^2$	$9^2\cdot1258^2 = 12^2\cdot58^2 + 18^2\;25^2$ (20)
(40)	0 4 6 5 2 18	—	$18^2\cdot258^2 = -58^2\cdot128^2 + 8^2\cdot1258^2$	
(41)	2 4 6 5 8 01	—	$01^2\cdot058^2 = 05^2\cdot018^2 + 0^2\cdot0158^2$	$9^2\cdot0158^2 = 01^2\cdot58^2 - 18^2\cdot05^2$ (21)
(42)	2 4 6 5 0 18	—	$18^2\cdot058^2 = 58^2\cdot018^2 - 8^2\cdot0158^2$	
(43)	0 2 6 3 8 14	—	$14^2\cdot348^2 = 34^2\cdot148^2 + 4^2\cdot1348^2$	$9^2\cdot1348^2 = 18^2\cdot34^2 - 38^2\cdot14^2$ (22)
(44)	0 2 6 3 4 18	—	$18^2\cdot348^2 = 38^2\cdot148^2 + 8^2\cdot1348^2$	
(45)	0 4 6 3 8 12	—	$12^2\cdot238^2 = 23^2\cdot128^2 + 2^2\cdot1238^2$	$9^2\cdot1238^2 = 12^2\cdot38^2 + 18^2\cdot23^2$ (23)
(46)	0 4 6 3 2 18	—	$18^2\cdot238^2 = -38^2\cdot128^2 + 8^2\cdot1238^2$	
(47)	2 4 6 3 8 01	—	$01^2\cdot038^2 = 03^2\cdot018^2 + 0^2\cdot0138^2$	$9^2\cdot0138^2 = 01^2\cdot38^2 - 03^2\cdot18^2$ (24)
(48)	2 4 6 3 0 18	—	$18^2\cdot038^2 = 38^2\cdot018^2 - 8^2\cdot0138^2$	

$$(\mathrm{XI})\left\{\begin{array}{llll}
\frac{a_{78}}{a_{68}}=\frac{8^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 678^2} & \frac{a_{67}}{a_{68}}=\frac{6^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 678^2}\ (\mathrm{VII},1) & \frac{a_{78}}{a_{48}}=\frac{8^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 478^2} & \frac{a_{47}}{a_{48}}=\frac{4^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 478^2}\ (\mathrm{VII},2)\\
\frac{a_{78}}{a_{28}}=\frac{8^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 278^2} & \frac{a_{27}}{a_{28}}=\frac{2^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 278^2}\ (\mathrm{VII},3) & \frac{a_{78}}{a_{08}}=\frac{8^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 078^2} & \frac{a_{07}}{a_{08}}=\frac{0\cdot 78^2}{9^2\cdot 078^2}\ (\mathrm{VII},4)\\
\frac{a_{58}}{a_{68}}=\frac{8^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 568^2} & \frac{a_{56}}{a_{68}}=\frac{6^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 568^2}\ (\mathrm{VII},5) & \frac{a_{38}}{a_{68}}=\frac{8^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 368^2} & \frac{a_{36}}{a_{68}}=\frac{6^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 368^2}\ (\mathrm{VII},6)\\
\frac{a_{18}}{a_{68}}=\frac{8^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 168^2} & \frac{a_{16}}{a_{68}}=\frac{6^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 168^2}\ (\mathrm{VII},7) & \frac{a_{58}}{a_{48}}=\frac{8^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 458^2}\ (\mathrm{IX},1) & \frac{a_{45}}{a_{48}}=\frac{4^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 458^2}\ (\mathrm{VII},8)\\
\frac{a_{58}}{a_{28}}=\frac{8^2\cdot 25^3}{9^2\cdot 258^2}\ (\mathrm{IX},2) & \frac{a_{25}}{a_{28}}=\frac{2^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 258^2}\ (\mathrm{VII},9) & \frac{a_{58}}{a_{08}}=\frac{8^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 058^2}\ (\mathrm{IX},3) & \frac{a_{05}}{a_{08}}=\frac{0^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 058^2}\ (\mathrm{VII},10)\\
\frac{a_{38}}{a_{78}}=\frac{8^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 348^2}\ (\mathrm{IX},4) & \frac{a_{34}}{a_{48}}=\frac{4^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 348^2}\ (\mathrm{VII},11) & \frac{a_{18}}{a_{48}}=\frac{8^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 148^2}\ (\mathrm{IX},7) & \frac{a_{14}}{a_{48}}=\frac{4^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 148^2}\ (\mathrm{VII},12)\\
\frac{a_{38}}{a_{28}}=\frac{8^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 238^2}\ (\mathrm{IX},5) & \frac{a_{23}}{a_{28}}=\frac{2^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 238^2}\ (\mathrm{VII},13) & \frac{a_{38}}{a_{08}}=\frac{8^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 038^2}\ (\mathrm{IX},6) & \frac{a_{03}}{a_{08}}=\frac{0^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 038^2}\ (\mathrm{VII},14)\\
\frac{a_{18}}{a_{28}}=\frac{8^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 128^2}\ (\mathrm{IX},8) & \frac{a_{12}}{a_{28}}=\frac{2^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 128^2}\ (\mathrm{VII},15) & \frac{a_{18}}{a_{08}}=\frac{8^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 018^2}\ (\mathrm{IX},9) & \frac{a_{01}}{a_{08}}=\frac{0^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 018^2}\ (\mathrm{VII},16)\\
\frac{a_{67}}{a_{46}}=\frac{6^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 467^2}\ (\mathrm{VII}\ 1,2,17) & \frac{a_{47}}{a_{46}}=\frac{4^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 467^2}\ (\mathrm{VII},17) & \frac{a_{67}}{a_{26}}=\frac{6^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 267^2}\ (\mathrm{VII},1,3,18) & \frac{a_{27}}{a_{26}}=\frac{2^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 267^2}\ (\mathrm{VII},18)\\
\frac{a_{67}}{a_{06}}=\frac{6^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 067^2}\ (\mathrm{VII},1,4,19) & \frac{a_{07}}{a_{06}}=\frac{0^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 067^2}\ (\mathrm{VII},19) & \frac{a_{47}}{a_{24}}=\frac{4^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 247^2}\ (\mathrm{VII},2,3,20) & \frac{a_{27}}{a_{24}}=\frac{2^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 247^2}\ (\mathrm{VII},20)\\
\frac{a_{47}}{a_{04}}=\frac{4^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 047^2}\ (\mathrm{VII},2,4,21) & \frac{a_{07}}{a_{04}}=\frac{0^2\cdot 47^2}{0^2\cdot 047^2}\ (\mathrm{VII},21) & \frac{a_{27}}{a_{02}}=\frac{2^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 027^2}\ (\mathrm{VII},3,4,22) & \frac{a_{07}}{a_{02}}=\frac{0^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 027^2}\ (\mathrm{VII},22)\\
\frac{a_{56}}{a_{46}}=\frac{6^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 456^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,2,17\\ \mathrm{IX},10\end{pmatrix} & \frac{a_{45}}{a_{46}}=\frac{4^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 456^2}\ (\mathrm{VII},23) & \frac{a_{56}}{a_{26}}=\frac{6^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 256^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,3,18\\ \mathrm{IX},11\end{pmatrix} & \frac{a_{25}}{a_{26}}=\frac{2^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 256^2}\ (\mathrm{VII},24)\\
\frac{a_{56}}{a_{06}}=\frac{6^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 056^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,4,19\\ \mathrm{IX},12\end{pmatrix} & \frac{a_{05}}{a_{06}}=\frac{0^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 056^2}\ (\mathrm{VII},25) & \frac{a_{36}}{a_{46}}=\frac{6^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 346^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,2,17\\ \mathrm{IX},13\end{pmatrix} & \frac{a_{34}}{a_{46}}=\frac{4^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 346^2}\ (\mathrm{VII},26)\\
\frac{a_{16}}{a_{46}}=\frac{6^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 146^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,2,17\\ \mathrm{IX},14\end{pmatrix} & \frac{a_{14}}{a_{46}}=\frac{4^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 146^2}\ (\mathrm{VII},27) & \frac{a_{36}}{a_{26}}=\frac{6^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 236^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,3,18\\ \mathrm{IX},15\end{pmatrix} & \frac{a_{23}}{a_{26}}=\frac{2^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 236^2}\ (\mathrm{VII},28)\\
\frac{a_{36}}{a_{06}}=\frac{6^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 036^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,4,19\\ \mathrm{IX},16\end{pmatrix} & \frac{a_{03}}{a_{06}}=\frac{0^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 036^2}\ (\mathrm{VII},29) & \frac{a_{16}}{a_{26}}=\frac{6^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 126^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,3,18\\ \mathrm{IX},17\end{pmatrix} & \frac{a_{12}}{a_{26}}=\frac{2^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 126^2}\ (\mathrm{VII},30)\\
\frac{a_{16}}{a_{06}}=\frac{6^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 016^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,4,19\\ \mathrm{IX},18\end{pmatrix} & \frac{a_{01}}{a_{06}}=\frac{0^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 016^2}\ (\mathrm{VII},31) & \frac{a_{45}}{a_{24}}=\frac{4^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 245^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,3,20\\ \mathrm{IX},19\end{pmatrix} & \frac{a_{25}}{a_{24}}=\frac{2^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 245^2}\ (\mathrm{VII},32)\\
\frac{a_{45}}{a_{04}}=\frac{4^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 045^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,4,21\\ \mathrm{IX},20\end{pmatrix} & \frac{a_{05}}{a_{04}}=\frac{0^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 045^2}\ (\mathrm{VII},33) & \frac{a_{25}}{a_{02}}=\frac{2^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 025^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},3,4,22\\ \mathrm{IX},25\end{pmatrix} & \frac{a_{05}}{a_{02}}=\frac{0^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 025^2}\ (\mathrm{VII},34)\\
\frac{a_{34}}{a_{24}}=\frac{4^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 234^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,3,20\\ \mathrm{IX},21\end{pmatrix} & \frac{a_{23}}{a_{24}}=\frac{2^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 234^2}\ (\mathrm{VII},35) & \frac{a_{34}}{a_{04}}=\frac{4^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 034^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,4,21\\ \mathrm{IX},22\end{pmatrix} & \frac{a_{03}}{a_{04}}=\frac{0^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 034^2}\ (\mathrm{VII},36)\\
\frac{a_{14}}{a_{24}}=\frac{4^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 124^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,3,20\\ \mathrm{IX},23\end{pmatrix} & \frac{a_{12}}{a_{24}}=\frac{2^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 124^2}\ (\mathrm{VII},37) & \frac{a_{14}}{a_{04}}=\frac{4^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 014^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,4,21\\ \mathrm{IX},24\end{pmatrix} & \frac{a_{01}}{a_{04}}=\frac{0^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 014^2}\ (\mathrm{VII},38)\\
\frac{a_{23}}{a_{02}}=\frac{2^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 023^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},3,4,22\\ \mathrm{IX},26\end{pmatrix} & \frac{a_{03}}{a_{02}}=\frac{0^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 023^2}\ (\mathrm{VII},39) & \frac{a_{12}}{a_{02}}=\frac{2^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 012^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},3,4,22\\ \mathrm{IX},27\end{pmatrix} & \frac{a_{01}}{a_{02}}=\frac{0^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 012^2}\ (\mathrm{VII},40)\\
 & & & \\
\frac{a_{78}}{a_{67}}=\frac{67^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 5678^2} & \frac{a_{58}}{a_{57}}=\frac{56^2\cdot 678^2}{6^2\cdot 5678^2}\ (\mathrm{VIII},1) & \frac{a_{78}}{a_{37}}=\frac{67^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 3678^2} & \frac{a_{38}}{a_{37}}=\frac{36^2\cdot 678^2}{6^2\cdot 3678^2}\ (\mathrm{VIII},3)\\
\frac{a_{78}}{a_{17}}=\frac{67^2\ 168^2}{6^2\cdot 1678^2} & \frac{a_{18}}{a_{17}}=\frac{16^2\ 678^2}{6^2\cdot 1678^2}\ (\mathrm{VIII},5) & \frac{a_{58}}{a_{35}}=\frac{56^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 3678^2}\ (\mathrm{VIII},25) & \frac{a_{38}}{a_{35}}=\frac{36^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 3568^2}\ (\mathrm{VIII},25)\\
\frac{a_{58}}{a_{15}}=\frac{56^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1568^2}\ (\mathrm{VIII},27) & \frac{a_{18}}{a_{15}}=\frac{16^2\ 568^2}{6^2\cdot 1568^2}\ (\mathrm{VIII},27) & \frac{a_{38}}{a_{13}}=\frac{36^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1368^2}\ (\mathrm{VIII},29) & \frac{a_{18}}{a_{13}}=\frac{16^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 1368^2}\ (\mathrm{VIII},29)\\
\frac{a_{62}}{a_{57}}=\frac{78^2\cdot 568^2}{8^2\cdot 5678^2} & \frac{a_{56}}{a_{57}}=\frac{58^2\cdot 678^2}{8^2\cdot 5678^2}\ (\mathrm{VIII},2) & \frac{a_{67}}{a_{37}}=\frac{78^2\cdot 368^2}{8^2\cdot 3678^2} & \frac{a_{36}}{a_{37}}=\frac{38^2\cdot 678^2}{8^2\cdot 3678^2}\ (\mathrm{VIII},4)\\
\frac{a_{67}}{a_{17}}=\frac{78^2\cdot 168^2}{8^2\cdot 1678^2} & \frac{a_{16}}{a_{17}}=\frac{18^2\cdot 678^2}{8^2\cdot 1678^2}\ (\mathrm{VIII},6) & \frac{a_{47}}{a_{57}}=\frac{78^2\cdot 458^2}{8^2\cdot 4578^2}\ (\mathrm{VIII},7) & \frac{a_{45}}{a_{57}}=\frac{58^2\cdot 478^2}{8^2\cdot 4578^2}\ (\mathrm{VIII},8)\\
\frac{a_{27}}{a_{57}}=\frac{78^2\cdot 258^2}{8^2\cdot 2578^2}\ (\mathrm{VIII},9) & \frac{a_{25}}{a_{57}}=\frac{58^2\cdot 278^2}{8^2\cdot 2578^2}\ (\mathrm{VIII},6) & \frac{a_{67}}{a_{57}}=\frac{78^2\ 058^2}{8^2\cdot 0578^2}\ (\mathrm{VIII},11) & \frac{a_{05}}{a_{57}}=\frac{58^2\cdot 078^5}{8^2\cdot 0578^2}\ (\mathrm{VIII},12)\\
\frac{a_{47}}{a_{37}}=\frac{78^2\cdot 348^2}{8^2\cdot 3478^2}\ (\mathrm{VIII},13) & \frac{a_{34}}{a_{37}}=\frac{38^2\cdot 478^2}{8^2\cdot 3478^2}\ (\mathrm{VIII},14) & \frac{a_{47}}{a_{17}}=\frac{78^2\cdot 148^2}{8^2\cdot 1478^2}\ (\mathrm{VIII},15) & \frac{a_{14}}{a_{17}}=\frac{18^2\cdot 478^2}{8^2\cdot 1478^2}\ (\mathrm{VIII},16)\\
\frac{a_{27}}{a_{37}}=\frac{78^2\cdot 238^2}{8^2\cdot 2378^2}\ (\mathrm{VIII},17) & \frac{a_{23}}{a_{37}}=\frac{38^2\cdot 278^2}{8^2\cdot 2378^2}\ (\mathrm{VIII},18) & \frac{a_{07}}{a_{37}}=\frac{78^2\cdot 038^2}{8^2\cdot 0378^2}\ (\mathrm{VIII},19) & \frac{a_{03}}{a_{37}}=\frac{38^2\cdot 078^2}{8^2\cdot 0378^2}\ (\mathrm{VIII},20)\\
\frac{a_{27}}{a_{17}}=\frac{78^2\cdot 128^2}{8^2\cdot 1278^2}\ (\mathrm{VIII},21) & \frac{a_{12}}{a_{17}}=\frac{18^2\cdot 278^2}{8^2\cdot 1278^2}\ (\mathrm{VIII},22) & \frac{a_{07}}{a_{17}}=\frac{78^2\cdot 018^2}{8^2\cdot 0178^2}\ (\mathrm{VIII},23) & \frac{a_{01}}{a_{17}}=\frac{18^2\cdot 078^2}{8^2\cdot 0178^2}\ (\mathrm{VIII},24)\\
\frac{a_{56}}{a_{35}}=\frac{58^2\cdot 368^2}{8^2\cdot 3568^2}\ (\mathrm{VIII},25) & \frac{a_{3}}{a_{35}}=\frac{38^2\cdot 568^2}{8^2\cdot 3568^2}\ (\mathrm{VIII},26) & \frac{a_{56}}{a_{15}}=\frac{58^2\cdot 168^2}{8^2\cdot 1568^2}\ (\mathrm{VIII},27) & \frac{a_{16}}{a_{15}}=\frac{18^2\cdot 568^2}{8^2\cdot 1568^2}\ (\mathrm{VIII},28)\\
\frac{a_{36}}{a_{13}}=\frac{38^2\cdot 168^2}{8^2\cdot 1368^2}\ (\mathrm{VIII},29) & \frac{a_{16}}{a_{13}}=\frac{18^2\ 368^2}{8^2\cdot 1368^2}\ (\mathrm{VIII},30) & \frac{a_{45}}{a_{35}}=\frac{58^2\cdot 348^2}{8^2\cdot 3458^2}\ (\mathrm{VIII},31) & \frac{a_{34}}{a_{35}}=\frac{38^2\cdot 458^2}{8^2\cdot 3458^2}\ (\mathrm{VIII},32)\\
\frac{a_{45}}{a_{15}}=\frac{58^2\cdot 148^2}{8^2\cdot 1458^2}\ (\mathrm{VIII},33) & \frac{a_{14}}{a_{15}}=\frac{18^2\cdot 458^2}{8^2\ 1458^2}\ (\mathrm{VIII},34) & \frac{a_{25}}{a_{35}}=\frac{58^2\cdot 238^2}{8^2\cdot 2358^2}\ (\mathrm{VIII},35) & \frac{a_{23}}{a_{35}}=\frac{38^2\cdot 258^2}{8^2\cdot 2358^2}\ (\mathrm{VIII},36)
\end{array}\right.$$

Hiermit sind alle ϑ-Functionen mit dreifachem Index, welche für die Nullargumente nicht verschwinden, erschöpft.

Das zweite zu entwickelnde System von Relationen giebt eine Beziehung zwischen ϑ-Functionen mit vierfachem Index und solchen mit ein-, zwei- und dreifachem Index. Ich brauche hier nicht alle Theta's zu betrachten, sondern nur diejenigen, welche einen Index, z. B. 8 gemeinschaftlich haben. Für jede dieser Functionen entwickle ich zwei Relationen mit Hilfe der Formel (C, 2) (S. 442) und eine dritte als Eliminationsresultat dieser beiden. Setzen wir in (C, 2) die Argumente gleich Null, so wird

$$\text{(F)} \qquad \vartheta_\eta^2 \vartheta_\varkappa^2 = \sum_\gamma (-1)^{\varkappa|\gamma+\gamma|\eta} \vartheta_{\eta\gamma}^2 \vartheta_{\gamma\varkappa}^2$$

und hieraus ergiebt sich, wenn $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$, δ, $\varkappa$ die jedesmal angegebenen Werthe erhalten, eine Reihe von Beziehungen, welche auf der Tabelle am Ende dieser Abhandlung (VIII) und (VIII a) zusammengestellt sind.

Die dritte Classe der zu entwickelnden Formeln für die ϑ-Functionen mit Nullargumenten, soll eine Beziehung zwischen je zwei Producten von 4 solchen Theta's liefern.

Setzt man in Gleichung (D, 1) (S. 447) die Argumente sämmtlich gleich Null, so wird

$$\text{(G)} \qquad \vartheta_\eta \vartheta_{\eta\alpha\beta} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta = \sum_\gamma (-1)^{\sigma_\gamma} \vartheta_\gamma \vartheta_{\gamma\alpha\beta} \vartheta_{\eta\gamma\alpha} \vartheta_{\eta\gamma\beta}$$

und es ergeben sich, wenn $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$, α, β, δ die jedesmal beigefügten Werthe erhalten, und die resultirende Gleichung noch in's Quadrat erhoben wird, die folgenden Beziehungen:

$\eta\gamma$ η $\eta\gamma\alpha$ $\eta\gamma\beta$ γ $\gamma\alpha\beta$

(IX)

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	α	β	δ		
0	2	6	5	47	56	8	$\cdots 47^2 \cdot 56^2 \cdot 458^2 \cdot 678^2 = 45^2 \cdot 67^2 \cdot 568^2 \cdot 478^2 \cdots$	(1)
0	4	6	5	27	56	8	$\cdots 27^2 \cdot 56^2 \cdot 258^2 \cdot 678^2 = 25^2 \cdot 67^2 \cdot 568^2 \cdot 278^2 \cdots$	(2)
2	4	6	5	07	56	8	$\cdots 07^2 \cdot 56^2 \cdot 058^2 \cdot 678^2 = 05^2 \cdot 67^2 \cdot 568^2 \cdot 078^2 \cdots$	(3)
0	2	6	3	47	36	8	$\cdots 47^2 \cdot 36^2 \cdot 348^2 \cdot 678^2 = 34^2 \cdot 67^2 \cdot 368^2 \cdot 478^2 \cdots$	(4)
0	4	6	3	27	36	8	$\cdots 27^2 \cdot 36^2 \cdot 238^2 \cdot 678^2 = 23^2 \cdot 67^2 \cdot 368^2 \cdot 278^2 \cdots$	(5)
2	4	6	3	07	36	8	$\cdots 07^2 \cdot 36^2 \cdot 038^2 \cdot 678^2 = 03^2 \cdot 67^2 \cdot 368^2 \cdot 078^2 \cdots$	(6)
0	2	6	1	47	16	8	$\cdots 47^2 \cdot 16^2 \cdot 148^2 \cdot 678^2 = 14^2 \cdot 67^2 \cdot 168^2 \cdot 478^2 \cdots$	(7)
0	4	6	1	27	16	8	$\cdots 27^2 \cdot 16^2 \cdot 128^2 \cdot 678^2 = 12^2 \; 67^2 \cdot 168^2 \cdot 278^2 \cdots$	(8)
2	4	6	1	07	16	8	$\cdots 07^2 \cdot 16^2 \cdot 018^2 \cdot 678^2 = 01^2 \cdot 67^2 \cdot 168^2 \cdot 078^2 \cdots$	(9)
0	2	8	5	47	58	6	$\cdots 47^2 \cdot 58^2 \cdot 456^2 \cdot 678^2 = 45^2 \cdot 78^2 \cdot 568^2 \cdot 478^2 \cdots$	(10)
0	4	8	5	27	58	6	$\cdots 27^2 \cdot 58^2 \cdot 256^2 \cdot 678^2 = 25^2 \cdot 78^2 \cdot 568^2 \cdot 278^2 \cdots$	(11)
2	4	8	5	07	58	6	$\cdots 07^2 \cdot 58^2 \cdot 056^2 \cdot 678^2 = 05^2 \cdot 78^2 \cdot 568^2 \cdot 078^2 \cdots$	(12)
0	2	8	3	47	38	6	$\cdots 47^2 \cdot 38^2 \cdot 346^2 \cdot 678^2 = 34^2 \cdot 78^2 \cdot 368^2 \cdot 467^2 \cdots$	(13)
0	4	8	3	27	38	6	$\cdots 27^2 \cdot 38^2 \cdot 236^2 \cdot 678^2 = 23^2 \cdot 78^2 \cdot 368^2 \cdot 267^2 \cdots$	(14)
2	4	8	3	07	38	6	$\cdots 07^2 \cdot 38^2 \cdot 036^2 \cdot 678^2 = 03^2 \cdot 78^2 \cdot 368^2 \cdot 067^2 \cdots$	(15)

$$
(\mathrm{IX})\left\{\begin{array}{ccccccclr}
\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \alpha & \beta & \delta & & \\
0 & 2 & 8 & 1 & 47 & 18 & 6 & \cdots 47^2\cdot 18^2\cdot 146^2\cdot 678^2 = 14^2\cdot 78^2\cdot 168^2\cdot 467^2 & \cdots (16)\\
0 & 4 & 8 & 1 & 27 & 18 & 6 & \cdots 27^2\cdot 18^2\cdot 126^2\cdot 678^2 = 12^2\cdot 78^2\cdot 168^2\cdot 267^2 & \cdots (17)\\
2 & 4 & 8 & 1 & 07 & 18 & 6 & \cdots 07^2\cdot 18^2\cdot 016^2\cdot 678^2 = 01^2\cdot 78^2\cdot 168^2\cdot 067^2 & \cdots (18)\\
0 & 6 & 8 & 5 & 27 & 58 & 4 & \cdots 27^2\cdot 58^2\cdot 245^2\cdot 478^2 = 25^2\cdot 78^2\cdot 458^2\cdot 247^2 & \cdots (19)\\
2 & 6 & 8 & 5 & 07 & 58 & 4 & \cdots 07^2\cdot 58^2\cdot 045^2\cdot 478^2 = 05^2\cdot 78^2\cdot 458^2\cdot 047^2 & \cdots (20)\\
0 & 6 & 8 & 3 & 27 & 38 & 4 & \cdots 27^2\cdot 38^2\cdot 234^2\ 478^2 = 23^2\cdot 78^2\cdot 348^2\cdot 247^2 & \cdots (21)\\
2 & 6 & 8 & 3 & 07 & 38 & 4 & \cdots 07^2\cdot 38^2\cdot 034^2\cdot 478^2 = 03^2\cdot 78^2\cdot 348^2\cdot 047^2 & \cdots (22)\\
0 & 6 & 8 & 1 & 27 & 18 & 4 & \cdots 27^2\cdot 18^2\cdot 124^2\cdot 478^2 = 12^2\cdot 78^2\cdot 148^2\cdot 247^2 & \cdots (23)\\
2 & 6 & 8 & 1 & 07 & 18 & 4 & \cdots 07^2\cdot 18^2\cdot 014^2\cdot 478^2 = 01^2\cdot 78^2\cdot 148^2\cdot 047^2 & \cdots (24)\\
4 & 6 & 8 & 5 & 07 & 58 & 2 & \cdots 07^2\cdot 58^2\cdot 025^2\cdot 278^2 = 05^2\cdot 78^2\cdot 258^2 . 027^2 & \cdots (25)\\
4 & 6 & 8 & 3 & 07 & 38 & 2 & \cdots 07^2\cdot 38^2\cdot 023^2\cdot 278^2 = 03^2\cdot 78^2\cdot 238^2\cdot 027^2 & \cdots (26)\\
4 & 6 & 8 & 1 & 07 & 18 & 2 & \cdots\ 07^2\cdot 18^2\cdot 012^2\cdot 278^2 = 01^2\cdot 78^2\cdot 128^2\cdot 027^2 \cdots & (27)
\end{array}\right.
$$

und eine grosse Anzahl ähnlicher, deren Bildungsweise ich späterhin, wo sie für die Rechnung nothwendig sind, angeben werde. —

Es lässt sich nun zeigen, dass vermöge dieser Relationen zwischen den Theta's mit Nullargumenten alle möglichen Quotienten dieser Theta's sich durch irgend 7 von ihnen ausdrücken lassen. Hierzu greife ich die Gleichungen 1, 2, 3, 4 des System's (VII) und 1, 3, 5 des System's (VIII) heraus und bringe sie zunächst auf die Form $b^2 + b'^2 = 1$, also

$$\frac{(8)^2\cdot(67)^2}{(9)^2\cdot(678)^2} + \frac{(6)^2\cdot(78)^2}{(9)^2\cdot(678)^2} = 1$$

$$\frac{(8)^2\cdot(47)^2}{(9)^2\cdot(478)^2} + \frac{(4)^2\cdot(78)^2}{(9)^2\cdot(478)^2} = 1$$

$$\frac{(8)^2\cdot(27)^2}{(9)^2\cdot(278)^2} + \frac{(2)^2\cdot(78)^2}{(9)^2\cdot(278)^2} = 1$$

$$\frac{(8)^2\cdot(07)^2}{(9)^2\cdot(078)^2} + \frac{(0)^2\cdot(78)^2}{(9)^2\cdot(078)^2} = 1$$

$$\frac{(67)^2\cdot(568)^2}{(56)^2\ (678)^2} + \frac{(6)^2\cdot(5678)^2}{(56)^2\cdot(678)^2} = 1$$

$$\frac{(67)^2\cdot(368)^2}{(36)^2\cdot(678)^2} + \frac{(6)^2\cdot(3678)^2}{(36)^2\cdot(678)^2} = 1$$

$$\frac{(67)^2\cdot(168)^2}{(16)^2\cdot(678)^2} + \frac{(6)^2\cdot(1678)^2}{(16)^2\cdot(678)^2} = 1\,.$$

Ich führe nun für die in jeder dieser Gleichungen zuerst stehenden 7 ϑ-Quotienten Constanten ein, zu deren Bezeichnung ich mich einer Reihe von 9 Grössen $a_0, a_1 \cdots a_8$ in der Weise bediene, dass nur die Quotienten der Differenzen je zweier von ihnen in den Definitionsgleichungen vorkommen. Setze ich ausserdem noch zur Abkürzung

$$a_\varkappa - a_\lambda = a_{\varkappa\lambda},$$

so soll sein:

$$
(\mathrm{X})\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{a_{78}}{a_{68}} = \dfrac{8^2 \cdot 67^2}{9^2 \cdot 678^2}, \quad \dfrac{a_{78}}{a_{48}} = \dfrac{8^2 \cdot 47^2}{9^2 \cdot 478^2}, \quad \dfrac{a_{78}}{a_{28}} = \dfrac{8^2 \cdot 27^2}{9^2 \cdot 278^2}, \quad \dfrac{a_{78}}{a_{08}} = \dfrac{8^2 \cdot 07^2}{9^2 \cdot 078^2} \\[2ex]
\qquad \dfrac{a_{78}}{a_{58}} = \dfrac{67^2 \cdot 568^2}{56^2 \cdot 678^2}, \quad \dfrac{a_{78}}{a_{38}} = \dfrac{67^2 \cdot 368^2}{36^2 \cdot 678^2}, \quad \dfrac{a_{78}}{a_{18}} = \dfrac{67^2 \cdot 168^2}{16^2 \cdot 678^2} \\[2ex]
\text{sodass sich vermöge der obigen Gleichungen zunächst noch} \\
\text{ergiebt:} \\[1ex]
\dfrac{a_{67}}{a_{68}} = \dfrac{6^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 678^2}, \quad \dfrac{a_{47}}{a_{48}} = \dfrac{4^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 478^2}, \quad \dfrac{a_{27}}{a_{28}} = \dfrac{2^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 278^2}, \quad \dfrac{a_{07}}{a_{08}} = \dfrac{0^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 078^2} \\[2ex]
\qquad \dfrac{a_{57}}{a_{58}} = \dfrac{6^2 \cdot 5678^2}{56^2 \cdot 678^2}, \quad \dfrac{a_{37}}{a_{38}} = \dfrac{67^2 \cdot 3678^2}{36^2 \cdot 678^2}, \quad \dfrac{a_{17}}{a_{18}} = \dfrac{67^2 \cdot 1678^2}{16^2 \cdot 678^2}
\end{array}
\right.
$$

Ich nehme nun an, die Moduln des betrachteten Theta-Systems seien rein imaginär. Dann sind die Theta's mit Nullargumenten sämmtlich reell, folglich ihre Quadrate positiv. Daraus folgt, dass, wenn nun $a_7 > a_8$ und $a_8 > 0$ genommen wird (worüber ja willkürlich verfügt werden kann, da durch die Gleichungen (X) nur 7 von den Constanten $a_\varkappa$ bestimmt sind), auch $a_0, a_1, \cdots a_6, a_7$ positiv sind und es ergiebt sich ferner aus den Gleichungen (X) und einer Anzahl ähnlicher, die sogleich noch entwickelt werden sollen, dass alsdann

$$a_0 > a_1 > \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot > a_7 > a_8 > 0$$

und dass also

$$a_{\varkappa\lambda} > 0 \text{ sobald } \lambda > \varkappa$$

ist. — Man kann nun vermöge der Beziehung

$$\frac{a_{\varkappa\lambda}}{a_{\mu\nu}} = \frac{a_{\varkappa 8} - a_{\lambda 8}}{a_{\mu 8} - a_{\nu 8}}$$

offenbar jeden beliebigen Quotienten dieser Form mit Hilfe des System's (X) durch ϑ-Functionen ausdrücken — und es werden sich dann umgekehrt alle möglichen ϑ-Quotienten, durch die Constanten $a_{\varkappa\lambda}$ ausdrücken lassen. Um dies schliesslich zu bewerkstelligen bilde ich zunächst eine Reihe von Quotienten der Grössen $a_{\varkappa\lambda}$, nämlich alle möglichen von der Form

$$\frac{a_{\varkappa\lambda}}{a_{\iota\lambda}}$$

wo:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda = 0, 2, \cdots 8 \\ \iota = 0, 2, \cdots 8 \end{array}\right\} \iota \lessgtr \lambda$$
$$\varkappa = 1, 3, \cdots 7$$

oder:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda = 1, 3, \cdots 7 \\ \iota = 1, 3, \cdots 7 \end{array}\right\} \iota \lessgtr \lambda$$
$$\varkappa = 0, 2, \cdots 8$$

von denen die ersteren den Relationen des System's (VII), die letzteren denen von (VIII) in derselben Weise entsprechen, wie die unter (X) gegebenen den zu ihrer Definition herbeigezogenen ϑ-Relationen. (Die Relationen IX dienen hierbei zur Vereinfachung gewisser resultirender Ausdrücke.)

Die betreffenden Ausdrücke finden sich auf der Tabelle am Ende unter (XI) zusammengestellt.

Ich bilde jetzt das folgende Product von Quotienten:

$$\frac{a_{01}}{a_{02}} \cdot \frac{a_{03}}{a_{04}} \cdot \frac{a_{05}}{a_{06}} \cdot \frac{a_{07}}{a_{08}} = \frac{0^8 \cdot\ 12^2 \cdot\ 34^2 \cdot\ 56^2 \cdot\ 78^2}{9^8 \cdot 012^2 \cdot 034^2 \cdot 056^2 \cdot 078^2}.$$

Nun folgt aus der Formel (G) (S. 455),

wenn	$\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, \alpha\ \ \beta\ \ \delta$		
die Werthe	1 5 7 4 0 12 9	erhält:	$0^2 . 12^2 . 34^2 . 5678^2 = 9^2 . 012^2 . 034^2 . 1234^2$
	1 3 5 8 0 56 9	—	$0^2 . 56^2 . 78^2 . 1234^2 = 9^2 . 056^2 . 078^2 . 5678^2$

und durch Multiplication dieser beiden Gleichungen:

$$0^4 . 12^2 . 34^2 . 56^2 . 78^2 = 9^4 . 012^2 . 034^2 . 056^2 . 078^2$$

Es geht somit die obige Relation über in:

$$\text{(XII)} \qquad (1)\ \frac{0^4}{9^4} = \frac{a_{01}\, a_{03}\, a_{05}\, a_{07}}{a_{02}\, a_{04}\, a_{06}\, a_{08}}.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich vermöge der Beziehungen:

$\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, \alpha\ \ \beta\ \ \delta$		
1 5 7 4 2 01 9	—	$2^2 . 01^2 . 34^2 . 5678^2 = 9^2 . 012^2 . 234^2 . 0134^2$
1 3 5 8 2 56 9	—	$2^2 . 56^2 . 78^2 . 0134^2 = 9^2 . 256^2 . 278^2 . 5678^2$
1 5 7 2 4 01 9	—	$4^2 . 01^2 . 23^2 . 5678^2 = 9^2 . 014^2 . 234^2 . 0123^2$
1 3 5 8 4 56 9	—	$4^2 . 56^2 . 78^2 . 0123^2 = 9^2 . 456^2 . 478^2 . 5678^2$
1 5 7 2 6 01 9	—	$6^2 . 01^2 . 23^2 . 4578^2 = 9^2 . 016^2 . 236^2 . 0123^2$
1 3 5 8 6 45 9	—	$6^2 . 45^2 . 78^2 . 0123^2 = 9^2 . 456^2 . 678^2 . 4578^2$
1 5 7 2 8 01 9	—	$8^2 . 01^2 . 23^2 . 4567^2 = 9^2 . 018^2 . 238^2 . 0133^2$
1 3 5 6 8 45 9	—	$8^2 . 45^2 . 67^2 . 0123^2 = 9^2 . 458^2 . 678^2 . 4567^2$

für die übrigen ϑ-Function mit einfachem geraden Index die Ausdrücke

$$\text{(XII)} \quad \begin{cases} (2)\ \dfrac{2^4}{9^4} = \dfrac{a_{12}\, a_{23}\, a_{25}\, a_{27}}{a_{02}\, a_{24}\, a_{26}\, a_{28}} & (3)\ \dfrac{4^4}{9^4} = \dfrac{a_{14}\, a_{34}\, a_{45}\, a_{47}}{a_{04}\, a_{24}\, a_{46}\, a_{48}} \\ (4)\ \dfrac{6^4}{9^4} = \dfrac{a_{16}\, a_{36}\, a_{56}\, a_{67}}{a_{06}\, a_{26}\, a_{46}\, a_{68}} & (5)\ \dfrac{8^4}{9^4} = \dfrac{a_{18}\, a_{38}\, a_{58}\, a_{78}}{a_{08}\, a_{28}\, a_{48}\, a_{68}} \end{cases}$$

Wir bilden ferner das Product:

$$\frac{a_{12}}{a_{02}} \cdot \frac{a_{14}}{a_{04}} \cdot \frac{a_{16}}{a_{06}} \cdot \frac{a_{18}}{a_{08}} \cdot \frac{a_{03}}{a_{13}} \cdot \frac{a_{05}}{a_{15}} \cdot \frac{a_{07}}{a_{17}} = \frac{01^8 \cdot 018^4 \cdot\ 2^2 \cdot\ 4^2 \cdot\ 6^2 \cdot\ 38^2 \cdot\ 58^2 \cdot\ 78^2}{9^8 .\ \ 8^4 \cdot 012^2 \cdot 014^2 \cdot 016^2 \cdot 0138^2 \cdot 0158^2 \cdot 0178^2}$$

und leiten jetzt zur Vereinfachung dieses Ausdruckes aus der Formel (G) die folgenden Beziehungen her:

$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\;\alpha\;\;\beta\;\;\delta$		
1 5 7 8 2 01 9	—	$2^2.01^2.38^2.4567^2 = 9^2.012^2.238^2.0138^2$
1 3 7 8 4 01 9	—	$4^2.01^2.58^2.2367^2 = 9^2.014^2.458^2.0158^2$
1 3 5 8 6 01 9	—	$6^2.01^2.78^2.2345^2 = 9^2.016^2.678^2.0178^2$
1 3 5 6 8 01 9	—	$8^2.01^2.67^2.2345^2 = 9^2.018^2.678^2.0167^2$

Multiplicirt man jetzt die ersten dieser drei Gleichungen mit einander und dann noch kreuzweise mit der vierten, so ergiebt sich:

$$01^4 \cdot 018^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 38^2 \cdot 58^2 \cdot 78^2 \cdot 0167^2 \cdot 2367^2 \cdot 4567^2$$
$$= 9^4 \cdot 8^2 \cdot 012^2 \cdot 014^2 \cdot 016^2 \cdot 0138^2 \cdot 0158^2 \cdot 0178^2 \cdot 67^2 \cdot 238^2 \cdot 458^2$$

und es geht daher der obige Ausdruck zunächst über in:

$$\frac{a_{12}\,a_{14}\,a_{16}\,a_{18}\,a_{03}\,a_{05}\,a_{07}}{a_{02}\,a_{04}\,a_{06}\,a_{08}\,a_{13}\,a_{15}\,a_{17}} = \frac{01^4 \cdot 67^2 \cdot 018^2 \cdot 238^2 \cdot 458^2}{9^4 \cdot 8^2 \cdot 0167^2 \cdot 2367^2 \cdot 4567^2}.$$

Nun folgt aber noch aus Formel (G)

für $\varepsilon_1\;\varepsilon_2\;\varepsilon_3\;\varepsilon_4\;\;\alpha\;\;\;\beta\;\;\;\delta$
$= 0\;4\;6\;3\;67\;018\;8 \quad - \quad 67^2 \cdot 018^2 \cdot 238^2 \cdot 458^2 = 8^2 \cdot 0167^2 \cdot 2367^2 \cdot 4567^2,$
mithin wird:

$$\text{(XIII, 1)} \qquad \frac{01^4}{9^4} = \frac{a_{12}\,a_{14}\,a_{16}\,a_{18}\,a_{03}\,a_{05}\,a_{07}}{a_{02}\,a_{04}\,a_{06}\,a_{08}\,a_{13}\,a_{15}\,a_{17}}.$$

In durchaus analoger Weise ergeben sich für die sämmtlichen übrigen ϑ-Functionen mit zweifachem Index, welche für die Nullargumente nicht verschwinden, die folgenden Ausdrücke:

$$\text{(XIII)} \left\{ \begin{array}{llll}
(2)\ \dfrac{03^4}{9^4} = \dfrac{a_{23}\,a_{34}\,a_{36}\,a_{38}\,a_{01}\,a_{05}\,a_{07}}{a_{02}\,a_{04}\,a_{06}\,a_{08}\,a_{13}\,a_{35}\,a_{37}} & & (3)\ \dfrac{05^4}{9^4} = \dfrac{a_{25}\,a_{45}\,a_{56}\,a_{58}\,a_{01}\,a_{03}\,a_{07}}{a_{02}\,a_{04}\,a_{06}\,a_{08}\,a_{15}\,a_{35}\,a_{57}} & \\[2ex]
(4)\ \dfrac{07^4}{9^4} = \dfrac{a_{27}\,a_{47}\,a_{67}\,a_{78}\,a_{01}\,a_{03}\,a_{05}}{a_{02}\,a_{04}\,a_{06}\,a_{08}\,a_{17}\,a_{37}\,a_{57}} & & (5)\ \dfrac{12^4}{9^4} = \dfrac{a_{01}\,a_{14}\,a_{16}\,a_{18}\,a_{23}\,a_{25}\,a_{27}}{a_{02}\,a_{24}\,a_{26}\,a_{28}\,a_{13}\,a_{15}\,a_{17}} & /a. \\[2ex]
(6)\ \dfrac{14^4}{9^4} = \dfrac{a_{01}\,a_{12}\,a_{16}\,a_{18}\,a_{34}\,a_{45}\,a_{47}}{a_{04}\,a_{24}\,a_{46}\,a_{48}\,a_{13}\,a_{15}\,a_{17}} & & (7)\ \dfrac{16^4}{9^4} = \dfrac{a_{01}\,a_{12}\,a_{14}\,a_{18}\,a_{36}\,a_{56}\,a_{67}}{a_{06}\,a_{26}\,a_{16}\,a_{68}\,a_{13}\,a_{15}\,a_{17}} & \\[2ex]
(8)\ \dfrac{18^4}{9^4} = \dfrac{a_{01}\,a_{12}\,a_{14}\,a_{16}\,a_{38}\,a_{58}\,a_{78}}{a_{08}\,a_{28}\,a_{48}\,a_{68}\,a_{13}\,a_{15}\,a_{17}} & & (9)\ \dfrac{23^4}{9^4} = \dfrac{a_{03}\,a_{34}\,a_{36}\,a_{38}\,a_{12}\,a_{25}\,a_{27}}{a_{02}\,a_{24}\,a_{26}\,a_{28}\,a_{13}\,a_{35}\,a_{37}} & \\[2ex]
(10)\ \dfrac{25^4}{9^4} = \dfrac{a_{05}\,a_{45}\,a_{56}\,a_{58}\,a_{12}\,a_{23}\,a_{27}}{a_{02}\,a_{24}\,a_{26}\,a_{28}\,a_{15}\,a_{35}\,a_{57}} & & (11)\ \dfrac{27^4}{9^4} = \dfrac{a_{07}\,a_{47}\,a_{67}\,a_{78}\,a_{12}\,a_{23}\,a_{25}}{a_{02}\,a_{24}\,a_{26}\,a_{28}\,a_{17}\,a_{37}\,a_{57}} & \\[2ex]
(12)\ \dfrac{34^4}{9^4} = \dfrac{a_{03}\,a_{23}\,a_{36}\,a_{38}\,a_{14}\,a_{45}\,a_{47}}{a_{04}\,a_{24}\,a_{46}\,a_{48}\,a_{13}\,a_{35}\,a_{37}} & & (13)\ \dfrac{36^4}{9^4} = \dfrac{a_{03}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{38}\,a_{16}\,a_{56}\,a_{67}}{a_{06}\,a_{26}\,a_{46}\,a_{68}\,a_{13}\,a_{35}\,a_{37}} & \\[2ex]
(14)\ \dfrac{38^4}{9^4} = \dfrac{a_{03}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{36}\,a_{18}\,a_{58}\,a_{78}}{a_{08}\,a_{28}\,a_{48}\,a_{68}\,a_{13}\,a_{35}\,a_{37}} & & (15)\ \dfrac{45^4}{9^4} = \dfrac{a_{05}\,a_{25}\,a_{56}\,a_{58}\,a_{14}\,a_{34}\,a_{47}}{a_{04}\,a_{24}\,a_{46}\,a_{48}\,a_{15}\,a_{35}\,a_{57}} & \\[2ex]
(16)\ \dfrac{47^4}{9^4} = \dfrac{a_{07}\,a_{27}\,a_{67}\,a_{78}\,a_{14}\,a_{34}\,a_{45}}{a_{04}\,a_{24}\,a_{46}\,a_{48}\,a_{17}\,a_{37}\,a_{57}} & & (17)\ \dfrac{56^4}{9^4} = \dfrac{a_{05}\,a_{25}\,a_{45}\,a_{58}\,a_{16}\,a_{36}\,a_{67}}{a_{06}\,a_{26}\,a_{46}\,a_{68}\,a_{15}\,a_{35}\,a_{57}} & \\[2ex]
(18)\ \dfrac{58^4}{9^4} = \dfrac{a_{05}\,a_{25}\,a_{45}\,a_{56}\,a_{18}\,a_{38}\,a_{78}}{a_{08}\,a_{28}\,a_{48}\,a_{68}\,a_{15}\,a_{35}\,a_{57}} & & (19)\ \dfrac{67^4}{9^4} = \dfrac{a_{07}\,a_{27}\,a_{47}\,a_{78}\,a_{16}\,a_{36}\,a_{56}}{a_{06}\,a_{26}\,a_{46}\,a_{68}\,a_{17}\,a_{37}\,a_{57}} & \\[2ex]
 & (20)\ \dfrac{78^4}{9^4} = \dfrac{a_{07}\,a_{27}\,a_{47}\,a_{67}\,a_{18}\,a_{38}\,a_{58}}{a_{08}\,a_{28}\,a_{48}\,a_{68}\,a_{17}\,a_{37}\,a_{57}}. & &
\end{array} \right.$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die ϑ-Functionen mit dreifachem Index ergeben sich nunmehr unmittelbar mit Hülfe der Relationen (VII). Man erhält aus diesen:

$$
\text{(XIV)}\left\{
\begin{array}{llll}
(1) & \dfrac{678^4}{9^4}=\dfrac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{18}a_{38}a_{58}a_{07}a_{27}a_{47}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} & (2) & \dfrac{478^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{18}a_{38}a_{58}a_{07}a_{27}a_{67}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(3) & \dfrac{278^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{18}a_{38}a_{58}a_{07}a_{47}a_{67}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} & (4) & \dfrac{078^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{18}a_{38}a_{58}a_{27}a_{47}a_{67}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(5) & \dfrac{568^4}{9^4}=\dfrac{a_{16}a_{36}a_{67}a_{18}a_{38}a_{78}a_{05}a_{25}a_{45}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} & (6) & \dfrac{368^4}{9^4}=\dfrac{a_{16}a_{56}a_{67}a_{18}a_{58}a_{78}a_{03}a_{23}a_{34}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(7) & \dfrac{468^4}{9^4}=\dfrac{a_{36}a_{56}a_{67}a_{38}a_{58}a_{78}a_{01}a_{12}a_{14}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} & (8) & \dfrac{458^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{34}a_{47}a_{18}a_{38}a_{78}a_{05}a_{25}a_{56}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(9) & \dfrac{258^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{18}a_{38}a_{78}a_{05}a_{45}a_{56}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (10) & \dfrac{058^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{18}a_{28}a_{78}a_{25}a_{45}a_{56}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(11) & \dfrac{348^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{45}a_{47}a_{18}a_{58}a_{78}a_{03}a_{23}a_{36}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (12) & \dfrac{148^4}{9^4}=\dfrac{a_{34}a_{45}a_{47}a_{38}a_{58}a_{78}a_{01}a_{12}a_{16}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(13) & \dfrac{238^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{18}a_{58}a_{78}a_{03}a_{34}a_{36}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (14) & \dfrac{038^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{18}a_{58}a_{78}a_{12}a_{14}a_{16}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(15) & \dfrac{128^4}{9^4}=\dfrac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{38}a_{58}a_{78}a_{01}a_{14}a_{16}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} & (16) & \dfrac{018^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{38}a_{58}a_{78}a_{12}a_{14}a_{16}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(17) & \dfrac{467^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{16}a_{36}a_{56}a_{07}a_{27}a_{78}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} & (18) & \dfrac{267^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{16}a_{36}a_{56}a_{07}a_{47}a_{78}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(19) & \dfrac{067^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{16}a_{36}a_{56}a_{27}a_{47}a_{78}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} & (20) & \dfrac{247^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{14}a_{34}a_{45}a_{07}a_{67}a_{78}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(21) & \dfrac{047^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{14}a_{34}a_{45}a_{27}a_{67}a_{78}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} & (22) & \dfrac{027^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{12}a_{23}a_{25}a_{47}a_{67}a_{78}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(23) & \dfrac{456^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{34}a_{47}a_{16}a_{36}a_{67}a_{05}a_{25}a_{58}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (24) & \dfrac{256^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{16}a_{36}a_{67}a_{05}a_{45}a_{58}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(25) & \dfrac{056^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{16}a_{36}a_{67}a_{25}a_{45}a_{58}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (26) & \dfrac{346^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{45}a_{47}a_{16}a_{56}a_{67}a_{03}a_{23}a_{38}}{a_{\ 4}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(27) & \dfrac{146^4}{9^4}=\dfrac{a_{34}a_{45}a_{47}a_{36}a_{56}a_{67}a_{01}a_{12}a_{18}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} & (28) & \dfrac{236^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{16}a_{56}a_{67}a_{03}a_{34}a_{38}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(29) & \dfrac{036^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{16}a_{56}a_{67}a_{23}a_{34}a_{38}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (30) & \dfrac{126^4}{9^4}=\dfrac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{36}a_{56}a_{67}a_{01}a_{14}a_{18}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(31) & \dfrac{016^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{36}a_{56}a_{67}a_{12}a_{14}a_{18}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}\alpha_{13}a_{15}a_{17}} & (32) & \dfrac{245^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{14}a_{34}a_{47}a_{05}a_{56}a_{58}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(33) & \dfrac{045^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{14}a_{34}a_{47}a_{25}a_{56}a_{58}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} & (34) & \dfrac{025^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{12}a_{23}a_{27}a_{45}a_{56}a_{58}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(35) & \dfrac{234^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{14}a_{45}a_{47}a_{03}a_{36}a_{38}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} & (36) & \dfrac{034^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{14}a_{45}a_{47}a_{23}a_{36}a_{38}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(37) & \dfrac{124^4}{9^4}=\dfrac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{34}a_{45}a_{47}a_{03}a_{36}a_{38}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} & (38) & \dfrac{014^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{34}a_{45}a_{47}a_{12}a_{16}a_{18}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(39) & \dfrac{023^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{12}a_{25}a_{27}a_{34}a_{36}a_{38}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{35}a_{37}} & (40) & \dfrac{012^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{23}a_{25}a_{27}a_{14}a_{16}a_{18}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{15}a_{17}}
\end{array}\right.
$$

Endlich bestimmen sich die ϑ-Functionen mit vierfachem Index am bequemsten mit Hülfe von Relationen, wie sie unter (VIII) gegeben worden sind; z. B.

$$\frac{5678^4}{9^4} = \frac{a_{05}a_{25}a_{45}a_{07}a_{27}a_{47}a_{16}a_{36}a_{18}a_{38}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{15}a_{35}a_{17}a_{37}}.$$

Ich gehe indessen auf diese Ausdrücke hier nicht weiter ein, da sie für das Folgende nicht nothwendig sind.

Ich wende mich nun zu den fünf Relationen zurück, welche ich unter (VI) (S. 453) für die 10 ϑ-Functionen mit einfachem Index und beliebigen Argumenten $v_1 \cdots v_4$ entwickelt habe und zwar setze ich dieselben zunächst in die Form:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{(0)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(2)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \frac{(4)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} + \frac{(6)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} + \frac{(8)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[8]^2}{[9]^2}\\
1 &= \frac{(018)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[1]^2}{[9]^2} - \frac{(128)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} - \frac{(148)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \frac{(168)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}\\
1 &= \frac{(038)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(238)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[3]^2}{[9]^2} - \frac{(348)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \frac{(368)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}\\
1 &= \frac{(058)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(258)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \frac{(458)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[5]^2}{[9]^2} - \frac{(568)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}\\
1 &= \frac{(078)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(278)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \frac{(478)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} + \frac{(678)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[7]^2}{[9]^2}.
\end{aligned}$$

Oder, wenn man jetzt für die ϑ-Quotienten mit Nullargumenten die Constanten-Ausdrücke aus (XII), (XIII), (XIV) einsetzt:

$$\text{(XV)}\left\{\begin{aligned}
1 &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{47}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2}\\
&\quad + \sqrt{\frac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{18}a_{38}a_{58}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}}}\cdot\frac{[8]^2}{[9]^2}\\
1 &= \sqrt{\frac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{08}}{a_{01}a_{02}a_{04}a_{06}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}a_{18}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}}}\cdot\frac{[1]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{28}}{a_{02}a_{12}a_{24}a_{26}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2}\\
&\quad - \sqrt{\frac{a_{34}a_{45}a_{47}a_{48}}{a_{04}a_{14}a_{24}a_{46}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{36}a_{56}a_{67}a_{68}}{a_{06}a_{16}a_{26}a_{46}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}\\
1 &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{08}}{a_{02}a_{03}a_{04}a_{06}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{28}}{a_{02}a_{23}a_{24}a_{26}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{13}a_{35}a_{37}a_{38}}{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}}}\cdot\frac{[3]^2}{[9]^2}\\
&\quad - \sqrt{\frac{a_{14}a_{45}a_{47}a_{48}}{a_{04}a_{24}a_{34}a_{46}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{16}a_{56}a_{67}a_{68}}{a_{06}a_{26}a_{56}a_{46}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}\\
1 &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{08}}{a_{02}a_{04}a_{05}a_{06}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{28}}{a_{02}a_{24}a_{25}a_{26}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{14}a_{34}a_{47}a_{48}}{a_{04}a_{24}a_{45}a_{46}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2}\\
&\quad - \sqrt{\frac{a_{15}a_{35}a_{57}a_{58}}{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}}}\cdot\frac{[5]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{16}a_{36}a_{67}a_{68}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{56}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}\\
1 &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{08}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{07}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{28}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{27}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{48}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{47}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2}\\
&\quad + \sqrt{\frac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{68}}{a_{06}a_{28}a_{46}a_{67}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{17}a_{37}a_{57}a_{78}}{a_{02}a_{24}a_{47}a_{67}}}\cdot\frac{[7]^2}{[9]^2}
\end{aligned}\right.$$

Hierbei sind die Wurzelausdrücke, welche die Coëfficienten diese Gleichungen bilden, sämmtlich positiv zu nehmen, da ja in Folge de oben gemachten Annahme die ϑ-Quadrate für die Nullargument sämmtlich positiv zu nehmen sind. (NB. Auch wenn man diese Annahme fallen lässt, so ist das Vorzeichen jedes dieser Wurzelausdrücke durch den entsprechenden quadratischen ϑ-Quotienten eindeutig definirt.)

Aus diesen fünf Gleichungen zwischen den neun ϑ-Quotienten $\frac{\vartheta_0(v_1\cdots)}{\vartheta_9(v_1\cdots)} \cdots \frac{\vartheta_8(v_1\cdots)}{\vartheta_9(v_1\cdots)}$ lassen sich je fünf dieser Quotienten durch die anderen vier ausdrücken. Statt dessen kann man aber offenbar alle 9 Quotienten durch 4 neue unabhängige Variablen $x_1 \cdots x_4$ darstellen. Wir setzen:

$$
\text{(XVI)} \quad \begin{cases}
\dfrac{\vartheta_0^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} = \dfrac{(a_0-x_1)(a_0-x_2)(a_0-x_3)(a_0-x_4)}{\sqrt{a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}a_{05}a_{06}a_{07}a_{08}}} \\[2ex]
\dfrac{\vartheta_1^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} = \dfrac{(a_1-x_1)(a_1-x_2)(a_1-x_3)(a_1-x_4)}{\sqrt{a_{01}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}a_{18}}} \\[2ex]
\dfrac{\vartheta_2^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} = -\dfrac{(a_2-x_1)(a_2-x_2)(a_2-x_3)(a_2-x_4)}{\sqrt{a_{02}a_{12}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}a_{27}a_{28}}} \\[2ex]
\dfrac{\vartheta_3^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} = -\dfrac{(a_3-x_1)(a_3-x_2)(a_3-x_3)(a_3-x_4)}{\sqrt{a_{03}a_{13}a_{23}a_{34}a_{35}a_{36}a_{37}a_{38}}} \\[2ex]
\dfrac{\vartheta_4^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} = \dfrac{(a_4-x_1)(a_4-x_2)(a_4-x_3)(a_4-x_4)}{\sqrt{a_{04}a_{14}a_{24}a_{34}a_{45}a_{46}a_{47}a_{48}}} \\[2ex]
\dfrac{\vartheta_5^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} = \dfrac{(a_5-x_1)(a_5-x_2)(a_5-x_3)(a_5-x_4)}{\sqrt{a_{05}a_{15}a_{25}a_{35}a_{45}a_{56}a_{57}a_{58}}} \\[2ex]
\dfrac{\vartheta_6^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} = -\dfrac{(a_6-x_1)(a_6-x_2)(a_6-x_3)(a_6-x_4)}{\sqrt{a_{06}a_{16}a_{26}a_{36}a_{46}a_{56}a_{67}a_{68}}} \\[2ex]
\dfrac{\vartheta_7^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} = -\dfrac{(a_7-x_1)(a_7-x_2)(a_7-x_3)(a_7-x_4)}{\sqrt{a_{07}a_{17}a_{27}a_{37}a_{47}a_{57}a_{67}a_{78}}} \\[2ex]
\dfrac{\vartheta_8^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} = \dfrac{(a_8-x_1)(a_8-x_2)(a_8-x_3)(a_8-x_4)}{\sqrt{a_{08}a_{18}a_{28}a_{38}a_{48}a_{58}a_{68}a_{78}}}
\end{cases}
$$

Die Wurzelzeichen in den Nennern dieser Ausdrücke sind wiederum sämmtlich positiv zu nehmen, da für $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$ — wo dann x_1, x_2, x_3, x_4 in Folge der Relationen (XII) die Werthe a_1, a_3, a_5, a_7 annehmen müssen — in Folge der gemachten Annahme die betreffenden Ausdrücke wiederum positiv werden müssen.

Durch Einsetzen der Ausdrücke (XVI) gehen nun die Gleichungen (XV) in die folgenden über:

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{(a_0-x_1)\cdots(a_0-x_4)}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}} - \frac{(a_2-x_1)\cdots(a_2-x_4)}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}} + \frac{(a_4-x_1)\cdots(a_4-x_4)}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}} \\
- \frac{(a_6-x_1)\cdots(a_6-x_4)}{a_{06}a_{26}a_{46}\cancel{a_{48}}\,a_{68}} + \frac{(a_8-x_1)\cdots(a_8-x_4)}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}} \\
1 = \frac{(a_0-x_1)\cdots(a_0-x_4)}{a_{01}a_{02}a_{04}a_{06}} - \frac{(a_1-x_1)\cdots(a_1\cdots x_4)}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}} + \frac{(a_2-x_1)\cdots(a_2-x_4)}{a_{02}a_{12}a_{24}a_{26}} \\
- \frac{(a_4-x_1)\cdots(a_4-x_4)}{a_{04}a_{14}a_{24}a_{46}} + \frac{(a_6-x_1)\cdots(a_6-x_4)}{a_{06}a_{16}a_{26}a_{46}}
\end{aligned}
$$

$$1 = \frac{(a_0 - x_1)\cdots(a_0 - x_4)}{a_{02}a_{03}a_{04}a_{06}} - \frac{(a_2 - x_1)\cdots(a_2 - x_4)}{a_{02}a_{23}a_{24}a_{26}} + \frac{(a_3 - x_1)\cdots(a_3 - x_4)}{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}}$$
$$- \frac{(a_4 - x_1)\cdots(a_4 - x_4)}{a_{04}a_{24}a_{34}a_{46}} + \frac{(a_6 - x_1)\cdots(a_6 - x_4)}{a_{06}a_{26}a_{36}a_{46}}$$

$$1 = \frac{(a_0 - x_1)\cdots(a_0 - x_4)}{a_{02}a_{04}a_{05}a_{06}} - \frac{(a_2 - x_1)\cdots(a_2 - x_4)}{a_{02}a_{24}a_{25}a_{26}} + \frac{(a_4 - x_1)\cdots(a_4 - x_4)}{a_{04}a_{24}a_{45}a_{46}}$$
$$- \frac{(a_5 - x_1)\cdots(a_5 - x_4)}{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}} + \frac{(a_6 - a_1)\cdots(a_6 - x_4)}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{56}}.$$

$$1 = \frac{(a_0 - x_1)\cdots(a_0 - x_4)}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{07}} - \frac{(a_2 - x_1)\cdots(a_2 - x_4)}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{27}} + \frac{(a_4 - x_1)\cdots(a_4 - x_4)}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{47}}$$
$$- \frac{(a_6 - x_1)\cdots(a_6 - x_4)}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{67}} + \frac{(a_7 - x_1)\cdots(a_7 - x_4)}{a_{07}a_{27}a_{47}a_{67}}$$

welche, wie man sich leicht überzeugt, identisch befriedigt werden. Setzt man nämlich

$$\varphi(z) = (z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - x_4)$$
$$Q(z) = (z - a_0)(z - a_2)(z - a_4)(z - a_6)(z - a_8) \cdot \left(\frac{dQ(z)}{dz}\right)_{z = a_\alpha} = Q'(a_\alpha),$$

so lässt sich die erste der obigen Gleichungen auf die Form bringen:

$$1 = \frac{\varphi(a_0)}{Q'(a_0)} + \frac{\varphi(a_2)}{Q'(a_2)} + \frac{\varphi(a_4)}{Q'(a_4)} + \frac{\varphi(a_6)}{Q'(a_6)} + \frac{\varphi(a_8)}{Q'(a_8)}$$

und dass diese Gleichung identisch befriedigt wird, folgt unmittelbar aus der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\varphi(z)}{Q(z)} = \frac{\varphi(a_0)}{Q'(a_0)} \cdot \frac{1}{z - a_0} + \frac{\varphi(a_2)}{Q'(a_2)} \cdot \frac{1}{z - a_2} + \cdots + \frac{\varphi(a_8)}{Q'(a_8)} \frac{1}{z - a_8}$$

durch Multiplication mit $Q(z)$ und Aufsuchung des Coëfficienten von z^5. Die Identität der übrigen Gleichungen ergiebt sich alsdann unmittelbar, wenn man an Stelle von a_8 der Reihe nach a_1, a_3, a_5, a_7 setzt. — Daraus folgt dann die Berechtigung, die Ausdrücke der 15 einfachen ϑ-Quotienten durch $x_1 \cdots x_4$ in der Form (XVI) anzusetzen.

Man kann nun auch alle möglichen anderen ϑ-Quotienten durch $x_1 \cdots x_4$ ausdrücken.

Ich will allgemein zeigen, in welcher Weise dies für die ϑ-Quotienten, welche aus einer ϑ-Function mit zweifachem Index und $\vartheta_9(v_1 \cdots v_4)$ gebildet sind, zu bewerkstelligen ist, da diese späterhin in den ersten Ableitungen der Functionen (XVI) auftreten werden. Hierzu setze ich zunächst in der Formel (D, 2) — S. 447 — statt $u_\alpha \cdots v_\alpha$ und bezeichne analog den bisher gebrauchten Abkürzungen $\vartheta_\mu(v_1 \cdots v_4)$ mit $[\mu]$, $\vartheta_\mu(0, 0, 0, 0)$ mit (μ) — dann wird

$$\text{(H)} \qquad (\eta)(\eta\alpha\beta)[\alpha][\beta] = \sum\nolimits_\gamma (-1)^{c_\gamma} (\eta\gamma\alpha)(\eta\gamma\beta)[\gamma][\gamma\alpha\beta].$$

Ich bezeichne ferner mit

$$r_0\, r_1\, r_2\, r_3\, r_4$$

die Reihe der geraden Zahlen 0, 2, 4, 6, 8 in irgend einer Reihenfolge, desgleichen mit

$$s_1\ s_2\ s_3\ s_4$$

die der ungeraden 1, 3, 5, 7. Dann wird zunächst — wenn ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 gleich r_1, r_2, r_3, r_4 gewählt werden:

$$\eta = (1,\ 3,\ 5,\ 7,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4) = r_0.$$

Ausserdem werde noch gesetzt:

$$\alpha = s_1 \quad \beta = (r_0 s_1) \quad \delta = (r_1 r_2 r_3 r_4).$$

Dann nimmt γ die folgende Werthe an:

$$\begin{array}{llllllll}
(r_1 r_2 r_3 r_4) & & - & - & - & - & & (1)\\
(r_2 r_3 r_4) & (r_1 r_3 r_4) & (r_1 r_2 r_4) & (r_1 r_2 r_3) & & - & & (2)\\
(r_3 r_4) & (r_2 r_4) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & (r_1 r_2) & & (3)\\
r_4 \quad r_3 & r_2 \quad r_1 & - & - & - & - & & (4)\\
9 & - & - & - & - & - & & (5).
\end{array}$$

Mithin erhält $\eta\gamma\beta$ für die γ der ersten, zweiten und fünften Zeile die Werthe:

$$\begin{array}{l}
(s_1 s_2 s_3 s_4 r_0 s_1)\\
(s_1 s_2 s_3 s_4 r_0 r_1 s_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (s_1 s_2 s_3 s_4 r_0 r_4 s_1)\\
s_1
\end{array}$$

und $\eta\gamma\alpha$ für die γ der dritten Zeile die Werthe:

$$(s_1 s_2 s_3 s_4 r_1 r_2 s_1)\ (s_1 s_2 s_3 s_4 r_1 r_3 s_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (s_1 s_2 s_3 s_4 r_3 r_4 s_1),$$

so dass die betreffenden Glieder sämmtlich verschwinden müssen, und nur diejenigen mit den γ der vierten Zeile übrig bleiben, für welche

$$\begin{aligned}
\eta\gamma\alpha &= (r_0 r_4 s_1),\ (r_0 r_3 s_1),\ (r_0 r_2 s_1),\ (r_0 r_1 s_1)\\
\eta\gamma\beta &= \ (r_4 s_1), \quad\ (r_3 s_1), \quad\ (r_2 s_1), \quad\ (r_1 s_1)\\
\gamma\alpha\beta &= \ (r_0 r_4), \quad\ (r_0 r_3), \quad\ (r_0 r_2), \quad\ (r_0 r_1).
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir daher noch mit $c_1, \cdot \cdot\, c_4$ den Factor ± 1, so liefert die Formel (H) nunmehr die folgende Beziehung:

$$\text{(J)} \begin{cases} (9)(r_0)[s_1][r_0 s_1] + c_1 (r_1 s_1)(r_0 r_1 s_1)[r_1][r_0 r_1] + c_2 (r_2 s_1)(r_0 r_2 s_1)[r_2][r_0 r_2] \\ \qquad + c_3 (r_3 s_1)(r_0 r_3 s_1)[r_3][r_0 r_3] + c_4 (r_4 s_1)(r_0 r_4 s_1)[r_4][r_0 r_4] = 0. \end{cases}$$

Nun müssen ferner lineare homogene Relationen — (wie allgemein gezeigt wurde) — zwischen folgenden ϑ-Quadraten stattfinden:

$$\begin{array}{l}
[9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_2]\ [r_3]\ [s_1]\\
[9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_2]\ [r_4]\ [s_1]\\
[9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_3]\ [r_4]\ [s_1]\\
[9]\ [r_0]\ [r_2]\ [r_3]\ [r_4]\ [s_1],
\end{array}$$

folglich, wenn man auf die Argumente in den betreffenden Gleichungen diejenigen Substitutionen halber Perioden angewendet denkt, welche durch den Index r_0 charakterisirt werden, auch zwischen folgenden ϑ-Quadraten:

$$
\begin{array}{l}
[r_0]\ [9]\ [r_0 r_1]\ [r_0 r_2]\ [r_0 r_3]\ [r_0 s_1] \\
[r_0]\ [9]\ [r_0 r_1]\ [r_0 r_2]\ [r_0 r_4]\ [r_0 s_1] \\
[r_0]\ [9]\ [r_0 r_1]\ [r_0 r_3]\ [r_0 r_4]\ [r_0 s_1] \\
[r_0]\ [9]\ [r_0 r_2]\ [r_0 r_3]\ [r_0 r_4]\ [r_0 s_1] .
\end{array}
$$

Aus diesen vier Gleichungen in Verbindung mit Gl. (J) kann man nun irgend vier der 5 Grössen $[r_0 r_1] \cdots [r_0 r_4]$, $[r_0 s_1]$ eliminiren und erhält dann schliesslich eine Gleichung, in welcher ausser *einer* solchen ϑ-Function mit den Argumenten $(v_1 \cdots v_4)$ nur noch solche mit einfachen Indices, und ausserdem ϑ-Functionen mit Nullargumenten enthalten sind, und aus der man also vermöge der Ausdrücke (XVI) und (XII), (XIII), (XIV) die Quotienten von der Form $\frac{[r_0 r_1]^2}{[9]^2} \cdots$ und $\frac{[r_0 s_1]^2}{[9]^2}$ als Functionen von $x_1 \cdots x_4$ und der Constanten $a_0 \cdots a_8$ darstellen kann. Hierbei bedeuten r_0, r_1 beliebige gerade, s_1 eine beliebige ungerade Zahl der Reihe $0, 1, \cdots 8$. Es bleibt also noch der Fall zu betrachten übrig, dass beide Ziffern des zusammengesetzten Index ungerade Zahlen sind, der betreffende Quotient also die Form hat $\frac{[s_1 s_2]^2}{[9]^2}$.

Nun muss eine homogene Linear-Relation zwischen den ϑ-Quadraten:

$$[s_1]\ [s_2]\ [9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_2]$$

bestehen, folglich auch — vermöge der Substitution (s_1) — zwischen:

$$[9]\ [s_1 s_2]\ [s_1]\ [r_0 s_1]\ [r_1 s_1]\ [r_2 s_1]$$

und da diese Gleichung ausser $[s_1 s_2]$ nur solche ϑ-Functionen enthält, wis sie bereits oben betrachtet worden sind, so ergiebt sich, dass man jetzt auch die Quotienten von der Form $\frac{[s_1 s_2]^2}{[9]^2}$ als Functionen von $x_1, \cdots x_4$, $a_0 \cdots a_8$ darstellen kann.

Setzt man

$$
\begin{array}{l}
(z - a_0)(z - a_1) \cdots (z - a_7)(z - a_8) = R(z) \\
(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - x_4) = \varphi(z)
\end{array}
$$

und

$$\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)_{z=a_\alpha} = R'(a_\alpha)$$

$$\left(\frac{d\varphi(z)}{dz}\right)_{z=x_\alpha} = \varphi'(x_\alpha),$$

so ergeben sich auf diese Weise — wenn man die zweideutigen Wurzelvorzeichen so wählt, dass die Endausdrücke mit denjenigen übereinstimmen, wie sie späterhin in den Ableitungen der Functionen mit einfachem Index auftreten werden — Beziehungen von der Form:

$$\text{(XVII)} \quad \frac{\vartheta_{\lambda\mu}(v_1 \cdots v_4)}{\vartheta_9(v_1 \cdots v_4)} = \frac{\sqrt{(-1)^{\bar{\lambda}+\bar{\mu}} a_{\lambda\mu} \varphi(a_\lambda) \varphi(a_\mu)}}{\sqrt[4]{(-1)^{\lambda+\mu} R'(a_\lambda) R'(a_\mu)}} \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a} - a_\lambda)(x_\mathfrak{a} - a_\mu) \varphi'(x_\mathfrak{a})} \right\}$$

wo $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ die grösste in $\frac{\lambda}{2}$ resp. $\frac{\mu}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnen und $a_\lambda > a_\mu$, also $a_{\lambda\mu}$ positiv zu nehmen ist.

Es handelt sich jetzt darum, den Beweis zu führen, dass der durch die Gleichungen (XVI) und (XVII) statuirte Zusammenhang zwischen den Variablen v_1, v_2, v_3, v_4 und x_1, x_2, x_3, x_4 wirklich ein derartiger ist, dass sich die Differentialien $dv_1 \cdots dv_4$ als hyperelliptische Differentialausdrücke in $x_1 \cdots x_4$ darstellen, dass also Gleichungen bestehen von der Form:

$$dv_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{b} F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(x_\mathfrak{b}, \sqrt{R(x_\mathfrak{b})})\, dx_\mathfrak{b}.$$

Zu diesem Behufe führen wir vier neue Variablen $u_1 \cdots u_4$ ein, welche wir durch hyperelliptische Differentialgleichungen von ganz bestimmter Form definiren: alsdann wird sich zeigen lassen, dass sich jede der Grössen $dv_\mathfrak{a}$ in der Form

$$dv_\mathfrak{a} = A_\mathfrak{a} du_1 + B_\mathfrak{a} du_2 + C_\mathfrak{a} du_3 + D_\mathfrak{a} du_4$$

darstellen lässt, wo $A_\mathfrak{a} \cdots D_\mathfrak{a}$, welche offenbar vermöge der identischen Relation

$$dv_\mathfrak{a} = \frac{\partial v_\mathfrak{a}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v_\mathfrak{a}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial v_\mathfrak{a}}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial v_\mathfrak{a}}{\partial u_4} du_4$$

nichts anderes sind als die partiellen Ableitungen von $v_\mathfrak{a}$ nach $u_1 \cdots u_4$, sich als fest bestimmte Constanten ergeben.

Ich setze

$$(z - a_1)(z - a_3)(z - a_5)(z - a_7) = P(z), \left(\frac{dP(z)}{dz}\right)_{z = a_\mathfrak{a}} = P'(a_\mathfrak{a}),$$

dann sollen $u_1 \cdots u_4$ durch die folgenden Differentialgleichungen definirt werden:

$$\text{(XVIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} du_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_1)}{x_1 - a_1} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_2)}{x_2 - a_1} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_3)}{x_3 - a_1} \cdot \frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_4)}{x_4 - a_1} \cdot \frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \\ du_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_1)}{x_1 - a_3} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_2)}{x_2 - a_3} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_3)}{x_3 - a_3} \cdot \frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_4)}{x_4 - a_3} \cdot \frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \\ du_3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_1)}{x_1 - a_5} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_2)}{x_2 - a_5} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_3)}{x_3 - a_5} \cdot \frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_4)}{x_4 - a_5} \cdot \frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \end{aligned} \right.$$

$$\text{(XVIII)}\quad \begin{cases} du_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_1)}{x_1-a_7}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_2)}{x_2-a_7}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_3)}{x_3-a_7}\cdot\frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_4)}{x_4-a_7}\cdot\frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesem System dx_2, dx_3, dx_4, und beachtet, dass:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial x_1}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial x_1}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial x_1}{\partial u_4}du_4,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} = -\frac{(x_4-a_1)(x_3-a_1)(x_2-a_1)\,2\sqrt{R(x_1)}}{a_{13}a_{15}a_{17}(x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_1-x_2)} = \frac{2\varphi(a_1)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_1)(a_1-x_1)\varphi'(x_1)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_2} = \frac{(x_4-a_3)(x_3-a_3)(x_2-a_3)\,2\sqrt{R(x_1)}}{a_{13}a_{35}a_{37}(x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_1-x_2)} = \frac{2\varphi(a_3)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_3)(a_3-x_1)\varphi'(x_1)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_3} = -\frac{(x_4-a_5)(x_3-a_5)(x_2-a_5)\,2\sqrt{R(x_1)}}{a_{15}a_{35}a_{57}(x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_1-x_2)} = \frac{2\varphi(a_5)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_5)(a_5-x_1)\varphi'(x_1)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_4} = \frac{(x_4-a_7)(x_3-a_7)(x_2-a_7)\,2\sqrt{R(x_1)}}{a_{17}a_{37}a_{57}(x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_1-x_2)} = \frac{2\varphi(a_7)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_7)(a_7-x_1)\varphi'(x_1)}$$

und analoge Ausdrücke für x_2, x_3, x_4, so dass allgemein:

$$\text{(XIX)}\qquad \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \frac{2\varphi(a_{2\mathfrak{b}-1})\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{P'(a_{2\mathfrak{b}-1})(a_{2\mathfrak{b}-1}-x_{\mathfrak{a}})\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}.$$

Ich bezeichne ferner

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9(v_1\cdots v_4)} \text{ mit } f_\alpha(v_1\cdots v_4)$$

und bilde zunächst

$$\frac{\partial f_0(v\cdots v_4)}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}\left\{\frac{\sqrt{\varphi(a_0)}}{\sqrt[4]{R'(a_0)}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{R'(a_0)}}\left\{\frac{\partial\sqrt{\varphi(a_0)}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial\sqrt{\varphi(a_0)}}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial x_4}{\partial u_1}\right\}$$

$$= -\frac{\varphi(a_1)\sqrt{\varphi(a_0)}}{\sqrt[4]{R'(a_0)}\cdot P'(a_1)}\sum_{\mathfrak{a}=1}^{4}\frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(a_0-x_{\mathfrak{a}})(a_1-x_{\mathfrak{a}})\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}$$

$$\text{(XXa)}\quad \begin{cases} \quad = -\sqrt{\frac{a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}}{a_{13}a_{15}a_{17}}}\cdot f_1(v_1\cdots v_4)\,f_{01}(v_1\cdots v_4) \\ \text{Ebenso:} \\ \frac{\partial f_0(v_1\cdots v_4)}{\partial u_2} = -\sqrt{\frac{a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}}{a_{13}a_{35}a_{37}}}\cdot f_3(v_1\cdots v_4)\,f_{03}(v_1\cdots v_4) \\ \frac{\partial f_0(v_1\cdots v_4)}{\partial u_3} = -\sqrt{\frac{a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}}{a_{15}a_{35}a_{57}}}\cdot f_5(v_1\cdots v_4)\,f_{05}(v_1\cdots v_4) \\ \frac{\partial f_0(v_1\cdots v_4)}{\partial u_4} = -\sqrt{\frac{a_{27}a_{47}a_{67}a_{78}}{a_{17}a_{37}a_{57}}}\cdot f_7(v_1\cdots v_4)\,f_{07}(v_1\cdots v_4) \end{cases}$$

und in ähnlicher Weise, wenn wiederum:

$$(z - a_0)(z - a_2)(z - a_4)(z - a_6)(z - a_8) = Q(z)$$

gesetzt wird, allgemein:

$$\text{(XXb)} \quad \frac{\partial f_{2\mathfrak{a}}(v_1 \cdots v_4)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\sqrt{\pm \frac{1}{(a_{2\mathfrak{b}-1} - a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{-Q(a_{2\mathfrak{b}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{b}-1})}} f_{2\mathfrak{b}-1}(v_1 \cdots v_4) f_{2\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(v_1 \cdots v_4)$$

wo das Vorzeichen von $\pm (a_{2\mathfrak{b}-1} - a_{\mathfrak{a}})$ so zu wählen ist, dass diese Grösse — und damit, wie leicht ersichtlich, der ganze Ausdruck unter der Wurzel positiv wird.

Es sollen jetzt diese Ausdrücke für die partiellen Ableitungen von $f_{2\mathfrak{a}}(v_1 \cdots v_4)$ nach $u_1 \cdots u_4$ mit den entsprechenden Ableitungen nach $v_1 \cdots v_4$ verglichen werden. Um diese letzteren herzuleiten, entwickle ich eine Formel, vermöge deren gewisse ϑ-Producte, deren Argumente aus Summen und Differenzen zweier Systeme von Variablen bestehen, sich durch Aggregate von ϑ-Functionen mit den betreffenden einfachen Variablen ausdrücken.

Aus der allgemeinen Additionsformel (D, 1) — S. 447 — folgt, wenn man $w_{\mathfrak{a}} = 0$ setzt und ausserdem $v_{\mathfrak{a}}$ statt $u_{\mathfrak{a}}$, $w_{\mathfrak{a}}$ statt $v_{\mathfrak{a}}$ schreibt:

$$\text{(K)} \quad \vartheta_\eta \vartheta_{\eta\alpha\beta} \vartheta_\alpha(v_1 + w_1, \cdots v_4 + w_4) \vartheta_\beta(v_1 - w_1, \cdots v_4 - w_4)$$
$$= \sum_\gamma (-1)^{C_\gamma} \vartheta_\gamma(v_1 \cdots v_4) \vartheta_{\gamma\alpha\beta}(v_1 \cdots v_4) \vartheta_{\eta\gamma\alpha}(w_1 \cdots w_4) \vartheta_{\eta\gamma\beta}(w_1 \cdots w_4) \cdot$$

Wählt man jetzt

$$\eta = (1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7) = 9 \quad \delta = 9 \quad \alpha = 0 \quad \beta = 9$$

und bezeichnet zur Abkürzung

$$\begin{array}{ll} \vartheta_\lambda(v_1 + w_1, \cdots v_4 + w_4) & \text{mit } P_\lambda \\ \vartheta_\lambda(v_1 - w_1, \cdots v_4 - w_4) & \text{mit } Q_\lambda \\ \vartheta_\lambda(v_1 \cdots v_4) & \text{mit } p_\lambda \\ \vartheta_\lambda(w_1 \cdots w_4) & \text{mit } q_\lambda \\ \vartheta_\lambda(0 \cdots 0) \text{ wie früher} & \text{mit } \lambda, \end{array}$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \text{(XXI)} \quad 0 \cdot 9 \cdot P_0 \cdot Q_9 = {} & p_9 p_0 q_9 q_0 + p_1 p_{01} q_1 q_{01} + p_3 p_{03} q_3 q_{03} + p_5 p_{05} q_5 q_{05} \\ & + p_7 p_{07} q_7 q_{07} + p_{13} p_{013} q_{13} q_{013} + p_{15} p_{015} q_{15} q_{015} \\ & + p_{17} p_{017} q_{17} q_{017} + p_{35} p_{035} q_{35} q_{035} + p_{37} p_{037} q_{37} q_{037} \\ & + p_{57} p_{057} q_{57} q_{057} + p_{135} p_{0135} q_{135} q_{0135} + p_{137} p_{0137} q_{137} q_{0137} \\ & + p_{157} p_{0157} q_{157} q_{0157} + p_{357} p_{0357} q_{357} q_{0357} \\ & + p_{1357} p_{2468} q_{1357} q_{2468} \cdot \end{aligned}$$

(Ich bemerke beiläufig, dass sich ganz analoge Relationen für die noch übrigen P_λ mit einfachem geraden Index ergeben, wenn man in Gl. (K) mit Beibehaltung der übrigen Bestimmungen α der Reihe nach die Werthe 2, 4, 6, 8 annehmen lässt. — Giebt man ferner α die

Werthe 1, 3, 5, 7, so erhält man ähnliche Beziehungen für die P_λ mit ungeradem Index; nur darf in diesen Fällen η nicht den Werth 9 erhalten, weil sonst $\vartheta_{\eta\alpha\beta}$ und somit die linke Seite verschwinden würde. Man hat vielmehr dann für η irgend einen geraden Index z. B. $\eta = (1, 3, 5, 7, 0, 2, 4, 6) = 8$ zu wählen und man erhält z. B. auf diese Weise für $\alpha = 1$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 18 \cdot P_1 \cdot Q_9 = & p_9 p_1 q_8 q_{18} + p_0 p_{01} q_{08} q_{018} - p_2 p_{12} p_{28} p_{128} - p_4 p_{14} p_{18} p_{148} \\ & p_6 p_{16} q_{68} q_{168} - p_{02} p_{012} q_{028} q_{0128} - p_{04} p_{014} q_{048} q_{0148} \\ & - p_{06} p_{016} q_{068} q_{0168} + p_{24} p_{124} q_{248} q_{1248} + p_{26} p_{126} q_{268} p_{1268} \\ & + p_{46} p_{146} q_{468} q_{1468} + p_{024} p_{0124} q_{0248} q_{3567} + p_{026} p_{0126} q_{0268} q_{3457} \\ & + p_{046}' p_{0146} q_{0468} q_{2357} - p_{246} p_{1246} q_{2468} q_{0357} \\ & - p_{0246} p_{3578} q_{1357} q_{357} \cdot) \end{aligned}$$

Ich differenzire jetzt Gl. (XXI) nach $w_\mathfrak{a}$ (für $\mathfrak{a} = 1, 2, 3, 4$) und setze dann $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$. Dabei ist zu beachten, dass wenn F eine beliebige Function von ϱ Variablen darstellt

$$\frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial y_\mathfrak{a}} = \frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial (x_\mathfrak{a} \pm y_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\partial (x_\mathfrak{a} \pm y_\mathfrak{a})}{\partial y_\mathfrak{a}}$$

$$= \pm \frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial (x_\mathfrak{a} \pm y_\mathfrak{a})},$$

mithin

$$\left(\frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial y_\mathfrak{a}}\right)_{y_1 \cdots y_\varrho = 0} = \pm \frac{\partial F(x_1 \cdots x_\varrho)}{\partial x_\mathfrak{a}}.$$

Es wird daher bei jener Differentiation die linke Seite der Gleichung (XXI) die Form annehmen:

$$\left(\frac{\partial (P_0 Q_9)}{\partial w_\mathfrak{a}}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0} = \left(Q_9 \frac{\partial P_0}{\partial (v_\mathfrak{a} + w_\mathfrak{a})} - P_0 \frac{\partial Q_9}{\partial (v_\mathfrak{a} - w_\mathfrak{a})}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0}$$

$$= p_9 \frac{\partial p_0}{\partial v_\mathfrak{a}} - p_0 \frac{\partial p_9}{\partial v_\mathfrak{a}}$$

$$= p_9^2 \frac{\partial \frac{p_0}{p_9}}{\partial v_\mathfrak{a}}$$

oder mit Anwendung der bereits früher gebrauchten Bezeichnungen:

$$\left(\frac{\partial (P_0 Q_9)}{\partial w_\mathfrak{a}}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0} = [9]^2 \frac{\partial f_0 (v_1 \cdots v_4)}{\partial v_\mathfrak{a}}.$$

Auf der rechten Seite der Gl. (XXI) sind die p von $w_\mathfrak{a}$ unabhängig; ferner müssen die Ausdrücke von der Form

$$\frac{\partial (q_\alpha q_\beta)}{\partial w_\mathfrak{a}} = q_\alpha \frac{\partial q_\beta}{\partial w_\mathfrak{a}} + q_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial w_\mathfrak{a}}$$

für $w_1 \cdots w_4 = 0$ verschwinden, sobald α und β *gleichzeitig* Indices gerader oder Indices ungerader Theta's sind (weil im ersten Falle

$\frac{\partial q_\alpha}{\partial w_\mathfrak{a}}$ und $\frac{\partial q_\beta}{\partial w_\mathfrak{a}}$ als erste Ableitungen gerader Function, im zweiten q_α und q_β für die Nullargumente verschwinden müssen. Ist α der Index einer geraden, β der einer ungeraden ϑ-Function — oder umgekehrt, so nehmen jene Ausdrücke die Form

$$\left(q_\alpha \frac{\partial q_\beta}{\partial w_\mathfrak{a}}\right)_{w_1 \dots w_4 = 0} \text{ resp. } \left(q_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial w_\mathfrak{a}}\right)_{w_1 \dots w_4 = 0}$$

an, und müssen in Folge der für die hier betrachteten hyperelliptischen Theta's geltenden Bedingungen auch diese noch verschwinden, sobald α resp. β einen Index aus der Reihe

135, 137, 157, 357, 0246, 0248, 0268, 0468, 2468, 1357

bezeichnet. Beachtet man schliesslich noch, dass

$$(q_\alpha)_{w_1 \dots w_4 = 0} = (p_\alpha)_{v_1 \dots v_4 = 0},$$

wofür wir wiederum wie früher einfach α schreiben können, und dass

$$\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial w_\mathfrak{a}}\right)_{w_1 \dots w_4 = 0} = \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial v_\mathfrak{a}}\right)_{v_1 \dots v_4 = 0},$$

wofür wir zur Abkürzung der Bezeichnung $(\alpha)'_{v_\mathfrak{a}}$ einführen wollen, so ergiebt sich in Folge der bezeichneten Differentiation aus Gl. (XXI) die folgende Relation:

$$\text{(XXII)} \qquad 0.9.\frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial v_\mathfrak{a}} = 01.(1)'_{v_\mathfrak{a}} f_1(v_1 \dots) f_{01}(v_1 \dots)$$
$$+ 03(3)'_{v_\mathfrak{a}} f_3(v_1 \dots) f_{03}(v_1 \dots) + 05.(5)'.f_5(v_1 \dots) f_{05}(v_1 \dots) + 07(7)'_{v_\mathfrak{a}}.f_7(v_1 \dots) f_{07}(v_1 \dots)$$

und wenn man diese jetzt mit den unter (XX, a) gegebenen Ausdrücken vergleicht, so folgt:

$$\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial v_\mathfrak{a}} = -\frac{01\cdot(1)'_{v_\mathfrak{a}}}{0\cdot 9}\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}}}\cdot\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_1} - \frac{03\cdot(3)'_{v_\mathfrak{a}}}{0\cdot 9}\sqrt{\frac{a_{13}a_{35}a_{37}}{a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}}}\cdot\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_2}$$
$$-\frac{05\cdot(5)'_{v_\mathfrak{a}}}{0\cdot 9}\sqrt{\frac{a_{15}a_{35}a_{57}}{a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}}}\cdot\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_3} - \frac{07\cdot(7)'_{v_\mathfrak{a}}}{0\cdot 9}\sqrt{\frac{a_{17}a_{37}a_{57}}{a_{27}a_{47}a_{67}a_{78}}}\cdot\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_4}$$

und weil

$$\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial v_\mathfrak{a}} = \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial v_\mathfrak{a}} + \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial v_\mathfrak{a}} + \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial v_\mathfrak{a}} + \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial v_4}\cdot\frac{\partial u_4}{\partial v_\mathfrak{a}}$$

so ergiebt sich:

$$\text{(XXIII)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial v_\mathfrak{a}} = -\sqrt{\dfrac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}}}\cdot\dfrac{01\cdot(1)'_{v_\mathfrak{a}}}{0\cdot 9} = -\sqrt[4]{\dfrac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}}}\cdot\dfrac{(1)'_{v_\mathfrak{a}}}{9} \\ \qquad = -\sqrt[4]{-\dfrac{P'(a_1)}{Q(a_1)}}\cdot\dfrac{(1)'_{v_\mathfrak{a}}}{9} \end{cases}$$

$$
(\mathrm{XXIII})\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial v_\alpha} &= -\sqrt{\frac{a_{13}a_{35}a_{37}}{a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}}}\cdot\frac{03\cdot(3)'_{v_\alpha}}{0\cdot 9} = -\sqrt[4]{\frac{a_{13}a_{35}a_{37}}{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}}}\cdot\frac{(3)'_{v_\alpha}}{9}\\
&= -\sqrt[4]{-\frac{P'(a_3)}{Q(a_3)}}\cdot\frac{(3)'_{v_\alpha}}{9}\\
\frac{\partial u_3}{\partial v_\alpha} &= -\sqrt{\frac{a_{15}a_{35}a_{57}}{a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}}}\cdot\frac{05\cdot(5)'_{v_\alpha}}{0\cdot 9} = -\sqrt[4]{\frac{a_{15}a_{35}a_{57}}{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}}}\cdot\frac{(5)'_{v_\alpha}}{9}\\
&= -\sqrt[4]{-\frac{P'(a_5)}{Q(a_5)}}\cdot\frac{(5)'_{v_\alpha}}{9}\\
\frac{\partial u_4}{\partial v_\alpha} &= -\sqrt{\frac{a_{17}a_{37}a_{57}}{a_{27}a_{47}a_{67}a_{78}}}\cdot\frac{07\cdot(7)'_{v_\alpha}}{0\cdot 9} = -\sqrt[4]{\frac{a_{17}a_{37}a_{57}}{a_{07}a_{27}a_{47}a_{67}a_{78}}}\cdot\frac{(7)'_{v_\alpha}}{9}\\
&= -\sqrt[4]{-\frac{P'(a_7)}{Q(a_7)}}\cdot\frac{(7)'_{v_\alpha}}{9}
\end{aligned}\right.
$$

(NB. Würde man statt des bei der vorangehenden Rechnung als charakteristisch auftretenden Index 0 irgend einen der anderen geraden Indices 2, 4, 6, 8 gewählt haben, so hätte man in ganz analoger Weise erhalten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial v_\alpha} &= -\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{14}a_{16}a_{18}}}\cdot\frac{12(1)'_{v_\alpha}}{2\cdot 9} = -\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{16}a_{18}}}\cdot\frac{14(1)'_{v_\alpha}}{4\cdot 9}\\
&= -\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{18}}}\cdot\frac{16(1)'_{v_\alpha}}{6\cdot 9} = -\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}}}\cdot\frac{18(1)'_{v_\alpha}}{8\cdot 9}\quad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Ausdrücke, welche, wie man sich leicht überzeugt, in Folge der Beziehungen (XII) u. (XIII) (S. 458, 459) sowohl unter einander als mit dem unter (XXIII) gegebenen identisch sind.)

Es sind hiermit die Coëfficienten des Systems

$$
(\mathrm{XXIV})\quad\left\{\begin{aligned}
du_1 &= \mathsf{A}_1 dv_1 + \mathsf{B}_1 dv_2 + \Gamma_1 dv_3 + \Delta_1 dv_4\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
du_4 &= \mathsf{A}_4 dv_4 + \mathsf{B}_4 dv_2 + \Gamma_4 dv_3 + \Delta_4 dv_4
\end{aligned}\right.
$$

bestimmt und folglich auch diejenigen des reciproken Systems

$$
(\mathrm{XXV})\quad\left\{\begin{aligned}
dv_1 &= A_1 du_1 + B_1 du_2 + C_1 du_3 + D_1 du_4\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
dv_4 &= A_4 du_1 + B_4 du_2 + C_4 du_3 + D_4 du_4
\end{aligned}\right.
$$

d. h. es sind $dv_1 \cdots dv_4$ als hyperelliptische Differentiale der

$$x_1 \cdots x_4,\ \sqrt{R(x_1)} \cdots \sqrt{R(x_4)}$$

dargestellt. — Die als Nenner der Coëfficienten $A_\alpha \cdots D_\alpha$ auftretende Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} (1)'_{v_1} & (1)'_{v_2} & (1)'_{v_3} & (1)'_{v_4} \\ (3)'_{v_1} & (3)'_{v_2} & (3)'_{v_3} & (3)'_{v_4} \\ (5)'_{v_1} & (5)'_{v_2} & (5)'_{v_3} & (5)'_{v_4} \\ (7)'_{v_1} & (7)'_{v_2} & (7)'_{v_3} & (7)'_{v_4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \vartheta_1(v_1 \cdots)}{\partial v_1}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial \vartheta_1(v_1 \cdots)}{\partial v_4}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \left(\frac{\partial \vartheta_7(v_1 \cdots)}{\partial v_1}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial \vartheta_7(v_1 \cdots)}{\partial v_1}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} \end{vmatrix} = \Delta(1, 3, 5, 7).$$

lässt sich durch ein Product gerader ϑ-Functionen mit Nullargumenten darstellen, nämlich

$$\Delta(1, 3, 5, 7) = \pi^4 \cdot \vartheta_9 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_4 \vartheta_6 \vartheta_8$$

und es existiren ähnliche Beziehungen für alle möglichen Determinanten von der Form $\Delta(s_1, s_2, s_3, s_4)$ — wenn $s_1 \cdots s_4$ irgend 4 Indices ungerader ϑ-Functionen bezeichnen. —

Nachdem nun gezeigt, dass zwischen $du_1 \cdots du_4$ und $dv_1 \cdots dv_4$ lineare homogene Relationen mit constanten Coefficienten bestehen, lassen sich diese Coefficienten auch noch in der von Herrn Weierstrass gegebenen Form, durch die sog. reellen Periodicitätsmoduln der Functionen $f_\alpha(v_1 \cdots v_4)$ ausdrücken. Man hat dann nur die Gleichungen (XXIV), nachdem man für $du_1 \cdots du_4$ die hyperelliptischen Differentialausdrücke (XVIII) eingesetzt hat, für entsprechende Werthsysteme von $(v_1 \cdots v_4)$ und $(x_1 \cdots x_4)$ zu integriren — wobei hinsichtlich der Integrationswege und des Vorzeichens von $\sqrt{R(x)}$ die Bestimmungen maassgebend sind, welche Herr Weierstrass in seiner Abhandlung über Abel'sche Functionen — Crelle's Journal, Bd. 47, § 5 — gegeben hat.

Man erhält durch Integration der Gleichungen (XXIV) von dem Werthsystem

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1, a_3, a_5, a_7)$$

(welches wie unmittelbar ersichtlich den Bedingungen (XVI) genügt) bis zu je einem der folgenden 4 Werthsysteme:

$$\begin{array}{ll} (v_1, v_2, v_3, v_4) = (\tfrac{1}{2}, 0, 0, 0) & (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_2, a_3, a_5, a_7) \\ \qquad (0, \tfrac{1}{2}, 0, 0) & \qquad (a_1, a_4, a_5, a_7) \\ \qquad (0, 0, \tfrac{1}{2}, 0) & \qquad (a_1, a_3, a_6, a_7) \\ \qquad (0, 0, 0, \tfrac{1}{2}) & \qquad (a_1, a_3, a_5, a_8) \end{array}$$

(welche wiederum die Beziehungen (XVI) befriedigen) — wenn

$$\text{(XXVI)} \qquad \int_{a_{2\mathfrak{b}-1}}^{a_{2\mathfrak{b}}} \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x)}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

gesetzt wird, die vier Gleichungen

$$K_{\mathfrak{a},1} = \tfrac{1}{2}\mathsf{A}_{\mathfrak{a}} \quad K_{\mathfrak{a},2} = \tfrac{1}{2}\mathsf{B}_{\mathfrak{a}} \quad K_{\mathfrak{a},3} = \tfrac{1}{2}\Gamma_{\mathfrak{a}} \quad K_{\mathfrak{a},4} = \tfrac{1}{2}\Delta_{\mathfrak{a}}$$

und somit

$$\text{(XXVII)} \left\{ \begin{array}{l} du_1 = 2K_{11}\, dv_1 + 2K_{12}\, dv_2 + 2K_{13}\, dv_3 + 2K_{14}\, dv_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ du_4 = 2K_{41}\, dv_1 + 2K_{42}\, dv_2 + 2K_{43}\, dv_3 + 2K_{44}\, dv_4 \end{array} \right.$$

woraus wiederum

$$\text{(XXVIII)} \left\{ \begin{array}{l} dv_1 = G_{11}\, du_1 + G_{21}\, du_2 + G_{31}\, du_3 + G_{41}\, du_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dv_4 = G_{14}\, du_1 + G_{24}\, du_2 + G_{34}\, du_3 + G_{44}\, du_4 \end{array} \right.$$

wenn $G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ die Quotienten der Determinante

$$\begin{vmatrix} 2K_{11} \; 2K_{12} \; 2K_{13} \; 2K_{14} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2K_{41} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2K_{41} \end{vmatrix} = D$$

in deren Unterdeterminanten bezeichnen.

Die Vergleichung der Coefficienten in Gl. (XXVII) mit den vorher gefundenen liefert Beziehungen von der Form

$$\text{(XXIX)} \quad 2K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = -\sqrt[4]{\frac{-P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}} \cdot \frac{\left(\dfrac{\partial \vartheta_{2\mathfrak{a}-1}(v_1 \cdots v_4)}{\partial v_{\mathfrak{b}}}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0}}{\vartheta_9}$$

welche der aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Relation

$$2K = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}$$

entsprechen. Ferner ergiebt sich

$$D = \begin{vmatrix} 2K_{11} \cdots 2K_{14} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2K_{41} \cdots 2K_{44} \end{vmatrix} = \sqrt[4]{\frac{P'(a_1)P'(a_3)P'(a_5)P'(a_7)}{Q(a_1)\,Q(a_3)\,Q(a_5)\,Q(a_7)}} \cdot \frac{\Delta(1,3,5,7)}{\vartheta_9{}^{1}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{P'(a_1)P'(a_3)P'(a_5)P'(a_7)}{Q(a_1)\,Q(a_3)\,Q(a_5)\,Q(a_7)}} \cdot \pi^4 \cdot \frac{\vartheta_0}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_2}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_4}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_6}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_8}{\vartheta_9} \cdot \vartheta_9{}^2$$

$$= \sqrt[4]{\frac{P'(a_1)\,P'(a_3)\,P'(a_5)\,P'(a_7)}{Q'(a_0)\,Q'(a_2)\,Q'(a_4)\,Q'(a_6)\,Q'(a_8)}} \cdot \pi^4 \cdot \vartheta_9{}^2$$

woraus

(XXX) $\qquad \vartheta_9 = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{M \cdot D} \quad$ wo $M = \sqrt[4]{\frac{Q'(a_0) \cdots\cdots Q'(a_8)}{P'(a_1) \cdots\cdots P'(a_7)}}$

und da sich in Folge der Beziehungen (XII) (XIII) (XIV) jede für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwindende ϑ-Function in die Form setzen lässt

$\vartheta_\alpha = \sqrt[4]{\varphi(a_0, a_1, \cdots a_8)} \cdot \vartheta_9$ — (wo φ eine rationale Function von $a_0 \cdots a_8$) so erhält man auch für alle diese Theta's Ausdrücke, welche demjenigen in Nr. (XXX) analog sind — entsprechend den drei Beziehungen, welche in der Theorie der elliptischen Functionen folgendermassen lauten:

$$\vartheta_3 = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \quad \vartheta_0 = \sqrt{\frac{2\varkappa K}{\pi}} \quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{2\varkappa_1 K}{\pi}}.$$

Ferner kann man nun auch noch die ϑ-Moduln durch die Periodicitätsmoduln ausdrücken, indem man die Gleichungen (XXVIII) von dem Werthe-Systeme

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1, a_3, a_5, a_7)$$

bis zu je einem der folgenden vier — nach Nr. (XVI) wiederum einander entsprechenden — Werthesysteme:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

$$\begin{array}{lr}
=(-\tfrac{1}{2}\tau_{11}, -\tfrac{1}{2}\tau_{21}, -\tfrac{1}{2}\tau_{31}, -\tfrac{1}{2}\tau_{41}) & (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_0, a_3, a_5, a_7) \\
(\tfrac{1}{2}\tau_{11} - \tfrac{1}{2}\tau_{12}, \tfrac{1}{2}\tau_{21} - \tfrac{1}{2}\tau_{22}, \tfrac{1}{2}\tau_{31} - \tfrac{1}{2}\tau_{32}, \tfrac{1}{2}\tau_{41} - \tfrac{1}{2}\tau_{42}) & (a_1, a_2, a_5, a_7) \\
(\tfrac{1}{2}\tau_{12} - \tfrac{1}{2}\tau_{13}, \tfrac{1}{2}\tau_{22} - \tfrac{1}{2}\tau_{23}, \tfrac{1}{2}\tau_{32} - \tfrac{1}{2}\tau_{33}, \tfrac{1}{2}\tau_{42} - \tfrac{1}{2}\tau_{43}) & (a_1, a_3, a_4, a_7) \\
(\tfrac{1}{2}\tau_{13} - \tfrac{1}{2}\tau_{14}, \tfrac{1}{2}\tau_{23} - \tfrac{1}{2}\tau_{24}, \tfrac{1}{2}\tau_{33} - \tfrac{1}{2}\tau_{34}, \tfrac{1}{2}\tau_{43} - \tfrac{1}{2}\tau_{44}) & (a_1, a_3, a_5, a_6)
\end{array}$$

integrirt, wobei wiederum hinsichtlich der Integrationswege und Wurzelbestimmungen das oben Bemerkte gilt. Setzt man hierbei

(XXXI) $$\int_{a_{2\mathfrak{b}-2}}^{a_{2\mathfrak{b}-1}} \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x)}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = i\,\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\tau_{1a} &= iG_{1a}\overline{K}_{11} + iG_{2a}\overline{K}_{21} + iG_{3a}\overline{K}_{31} + iG_{4a}\overline{K}_{41} \\
-\tfrac{1}{2}\tau_{a1} + \tfrac{1}{2}\tau_{a2} &= iG_{1a}\overline{K}_{12} + iG_{2a}\overline{K}_{22} + iG_{3a}\overline{K}_{32} + iG_{4a}\overline{K}_{42} \\
-\tfrac{1}{2}\tau_{a2} + \tfrac{1}{2}\tau_{a3} &= iG_{1a}\overline{K}_{13} + iG_{2a}\overline{K}_{23} + iG_{3a}\overline{K}_{33} + iG_{4a}\overline{K}_{43} \\
-\tfrac{1}{2}\tau_{a3} + \tfrac{1}{2}\tau_{a4} &= iG_{1a}\overline{K}_{14} + iG_{2a}\overline{K}_{24} + iG_{3a}\overline{K}_{34} + iG_{4a}\overline{K}_{44}
\end{aligned}$$

woraus, wenn noch

$$\text{(XXXII)} \qquad \sum_{1}^{b}{}_{\nu}\, \overline{K}_{a,\nu} = K'_{a,b}$$

gesetzt wird, folgt:

$$\text{(XXXIII)} \quad \tau_{ab} = 2iG_{1a}K'_{1b} + 2iG_{2a}K'_{2b} + 2iG_{3a}K'_{3b} + 2iG_{4a}K'_{4b}$$

ein Ausdruck, welcher in Folge der Identität $\tau_{ab} = \tau_{ba}$ die bekannten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln liefert. —

Schliesslich kann man auch noch die oben gemachte Einschränkung, dass die ϑ-Moduln sämmtlich rein imaginär, also die Grössen $a_0, \ldots a_9$ reell sein sollen, fallen lassen — in derselben Weise wie dies durch Herrn Weierstrass in seiner zweiten Abhandlung über Abel'sche Functionen (Crelle's Journal, Bd. 52) geschehen ist. —

Berlin, im März 1877.

Note über ein Eliminationsproblem.

Von H. Krey in Kiel.

Für manche algebraisch-geometrische Untersuchungen ist die Lösung folgender Aufgabe von Wichtigkeit:

Die Zahl der Paare von getrennt liegenden Punkten x, y einer gegebenen Curve $f=0$ anzugeben, welche gleichzeitig zwei Correspondenzen $\varphi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)=0$, $\varphi'(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)=0$ genügen. —

Wenn f keine Singularitäten besitzt, und die Correspondenzen keine besonderen Eigenschaften haben, ergiebt sich durch Elimination etwa der x aus $f(x)=0$, $\varphi=0$, $\varphi'=0$ sofort die fragliche Zahl $n^2(rs'+r's)$, wo r, r' die Ordnungen von φ, φ' in x, s, s' die Ordnungen in den y bedeuten.

Diese Zahl erfährt eine Reduction, wenn eine der Correspondenzen, oder beide, die Eigenschaft der „Werthigkeit" in $x=y$ haben, d. h. wenn von den $\alpha+\gamma$ vermöge $\varphi=0$ einem beliebigen y entsprechenden Punkten x stets γ in y fallen, und also auch γ der $\beta+\gamma$ zu einem beliebigen x gehörenden Punkte y in x liegen. In diesem Falle würde die Resultante aus $f=0$, $\varphi=0$, $\varphi'=0$ identisch verschwinden. Haben α', β', γ' dieselbe Bedeutung in Bezug auf die Correspondenz $\varphi'=0$, so gilt die von Brill (Math. Annalen Bd. VI) angegebene Zahl

$$(1) \qquad (\varphi\varphi')=\alpha\beta'+\beta\alpha'-2p\gamma\gamma',$$

(wo, wie gewöhnlich, p das Geschlecht von f bezeichnet) zunächst mit der Einschränkung, dass f keine singulären Punkte besitzt, und dass auf f keine festen „Ausnahmepunkte" der Correspondenzen existiren, solche Punkte nämlich, durch welche *sämmtliche* Curven $\varphi(\overset{r}{x})=0$, $\varphi(\overset{s}{y})=0$ (eventuell auch $\varphi'(\overset{r'}{x})=0$, $\varphi'(\overset{s'}{y})$) hindurchgehen.

Gerade dieser Fall des Vorhandenseins von Ausnahmepunkten tritt jedoch bei den meisten Anwendungen der in Rede stehenden Correspondenzformel ein. Eine genauere Untersuchung desselben hat zu dem wichtigen Resultate geführt,*) dass die Zahl (1) gültig bleibt, so lange f keine weiteren Singularitäten als Doppelpunkte (keine Rückkehrpunkte) hat, wenn man nur unter $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$ die Anzahl der *beweglichen* vermöge $\varphi = 0$ zu y, bzw. zu x gehörenden Punkte versteht, wenn ferner sämmtliche Doppelpunkte von f für beide Correspondenzen zu den Ausnahmepunkten gehören; dass dagegen die Reduction $-2\gamma\gamma'.\delta$ anzubringen ist, wenn δ der Doppelpunkte nicht sämmtlichen Curven der vier die Correspondenzen vermittelnden Systeme gemeinschaftlich sind. — Selbstverständlich sind hier nur die Paare von „freien" (d. h. nicht in Ausnahmepunkte, oder in singuläre Punkte von f fallenden) Punkten x, y gemeint.

Die Punkte y (oder x) dieser Paare lassen sich nicht als die freien Verschwindungspunkte einer ganzen Function der y (bzw. der x) angeben, sondern nur als die des Quotienten der linken Seiten zweier Curvengleichungen. Dies ist jedoch auf verschiedene Arten zu erreichen. Das im Folgenden auseinandergesetzte Eliminationsverfahren gestattet, die zum Beweise erforderlichen Abzählungen in ziemlich einfacher Weise auszuführen. Vorausgesetzt ist dabei zunächst, dass die Curven *aller vier* Systeme einfach durch die Ausnahmepunkte gehen, welche Bedingung auch darin ihren Ausdruck findet, dass sämmtliche Coefficienten der Gleichung $\overset{r}{\varphi}(x) = 0$ unendlich klein von der ersten Ordnung werden, sobald y einem Ausnahmepunkte unendlich nahe rückt, und dass Aehnliches für die drei übrigen Curvensysteme stattfinden soll.

Unter den $d + \delta$ Doppelpunkten von f mögen d, ebenso wie σ einfache Punkte von f, Ausnahmepunkte sein. Die mit y beweglichen, nicht in y selbst fallenden Schnittpunkte von $\varphi(x) = 0$ mit $f(x) = 0$ seien $x^{(1)}, \ldots x^{(\alpha)}$ $(\alpha = nr - \sigma - 2d - \gamma)$, die Coordinaten der Ausnahmepunkte $a^{(1)}, \ldots a^{(\sigma)}$, $b^{(1)}, \ldots b^{(d)}$. Das Product

$$\varphi'(x^{(1)}, y) \ldots . \varphi'(x^{(\alpha)}, y) = L(y)$$

eine symmetrische Function der α weiteren Schnittpunkte, welches bereits explicit die y im Grade $s'\alpha$ enthält, wird sich als rationale Function der y allein darstellen lassen**). Bezeichnet man für den Augenblick die Coefficienten von $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ mit b_{ikh}, b'_{ikh}, bedeutet ferner $\varphi''(x) = \Sigma b''_{ikh} x_1{}^i x_2{}^k x_3{}^h$ eine ganz beliebige Function derselben Ordnung wie $\varphi'(x)$, so bilde man zuerst das von den Coordinaten aller nr Schnittpunkte abhängende Product

$$R = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=nr} \left\{ \varphi'(x^{(\varrho)}) + \lambda \varphi''(x^{(\varrho)}) \right\},$$

*) Ausser den einschlägigen Arbeiten von Brill (Math. Ann. Bd. VI u. VII) vgl. noch Lindemann Vorl. v. Clebsch, Bd. 1, pag. 720 ff.

**) Ueber reducirte Resultanten vgl. Brill, Math. Annalen Bd. IV.

d. h. die (nicht identisch verschwindende) Resultante aus

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0, \quad \varphi'(x) + \lambda\varphi''(x) = 0.$$

Wegen $\varphi'(x^{(\alpha+1)}) = \cdots = \varphi'(x^{(nr)}) = 0$, und mit Hilfe von $f(y) = 0$ wird

$$R = \lambda^{nr-\alpha}\varphi''(a^{(1)})\cdot\cdot\varphi''(a^{(\sigma)})\,\varphi''(b^{(1)})^2\cdot\cdot\varphi''(y)^\gamma\,\{L + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2 + \cdots\}.$$

Es ist also L proportional zu

$$L'(y) = \frac{M\,y)}{\varphi''(a^{(1)})\cdots\varphi''(b^{(1)})^2\cdots\varphi''(y)^\gamma},$$

wo M den Coefficienten von $\lambda^{nr-\alpha}$ in der Entwicklung von R bedeutet. Die freien Verschwindungspunkte dieses Quotienten, der offenbar von den ganz willkürlichen b''_{ikh} nicht abhängen kann, werden zugleich Verschwindungspunkte von L sein, und umgekehrt. In den b'_{ikh} erreicht M den Grad α, in den b_{ikh} den Grad nr'; somit wird die Vielfachheit von $L'(y) = 0$ in jedem Ausnahmepunkte

$$\alpha + nr',$$

der Grad von L' in den y_i

$$s'\alpha + snr' - \gamma r'.$$

Durch jeden der δ Doppelpunkte wird L' nur $\gamma\gamma'$-fach hindurchgehen.

Von Ausnahmepunkten und singulären Punkten von f abgesehen, wird ein Factor von $L(y)$ verschwinden

1. für die Punkte y der gesuchten Punktepaare;
2. für die Coincidenzpunkte der Correspondenz $\varphi(x, y) = 0$, und zwar hat in jedem derselben $M(y) = 0$ einen γ'-werthigen Schnittpunkt mit $f = 0$;
3. für diejenigen Punkte y, deren zugehörige Curve $\varphi(x) = 0$ entweder f in einem Ausnahmepunkte a berührt, oder in einem Ausnahmepunkte b einen Zweig von f berührt.

Hieraus ergiebt sich, welche Reductionen an der Zahl der freien Verschwindungspunkte von $L(y)$ anzubringen sind. Diese Zahl kann kleiner werden als

$$n(s'\alpha + snr' - \gamma r') - (\alpha + nr')(\sigma + 2d) - 2\gamma\gamma'\delta.$$

Wenn nämlich der Punkt y unendlich nahe an einen Punkt b rückt, so können von den zu y gehörenden Punkten $x^{(1)}, \ldots x^{(\alpha)}$ einige, h, sich ebenfalls dem Doppelpunkt b unendlich nähern, und zwar auf dem anderen Zweige des Doppelpunktes. Ein Theil der $\alpha + nr'$ Zweige von $M(y) = 0$ berührt dann den einen oder anderen Zweig des Doppelpunktes von f, so dass hier $2(\alpha + nr') + 2h$ Schnittpunkte absorbirt werden.

Die Zahl der freien Coincidenzpunkte der Correspondenz

$$\varphi(x, y) = 0 \text{ ist}$$

$$C = \alpha + \beta + 2\gamma\,.\,p. \tag{2}$$

Diese Formel darf hier vorausgesetzt werden; denn wenn man auch bei dem Beweise derselben für den einfacheren Fall, dass keine Ausnahmepunkte vorhanden sind, von der Betrachtung zweier simultanen Correspondenzen auszugehen pflegt, so ist doch der Nachweis ihrer Allgemeingültigkeit von einer derartigen Betrachtung nicht abhängig (vgl. z. B. Lindemann, l. c. pag. 680).

Die Bedingung $P(y) = 0$, welcher y genügen muss, damit die zu y gehörende Curve $\varphi(x) = 0$ f in einem bestimmten der einfachen Ausnahmepunkte a berühre, ist vom Grade s, nämlich

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_{x=a} = 0,$$

wenn man den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ in a, die Gerade $x_2 = 0$ in die Tangente von f legt. Man darf nun φ in der Form

$$\varphi = x_1 y_1 \varphi_1 + x_1 y_2 \varphi_2 + x_2 y_1 \varphi_3 + x_2 y_2 \varphi_4,$$

oder

$$\varphi = x_1 y_1 \psi_1 + x_1 y_2 \psi_2 + x_2 y_2 \psi_3 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) \psi_4$$

voraussetzen, worin ψ_1, ψ_2, ψ_3 einzeln den Bedingungen der Werthigkeit γ werden zu genügen haben, während ψ_4 nur $(\gamma - 1)$werthig zu sein braucht, wo ferner $\psi_1, \ldots \psi_4$ die Ausnahmepunkte von $\varphi = 0$, bis auf den einen Punkt $x_1 = x_2 = 0$ einzeln zu Ausnahmepunkten haben müssen. Die Curve

$$P(y) = y_1 (\psi_1)_{x=a} + y_2 (\psi_2)_{x=a} - y_2 (\psi_4)_{x=a} = 0$$

geht $(\gamma + 1)$fach durch a, einfach durch die übrigen Ausnahmepunkte, was

$$ns - \sigma - 2d - \gamma = \beta$$

freie Punkte y giebt. Dieses ist auch von vornherein ersichtlich, da einem zu a benachbarten Punkte x immer noch β völlig bestimmte freie Punkte entsprechen.

Dagegen wird die Bedingung $Q(y) = 0$ dafür, dass $\varphi(x) = 0$ in einem bestimmten Doppelpunkt b einen Zweig von f berühre,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right]_{x=b} = 0.$$

Von den hieraus sich ergebenden 2β Punkten y sind nur $2\beta - 2h$ frei. (h ist $= \gamma - 1$ oder γ, je nachdem in φ das Glied mit ψ_4 fehlt oder nicht.)

Mit Berücksichtigung dieser Reductionen wird nun die Anzahl der Punkte y der gesuchten Punktepaare

$$\begin{aligned} & n(s'\alpha + snr' - \gamma r') - (\alpha + nr')(\sigma + 2d) - 2hd \\ & \quad - 2\gamma\gamma'\delta - \gamma'(\alpha + \beta + 2p\gamma) - \sigma\beta - 2d\beta + 2hd \\ & = n(s'\alpha + snr' - \gamma r') - \gamma'(\alpha + \beta) - (\sigma + 2d)(\alpha + \beta + nr') \\ & \qquad - 2\gamma\gamma'(p + \delta) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha\,(ns' - \sigma - 2d - \gamma) - \beta\,(\sigma + 2d + \gamma') \\
&\quad + nr'\,(ns - \sigma - 2d - \gamma) - 2\gamma\gamma'\,(p + \delta) \\
&= \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma'\,(p + \delta).
\end{aligned}
$$

Es war nicht nothwendig, die Formel (2) vorauszusetzen. Dieselbe ergiebt sich auch aus dem Umstande, dass die rechte Seite der Gleichung

$$(\varphi\varphi') = n\,(s'\alpha + snr' - \gamma r') - (\alpha + \beta + nr')\,(\sigma + 2d) - \gamma' C$$

bei Vertauschung von r, s, γ mit r', s', γ' ungeändert bleiben muss. Man erhält so

$$\frac{C - \alpha - \beta}{\gamma} = \frac{C' - \alpha' - \beta'}{\gamma'},$$

d. h. dieser Quotient ist von der Natur der Correspondenz unabhängig. Bedeuten

$$\psi_1(x) = 0, \ldots\ldots, \psi_k(x) = 0$$

irgend $k = \sigma + d + 2$ linear unabhängige Curven der r^{ten}, genügend hohen Ordnung, so ist die Correspondenz

$$\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} \psi_1(a^{(1)}) & \psi_2(a^{(1)}) & \ldots & \psi_k(a^{(1)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(b^{(1)}) & \psi_2(b^{(1)}) & \ldots & \psi_k(b^{(1)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \ldots & \psi_k(x) \\ \psi_1(y) & \psi_2(y) & \ldots & \psi_k(y) \end{vmatrix} = 0,$$

für welche $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = nr - \sigma - 2d - 1$, geeignet, jenen Quotienten zu bestimmen. Die Gleichung der Coincidenzcurve ist

$$
\begin{aligned}
\Omega = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_3} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\,\partial y_2}\right\}_{y=x} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\,\partial y_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_3}\right\}_{y=x} \\
+ \frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}\right\}_{y=x} = 0.
\end{aligned}
$$

Für einen Punkt a sind, wie leicht nachzuweisen, die $\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}$ proportional den $\frac{\partial f}{\partial x_i}$; für einen Punkt b dagegen verschwinden die $\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}$, und die $\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i \partial x_k}$ werden proportional den $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$. Der gesuchte Quotient hat also den Werth

$$n(n + 2r - 3) - 2\sigma - 6d - 2\delta - 2\,(nr - \sigma - 2d - 1) = 2p.$$

Das zur Ableitung der Formel für $(\varphi\varphi')$ dienende Beweisverfahren erleidet keine wesentliche Aenderung, wenn die Systemcurven *mehrfach* durch die Ausnahmepunkte hindurchgehen. Nur werden dann die Functionen M, P, Q in diesen Punkten in höherer Ordnung verschwinden, als in dem behandelten einfacheren Falle.

Mai 1877.

Note über den Operationskreis des Logikcalculs.

Von

Ernst Schröder in Karlsruhe.

Bereits Leibniz hatte eingehende Bestrebungen gerichtet sowohl auf die Schöpfung eines *calculus philosophicus* oder *calc. ratiocinator*, als auch auf die Gründung einer allgemeinen Zeichensprache, einer *lingua characteristica universalis* (sive *realis*), gewissermassen eines Alphabets der menschlichen Begriffe — *diese* bestimmt, das Object oder reale Substrat zu bilden zu *jener* Disciplin, durch welche das Wesen der menschlichen Geistesoperationen blosgelegt, nach seiner Gesetzmässigkeit erfasst und in adäquatester Weise zum Ausdruck gebracht werden sollte. In Bezug auf das zweite Ziel — auf die Idee der Ausbildung einer allgemeinen Charakteristik — hatte Leibniz allerdings schon Cartesius, und andere, zu Vorgängern.

Soferne nicht in den zahlreichen noch unedirten Manuscripten aus dem Nachlasse Leibniz'ens, die in dem Archive zu Hannover liegen, weiteres Material verborgen ist, das für die Frage vielleicht von Belang werden könnte, möchten alle nur wünschbaren historischen Belege und Nachweise aus früherer Zeit über die erwähnten zwiefältigen Bestrebungen zu finden sein in den 62 ersten Seiten des III. Bandes von Adolf Trendelenburg's „Historische Beiträge zur Philosophie (Berlin 1867)", auf welche Herr Hermann Lotze die Güte hatte, mich aufmerksam zu machen.

Von den genannten beiden Idealen hat nun wenigstens das erste in neuerer Zeit eine Verwirklichung gefunden durch den verdienstvollen, auch auf anderen Gebieten durch seine mathematischen Leistungen rühmlichst bekannten Engländer George Boole, durch welchen in der That eine Disciplin geschaffen ist, mittelst deren aus gegebenen Prämissen die Schlussfolgerungen in allen rein deductiven Richtungen auch *mit erwiesener Vollständigkeit* in rechnender Weise gezogen werden können.

Die Ergebnisse seiner einschlägigen Forschungen hat derselbe ausführlich niedergelegt in der Schrift: „An investigation of the *law's of thought*, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, London 1854" (424 Seiten). Ich bin erst anlässlich der in meinem „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende, Leipzig, 1873" ausgeführten logischen Untersuchungen, von der Existenz dieses grundlegenden und, wie mir scheint, lange nicht gebührend beachteten Werkes in Kenntniss gesetzt worden.

Obwohl in der That von der Aufgabe, die er sich darin gestellt, Boole selbst sagt, „that he never doubted that it was worthy of his best efforts," hat doch dieses Feld seitdem nur eine spärliche Bearbeitung von seiten anderer Autoren gefunden, als welche meines Wissens nur Cayley, A. J. Ellis und vornehmlich Robert Grassmann*) angeführt werden können.

Das Studium des Boole'schen Werkes liess mich nun den Grund dieses Brachliegens wenigstens theilweise erblicken in gewissen Unvollkommenheiten, an welchen noch die Boole'sche Methode leidet, und veranlasste mich zu der Veröffentlichung einer soeben bei Teubner erschienenen Schrift, betitelt: „Der Operationskreis des Logikkalkuls", in welcher, wie ich glaube, die Begründung und Technik des Calculs nun zur thunlichsten Vollendung gebracht ist. Auf den Inhalt dieser Schrift das mathematische Publicum aufmerksam zu machen, ist der eine Hauptzweck der gegenwärtigen Note.

Im Vergleich mit dem Umfang des Boole'schen Werkes, dessen Kenntniss in meiner Schrift *nicht* vorausgesetzt wird, stelle ich auf dem so sehr viel kleineren Raum von nur 37 Seiten alle wesentlichen Methoden, den ganzen Kern des Logikcalculs dar, und dürften die darin gemachten Fortschritte wesentlich in Folgendem zu erblicken sein.

1) Die Methode findet sich gereinigt von allen der Sache eigentlich fremden Beimengungen; durchaus beseitigt sind nämlich die bei Boole noch eine grosse Rolle spielenden algebraischen Zahlen, welche in der That im Gebiet des Logikcalculs eine vernünftige Deutung nicht zulassen. In meiner Schrift wird lediglich mit den der Sache durchaus adäquaten „*Classensymbolen*" gerechnet, zu welchen übrigens die 0 und 1 auch noch gehören. Die Disciplin wird so zu einer völlig *elementaren* gestaltet, die — im Gegensatz zum Boole'schen Lehrgebäude, welches die Kenntniss der Algebra bis einschliesslich der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten voraussetzen musste — nun keinerlei mathematischer Vorkenntnisse mehr bedarf. Damit ist eine nicht unwesentliche Vereinfachung des bei Boole noch ziemlich complicirten Rechenapparates verbunden. Wegen der vielen für alle Mathematikverständigen geläufigen Kunstausdrücke, die in *beiden* Disciplinen gleichmässig Verwendung finden und die nochmals zu erklären

*) Betreffs der genaueren Angaben vergl. meine weiter unten angeführte Schrift.

weitläufig gewesen wäre, habe ich allerdings ein einigermassen mathematisch gebildetes Publicum in meiner Schrift vorausgesetzt.

In der geschilderten Richtung hat schon Robert, resp. haben die Gebrüder Grassmann, die übrigens Boole nicht zu kennen schienen, ganz den richtigen Weg betreten. Dieselben sind jedoch darauf nicht weit genug fortgeschritten, nämlich jedenfalls nicht so weit gegangen um die allgemeine Aufgabe, die Boole sich stellt, lösen und den beschwerlichen arithmetisch-logischen Rechenapparat desselben ganz ersetzen zu können.

2) Es wird in meiner Schrift ein vollkommener *Dualismus* zwischen den Operationen der ersten Stufe (Addition und Subtraction) und denen der zweiten (Multiplication und Division) nachgewiesen, zufolge dessen das ganze Gebäude eine Symmetrie erhält, die der Arithmetik abgeht. Um hierob eines speciell hervorzuheben, so liefern die logische Addition und Multiplication das merkwürdige Beispiel zweier commutativen und associativen Operationen, die sich *gegenseitig* distributiv zu einander verhalten, für die nämlich nicht nur:

$(b+c).a=(b.a)+(c.a)$, sondern auch $(b.c)+a=(b+a).(c+a)$ ganz allgemein ist*).

3) Neben diesen beiden Operationen ($+$ und $\cdot$), die auch *Collection* und *Determination* anderwärts heissen, ist es eine dritte, die *Negation*, deren Heranziehung als zur Lösung der allgemeinsten Aufgabe des Logikcalculs ausreichend nachgewiesen wird.

In Bezug auf diese letztere mag als besonders nützlich erwähnt sein der von mir aufgestellte Satz: dass die Negation eines nach mehreren Argumenten entwickelten Functionsausdruckes gefunden wird durch Negiren seiner sämmtlichen Coefficienten, wogegen die schönen Sätze vom Negiren von Product und Summe wohl zuerst von Grassmann aufgestellt worden sind.

---

*) Auch auf dem Gebiet der *Substitutionen* gelingt es leicht, dergleichen gegenseitig distributive Operationen zu entdecken, denen aber dann die Commutativität und Associativität abgeht. Definirt man hier als „symbolisches" Product resp. Summe:

$$a\,.\,b=a^{\alpha}\,b\,a^{-\alpha},\quad a+b=a^{\beta}\,b^{\gamma}\,a^{-\beta},$$

wobei eben diese mit dem Malzeichen angedeutete Multiplication als eine symbolische schon hinlänglich in Gegensatz tritt zu der „eigentlichen" Multiplication der Substitutionen, welche durch blosses Nebeneinanderstellen der Factoren ausgedrückt bleibt, so gilt das Distributionsgesetz *der Arithmetik:*

$$a\,.\,(b+c)=(a\,.\,b)+(a\,.\,c),$$

indem beide Seiten dieser Gleichung denselben Ausdruck $a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\,b^{-\beta}\,a^{-\alpha}$ vorstellen, und die Beziehung wird gegenseitig, d. h. es tritt auch noch die Geltung von $a+(b\,.\,c)=(a+b)\,.\,(a+c)$ hinzu, bei der Annahme $\gamma=1$.

Es ist zu verwundern, dass auf dem sonst so weit ausgebauten Felde der Substitutionentheorie *distributive* Beziehungen bislang noch gar nicht in Betracht gezogen wurden.

4) Zum Ueberfluss wird schliesslich eine exacte Theorie der beiden inversen Operationen Subtraction oder *Exception* und Division oder *Abstraction* aufgestellt, und damit das vordem besonders über der letzteren schwebende Dunkel aufgehellt.

Von diesen beiden durch die des Negirens im Grunde entbehrlich gemachten inversen Operationen wird die Negation als ein gemeinsamer Specialfall nachgewiesen und gezeigt, dass die Negation von a darstellbar sei durch

$$1 - a = \frac{0}{a}.$$

Nebenbei erweist sich die, diese Aequivalenz constatirende Gleichung zugleich als die einzige Gleichung des Logikcalculs, welche zu sich selbst dual ist, woferne nämlich abgesehen wird von Gleichungen wie diese:

$$1 - (1 - a) = 0 : (0 : a), \quad 1 - \frac{0}{a} = \frac{0}{1 - a}$$

etc., die durch wiederholte Anwendung der vorigen auf sich selbst entstehen.

Die Rechnungsregeln fallen hier, wie man sieht, nur theilweise mit denen der Arithmetik zusammen.

In Bezug auf das Weitere, so namentlich bezüglich der Anwendungen des Calculs, möge auf meine Schrift selbst verwiesen sein.

Zum Schlusse sei übrigens bemerkt, dass es auch *metrische* Operationen giebt, welche mit den logischen gewisse Analogien nothwendig darbieten. Wie nämlich z. B. in einer Schrift von Otto Boeddicker*) zu sehen ist, lässt sich die Grösse $A\,(\cdot)\,B$ des Gebietes, welches zwei begrenzten räumlichen oder Flächengebieten A und B gemeinsam ist, ausdrücken durch mehrfache theils über die letzteren Gebiete selbst, theils über deren Begrenzungen erstreckte Integrale, und darnach würde auch die Masszahl $A\,(+)\,B$ des Gebietes, zu welchem beide sich gegenseitig ergänzen, nach dem Schema:

$$A\,(+)\,B = A + B - A\,(\cdot)\,B$$

sich leicht zusammensetzen lassen. —

Auf diesen Umstand, sowie auf das in der Anmerkung oben über die Substitutionen Gesagte, vorläufig aufmerksam zu machen, galt mir als der andere Zweck dieser Note.

Karlsruhe, 7. Juli 1877.

*) Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen mit Anwendungen in der Elektrodynamik, Stuttgart 1876.

Ueber die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen.

Von A. Voss in Darmstadt.

Bei der Untersuchung von windschiefen Flächen kann es, wie bereits bei einer anderen Gelegenheit hervorgehoben wurde, vortheilhaft sein, die sechs Liniencoordinaten x_i der Erzeugenden der Fläche als Functionen φ_i eines Parameters λ aufzufassen, zwischen denen die quadratische Identität $\Sigma\varphi_i^2=0$ besteht *). Insbesondere erlangt dadurch die Darstellung der *rationalen* Flächen eine Bequemlichkeit, wie sie wohl durch keine andere Coordinatenbestimmung erreicht werden dürfte.

In der folgenden Lösung des Problems der Haupttangentencurven der windschiefen Flächen ist von dieser Darstellung Gebrauch gemacht obwohl die auf einem von Herrn Lie zuerst ausgesprochenen Satze beruhende Methode zur *Bildung der erforderlichen Differentialgleichung, durch welche die ∞^2 Haupttangenten in ∞^1 developpabele Flächen zusammengefasst werden,* ohne Weiteres verwendbar bleibt auch für ganz beliebige Linien-Flächen, welche durch den Schnitt dreier Complexe z. B. erzeugt werden. Wir haben nur desshalb die Parameterdarstellung vorgezogen, weil in jenem allgemeineren Falle die wirkliche Integration noch die Ausführung jener Elimination höherer homogener Differentiale nöthig macht, welche in der genannten Arbeit erledigt ist. **)

Auch ist in § 2. jene Differentialgleichung in einer solchen Form gegeben, dass die sämmtlichen Coëfficienten derselben eine von jener Parameterdarstellung unabhängige invariante Form besitzen. Besonders betrachtet ist dann der Fall rationaler Linienflächen, die einem linearen Complexe angehören. Die Bestimmung der Haupttangentencurven lässt sich hier auf eine einzige Quadratur zurückführen***), welche auf hyper-

---

*) Vgl. hier und im Folgenden überhaupt meine Arbeit: *Zur Theorie der windschiefen Flächen,* Math. Ann. VIII. p. 54–135, namentl. p. 101–135.

**) Es ist mir seitdem gelungen, jene Eliminationen noch soweit durchzuführen, dass unter anderem auch die damals nicht völlig begründete Angabe über die Anzahl der fünfpunktigen Tangenten der Fläche bestätigt werden kann. Auch Herrn Schubert's Principien (Schubert, Beiträge zur abzählenden Geometrie, diese Annalen X, 1) lassen sich ohne besondere Schwierigkeit auf den Fall einer beliebigen windschiefen Fläche anwenden, wie ich dies auch Herrn S. bereits vor einem Jahre mitgetheilt habe.

***) Dies ist auch schon von Herrn Clebsch bemerkt worden. Crelle 68, p. 151.

elliptische Integrale führt. Von Interesse erscheint dabei namentlich der Fall, wo jene Integrale entweder rein algebraisch oder rein logarithmisch werden. Ich bin dabei um so lieber auf eine etwas genauere Betrachtung des hyperelliptischen Integrales eingegangen, als die einschlägigen Arbeiten des Herrn Königsberger über Reduction hyperelliptischer Integrale, in Verbindung mit einer von Herrn Liouville herrührenden Methode, hier eine ziemlich anschauliche geometrische Interpretation gestatteten. — Zum Schlusse sind noch die Modificationen erörtert, welche durch das Verschwinden der invarianten Coëfficienten der Differentialgleichung entstehen.

§ 1.

Bildung der Differentialgleichung.

Jede Erzeugende x der Fläche bestimmt mit ihren drei consecutiven ein *Büschel linearer Complexe*; unter diesen befinden sich im Allgemeinen zwei specielle, deren Axen die beiden vierpunktigen Tangenten der Fläche bilden, welche zu jener Erzeugenden gehören. Bezeichnen wir die Coordinaten jener Geraden durch γ_i', γ_i'', so ist die Gleichung des genannten Büschels:

(1) $$\gamma_x' - \mu\gamma_x'' = 0\,.$$

Nun ist nach Herrn Lie's Bemerkung*) eine windschiefe Fläche, die einem linearen Complexe angehört, durch eine algebraische Haupttangentencurve ausgezeichnet, die jener ausschneidet. Jeder Complex des Büschels (1) wird daher zwei auf einander folgende Tangenten y, und $y + dy$ einer solchen Curve bestimmen (genau genommen ein Paar solcher). Geht man zu der nächsten Erzeugenden über, so ändern sich γ' und γ''. Aber auch μ ändert sich, wenn man denjenigen Complex im consecutiven Büschel betrachtet, welcher die begonnene Haupttangentencurve weiter ausschneidet.

Indem man ausdrückt, dass der Complex:

(2) $$(\gamma' + \delta\gamma')_x - (\mu + d\mu)\cdot(\gamma'' + \delta\gamma'')_x = 0$$

mit

$$\gamma_x' - \mu\gamma_x'' = 0$$

das Element $y+dy$ gemein hat, *entsteht eine Differentialgleichung für μ, welche die Lösung des genannten Problems vermittelt*, weil die Aufgabe sämmtliche Haupttangentencurven zu bestimmen, nach Integration der Gleichung für μ auf eine blosse Elimination hinaus kommt.**)

---

*) Math. Annalen V, p. 179.

**) Es darf hier vielleicht noch darauf hingewiesen werden, dass eine ähnliche Methode zur *Aufstellung der Differentialgleichung der Krümmungslinien* auf

Wir werden die Bildung jener Differentialgleichung genauer erörtern. Wenn die Erzeugenden der Fläche in der Form:

(3) $$x_i = \varphi_i$$

gegeben sind, wo die φ_i Functionen von λ sind, für welche

(4) $$\sum \varphi_i^2 = 0,$$

so sind die beiden Geraden γ', γ'' gegeben durch die Gleichungen:

(5) $$\sum \gamma_i \varphi_i = 0 \quad \sum \gamma_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} = 0 \quad \sum \gamma_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} = 0 \quad \sum \gamma_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} = 0.$$
$$\sum \gamma_i^2 = 0.$$

Die Discriminante des Systemes (5) bezeichnen wir durch Δ,

(6) $$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \varphi_i^2 & \sum \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} & \sum \varphi_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} & \sum \varphi_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} \\ \sum \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} & \sum \left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\right)^2 & \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} & \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} \\ \sum \varphi_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} & \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} & \sum \left(\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}\right)^2 & \sum \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} \\ \sum \varphi_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} & \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} & \sum \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} & \sum \left(\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\right)^2 \end{vmatrix}$$

Die Haupttangente y, welche dem Complexe (1) angehört, ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$\sum y_i \varphi_i = 0 \quad \sum y_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} = 0 \quad \sum y \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} = 0 \quad \gamma_y' - \mu \gamma_y'' = 0$$
$$\sum y_i^2 = 0$$

und ihre Coordinaten y_i lassen sich in der Form:

(7) $$y_i = \gamma_i' + \mu \gamma_i'' + \varkappa \frac{d\Pi}{d\varrho_i} \; {}^{*)}$$

darstellen; wo:

$$\Pi = \left(\varphi \, \frac{d\varphi}{d\lambda} \, \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \, \gamma' \gamma'' \varrho\right),$$

d. h. die 6reihige Determinante der eingeklammerten Grössen bedeutet. Dabei ist:

---

windschiefen Flächen führt. Je drei consecutive Erzeugende bestimmen ein Hyperboloid, dessen Krümmungslinien die Krümmungslinien der Fläche osculiren. Da die Krümmungslinien durch die von dem Parameter μ abhängige Schaar confocaler Flächen ausgeschnitten werden, so erhält man auf analoge Weise eine Differentialgleichung für μ, welche die der Krümmungslinien ist. Vgl. ausserdem die nächstfolgende Anmerkung.

*) Die Gleichungen (7) sind die des *ganzen Systems der Developpabelen Flächen der Haupttangenten.* Da auch die γ', γ'' im Folgenden explicit dargestellt werden, *so ist die Elimination*, von der oben geredet wurde, *als völlig erledigt zu betrachten.*

$$\sum\left(\frac{d\Pi}{d\varrho_i}\right)^2 = -\Delta'\left(\sum\gamma_i'\gamma_i''\right)^2,$$

wo Δ' die Unterdeterminante nach $\sum\left(\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\right)^2$ in Δ (6) oder:

$$\Delta' = -\left[\sum\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\right)^2\right]^3 \text{*)}. \tag{8}$$

Zugleich mag $\sum\gamma_i'\gamma_i''$ durch Γ bezeichnet werden. Die Bedingung $\sum y_i^2 = 0$ liefert dann:

$$\varkappa^2\Delta'\Gamma = 2\mu,$$

oder:

$$\left.\begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{2\mu}{\Delta'\Gamma}}. \tag{9}$$

Ferner hat man aus den Gleichungen:

$$\sum(y_i + dy_i)[\gamma_i' + \delta\gamma_i' - (\mu + d\mu)(\gamma_i'' + \delta\gamma_i'')] = 0$$

$$\gamma_y' - \mu\gamma_y'' = 0$$

$$\gamma_{dy}' - \mu\gamma_{dy}'' = 0$$

$$\sum y_i\delta\gamma_i' - \mu \sum y_i\delta\gamma_i'' - d\mu\,\gamma_y'' = 0, \tag{10}$$

und nach (7) und wegen $\sum\gamma_i'd\gamma_i' = 0$ $\sum\gamma_i''\delta\gamma_i'' = 0$ ist:

$$\gamma_y'' = \Gamma$$

$$\begin{aligned}\sum y_i\delta\gamma_i' &= \mu\sum\gamma_i''\delta\gamma_i' + \varkappa_1\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \gamma'\gamma''\delta\gamma'\right)\\ \sum y_i\delta\gamma_i'' &= \quad\sum\gamma_i'\delta\gamma_i'' + \varkappa_2\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \gamma'\gamma''\delta\gamma''\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Aber auch die in (11) vorkommenden Determinanten lassen sich einfacher ausdrücken. Man hat zunächst

$$\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ \gamma'\gamma''\right) = \Gamma\sqrt{-\Delta}. \tag{12}$$

Multiplicirt man die letztere Determinante mit den beiden in (11) auftretenden, so ergiebt sich:

$$\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \gamma'\gamma''\delta\gamma'\right) = -\frac{\Gamma\Delta'}{\sqrt{-\Delta}}\sum\delta\gamma_i'\ \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}.$$

$$\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \gamma'\gamma''\delta\gamma''\right) = -\frac{\Gamma\Delta'}{\sqrt{-\Delta}}\sum\delta\gamma_i''\ \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}.$$

Berücksichtigt man noch die Gleichungen:

$$\sum\delta\gamma_i'\ \frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda^3} + d\lambda\sum\gamma_i'\ \frac{\partial^4\varphi_i}{\partial\lambda^4} = 0,$$

$$\sum\delta\gamma_i''\ \frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda^4} + d\lambda\sum\gamma_i''\ \frac{\partial^4\varphi_i}{\partial\lambda^4} = 0;$$

*) Math. Ann. VIII, p. 111.

so nimmt (10) die Form an:

$$(13)\ \mu\,\Sigma(\gamma_i''\,\delta\gamma_i'-\gamma_i'\,\delta\gamma_i'')+d\lambda\sqrt{\frac{2\mu\Gamma\Delta'}{-\Delta}}\,\Sigma\left(\gamma_i'\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}-\mu\gamma_i''\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}\right)-\Gamma\,d\mu=0.$$

Diese Differentialgleichung für μ ist ihrer Form nach dieselbe, auf welche auch Herr Clebsch *) geführt wurde, als er die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen vermöge einer Abbildung der letzteren auf die Ebene untersuchte. Sie ist ohne Weiteres integrabel, sobald man ein particuläres Integral derselben kennt. **) Aber man kann die Gleichung (13) in eine sehr bemerkenswerthe neue Form bringen, in welcher der hauptsächlichste Vortheil der hier gewählten Darstellung liegen dürfte, zu deren Herleitung wir nunmehr übergehen.

§ 2.

Weitere Ausführung.

Die völlige Darstellung von (13) verlangt die Bildung der Differentiale von γ', γ'' sowie dieser Grössen selbst. Nun sind γ', γ'' Lösungen des Systemes (5) und als solche zunächst von sehr complicirter Form, wenn man die üblichen Methoden zur Auflösung desselben verwendet. ***)

Um diese zu vermeiden, bezeichnen wir die Coordinaten des linearen Complexes, welcher die Erzeugende x und ihre vier consecutiven enthält, durch z_i; dann ist:

---

*) Clebsch, Ueber die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen Crelle 68. p. 151.

**) Die Differentialgleichung ist von der Form

$$\frac{dy}{dx}+fy^2+\varphi y+\psi=0.$$

Ist y_0 ein particuläres Integral derselben, und setzt man $y=y_0+\mu$, so ist:

$$\frac{-d\,\frac{1}{\mu}}{dx}+\frac{1}{\mu}(\varphi+2y_0f)+f=0.$$

Irgend drei Integrale der letzteren Gleichung, μ_1, μ_2, μ_3, befriedigen die Identität

$$\frac{a_1}{\mu_1}+\frac{a_2}{\mu_2}+\frac{a_3}{\mu_3}=0,\ \text{wo}\ a_1+a_2+a_3=0.$$

Daher hat man folgende Beziehung zwischen je 4 Integralen der ursprüngliche[n] Gleichung:

$$\frac{a_1}{y_1-y_0}+\frac{a_2}{y_2-y_0}+\frac{a_3}{y_3-y_0}=0\quad a_1+a_2+a_3=0,$$

in welcher man leicht den Ausdruck für den bekannten geometrischen Satz e[r]kennt, dass alle Erzeugenden der Fläche von je vier Haupttangentencurven pr[o]jectivisch geschnitten werden.

***) Math. Ann. VIII, p. 106.

$$\sum z_i \varphi_i = 0 \sum z_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} = 0 \sum z_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} = 0 \sum z_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} = 0 \sum z_i \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4} = 0;$$

also sind die z_i den Unterdeterminanten von $\left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} \varrho\right)$ proportional zu setzen, und Σz_i^2 wird im Allgemeinen von Null verschieden sein. Setzt man ferner:

(1) $$\Omega = \left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \; z \; \varrho\right),$$

so ist:

(2) $$\gamma_i = z_i + \nu \frac{d\Omega}{d\varrho_i},$$

also wegen $\sum \gamma_i^2 = 0$ und $\sum \left(\frac{d\Omega}{d\varrho_i}\right)^2 = \Delta \sum z^2$

(3) $$\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}.$$

Demnach ist:

(4) $$\gamma_i' = z_i + \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \frac{d\Omega}{d\varrho_i}$$

$$\gamma_i'' = z_i - \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \frac{d\Omega}{d\varrho_i}$$

und:

(5) $$\begin{cases} \Gamma = 2 \sum z^2 \\ \sum \gamma_i' \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4} = -\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \left[\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} \; z\right] \\ \sum \gamma_i'' \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4} = +\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \left[\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} \; z\right] \end{cases}$$

und:

(6) $$\left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} \; z\right)^2 = \Delta'' \sum z_i^2,$$

wo Δ'' die den Determinanten Δ, Δ' analog gebildete fünfreihige Determinante.

Wir haben jetzt noch $\delta\gamma_i'$, $\delta\gamma_i''$ zu bilden. Da nach (4)

$$\delta\gamma_i' = \delta z_i + \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \delta \frac{d\Omega}{d\varrho_i} + \frac{d\Omega}{d\varrho_i} \delta \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$$

$$\delta\gamma_i'' = \delta z_i - \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \delta \frac{d\Omega}{d\varrho_i} - \frac{d\Omega}{d\varrho_i} \delta \frac{1}{\sqrt{-\Delta}},$$

so hat man:

$$\sum \gamma_i'' \delta\gamma_i' - \gamma_i' \delta\gamma_i'' = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \left[\sum z_i \, \delta\left(\frac{d\Omega}{d\varrho_i}\right) - \sum \frac{d\Omega}{d\varrho_i} \delta z_i\right].$$

Da ferner:

$$\delta\left(\frac{d\Omega}{d\varrho_i}\right) = \left(\varphi \frac{d\varphi}{\partial\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} \; z \; \varrho\right) d\lambda + \left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \, dz \; \varrho\right),$$

so ergiebt sich endlich:

(7) $$\sum \gamma_i''\delta\gamma_i' - \gamma_i'\delta\gamma_i' = \frac{4}{\sqrt{-\Delta}}\left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ dz\ z\right).$$

Um hier noch die Differentiale von z zu entfernen, bilde man das Product der Determinanten:

$$\left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ z\ dz\right) \text{ und } \left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ z\right),$$

welches wegen:

$$d\lambda \sum z_i \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5} + \sum dz_i \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} = 0$$

gleich $d\lambda\,\Delta \sum z_i \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5} \sum z_i^2$ ist. Setzt man die z_i geradezu gleich den ersten Unterdeterminanten der obigen Determinante, so ist

$$\left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ z\right) = -\sum z^2 = -\Delta''$$

und

$$\sum z_i \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5} = -\left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5}\right) = -\Delta'''.$$

Demnach hat man:

(8) $$\frac{\Sigma\gamma_i'\ \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} - \mu\gamma_i''\ \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}}{\Gamma} = \frac{(1+\mu)}{2\sqrt{-\Delta}}$$

$$\frac{\Sigma\gamma_i''\delta\gamma_i' - \gamma_i'\delta\gamma_i''}{\Gamma} = 2\,d\lambda\sqrt{-\Delta}\,\frac{\Delta'''}{\Delta''}$$

und hieraus für die Differentialgleichung I, 13:

(9) $$d\mu = d\lambda\left[2\mu\,\frac{\Delta'''}{\Delta''}\sqrt{-\Delta} + (1+\mu)\sqrt{\mu}\,\frac{\sqrt{\Delta'\Delta''}}{\Delta}\right].$$

Die Form dieser Gleichung ist dadurch merkwürdig, dass die in derselben auftretenden *Functionen* Δ, Δ', Δ'', Δ''' *sämmtlich invariante Bedeutung für die Fläche* haben. $\Delta = 0$ *liefert die Erzeugenden, welche von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden,* $\Delta' = 0$ *bestimmt die singulären Erzeugenden,* $\Delta'' = 0$ *diejenigen, welche zu fünfpunktig berührenden Tangenten gehören, endlich* $\Delta''' = 0$ *solche, für welche ein linearer Complex existirt, welcher diese selbst und ihre fünf consecutiven enthält.* *)

Die Gleichung (9) wird ohne Weiteres integrabel **), wenn $\Delta''' = 0$,

---

*) Vgl. meine Arbeit Math. Ann. VIII. a. a. O.

**) Die Gleichung würde auch integrabel sein, wenn zwischen den Invarianten die Bezeichnung:

$$\text{const} = \left(\frac{\Delta''}{\Delta}\right)^3 \frac{\Delta'}{\Delta'''^2}$$

stattfände. Da aber für algebraische Functionen n^{ter} Ordnung φ_i diese Gleichung schon vom Grade $4\,(9n-33)$ ist, während im Ganzen nur $6\,(n+1)$ homogene durch $2n+1$ Bedingungen ($\Sigma\varphi_i^2 = 0$) beschränkte Coefficienten in den φ_i vorkommen, so ist dieser Fall als ein ganz specieller zu betrachten.

d. h. *wenn die Fläche einem linearen Complexe angehört.* Die z sind dann Constanten a, und man kann setzen:

$$\sqrt{\Delta''} = \frac{\left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ a\right)}{\sqrt{\Sigma a^2}},$$

so dass die Gleichung (9) wird:

$$(10) \qquad \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\ 1+\mu} = d\lambda\ \frac{\sqrt{\Delta'}}{\Delta}\ \frac{\left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ a\right)}{\sqrt{\Sigma a^2}},$$

in welcher die Irrationalität einzig durch $\sqrt{\Delta'}$ bedingt ist.

Wir betrachten insbesondere den Fall, wo *die φ_i rationale ganze Functionen n^{ter} Ordnung* sind. Man kann dann statt der Determinante $\left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ a\right)$ eine solche substituiren, in welcher nur vierte Differentialquotienten vorkommen, ebenso kommen dann in Δ nur dritte vor, etc.*)

Es werden alsdann $\Delta' = -\left[\sum\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2\right]^3$, Δ, Δ'', ganze Functionen von den Graden $6(n-2)$, $8(n-3)$, $5(n-4)$. Die Integration nach μ führt auf einen Logarithmus, die nach λ im Allgemeinen auf hyperelliptische Integrale erster, zweiter und dritter Gattung.

Die Haupttangentencurven werden daher logarithmisch-algebraisch, wenn jene Integrale sich auf logarithmisch-algebraische Functionen reduciren lassen. Herr Königsberger hat neuerdings für diese Reduction die erforderlichen Kriterien angegeben.**)

Indem wir davon absehen, die Königsberger'schen Kriterien in ihrer ganzen Allgemeinheit für den vorliegenden Fall geometrisch zu interpretiren, wollen wir uns darauf beschränken, die Frage genauer zu erörtern, *wann die Haupttangentencurven algebraisch werden.* Es ist dazu erforderlich, dass die hyperelliptischen Integrale auf *rein logarithmische Functionen* führen.

Es findet das zunächst statt, wenn das Polynom $\Sigma\left(\frac{d\varphi}{\partial\lambda}\right)^2$ *zwei Wurzelfactoren gerader Multiplicität besitzt und zugleich der Nenner Δ in* (10) *nach Aufhebung etwaiger gemeinsamer Factoren nur einfache Wurzelfactoren hat.* ***) In diesem Falle handelt es sich nämlich nur

---

*) Math. Ann. VIII, p. 102—106.

**) Vgl. hier und im Folgenden Königsberger, Reihenentwickelung der hyperell. Integrale, Math. Ann. IX, p. 487; Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen, daselbst XI, p. 119.

***) Damit das Integral einer rationalen Function Fz nur auf logarithmische Glieder führe, ist *nothwendig, dass der Nenner von F keine vielfachen Factoren besitzt.* Denn setzt man:

noch um die Integration einer rationalen ächt gebrochenen Function, die überall nur erster Ordnung unendlich wird.

Es möge nun weiter $\Sigma\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2$ sich in die Factoren

$$H_r^2\, B_{2(n-2-r)}$$

zerlegen lassen, wo die Indices die Grade der Functionen bedeuten; B enthält dann nur einfache Factoren, so dass $\sqrt{B}$ irreducibel ist. Setzt man entsprechend:

$$\Delta'' = C_{5(n-4)} \qquad \Delta = D_{8(n-3)}\,,$$

so ist das hyperelliptische Integral in (10)

$$\int \frac{H_r^3\, B^2_{2(n-2-r)}\, C_{5(n-4)}}{D_{8(n-3)}\sqrt{B_{2(n-2-r)}}}\, d\lambda\,. \tag{11}$$

Man kann dasselbe durch eine Substitution von der Form*):

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$$

auf ein solches reduciren, in welchem das Radical von ungerader Ordnung $2p + 1$ ist, wo:

$$2p + 1 = 2(n - r - 3) + 1\,,\; p = n - r - 3.$$

Dadurch erhalten Zähler und Nenner den Factor

$$(\gamma + \delta z)^{9n-26-r},$$

so dass keine wesentliche Aenderung eintritt, und an Stelle des Integrales:

$$\mathfrak{J} = \int \frac{Fz\; dz}{\sqrt{R(z)}} \tag{12}$$

eintritt, in welchem F eine rationale Function vom Grade $n - 6 - r$ mit dem Nenner $D - \Delta$ ist, $R(z)$ ein ganzes Polynom vom Grade $2p + 1$ mit lauter einfachen Factoren **)

$$\int F(z)\, dz = \sum A_i \log \frac{p_i}{q_i},$$

wo p_i, q_i rationale Functionen von z, welche zu einander prim sind, so liefert die Differentiation:

$$Fz = \sum A_i \frac{q_i p_i' \quad p_i q_i'}{p_i q_i}\,,$$

wo rechter Hand nur einfache Wurzelfactoren vorkommen können. Das Gleiche muss also bei Fz stattfinden. Dieser einfache Satz scheint anderswo noch nicht bemerkt zu sein.

*) Hermite, Cours d'analyse, p. 15.

**) Man hätte übrigens von vornherein voraussetzen können, dass dem Werthe $\lambda = \infty$ eine singuläre Erzeugende entspricht, womit $\Sigma\left(\frac{d\varphi}{\partial\lambda}\right)^2$ vom Grade $2n - 5$ wird.

Nach Herrn Königsberger hat man nun folgende Reduction des hyperelliptischen Differentials *):

$$\frac{Fz\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \frac{\sqrt{Rz_i}\,dz}{(z-z_i)\sqrt{Rz}} + \sum_{r=0}^{r=p-1} l^r \frac{z^{2p-(r+1)}dz}{\sqrt{Rz}}$$

$$+ \sum_{s=p}^{s=2p-1} k^s \frac{z^{2p-(s+1)}dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{d}{dz}\left[fz\sqrt{R(z)}\right]dz\,.$$

Dabei ist:

$$l^r = \sum_{i=1}^{i=n}(l_i^r) - l_0^r$$

$$k^r = \sum_{i=1}^{i=n}(k_i^r) - k_0^r$$

$$fz = \sum_{i=1}^{i=n}(f_i z) - f_0 z$$

und die z_i sind die N Werthe, für welche der Nenner von F verschwindet.

Insbesondere verschwinden alle k_i^r, l_i^r, $f_i z$, wenn die Ordnung des Verschwindens von D überall gleich eins ist, ausserdem alle k_0^r, wenn F ächt gebrochen ist, alle l_0^r, wenn der Grad von $F(z)$ kleiner als p, und endlich auch $f_0(z)$, wenn jener Grad kleiner als $2p$ ist.

Diese Kriterien sind im Allgemeinen nicht mehr gültig, wenn für einen Verzweigungspunkt von $\sqrt{R(z)}$ auch zugleich $F(z)$ unendlich wird. Nun zerfallen die Verzweigungspunkte von $\sqrt{B}$ in zwei Classen, je nachdem sie zugleich Wurzeln von $H=0$ sind oder nicht. Wir weisen daher zunächst nach, dass D und $\sqrt{R(z)}$ *oder was dasselbe ist, dass* Δ *und* B *für Verzweigungspunkte der zweiten Classe nie gleichzeitig verschwinden können.*

Setzt man zur Abkürzung:

$$\sum\left(\frac{d^2\varphi}{d\lambda}\right)^2 = f_1 \quad \sum\varphi\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} = f_2 \quad \sum\left(\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\right)^2 = f_3 \quad \sum\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = -\frac{1}{3}f_2$$

$$\sum\left(\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\right)^2 = f_4 \quad \sum\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} = f_5 \quad \sum\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} = f_6$$

so ist:

$$\Delta = f_2^2\left[f_1f_3 + \frac{1}{9}f_2^2\right] - 2f_1f_2\left[f_1f_6 - \frac{1}{3}f_2f_3\right] + f_1^2\left[f_1f_4 + f_5^2\right].$$

Verschwindet also Δ mit $f_1 = 0$, so muss auch f_2 gleich Null sein. Aber $f_2 = -3\sum\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}$ kann nur verschwinden, wenn f_1 eine viel-

*) Königsberger, Math. Ann. IX, 492.

fache Wurzel besitzt, d. h. nicht für die Verzweigungspunkte zweiter Classe.

Man kann noch bemerken, dass wenn H im Grade s, d. h. f_1 im Grade $2s$ verschwindet, auch Δ gleich Null ist. Denn f_2 verschwindet dann im Grade $2s - 1$, und die 6 Terme von Δ haben im Allgemeinen den nämlichen Wurzelfactor im Grade:

$$6s - 2,\ 8s - 4,\ 6s - 1,\ 6s - 2,\ 6s,\ 4s$$

d. h. Δ verschwindet im Allgemeinen im $4s^{\text{ten}}$ Grade, wenn nicht auch $f_5 = 0$, so dass $F(z)$ für solche Werthe von der s^{ten} Ordnung unendlich wird. Verschwindet also H einfach, so wird $F(z)$ wieder von der ersten Ordnung unendlich. — Würde aber jene Wurzel von $H = 0$ zugleich Verzweigungspunkt von $\sqrt{B}$ sein, so würde $F(z)$ auch noch von der ersten Ordnung unendlich sein.

Dagegen wird C im allgemeinen mit H noch nicht verschwinden*) und ebenso wird im Allgemeinen $\Delta = 0$ weder $H = 0$ noch $C = 0$ nach sich ziehen.

Soll nun das hyperelliptische Integral sich auf rein logarithmische Glieder reduciren, so muss nach einem bekannten Abel'schen Satze die Identität stattfinden:

$$\int \frac{F(z)dr}{\sqrt{R(z)}} = \sum A_i \log \frac{\alpha_i + \beta_i \sqrt{R(z)}}{\alpha_i - \beta_i \sqrt{R(z)}} = \sum A_i \log \Psi_i$$

Es ist dann:

$$F(z) = \sqrt{R(z)} \sum A_i \frac{\Psi_i'}{\Psi_i}. \tag{13}$$

Man kann aber zeigen, wie dies Herr Liouville gelegentlich einer anderen Untersuchung ausgeführt hat,**) dass der Ausdruck:

$$\sqrt{R(z)}\ \frac{\Psi_i'}{\Psi_i}$$

sich auf die Form:

$$\frac{PM' - MP'}{NP}$$

bringen lässt, in welcher sämmtliche Zeichen P, M, N ganze Polynome, P', M' ihre entsprechenden Derivirten bedeuten, N prim zu P ist und ohne Rest in den Zähler aufgeht, so dass der Nenner desselben nur einfache Wurzelfactoren besitzt. Demnach ist der Ausdruck rechts in (13) gleich dem Quotienten zweier ganzer Polynome

$$F(z) = \frac{U}{V}$$

wo V nur einfache Wurzelfactoren hat. *Es kann also in dem Falle,*

*) C^3 wird für $f_1 = 0$ $f_2 = 0$ gleich $- \sum(\varphi d^4 \varphi)^2 f_3^3$.

**) Liouville sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce. Journ. de l'École polytechnique Cahier XXIII, p. 65.

wo das hyperelliptische Integral auf algebraisch logarithmische Functionen sich reducirt, der logarithmische Theil nur dann verschwinden, wenn die Wurzelfactoren des Nenners von $F(z)$ sämmtlich einfach sind, d. h. F nur in der ersten Ordnung unendlich wird.

Wir untersuchen jetzt, inwieweit diese Bedingung hinreichend ist. In der That verschwinden schon alle $f_i z$, l_i^r, k_i^r, soweit sie nicht zu Verzweigungspunkten von $\sqrt{B}$ gehören. Aber das Verschwinden der l^r, d. h. der l_0^r ist nach Herrn Königsberger nothwendig*). Wir nehmen daher an, dass wenn Verzweigungspunkte erster Classe vorhanden sind, dieselben keinen Einfluss haben, oder was im Interesse der geometrischen Auffassung besonders einfach ist, dass sie nicht vorhanden sind.

Dann verschwinden die $f_i z$, l_i^r, k_i^r überhaupt. Auch $f_0 z$ verschwindet, denn der Grad von $F(z)$ ist ersichtlich kleiner als $2p$, weil die Bedingung:

$$n - 6 - r < 2n - 2r - 6$$

auf $n > r$ führt, was selbstverständlich stattfindet.

Zweitens verschwinden auch die l_0^r, weil:

$$n - 6 - r < n - r - 3.$$

Nur die k_0^r werden im Allgemeinen nicht fortfallen. Sie liefern dann die weiteren Bedingungen, welche von Herrn Königsberger explicite angegeben sind**).

Man kann daher, von ganz speciellen Fällen abgesehen, sagen:

Wenn auf einer rationalen Linienfläche, die einem linearen Complexe angehört, singuläre Erzeugende von höherer ungerader Multiplicität als der ersten nicht vorhanden sind, wenn die von gerader höchstens doppelt und so zählen, dass für sie Δ nur höchstens im vierten Grade verschwindet, wenn ferner die weiteren Erzeugenden, für welche die beiden vierpunktigen Tangenten der Fläche zusammenfallen, überall einfach zählen, wenn endlich jene Königsberger'schen Gleichungen erfüllt sind, so sind sämmtliche Haupttangentencurven algebraisch.

Wir heben noch einen besonders einfachen Fall hervor. Auch die k_0^r werden verschwinden, wenn $F(z)$ ächt gebrochen ist; d. h. wenn:

$$n - 6 - r < 0,\ r > n - 6$$

ist. Der Fall $n - 2 = r$ ist schon oben besprochen. Für die Linienflächen vierter und fünfter Ordnung reducirt sich also unter den obigen Voraussetzungen das Integral $\mathfrak{J}$ auf eine Summe von Integralen dritter Gattung. Im Allgemeinen wird dies aber nur dann stattfinden, wenn unter den singulären Erzeugenden sich nicht mindestens $n - 5$ doppelt

*) Math. Ann. XI. p. 135.

**) Math. Ann. XI. p. 135.

zählende befinden. Dann reduciren sich die Königsberger'schen Gleichungen aber auf:*)

$$\sum m_i d_{i0} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots p$$
$$\vdots$$
$$\sum m_i d_{i\,p-1} = 0$$

wenn noch:

$$\sum_{r=1}^{r=k} M_{ri} = m_i$$

gesetzt wird, oder, da die Determinante der d_{ik} nicht verschwindet, auf:

$$m_i = 0 \qquad i = 1 \ldots p.$$

Die vorigen Betrachtungen gelten insbesondere, wenn $r = n - 3$, d. h. wenn nur zwei einfach zählende singuläre Erzeugende, alle übrigen in gerader Multiplicität 2 vorhanden sind. In diesem Falle lässt sich aber das Integral $\mathfrak{J}$ direct betrachten. Ist nämlich überhaupt $r = n - 3$ und sind die Wurzelfactoren des Nenners der (ächt gebrochenen) Function $F(z)$ sämmtlich einfach, so zerfällt $\mathfrak{J}$ durch Partialbruchzerlegung ohne Weiteres in eine Summe logarithmischer Glieder,

*Die algebraische Haupttangentencurve der Fläche***) *ist zugleich vom Geschlechte Null, wenn* $r = n - 3$.

Man hat daher folgenden Satz:

Wenn auf einer rationalen Linienfläche n^{ter} Ordnung, die einem linearen Complexe angehört, $4(n-3)$ *getrennte Erzeugende vorhanden sind, die von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden, wenn ferner* $n-3$ *doppelte singuläre Erzeugende vorhanden sind, welche zugleich für diese Curve in dem oben beschriebenen Sinne vierfach zählen, so sind alle Haupttangentencurven algebraisch.*

Das letztere findet auch dann statt, wenn nur doppelte singuläre Erzeugende dieser Art vorhanden sind, und wenn ausserdem noch $4(n-4)$ *getrennte Erzeugende von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden.****)

Die vorhergehenden Betrachtungen finden zunächst auf alle ratio-

---

*) Königsberger a. a. O.

**) Vgl. meine Arbeit Math. Ann. VIII, p. 107. Die algebraische Haupttangentencurve entsteht in (10) für $\mu = -1$, d. h. wenn man der Integrationsconstanten einen unendlich grossen Werth ertheilt.

***) Der Satz ist im Interesse eines geometrisch anschaulichen Resultates in einer specielleren Form ausgesprochen, als die vorigen Betrachtungen verlangen. Nothwendig ist nur, dass der irreducibele Nenner von F in einfache Factoren zerfällt.

nalen Linienflächen vierter Ordnung Anwendung, da diese immer einem linearen Complexe angehören.*) (Die nicht rationalen Flächen dieser Art enthalten überdies nur algebraische Haupttangentencurven.) Die Integration wird hier durch den Umstand noch besonders einfach, dass die Determinante Δ'' eine Constante ist,**) doch unterlassen wir, dieses Beispiel im Speciellen hier weiter auszuführen, da die Gruppirung sämmtlicher Fälle eine Reihe von zwar an sich sehr einfachen aber doch umfangreichen Rechnungen erfordern würde.

§ 3.

Specielle Fälle.

Die Umformungen des § 2. werden ungültig für den Fall, dass die Fläche einem *speciellen* linearen Complexe angehört, d. h. dass Σz^2 verschwindet. Es erhellt unmittelbar, dass überhaupt nur in dem Falle, wo die z_i Constanten proportional sind, überall $\Sigma z^2 = 0$ sein kann. Ebenso verlieren die bisher benutzten Gleichungen ihre Bedeutung, wenn $\Delta = 0$ sein sollte. Wir werden diese Fälle daher noch gesondert zu betrachten haben.

Gehört die Fläche überhaupt einem linearen Complexe an, so muss die sechsreihige Determinante:

$$\left[\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5}\right]$$

verschwinden. Ihre fünfreihigen Unterdeterminanten sind dann Constanten proportional, den Coefficienten jenes linearen Complexes. *Derselbe ist ein specieller, wenn auch die Determinante Δ'' verschwindet.* Bezeichnet man eine Reihe von Unterdeterminanten der letzteren durch:

$$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5,$$

so lässt sich zeigen, dass die Coordinaten:

$$z_i = k_1\varphi_i + k_2 \frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_3 \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_4 \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} + k_5 \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}$$

gerade denen des genannten Complexes proportional sein müssen. Man hat daher die Identität:

$$(1)\qquad M a_i = k_1\varphi_i + k_2 \frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_3 \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_4 \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} + k_5 \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}$$

---

*) Math. Ann. VIII. p. 134. Ein hiermit verwandter Satz ist, wie ich jetzt bemerke, wohl schon etwas früher als von mir, von Herrn Tognoli ausgesprochen worden. Vgl. Alcune considerazione sulla geometria delle superficie e curve gobbe di genere zero. Battaglini, Giornale XI, 181.

**) Hierin liegt zugleich die Berechtigung, C als *im Allgemeinen* mit H nicht verschwindend vorauszusetzen, ausgedrückt. Uebrigens kann man sich an den im nächsten § für Δ'', Δ' gegebenen Werthen überzeugen, dass C auch dann noch nicht verschwindet, wenn $r = n - 3$ u. s. w. ist.

wo

$$k_5 = \Delta$$

und

(2) $$M \sum a_i \gamma_i'' = \Delta \sum \left(\gamma_i'' \frac{d^4 \varphi_i}{d\lambda^4}\right).$$

In diesem Falle kann man $\gamma_i' = a_i$ setzen. Die Differentialgleichung I, 10 wird dann:

(3) $$\frac{\mu \,\Sigma \alpha_i \delta \gamma_i'' + d\mu \Sigma \alpha_i \gamma_i''}{(\mu \,\Sigma \alpha_i \gamma_i'')^{3/2}} + i d\lambda \sqrt{2}\, \frac{M}{\Delta^{3/2}} \sqrt{\Delta'} = 0,$$

oder, wenn $\mu \Sigma \alpha_i \gamma_i'' = x$ gesetzt wird:

(4) $$\frac{dx}{x^{3/2}} = i d\lambda \frac{\sqrt{2}}{\Delta^{3/2}} M \sqrt{\Delta'}.$$

Auch hier wird durch den Nenner $\Delta^{3/2}$ keine Irrationalität eingeführt, weil Δ selbst als Quadrat eines rationalen Ausdruckes dargestellt werden kann.*) Sollen die Haupttangentencurven algebraisch werden, so muss demnach die Integration nach λ rechterhand lediglich auf algebraische Functionen führen.**) Aus den Gleichungen (4) und § II, 10 ergiebt sich der allgemeinere Satz:

*Auf den rationalen Regelflächen, welche einem linearen allgemeinen oder speciellen Complex angehören, lassen sich die Haupttangentencurven immer durch Gleichungen bestimmen, welche nur logarithmische und algebraische Functionen enthalten, sobald nicht mehr als zwei singuläre Erzeugende von ungerader Multiplicität vorhanden sind.****)

Wenn die rationale Fläche vierter Ordnung durch die Gleichungen:

$$\varrho \alpha_i = a_i + b_i \lambda + c_i \lambda^2 + d_i \lambda^3 + e_i \lambda^4 = \varphi_i$$

dargestellt ist, in denen die Coefficienten a, b, c, d, e den Gleichungen:

$$(a^2) = 0 \;\; (b^2) = 0 \;\; (d^2) = 0 \;\; (e^2) = 0,$$
$$(ab) = 0 \;\; (ac) = 0 \;\; (de) = 0 \;\; (ce) = 0,$$
$$(ad) + (bc) = 0 \quad (be) + (cd) = 0,$$
$$2(ae) + (c^2) + 2(bd) = 0 \dagger)$$

---

*) Vgl. Math. Ann. VII. p. 107.

**) Auch hierfür hat Herr Königsberger die erforderlichen Kriterien angegeben, doch ergeben sich, da der Nenner von F im Allgemeinen in der dritten Ordnung überall verschwindet, nicht ohne Weiteres geometrisch anschauliche Kennzeichen.

***) Eine gewöhnliche singuläre Erzeugende wird von $n-3$ anderen Erzeugenden getroffen, während eine doppelte nur von $n-4$ anderen geschnitten wird. Eine Gerade, welche in der singulären Tangentialebene durch den singulären Punkt geht, osculirt im ersteren Falle, berührt dagegen vierpunktig, wenn die singuläre Erzeugende doppelt ist.

†) Zur Abkürzung ist $\Sigma a_i b_i = (ab)$ gesetzt.

genügen müssen, so wird dieselbe einem speciellen linearen Complexe angehören, wenn das Product:

$$(bd)\,[(bd)\,(ae)-(ad)\,(be)]\,[2\,(ad)\,(be)+(c^2)\,ae]$$

verschwindet.*)

Die Coordinaten desselben sind:

$$z_i = k_1 a_i + k_2 b_i + k_3 c_i + k_4 d_i + k_5 e_i \tag{6}$$

wo:

$$k_1 = (cd)^2,\ k_2 = (ae)(cd),\ k_3 = (ad)\,(be) - (bd)\,(ae),\ k_4 = (ae)(bc),$$
$$k_5 = (bc)\,(cd)$$

Ferner ist:

$$\Delta' = -\lambda^3\,[2\,(ad) + [4\,(ae) + (bd)]\,\lambda + 2\,(be)\,\lambda^2]^3 \tag{7}$$

und:

$$-\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (ad) & (ae) & \lambda^4 \\ 0 & 0 & (bc) & (bd) & (be) & -4\lambda^3 \\ 0 & (bc) & (c^2) & (cd) & (ce) & 6\lambda^2 \\ (ad) & (db) & (cd) & 0 & 0 & -4\lambda \\ (ae) & (be) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda^4 & -4\lambda^3 & 6\lambda^2 & -4\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$-\Delta = [k_5 - 4k_4\lambda + 6k_3\lambda^2 - 4k_2\lambda^3 + k_1\lambda^4]^2 = \mathsf{P}^2. \tag{9}$$

Endlich sind die Coordinaten der vierpunktig berührenden Tangente γ'' dargestellt durch:

$$(\gamma'' a) = \lambda^4,\ (\gamma'' b) = -4\lambda^3,\ (\gamma'' c) = 6\lambda^2,\ (\gamma'' d) = -4\lambda,\ (\gamma'' e) = 1$$
$$(\gamma''^2) = 0.$$

wonach:

$$\begin{aligned} &\sum \gamma'' z = P, \\ (9)\qquad &\sum \left(\gamma_i'' \frac{d^4 \varphi_i}{d\lambda^4}\right) = 24. \end{aligned}$$

und die Gleichung (4) wird:

$$\int \frac{dx}{x^{3/2}} = \sqrt{2}\ 24 \int \frac{d\lambda \sqrt{\Delta'}}{P^3}. \tag{10}$$

Die vorigen Methoden sind gänzlich unanwendbar, wenn die vierreihige Determinante Δ verschwindet. Aber man kann zeigen, *dass in diesem Falle die Fläche immer zwei unendlich nahe Leitgeraden und demgemäss lauter algebraische Haupttangentencurven besitzt, welche durch blosse Elimination bestimmt werden können.***)

---

*) Vgl. Math. Ann. VIII. 127—130.

**) In meiner Arbeit (Math. Ann. VIII, p. 91) ist die Invariante Δ für den allgemeinsten Fall einer windschiefen Fläche dargestellt, aber ich hatte damals die Bedeutung von $\Delta = 0$ noch nicht vollständig erkannt.

Bezeichnen wir durch k_1, k_2, k_3, k_4 Zahlen, welche den Unterdeterminanten von Δ proportional sind, so gelten die folgenden Identitäten:

$$(11)\quad \begin{aligned}
&k_1\sum\varphi_i^2+k_2\sum\varphi_i\frac{d\varphi_i}{d\lambda}+k_3\sum\varphi_i\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}+k_4\sum\varphi_i\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}=0\\
&k_1\sum\varphi_i\frac{d\varphi_i}{d\lambda}+k_2\sum\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\right)^2+k_3\sum\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}+k_4\sum\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}=0\\
&k_1\sum\varphi_i\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}+k_2\sum\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}+k_3\sum\left(\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}\right)^2+k_4\sum\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}=0\\
&k_1\sum\varphi_i\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}+k_2\sum\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\frac{d\varphi_i}{d\lambda}+k_3\sum\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}+k_4\sum\left(\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\right)^2=0.
\end{aligned}$$

Eine Gerade, welche 4 consecutive Erzeugende schneidet, hat daher zu Coordinaten:

$$y_i=k_1\varphi_i+k_2\frac{d\varphi_i}{d\lambda}+k_3\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}+k_4\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}.$$

Um zu zeigen, dass auch $\Sigma y_i\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}=0$ ist, differentiire man die Identitäten (11), multiplicire die so entstandenen 4 Gleichungen mit den k_1, k_2, k_3, k_4 und addire sie, so entsteht:

$$2k_4\sum y_i\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}=0.$$

Wofern k_4 also nicht auch Null ist*), folgt $\Sigma y_i\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}=0$, d. h. die Gerade y trifft fünf consecutive Erzeugende. Folglich sind die y *Constanten proportional*, so dass:

$$(13)\qquad Na_i=k_1\varphi_i+k_2\frac{d\varphi_i}{d\lambda}+k_3\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}+k_4\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}.$$

Die Gerade a ist eine Leitgerade der Fläche. Andererseits ist aber $\Delta=0$ die Bedingung für die Coincidenz der beiden vierpunktigen Tangenten, die zu *einer* Erzeugenden gehören, und wir zeigen jetzt, dass die Fläche noch einem zweiten linearen Complexe angehört, der mit a in Involution liegt.

Sei nämlich γ ein linearer Complex, welcher die vier consecutiven Erzeugenden enthält, also:

$$\sum\gamma_i\varphi_i=0\quad\sum\gamma_i\frac{d\varphi_i}{d\lambda}=0\quad\sum\gamma_i\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}=0\quad\sum\gamma_i\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}=0$$

so ist nach (13) $$\sum\gamma_i a_i=0.$$

Betrachtet man einen der analogen Complexe $\gamma+\delta\gamma$, welcher sich auf das benachbarte System von vier consecutiven Erzeugenden bezieht, so ist:

$$\sum a_i\,\delta\gamma_i=0\quad\sum\left(\delta\gamma_i\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}+\gamma_i\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}\right)=0.$$

*) k_4 ist gleich Δ', $k_4=0$ würde also die Fläche als *Developpabele* charakterisiren.

Die Determinante:

$$\left(\delta\gamma\ \gamma\ \varphi\ \frac{d\,\varphi}{d\,\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\,\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\,\lambda^3}\right)$$

muss also verschwinden. Aber das Quadrat derselben ist gleich

$$\Delta' \cdot \sum \gamma_i^2 \cdot \sum \delta\gamma_i \frac{d^3\varphi_i}{d\,\lambda^3}.$$

Hieraus folgt, weil Δ' und $\Sigma\gamma_i^2$ nicht verschwinden:

$$\sum \gamma_i \frac{d^4\varphi_i}{d\,\lambda^4} = 0$$

d. h. jeder lineare Complex, welcher vier consecutive Erzeugende enthält, enthält auch noch eine fünfte: d. h. die γ *sind ebenfalls Constanten proportional.*

In der That kann man auch leicht noch zeigen, *dass die sämmtlichen Unterdeterminanten nach ϱ der Determinante:*

$$\left[\varphi\ \frac{d\,\varphi}{d\,\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\,\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\,\lambda^3}\ \frac{d^4\varphi}{d\,\lambda^4}\ \varrho\right] \tag{14}$$

verschwinden. Denn nach (13) ist:

$$\frac{dN}{d\lambda} a_i = k_1 \frac{d\,\varphi_i}{d\,\lambda} + k_2 \frac{d^2\varphi_i}{d\,\lambda^2} + k_3 \frac{d^3\varphi_i}{d\,\lambda^3} + k_4 \frac{d^4\varphi_i}{d\,\lambda^4}$$
$$+ \varphi_i \frac{d\,k_1}{d\,\lambda} + \frac{d\,\varphi_i}{d\,\lambda}\frac{d\,k_2}{d\,\lambda} + \frac{d^2\varphi_i}{d\,\lambda^2}\frac{d\,k_3}{d\,\lambda} + \frac{d^3\varphi_i}{d\,\lambda^3}\frac{d\,k_4}{d\,\lambda}. \tag{15}$$

Die Determinante:

$$\left(\varphi\ \frac{d\,\varphi}{d\,\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\,\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\,\lambda^3}\ a\ \varrho\right)$$

verschwindet aber identisch, weil sie gleich $(a\,\varrho)\sqrt{-\Delta}$ ist. Aus ihr entsteht die Determinante (14), wenn man an Stelle der a_i ihre Werthe aus (15) einträgt. Wir kommen also auch hier zu dem Schlusse, dass ein Büschel linearer Complexe existirt, welche fünf consecutive Erzeugende enthalten. Jenes Büschel würde, wenn *nur* die Determinante (14) verschwindet, zwei getrennte Directricen haben, da aber im vorliegenden Falle auch Δ selbst verschwindet, müssen dieselben zusammenfallen; d. h. die Fläche enthält zwei unendlich nahe Leitgerade.

Darmstadt im Juni 1877.

Weitere Untersuchungen über des Ikosaeder.

Von Felix Klein in München.

In dem Aufsatze: „*Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst*,“ den ich im neunten Bande dieser Annalen p. 183–208 veröffentlicht habe, bin ich zu einem merkwürdigen Zusammenhange geführt worden, der zwischen dem Ikosaeder und der Theorie der Gleichungen fünften Grades besteht. Indem ich die letztere benutzte, gelang es mir, die Gleichung zwölften Grades, welche in dem dort erläuterten Sinne ein Ikosaeder vorstellt, in quadratische Factoren zu spalten und also zu lösen. Bemerkenswerth musste schon damals die Leichtigkeit erscheinen, mit der es gelang, gewisse in der Theorie der Gleichungen fünften Grades auftretende Resolventen sechsten und fünften Grades abzuleiten und in ihrem Zusammenhange zu erkennen. Aber ich bin erst durch Gordan, mit dem ich diese Gegenstände ausführlich besprach, veranlasst worden, die Frage umzukehren und zu versuchen, *geradezu die Theorie der Gleichungen fünften Grades aus der Betrachtung des Ikosaeders abzuleiten.* In der That gelang es mir — im steten Verkehre mit Gordan — nicht nur sämmtliche algebraische Sätze und Resultate, welche Kronecker*) und Brioschi**) in dieser Hinsicht — zum Theil ohne Beweis — publicirt haben, aus einer Quelle naturgemäss abzuleiten, sondern ihnen auch neue, und, wie ich glaube, wesentliche Beiträge hinzuzufügen. Ich

---

*) Die hier in Betracht kommenden Mittheilungen von Kronecker sind: Extrait d'une lettre à Mr. Hermite, Comptes Rendus 1858, 6. Juni, und: Ueber die Gleichungen fünften Grades, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1861, abgedruckt in Borchardt's Journal Bd. 59.

**) Brioschi's hierher gehörige Arbeiten sind folgende: Sulle equazioni del moltiplicatore per la transformazione delle funzioni ellitiche (Annali di Tortolini, I, 1858, p. 175); Sulla risoluzione dell' Equazioni di quinto grado (Ebenda p. 256, 326); Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado (Atti del Istituto Lombardo, I, 1858, p. 275); Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques (Comptes Rendus. 1858, 2. p. 337); Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado (Annali di Tartolini, V, 1863, p. 233); Sopra alcune nuove relazioni modulari (Atti della R. Accademia di Napoli, vol. III, 1866); La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado (Annali di Matematica, ser. II, t. I, p. 222, 1867); Sur l'équation du cinquième degré (Comptes Rendus, 1875, 1.); Sopra una classe di forme binarie (Annali di Matematica. ser. II, t. VIII, p. 24. (1876)). Brioschi wird binnen kurzem in diesen Annalen eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen geben.

veröffentlichte hierüber nach einander drei Noten in den Erlanger Berichten*) (Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder I, II, III, November 1876, Januar und Juli 1877), die ich in der gegenwärtigen Abhandlung in umgearbeiteter Form reproducire. Ich habe dabei vorab alles das ausgeschlossen, was auf die Definition der in Betracht kommenden fundamentalen Irrationalitäten durch elliptische Functionen Bezug hat**) und darum Hermite's Lösung der Gleichungen fünften Grades***) im Folgenden nur beiläufig erwähnt. Mich zwang dazu die Fülle des Stoffes und der Wunsch, dem Zusammenhange mit den elliptischen Functionen noch eine eingehendere Untersuchung zu widmen. So besteht das Folgende aus drei Abschnitten. In dem ersten desselben erläutere ich verschiedene Eigenschaften der Ikosaedergleichung, die mir von Interesse scheinen. In dem zweiten und dritten Abschnitte schliesse ich daran zwei Anwendungen. Die erste bezieht sich auf ein Problem, welches im Wesentlichen identisch ist mit der Lösung derjenigen Gleichungen sechsten Grades, die ich, einem Vorschlage Brioschi's folgend, als Jacobi'sche Gleichungen bezeichne. Die zweite beschäftigt sich mit den Gleichungen fünften Grades; es gelingt mir, diejenigen Gleichungen fünften Grades, bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwinden, explicite mit Hilfe einer Ikosaedergleichung zu lösen, und dadurch einen neuen Weg zur Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades zu finden.

Mit Rücksicht auf diesen letzten Abschnitt muss ich gleich hier ein Citat zufügen auf eine Note, welche Gordan neuerdings in den Erlanger Berichten veröffentlichte (Juli 1877. Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades) und die ausgeführt demnächst in diesen Annalen erscheinen soll. Einmal hat Gordan einen Theil der Resultate, welche ich in dem genannten Abschnitte zur Darstellung bringe, seinerseits gefunden und in geschicktere Form gebracht, andererseits dieselben in eigenartiger Weise mit der Invariantentheorie gewisser doppeltbinärer Formen verknüpft. Ohne hier näher darauf einzugehen will ich doch das allgemeine Princip bezeichnen, welches sich durch diese verschiedenartigen Arbeiten immer deutlicher herausstellt und das für die Theorie der algebraischen Gleichungen von weitreichender Bedeutung zu werden scheint, ein Princip, zu dem ich von anderer Seite kommend bereits im vierten Bande dieser Annalen geführt worden bin (p. 346—358,

*) Vergl. auch eine Mittheilung von Brioschi an die Accademia dei Lincei, December 1876.

**) Vergl. indess eine Notiz von mir in den Rendiconti des Istituto Lombardo vom April 1877.

***) Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; Comptes Rendus 1858, 1. Man vergl. zumal noch die zweite hierher gehörige Arbeit Hermite's: Sur l'équation du cinquième degré; Comptes Rendus 1866.

Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen). Beim Ikosaeder sind die 60 Vertauschungen der Wurzeln, welche die Galois'sche Gruppe ausmachen, dargestellt durch 60 lineare Substitutionen, denen eine beliebige der Wurzeln unterworfen wird. In Folge dessen stehen beim Ikosaeder die Theorie der Resolventen und die Theorie der Invarianten in der allerinnigsten Beziehung, und man kann jede derselben fördern, indem man von der anderen Gebrauch macht. *Aehnliche Vortheile stellen sich, wie man zeigen kann, jedesmal ein, wenn die Vertauschungen der Galois'schen Gruppe ersetzt sind durch lineare Substitutionen einer gewissen Zahl Veränderlicher.*

Diese Art, die Invariantentheorie zu verwerthen, ist verschieden von der sonst versuchten, statt der Coefficienten einer Gleichung n^{ten} Grades von vorneherein die Invarianten der entsprechenden binären Form n^{ter} Ordnung einzuführen. In der That scheint das letztere Verfahren im Allgemeinen nicht zweckmässig. Die Gleichungen fünften Grades z. B., wie sie im dritten Abschnitte der Untersuchung zu Grunde gelegt werden, sind in diesem Sinne von den allgemeinen Gleichungen fünften Grades nicht verschieden, und doch gestaltet sich ihre Auflösung wesentlich leichter als die der allgemeinen.

Abschnitt I.

Die Ikosaedergleichung.

§ 1.

Das Fundamentalproblem.

Unter einem *Ikosaeder* schlechthin verstehe ich, wie früher, eine gewisse binäre Form zwölfter Ordnung $f(\eta_1, \eta_2)$. Das volle System ihrer Covarianten besteht aus der Hesse'schen H und der Functionaldeterminante $(f, H) = T$, deren Quadrat sich linear aus f^5 und H^3 zusammensetzt. Als Fundamentalproblem mag dann das folgende hingestellt sein: *Es sind die numerischen Werthe gegeben, welche f, H, T für gewisse Werthe von η_1, η_2 annehmen; man soll η_1, η_2 berechnen.* Diess ist die allgemeinste Formulirung, an deren Stelle ich fast durchgängig, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, eine viel speciellere setze. Bei derselben ist $f(\eta_1, \eta_2)$ in einer *kanonischen Form* gegeben, also z. B. in derjenigen, welche Schwarz in der öfter zu citirenden Arbeit*) benutzt und die ich ebenfalls in meinem früheren Aufsatze verwandte:

$$f = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^{10} + 11 \eta_1^5 \eta_2^5 - \eta_2^{10}).$$

---

*) Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine *algebraische* Form ihres vierten Elementes darstellt. Borchardt's Journal, Bd. 75, p. 292—335.

Man hat dann für H, T:

$$12^2 H = -(\eta_1^{20} + \eta_2^{20}) + 228\,(\eta_1^{15}\eta_2^{15} - \eta_1^{5}\eta_2^{15}) - 494\,\eta_1^{10}\eta_2^{10}$$

$$12\,T = (\eta_1^{30} + \eta_2^{30}) + 522\,(\eta_1^{25}\eta_2^{5} - \eta_1^{5}\eta_2^{25}) - 10005\,(\eta_1^{20}\eta_2^{10} + \eta_1^{10}\eta_2^{20})$$

mit der Relation:

$$(1) \qquad T^2 = 12 f^5 - 12^4 H^3.$$

Es handelt sich wieder darum, *wenn die Zahlenwerthe von f, H, T gegeben sind (in Uebereinstimmung selbstverständlich mit der Bedingung (1)), η_1 und η_2 zu bestimmen.* Ich werde weiterhin zeigen (§ 5.), wie sich die allgemeinere Fragestellung auf diese speciellere zurückführen lässt.

Als *Ikosaedergleichung* (im weiteren oder specielleren Sinne) bezeichne ich dann diejenige Gleichung sechzigsten Grades, von der das *Verhältniss* $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ abhängt. Geht man von der kanonischen Darstellung aus, so lautet sie einfach

$$\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = \text{Const.},$$

oder, wie ich gewöhnlich schreibe:

$$(2) \qquad 1728\,\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X.$$

Dabei nenne ich X den *Parameter* der Ikosaedergleichung. — In dem allgemeineren Falle hat man linker Hand nur einen invarianten Factor zuzusetzen, um Homogeneität in den Coefficienten herzustellen. Versteht man unter B die in meiner früheren Arbeit (p. 198) definirte Invariante, so hat man:

$$(2\text{a}) \qquad \frac{-5 \cdot 144 \cdot H^3(\eta_1, \eta_2)}{7 \cdot B \cdot f^5(\eta_1, \eta_2)} = X.$$

Man sieht: der Unterschied zwischen dem Fundamentalproblem und der Ikosaedergleichung ist dieser: bei dem ersteren handelt es sich um eine Frage aus der binären Formentheorie, bei der letzteren um eine Gleichung mit einer Unbekannten. Es ist vortheilhaft, zwischen diesen Fragestellungen zu wechseln. Die Ikosaedergleichung gewährt im Allgemeinen zur ersten Orientirung die bessere Uebersicht; aber gewisse tiefer liegende Fragen lassen sich nur mit Hilfe der binären Auffassung erledigen. Ganz ähnlich ist es bei den Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Integralen, die ich neuerdings in diesen Annalen veröffentlichte (XI, p. 115, XII, p. 167).

§ 2.

Die zur Ikosaedergleichung gehörigen linearen Substitutionen.

Die Haupteigenschaft der Ikosaedergleichung (2) *resp.* (2a) *ist die, dass alle* 60 *Wurzeln* $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ *sich aus einer beliebigen Wurzel durch lineare Substitutionen ableiten lassen, welche von* X *unabhängig sind.* Um dieses System linearer Substitutionen im Falle der kanonischen Form aufzustellen, beachte man, dass die Wurzeln von $f = 0$:

$$0, \infty, (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^\nu, (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^\nu \qquad \left[\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right]$$

durch die Substitutionen in der Weise unter einander vertauscht werden müssen, dass die zusammengehörigen Wurzeln

$$0 \text{ und } \infty$$
$$(\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^\nu \text{ und } (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^\nu$$

zusammengehörig bleiben. Auf diese Weise findet man die 60 Substitutionen

$$(3)\quad \begin{cases} (\mathrm{a}) & \eta' = \varepsilon^\nu \eta, \\ (\mathrm{b}) & \eta' = -\dfrac{\varepsilon^\nu}{\eta}, \\ (\mathrm{c}) & \eta' = \varepsilon^\mu \dfrac{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\nu}{\eta - \varepsilon^\nu(\varepsilon + \varepsilon^4)} \\ (\mathrm{d}) & \eta' = -\varepsilon^\mu \dfrac{\eta - \varepsilon^\nu(\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\nu}, \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$$

die ich kurz als die 60 *Ikosaedersubstitutionen* bezeichne*). Eine derselben ($\eta' = \eta$) hat die Periode 1; 15 haben die Periode 2, nämlich die (b), und diejenigen (c), und (d), bei denen $\mu = \nu$; 20 haben die Periode 3: diejenigen (c), für welche $\mu = \nu + 2$, und die (d), bei denen $\mu = \nu + 1$; die 24 übrigen endlich haben die Periode 5; es sind die (a), bei denen $\nu = 1, 2, 3, 4$, die (c), bei denen $\mu = \nu + 1$ und die (d), bei denen $\mu = \nu + 2$. Man controlirt diese Angabe zweckmässig durch Berechnung der bei den einzelnen Substitutionen ungeändert bleibenden Werthe von η.

Legt man f, H, T in nicht kanonischer Form zu Grunde, so treten an Stelle der Substitutionen (3) in leicht verständlicher Weise solche, die sich darstellen lassen, wenn man in (3) statt η' und η bez. schreibt

$$\frac{\alpha\eta' + \beta}{\gamma\eta' + \delta}, \quad \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},$$

wo $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ geeignet zu wählen sind.

---

*) Vergl. die Darstellung bei Gordan, diese Annalen XII, p. 45, 46.

§ 3.

Die Gruppe der 120 binären Substitutionen.

Schreibt man in (3) statt η $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, statt η' $\frac{\eta_1'}{\eta_2'}$ und sondert Zähler und Nenner in der Art, dass die entstehenden binären Substitutionen die Determinante $+1$ haben, so entstehen folgende Formeln, *in denen das Vorzeichen nothwendig willkürlich ist, so dass sie eine Gruppe von* 120 *binären linearen Substitutionen vorstellen.* Es werden η_1', η_2' bez. gleich:

$$(4)\quad \begin{cases} \pm\,\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_1, & \pm\,\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_2 \\ \mp\,\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2, & \pm\,\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1 \\ \pm\,\dfrac{\varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon+\varepsilon^4)\,\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1+\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, & \pm\,\dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}}\left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1-(\varepsilon+\varepsilon^4)\,\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \\ \mp\,\dfrac{\varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1-(\varepsilon+\varepsilon^4)\,\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, & \pm\,\dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon+\varepsilon^4)\,\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1+\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}. \end{cases}$$

Aus der Gruppe von 60 Substitutionen der einen Veränderlichen η wird also eine doppelt so zahlreiche Gruppe binärer Substitutionen. Durch dieselben gehen übrigens, wie man von vorneherein einsehen kann, f, H, T auch dem Vorzeichen nach in sich über.

Verzichtet man darauf, dass die Substitutionsderminante $= +1$ sein soll, sondern setzt sie nur (damit die Gruppe überhaupt aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen bestehe) einer Einheitswurzel gleich: $\sqrt[n]{1}$, so wird die Gesammtzahl der Substitutionen 120 n, indem η_1' und η_2' mit einer beliebigen Potenz von $\sqrt[2n]{1}$ simultan behaftet werden können. Es ist dies eine sehr selbstverständliche Bemerkung, die ich hier nur anführe, um das Verhalten der weiterhin zu gebrauchenden hypergeometrischea Reihen zu erklären. Bei ihnen ist $n = 6$, η_1' und η_2' können immer simultan um zwölfte Einheitswurzeln geändert werden. Dabei bleibt f ungeändert, aber nicht H und T, sondern erst H^3 und T^2.

Die Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen findet natürlich auch hier Anwendung; man hat nur noch die Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ zuzufügen.

§ 4.

Charakterisirung der Ikosaedergleichung.

Nach den Untersuchungen, welche ich im neunten Annalenbande ausführte und die Gordan neuerdings auf dem Wege der Rechnung bestätigte *) (Bd. XII. p. 23—46), giebt es nur *dreierlei* Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen, welche 60 Substitutionen umfassen. Die eine derselben ist die *Ikosaedergruppe*, wie sie durch (3) in kanonischer Form dargestellt ist. Die zweite gehört dem *Kreistheilungstypus* an und kann in kanonischer Form geschrieben werden:

$$\eta, \ \alpha\eta, \ \alpha^2\eta, \cdots\cdots\cdot \alpha^{59}\eta,$$

wo $\alpha = \cos\frac{\pi}{30} + i \sin\frac{\pi}{30}$, die dritte dem *Doppelpyramidentypus*; sie kann, $\beta = \cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}$ gesetzt, in kanonischer Form folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccc} \eta, & \beta\eta, & \beta^{29}\eta, \\ -\frac{1}{\eta}, & -\frac{\beta}{\eta}, & -\frac{\beta^{29}}{\eta}. \end{array}$$

Unter diesen dreierlei Gruppen ist die Ikosaedergruppe durch mannigfache Kennzeichen zu charakterisiren. Das einfachste und von mir später verwandte ist dieses: *Die Ikosaedergruppe enthält im Gegensatze zu den beiden anderen keine Substitution, deren Periode grösser als 5 ist.*

In Folge dessen kann man den allgemeinen Satz aussprechen: *Wenn eine Grösse η durch eine Gleichung 60ten Grades von gegebenen Grössen $a, b, c, \cdots$ in der Weise abhängt, dass sich jeder Werth von η aus einem beliebigen der 60 Werthe durch lineare Substitution mit numerischen Coëfficienten ergiebt, wenn ferner keine dieser Substitutionen eine Periode > 5 besitzt, so hängt η von einer Ikosaedergleichung ab:*

$$\frac{-5\cdot 144\, H^3(\eta)}{7Bf^5(\eta)} = \Phi(a, b, c, \cdots)\ ^{**}),$$

wo die Coëfficienten von f, H numerisch sind.

Führt man dann statt η durch geeignete lineare Substitution ein neues η ein, so erhält man in kanonischer Form:

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \Phi(a, b, c, \cdots)\cdot$$

Der hiermit ausgesprochene Satz wird weiterhin die allerwesentlichste Rolle spielen. In den Fällen, in denen er zur Anwendung kommt, ist die Wahl eines kanonischen η durch die Bedingungen der Aufgabe jedesmal von vorneherein ermöglicht, so dass eine Reduction der allgemeineren Ikosaedergleichung auf die kanonische, wie sie nun gelehrt werden soll, nicht noch nothwendig ist. Aber die folgende Auseinandersetzung muss hier ihre Stelle finden, damit der Zusammen-

---

*) Vergl. auch Camille Jordan in den Comptes Rendus. 1877.

**) Wenn $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, so schreibe ich künftig $\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}$ statt $\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)}$.

hang deutlich sei, welcher zwischen der Darstellung in meiner vorigen Arbeit (Annalen IX) und der nun eingehaltenen besteht.

§ 5.

Die allgemeine Ikosaedergleichung ist mit zwei kanonischen äquivalent.

Um die allgemeinere Ikosaedergleichung (die ich durch Indices bez. Accente auszeichnen will):

$$\frac{-5\cdot 144\cdot H_1^3(\eta_1', \eta_2')}{7\cdot B\cdot f_1^5(\eta_1', \eta_2')} = X \tag{5}$$

auf die kanonische

$$1728\,\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X \tag{6}$$

zurückzuführen, muss man, wie bereits bemerkt, statt $\frac{\eta_1'}{\eta_2'}$ eine geeignete lineare Combination $\frac{\alpha\eta_1' + \beta\eta_2'}{\gamma\eta_1' + \delta\eta_2'}$ als neue Unbekannte einführen. Die Bestimmung von α, β, γ, δ verlangt, wie ich jetzt zeigen werde, eben wieder die Auflösung einer kanonischen Ikosaedergleichung.

Um nämlich die Substitution zu finden, welche (5) in (6) überführt, hat man nur diejenigen drei Werthe a, b, c von η zu suchen, welche drei beliebig angenommenen Werthen a', b', c' von η' vermöge der Substitution entsprechen. Nun ist aber die linke Seite von (5) — wenn der Ausdruck gestattet ist — eine *absolute* Covariante, die sich bei linearer Substitution nicht ändert. Daher hat man zur Bestimmung von a, b, c die Gleichungen:

$$1728\,\frac{H^3(a)}{f^5(a)} = -\frac{5\cdot 144\,H_1^3(a')}{7B_1 f_1^5(a')};\quad 1728\,\frac{H^3(b)}{f^5(b)} = -\frac{5\cdot 144\,H_1^3(b')}{7B_1 f_1^5(b')};$$
$$1728\,\frac{H^3(c)}{f^5(c)} = -\frac{5\cdot 144\,H_1^3(c')}{7B_1 f_1^5(c')}.$$

Diese drei Gleichungen sind „kanonische" Ikosaedergleichungen. Es genügt, eine derselben zu lösen, da man die drei Werthe a', b', c' consecutiv nehmen kann und sich dann aus den Wurzeln der einen Gleichung die zugehörigen Wurzeln der beiden anderen Gleichungen rational ergeben.

Die allgemeinere Ikosaedergleichung wird also dadurch gelöst, dass man nach einander zwei kanonische Ikosaedergleichungen erledigt.

Einen besonderen Fall nun der allgemeineren Gleichungen, der wieder mit den kanonischen Gleichungen auf derselben Stufe steht, hatte ich im neunten Annalenbande betrachtet. Es ist der Fall $X = \infty$, wo also die Gleichung

$$f_1(\eta_1', \eta_2') = 0$$

zur Lösung vorgelegt ist. Da die specielle Gleichung

$$f(\eta_1, \eta_2) = 0$$

gelöst ist (siehe oben § 2.), so verlangt das damals gestellte Problem im Sinne der hier gebrauchten Ausdrucksweise nur die Lösung *einer* kanonischen Ikosaedergleichung. Hierin ist die Uebereinstimmung begründet, welche zwischen den weiterhin abzuleitenden Eigenschaften der (kanonischen) Ikosaedergleichung und den damals gewonnenen Resultaten besteht.

§ 6.

Gruppe der Ikosaedergleichung. Conforme Abbildung.

Man kann jede Function der Wurzeln der Ikosaedergleichung vermöge der Formeln (3) als Function einer einzelnen Wurzel darstellen. Substituirt man nun für diese eine Wurzel eben wieder vermöge der Formeln (3) der Reihe nach jede andere und ändert sich dabei der Werth der Function nicht, so ist sie offenbar rational. Daher: *Die Galois'sche Gruppe der Ikosaedergleichung besteht aus* 60 *Permutationen. Man erhält dieselbe, wenn man die* 60 *Wurzeln als Functionen von einer unter ihnen auffasst und auf diese eine die Substitutionen* (3) *anwendet.* Die Structur dieser Gruppe lässt sich, wie ich auch Annalen IX, p. 208 angab, am besten folgendermassen charakterisiren. Es giebt, wie weiterhin noch ausführlich zu erläutern ist, fünfwerthige Functionen von η, welche bei jeder der 60 Substitutionen (3) eine Permutation erfahren. Nun lässt sich aus den 120 Vertauschungen von fünf Dingen nur eine Gruppe von 60 zusammensetzen, das ist die Gesammtheit der geraden Vertauschungen. Ihr also entspricht die hier vorliegende Gruppe der Ikosaedergleichung.

Aeusserst anschaulich werden die Beziehungen zwischen den Wurzeln durch die conforme Abbildung, welche Schwarz l. c. angiebt. Durch die Symmetrie-Ebenen des Ikosaeders wird die η-Kugel in 120 abwechselnd congruente und symmetrische Dreiecke mit den Eckenwinkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ zerlegt. *Die* 60 *Dreiecke der einen Art sind dann das Bild der positiven, die* 60 *Dreiecke der anderen Art das Bild der negativen Halbebene X. Die Ecken* $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ *entsprechen* $X = 0, \infty, 1$.*) Die 60 Wurzeln einer Ikosaedergleichung sind immer durch 60 homologe Punkte zusammengehöriger Dreiecke vorgestellt. Die Permutationen der Wurzeln, welche die Galois'sche Gruppe bilden, werden durch die 60 Drehungen erzeugt, welche das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen.

---

*) Beiläufig sei bemerkt: Aus dieser Abbildung gehen Sätze wie folgende hervor: *Für jedes X kann man die* 60 *Wurzeln* η *von vorneherein separiren, für reelles X sind immer* 4 *und nur* 4 *Wurzeln* η *reell.*

§ 7.

Lösung der Ikosaedergleichung resp. unseres Fundamentalproblem's durch hypergeometrische Reihen. *)

Der citirten Abhandlung von Schwarz kann man ferner unmittelbar entnehmen, dass sich die Ikosaedergleichung resp. unser Fundamentalproblem durch hypergeometrische Reihen lösen lässt. **) Dies lässt sich auf verschiedenartige Weise bewerkstelligen (vgl. § 9.), am einfachsten in der Weise, dass man $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ gleich setzt dem Quotienten zweier geeigneter Particularlösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{d^2y}{dX^2} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)X}{X \cdot 1 - X} \cdot \frac{dy}{dX} - \frac{\alpha \cdot \beta}{X \cdot 1 - X} \cdot y,$$

wo X den Parameter der Ikosaedergleichung selbst bedeutet und die Ausdrücke $(1-\gamma)^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $(\gamma-\alpha-\beta)^2$ in irgend einer Reihenfolge gleich zu setzen sind $\frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{4}$. Ich will diese Particularlösungen selbst mit η_1, η_2 bezeichnen; sie sind zunächst, wie selbstverständlich, nur bis auf einen gemeinsamen constanten Factor bestimmt. Ferner wähle ich:

$$1-\gamma = \frac{1}{3}, \quad \alpha-\beta = \frac{1}{5}, \quad \gamma-\alpha-\beta = \frac{1}{2}$$

und also:

$$(7) \qquad \alpha = \frac{11}{60}, \quad \beta = -\frac{1}{60}, \quad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Dann folgt durch Differentiation der Gleichung:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X$$

für $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, und durch Anwendung des bekannten Satzes:

$$\eta_1'\eta_2 - \eta_2'\eta_1 = C \cdot X^{-\gamma}(1-X)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

das einfache Resultat:

$$(8) \qquad \eta_1 = \varrho \cdot \frac{\eta}{\sqrt[12]{f(\eta)}}, \quad \eta_2 = \varrho \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{f(\eta)}}$$

und also

$$f(\eta_1, \eta_2) = \varrho^{12},$$

wo ϱ einen constanten Factor bedeutet. ***)

---

*) Die Entwickelungen der § 7., 8., 9. stehen mit den übrigen Betrachtungen des Textes nur in losem Zusammenhange. In § 10. nehme ich die algebraische Untersuchung wieder auf.

**) Die gleiche Bemerkung macht Brioschi, Annali di Matematica, II, 8, l. c.

***) Vergl. Annalen XII. p. 178.

Handelt es sich jetzt um Auflösung des in § 1. aufgestellten Fundamentalproblems, so verfahre man folgendermassen. Man berechne zunächst die Grösse

$$X = 1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)},$$

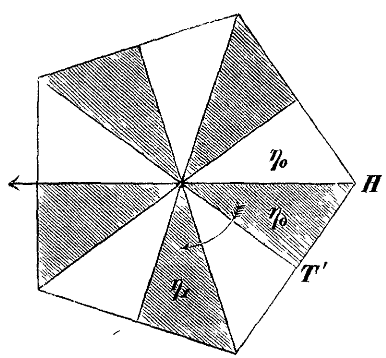
und dann aus ihr die sogleich noch näher zu bezeichnenden hypergeometrischen η_1, η_2, wobei man ϱ so wählen muss, dass es gleich ist der zwölften Wurzel aus dem vorgegebenen Werthe von f. Hierdurch sind η_1, η_2 bis auf zwölfte Einheitswurzeln bestimmt; diese letzteren gewinnt man, soweit sie überhaupt bestimmbar sind (nämlich bis auf's Vorzeichen) durch Vergleich der vorgegebenen Werthe von H und T.

In den Formeln, die ich nun aufstellen werde, ist ϱ der Einfachheit wegen gleich 1 gesetzt; man hat also die mitzutheilenden Werthe von η_1, η_2 im einzelnen Falle mit $\sqrt[12]{f(\eta_1, \eta_2)}$ zu multipliciren. Aus den Formeln (8) geht hervor, dass η_1, η_2, wenn sich X in der complexen Ebene bewegt, ein System von 720 binären linearen Substitutionen erfahren, wie es § 3. zu Schluss angegeben wurde.

§ 8.

Bestimmung der Particularlösungen η_1, η_2.

Da sich alle in Betracht kommenden Werthe von η_1, η_2 aus einem Werthepaare durch die 120 binären Ikosaedersubstitutionen (4) ergeben, so genügt es, *ein* Paar η_1, η_2 zu berechnen, und ich benutze die soeben genannte conforme Abbildung zur Berechnung dieses Paares. Um den Unendlichkeitspunkt der η-Kugel schaaren sich fünf der oben bezeichneten 60 Dreiecke, welche die Bilder der positiven Halbebene X sind; sie sind in der Figur, welche die Umgebung des Punktes $\eta = \infty$ schematisch darstellen soll, schraffirt.



Die Richtung des geradlinigen Pfeiles soll die Richtung des durch den Punkt $\eta = \infty$ in dem Sinne $-\infty$, 0, $+\infty$ hindurchgehenden Meridians der reellen Zahlen bedeuten. So wähle ich als Bild der positiven Halbebene X dasjenige schraffirte Dreieck, welches mit dem Buchstaben η_0 bezeichnet ist (und später als Bild der negativen Halbebene X das mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete, anliegende, nicht schraffirte Dreieck). Die beiden durch H' und T' bezeichneten Ecken dieses Dreiecks sind Wurzeln der quadratischen in H, T enthaltenen Factoren:*)

$$\eta^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\eta - 1 = 0$$

und

$$\varepsilon^2\eta^2 + (1+\sqrt{5})\,\eta - \varepsilon^3 = 0$$

und zwar sind sie diejenigen Wurzeln, welche dem positiven Vorzeichen der auftretenden Quadratwurzel entsprechen. Man findet so:

$$\eta_{H'} = 1 - \alpha\,\varepsilon - \alpha^2\varepsilon^4 = 1 + 2\cos\frac{\pi}{15} = 2{,}9563\cdots \quad \left(\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\eta_{T'} = \varepsilon^3\left((\varepsilon^2+\varepsilon^3) - i(\varepsilon - \varepsilon^4)\right) = 2\,\varepsilon^3\left(\cos\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5}\right) = -3{,}\,5201\cdots\varepsilon^3.$$

Lässt man jetzt X in positivem Sinne den Unendlichkeitspunkt (der X-Ebene) umkreisen, so bewegt sich η_0 im Sinne des in der Figur beigesetzten (gekrümmten) Pfeiles und verwandelt sich in η_1. Dies aber kommt einer positiven Drehung der η-Kugel durch $\frac{2\pi}{5}$ um den Durchmesser $0 - \infty$ gleich, d. h.

Der Functionszweig η_0 hat die Eigenschaft, wenn X den Unendlichkeitspunkt in positivem Sinne umkreist, den Factor ε zu erhalten.

Nun giebt es aber von constanten Factoren abgesehen nur zwei Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung, welche bei Umkreisung des Punktes $X = \infty$ in Multipla ihrer selbst übgehen; es sind im vorliegenden Falle (unter $\varkappa$, λ die constanten Factoren verstanden):

$$A = \varkappa\,(1-X)^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60},\ \frac{29}{60},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{1-X}\right),$$

$$B = \lambda\,(1-X)^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60},\ \frac{41}{60},\ \frac{6}{5},\ \frac{1}{1-X}\right),$$

oder, in anderer Darstellung:

$$A_1 = \varkappa_1\,X^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60},\ \frac{19}{60},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{X}\right),$$

$$B_1 = \lambda_1\,X^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60},\ \frac{31}{60},\ \frac{6}{5},\ \frac{1}{X}\right).$$

Setzen wir wieder $\eta_0 = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, so muss bei richtiger Wahl der $\varkappa$, λ bez. $\varkappa_1$, λ_1 das η_1 mit A und A_1, das η_2 mit B und B_1 übereinstimmen, weil $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ für $X = \infty$ selbst ∞ wird. Die Constanten $\varkappa$, λ berechnen

*) Vergl. Annalen IX, p. 205, 206.

sich aus den Werthen von $\eta_{II'}$ bez. $\eta_{T'}$ und der Forderung, die ich nun einführe, *dass* $f(\eta_1, \eta_2)$ *gleich Eins sein soll.* So findet man*) bis auf zwölfte Einheitswurzeln:

$$(9)\quad \begin{cases} \eta_1 = 1{,}13229\,(1-X)^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60}, \frac{29}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1-X}\right), \\ \eta_2 = 0{,}25495\,(1-X)^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60}, \frac{41}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{1-X}\right), \end{cases}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$(10)\quad \begin{cases} \eta_1 = (1{,}13074 - 0{,}05926\,i)\, X^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{X}\right) \\ \eta_2 = (0{,}21382 + 0{,}13885\,i)\, X^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{X}\right). \end{cases}$$

Von diesen Darstellungen convergirt die erste für alle Werthe von X, für welche der absolute Betrag $|1 - X| \geqq 1$, die zweite für diejenigen, deren absoluter Betrag $|X| \geqq 1$. Die sechzigsten Wurzeln sind so zu nehmen, dass die Amplitude zwischen 0 und 3 Grad liegt.

Um für die hierdurch noch ausgeschlossenen X ebenfalls eine Formel zu haben, benutze ich in bekannter Weise andere Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung**). Ist:

$$F_1 = F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{2}{3}, X\right)$$

$$F_2 = F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{1}{2}, 1-X\right),$$

so kommt

$$(11)\quad \begin{cases} \eta_1 = (0{,}09072 + 1{,}73116\,i)\, F_1 + (1{,}02130 - 1{,}76895\,i)\, F_2 \\ \eta_2 = (3{,}32355 - 5{,}11783\,i)\, F_1 + (-3{,}01928 + 5{,}22954\,i)\, F_2, \end{cases}$$

und diese Darstellung convergirt für alle bislang ausgeschlossene X, diejenigen nämlich, bei denen gleichzeitig $|X| \leqq 1$ und $|1 - X| \leqq 1$.

Die Formeln (9), (10), (11) *definiren die gewünschten* η_1, η_2 *für jedes* X *der positiven Halbebene.*

Um auch Formeln für die negative Halbebene zu haben, welche dem oben bezeichneten nicht schraffirten Dreiecke entsprechen, hat man (9) unverändert beizubehalten und in (10) und (11) das i der constanten Factoren in $-i$ zu verwandeln.

---

*) Bei diesen Rechnungen sowie bei vielen der im Folgenden ausgeführten hat mich Hr. stud. Gierster in dankenswerther Weise unterstützt. Die zahlentheoretische Definition der angegebenen Coefficienten werde ich bei der nächsten Gelegenheit zufügen.

**) Die conforme Abbildung zeigt immer unzweideutig, welche Werthe den vieldeutigen Wurzelzeichen beizulegen sind. Hierauf ist in den Darstellungen, welche ich kenne, nicht genügend Rücksicht genommen.

§ 9.

Anderweitige Lösungen der Ikosaedergleichung.

Neben die hier entwickelte Lösung der Ikosaedergleichung stellen sich unbegrenzt viele andere von ähnlichem Charakter. Schreibt man nämlich in

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X$$

statt X eine *rationale* Function einer neuen Veränderlichen x:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = R(x),$$

so kann η wieder (und noch auf unbegrenzt viele Weisen) dargestellt werden als Quotient zweier Particularlösungen einer linearen Differentialgleichung, bei der x die unabhängige Variable ist und die Coefficienten rational in x sind. Man kann dann $R(x)$ insbesondere so wählen, dass die Differentialgleichung selbst wieder eine hypergeometrische wird; derartige Werthe von $R(x)$ sind von Brioschi (diese Annalen Bd. XI, p. 410) und von mir (Bd. XII, p. 174) angegeben. Ich will hier nur den einen Werth von $R(x)$ herausgreifen, der dem Falle XIII der von Schwarz*) gegebenen Tabelle entspricht, insofern ich bei einer späteren Gelegenheit von diesen Formeln Gebrauch machen möchte:

$$R(x) = \frac{1}{108} \cdot \frac{(x^2 + 14x + 1)^3}{x(1-x)^4}.$$

Für die entsprechende hypergeometrische Differentialgleichung hat man $(1-\gamma)^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $(\gamma-\alpha-\beta)^2$ in irgend einer Anordnung gleich zu setzen $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{16}{25}$, also etwa $\gamma = \frac{4}{5}$, $\alpha = \frac{1}{10}$, $\beta = -\frac{1}{10}$.

Setzt man wieder $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ und nimmt η_1, η_2 als Particularlösungen dieser Differentialgleichung, so kommt:

$$\eta_1 = \varrho \cdot \frac{x^{\frac{1}{60}}(1-x)^{\frac{1}{15}}\eta}{\sqrt[12]{f(\eta)}}, \quad \eta_2 = \varrho \cdot \frac{x^{\frac{1}{60}}(1-x)^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[12]{f(\eta)}}$$

und man hat also, für $\varrho = 1$, die Lösungen der *folgenden Aufgabe* vor sich, die ein besonderer Fall des Fundamentalproblems des § 1. ist:

$$(12) \quad \begin{cases} f(\eta_1, \eta_2) = x(1-x)^4, \\ H(\eta_1, \eta_2) = x^2 + 14x + 1, \\ T(\eta_1, \eta_2) = x^3 - 33x^2 - 33x + 1. \end{cases}$$

Ich unterlasse es hier, die Particularlösungen η_1, η_2 explicite anzugeben.

---

*) p. 323 der citirten Arbeit.

§ 10.

Resolventen niederen Grades.

Wenn man auf eine ganze homogene Function gerader Ordnung von η_1, η_2 (und solche will ich allein betrachten) die 120 binären Ikosaedersubstitutionen (4) anwendet, so nimmt sie im Allgemeinen 60 Werthe an; sie kann, selbstverständlicherweise, im besonderen Falle weniger Werthe erhalten, deren Zahl ein Theiler von 60 ist.

Dann stellt sie, gleich Null gesetzt, eine solche Punktgruppe auf der η-Kugel dar, welche durch einige der 60 Drehungen, die das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, ungeändert bleibt. Umgekehrt, indem man die einfachsten solchen Punktgruppen aufsucht, gewinnt man die niedrigsten Functionen der gemeinten Art, welche als Wurzeln von Resolventen der Ikosaedergleichung verwandt werden können.

Aus den 60 Drehungen, welche das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, lassen sich Untergruppen von 2, 3, 5, 4, 6, 10, 12 Substitutionen bilden, von denen die drei ersten dem Kreistheilungstypus, die folgenden drei dem Doppelpyramidentypus, die letzte dem Tetraedertypus angehört. Entsprechend erhält man Resolventen vom Grade 30, 20, 12, 15, 10, 6, 5. Da es meine vorzügliche Absicht ist, vom Ikosaeder aus zu den Untersuchungen über die Gleichungen fünften Grades und über die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades zu gelangen, so werde ich mich auf die Herleitung einer Resolvente vom sechsten Grade und verschiedener Resolventen fünften Grades beschränken.

§ 11.

Eine Resolvente vom sechsten Grade.

Eine Resolvente vom sechsten Grade gewinnt man am einfachsten, wenn man beachtet, dass die Wurzelpunkte von $f = 0$ in 6 Paare gegenüberstehender zerfallen. Sei $\varphi(\eta_1, \eta_2) = 0$ ein solches Punktepaar. Durch eine lineare Substitution von der Determinante $+1$, welche $\varphi = 0$ ungeändert lässt, geht bekanntlich $+\varphi$ in $+\varphi$ oder $-\varphi$ über, je nachdem bei der Substitution die Wurzeln von $\varphi = 0$ einzeln ungeändert bleiben oder unter einander vertauscht werden. Nun giebt es unter den Drehungen, die das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, allerdings solche, welche gegenüberstehende Eckpunkte des Ikosaeders vertauschen. *Daher ist $\varphi(\eta_1, \eta_2)$ [mit bestimmter Determinante genommen] zwölfwerthige, φ^2 sechswerthige Function.*

Ich will $\varphi(\eta_1, \eta_2)$ mit der Determinante $+5$ annehmen. Dann hat man, bei willkürlich angenommenem Vorzeichen und auch sonst gebräuchlicher Indexbezeichnung (vergl. Annalen IX, p. 205):

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi_\infty = \sqrt{5}\cdot \eta_1, \eta_2, \\ \varphi_\nu = \varepsilon^{-\nu}\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 - \varepsilon^{+\nu}\eta_2^2, \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

und

$$\varphi_\infty\, \varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3\, \varphi_4 = \sqrt{5}\cdot f.$$

Setzt man jetzt $z = \varphi^2$, also $z_\infty = \varphi_\infty{}^2$, $z_\nu = \varphi_\nu{}^2$, so erhält man die Gleichung, der z genügt, unmittelbar aus der Bemerkung: *dass die symmetrischen Functionen der sechs φ^2 jedenfalls ganze Functionen von f, H, T sind.* Daher kommt:

$$\sum z = 0, \quad \sum z^2 = 0, \quad \sum z^3 = \varkappa f, \quad \sum z^4 = 0, \quad \sum z^5 = \lambda H,$$

wo $\varkappa$, λ Zahlenfactoren bedeuten, die man durch ein einzelnes Glied bestimmt. *Auf diese Weise findet man:*

$$(14)\qquad z^6 - 10fz^3 + 144Hz + 5f^2 = 0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung:

$$\prod(\varphi_i^2 - \varphi_k^2)^2$$

hat eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft. Es ist

$$\varphi_i^2 - \varphi_k^2 = (\varphi_i + \varphi_k)\ (\varphi_i - \varphi_k)$$

und es stellt, wie ich früher bemerkte (Annalen IX, p. 205) sowohl $\varphi_i + \varphi_k = 0$ als $\varphi_i - \varphi_k = 0$ eins der 15 Punktepaare von T vor. *Daher ist die Discriminante bis auf einen Zahlenfactor gleich T^4.* Ist also die vorstehende Gleichung sechsten Grades, d. h. ist einfach f und H gegeben, so ist die Quadratwurzel aus der Discriminante rational bekannt; ist aber, wie beim Fundamentalprobleme in § 1. vorausgesetzt wird, von vornherein auch T gegeben, so kennt man sogar die vierte Wurzel.

§ 12.

Die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades.

Bekanntlich hat Jacobi*) als Eigenschaft der Multiplicatorgleichungen vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade, die bei Transformation n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen auftreten (n Primzahl), angegeben, dass sich die aus den $(n+1)$ Wurzeln gezogenen Quadratwurzeln aus $\frac{n+1}{2}$ Grössen $A_0, \cdots A_{\frac{n-1}{2}}$ in folgender Weise zusammensetzen lassen:

---

*) Crelle's Journal Bd. 3, p. 308.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{z_\infty} &= \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n\cdot A_0}\\
\sqrt{z_0} &= A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{\frac{n-1}{2}}\\
\sqrt{z_1} &= A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^4 A_2 + \cdots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\cdot A_{\frac{n-1}{2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sqrt{z_{n-1}} &= A_0 + \varepsilon^{n-1} A_1 + \varepsilon^{4(n-1)} A_2 + \cdots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2(n-1)}\cdot A_{\frac{n-1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

und es sind diese Gleichungen von Kronecker und Brioschi für $n=5$ *allgemein* untersucht worden*).

Die principielle Bedeutung dieser Gleichungen — ganz unabhängig von ihrem Zusammenhange mit den elliptischen Functionen — lässt sich unter den allgemeinen Gesichtspunkt der Einleitung subsumiren. *Die Vertauschungen der Grössen $\sqrt{z}$, welche die Galois'sche Gruppe der Jacobi'schen Gleichung ausmachen, sind durch lineare Substitutionen der Grössen $A_0 \cdots A_{\frac{n-1}{2}}$ vorgestellt.* Denn bestimmt man für eine vorgelegte Jacobi'sche Gleichung alle Systeme von Grössen A_0, A_1, $\cdots$, welche den zulässigen Anordnungen der Wurzeln entsprechen, so geht das einzelne System dieser Grössen aus einem beliebigen zu Grunde gelegten durch homogene lineare Substitution mit numerischen Coefficienten hervor. Ich werde diess weiter unten (Abschn. II, § 8.) für die Jacobi'schen Gleichungen vom sechsten Grade noch näher ausführen und dadurch zeigen, wesshalb zwischen ihnen und den Ikosaederproblemen der engste Zusammenhang bestehen *muss*. Hier begnüge ich mich, diesen Zusammenhang in dem zunächst vorliegenden Falle einfach aufzuweisen.

Für die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades hat man die Definitionsgleichungen:

$$(15)\qquad \sqrt{z_\infty} = \sqrt{5}\cdot A_0,\qquad \sqrt{z_\nu} = A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{-\nu} A_2$$
$$\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},\qquad \nu = 0, 1, 2, 3, 4\right)$$

und findet durch Ausrechnung:

$$(16)\quad (z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 - C(z-A) + 5B^2 - AC = 0$$

wo A, B, C die folgenden Ausdrücke bedeuten:

---

*) Vergl. die Citate der Einleitung sowie die Auseinandersetzungen des zweiten Abschnittes.

$$(17)\begin{cases} A = A_0^2 + A_1 A_2 \\ B = 8A_0^4 A_1 A_2 - 2A_0^2 A_1^2 A_2^2 + A_1^3 A_2^3 - A_0(A_1^5 + A_2^5) \\ C = 320 A_0^6 A_1^2 A_2^2 - 160 A_0^4 A_1^3 A_2^3 + 20 A_0^2 A_1^1 A_2^4 + 6 A_1^5 A_2^5 \\ \quad -4A_0(A_1^5 + A_2^5)(32 A_0^4 - 20 A_0^2 A_1 A_2 + 5 A_1^2 A_2^2) + A_1^{10} + A_2^{10}. \end{cases}$$

Setzt man nun insbesondere $A = 0$, wodurch man *specielle* Gleichungen erhält, die Kronecker seiner Lösung der Gleichungen fünften Grades zu Grunde legte, so kommt einfach:

$$(18) \qquad z^6 + 10Bz^3 - Cz + 5B^2 = 0.$$

Diese Gleichung aber wird mit der Gleichung (14) *des vorigen Paragraphen identisch, sobald man setzt:*

$$B = -f, \qquad C = -144H.$$

In der That stimmen auch die Definitionsgleichungen des vorigen Paragraphen für $\sqrt{z}$ mit den hier angewandten überein; man hat nur zu setzen:

$$A_0 = \eta_1\eta_2, \quad A_1 = +\eta_2^2, \quad A_2 = -\eta_1^2$$

und befriedigt dadurch zugleich in allgemeinster Weise die Bedingung $A = 0$.

Wird die Gleichung (18) gegeben und zugleich die vierte Wurzel aus ihrer Discriminante adjungirt, so hat man die Zahlwerthe von f, H, T. Alle Entwickelungen also, die hier an das Fundamentalproblem des § 1. angeknüpft werden, können auch so dargestellt werden, dass die specielle Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades den Ausgangspunkt bildet. Doch scheint das weniger naturgemäss.

§ 13.

Die Resolventen fünften Grades. Einleitung.

Dass die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades*) nach Adjunction der vierten Wurzel ihrer Discriminante sehr einfache Resolventen fünften Grades besitzen, *bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelcuben gleich Null ist*, hat Brioschi zuerst gefunden. Seine hauptsächlichen Formeln, die ich später benutze, sind diese**). Setzt man:

$$(19) \qquad y_\nu = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\left((z_\infty - z_\nu)(z_{\nu+1} - z_{\nu-1})(z_{\nu+2} - z_{\nu-2})\right)^{1/2}$$

(eine Formel, die auf mannigfache Weise umgeschrieben werden kann), so drücken sich die y_ν folgendermassen durch die A_0, A_1, A_2 aus:

---

*) Richtiger wohl: die Gleichungen zwölften Grades, von der die $\sqrt{z}$ abhängen

**) Die Zahlencoefficienten sind im Texte so mitgetheilt, wie sie Joubert später berechnet hat (Comptes Rendus 1867, 1, p. 1237.)

$$(20)\qquad y_\nu = \varepsilon^\nu P_1 + \varepsilon^{2\nu} P_2 + \varepsilon^{3\nu} P_3 + \varepsilon^{4\nu} P_4,$$

wo

$$(21)\qquad \begin{cases} P_1 = - A_1\,(4A_0^2 - A_1 A_2), \\ P_2 = \qquad (+ 2A_0 A_1^2 - A_2^3), \\ P_3 = \qquad (- 2A_0 A_2^2 + A_1^3), \\ P_4 = + A_2\,(4A_0^2 - A_1 A_2), \end{cases}$$

und genügen der Gleichung fünften Grades:

$$(22)\qquad y^5 + 10By^3 + 5\,(9B^2 - AB)\,y - \sqrt[4]{\Pi} = 0,$$

wo Π die Discriminante der Jacobi'schen Gleichung und

$$(23)\quad \sqrt{\Pi} = -1728B^5 + 720ACB^3 - 80A^2C^2B + 64A^3(5B^2 - AC)^2 + C^3$$

ist.

Wenn $A = 0$, so wird die Gleichung (22):

$$(24)\qquad y^5 + 10By^3 + 45B^2y - \sqrt[4]{\Pi} = 0$$

und, für $B = -f$, $C = -144H$:

$$\sqrt{\Pi} = 1728f^5 - 144^3H^3 = 144\,T^2.$$

Um jetzt vom Ikosaeder aus zu dieser Resolvente fünften Grades und anderen desselben Grades zu gelangen, die später wichtig werden, stelle ich folgende Betrachtungen an.

§ 14.

Die Resolventen fünften Grades. Geometrische Orientirung.

Die Existenz der Resolventen fünften Grades beruht auf dem Umstande, dass sich aus den 60 Drehungen des Ikosaeders Untergruppen von 12 bilden lassen, und diese Untergruppen gehören, wie oben bemerkt, dem *Tetraedertypus* an. Es bleiben also bei solchen 12 Drehungen, geometrisch zu reden, ungeändert: zwei reguläre Tetraeder, τ_1 und τ_2, welche zusammen die Ecken eines Würfels W bilden, dann ein Oktaeder t, und übrigens Aggregate von je 12 zusammengehörigen Punkten. In unserem Falle ist der Würfel W unter den Ecken von H, das Oktaeder t unter den Ecken von T zu suchen. Die Ecken von f bilden eine Gruppe von zusammengehörigen 12 Punkten, ebenso die $\frac{H}{W}$, während die $\frac{T}{t}$ in zwei solche Gruppen zerfallen.

Betrachten wir jetzt die entsprechenden ganzen Functionen von η_1, η_2 und ersetzen die 12 Drehungen durch die entsprechenden 24 binären Ikosaedersubstitutionen von der Determinante $+1$. Man findet dann, dass nicht $\tau_1(\eta_1, \eta_2)$, $\tau_2(\eta_1, \eta_2)$ in sich übergeführt werden, sondern erst ihre dritten Potenzen. Unmittelbar ungeändert bleibt dagegen $t(\eta_1, \eta_2)$ (die Functionaldeterminante von τ_1 und τ_2) sowie das Product $\tau_1 \cdot \tau_2 = W(\eta_1, \eta_2)$ (welches sich zugleich als Hesse'sche von t auffassen lässt). Ungeändert bleiben ferner alle Functionen 12^{ten} Grades, welche gleich Null gesetzt zusammengehörige Punkte vorstellen, insbesondere also f*). Alle derartige Functionen kann man in der Form $\varkappa t^2 + \lambda f$ anschreiben.

Die einfachsten Functionen also, welche man als Wurzeln der Resolventen fünften Grades wählen kann, sind $t(\eta_1, \eta_2)$ und $W(\eta_1, \eta_2)$, und mit ihnen mögen wir uns zunächst beschäftigen. Wünschen wir später Functionen nullter Ordnung von η_1, η_2, d. h. Functionen von η, so ist die nächstliegende $\frac{t^2}{f}$ und durch sie drücken sich alle anderen rational aus (Annalen XII, p. 168, 169).

Ich will hier noch die 12 linearen Substitutionen zusammenstellen, welche im Sinne der sogleich einzuführenden Bezeichnung das Oktaeder t_0 resp. den Würfel W_0 ungeändert lassen. Es sind diese

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{1) Die Identität } \eta' = \eta \\ \text{2) Drei Substitutionen von der Periode 2:} \\ \eta' = -\frac{1}{\eta}, \quad \frac{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + 1}{\eta - (\varepsilon + \varepsilon^4)}, \quad \frac{-\eta + (\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + 1}, \\ \text{3) Acht Substitutionen von der Periode 3:} \\ \eta' = \quad \varepsilon^2\,\frac{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon}{\varepsilon^4\eta - (\varepsilon + \varepsilon^4)}, \qquad = \quad \varepsilon^2\,\frac{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^2}{\varepsilon^3\eta - (\varepsilon + \varepsilon^4)}, \\ \quad = \quad \varepsilon^3\,\frac{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^3}{\varepsilon^2\eta - (\varepsilon + \varepsilon^4)}, \qquad = \quad \varepsilon^3\,\frac{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^4}{\varepsilon\eta - (\varepsilon + \varepsilon^4)}, \\ \quad = -\varepsilon^3\,\frac{\varepsilon^4\eta - (\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon}, \qquad = -\varepsilon^3\,\frac{\varepsilon^3\eta - (\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^2}, \\ \quad = -\varepsilon^2\,\frac{\varepsilon^2\eta - (\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^3}, \qquad = -\varepsilon^2\,\frac{\varepsilon\eta - (\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^4}. \end{array}\right.$$

Diese Formeln mögen dazu dienen, um einige Angaben, die ich später ohne Beweis mache, zu controliren.

§ 15.

Die Resolvente der t_ν.

Man berechnet für die fünf Oktaeder $t(\eta_1, \eta_2)$, die ich jetzt als t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 bezeichnen will, die folgenden Werthe (Annalen IX, p. 206):

$$(26)\quad t_\nu = -\varepsilon^\nu \cdot 5\eta_1^2\eta_2^4 + \varepsilon^{2\nu}(\eta_1^6 - 2\eta_1\eta_2^5) + \varepsilon^{3\nu}(\eta_2^6 + 2\eta_1^5\eta_2) - \varepsilon^{4\nu}\cdot 5\eta_1^4\eta_2^2.$$

Die symmetrischen Functionen der t_ν sind ganze Functionen von f, H, T. Zuvörderst kommt

$$t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 = 12\,T,$$

*) Diese Angaben stimmen überein mit den Formeln, die Annalen XII, p. 178 unter III mitgetheilt sind.

und dann hat man, unter $\varkappa$, λ Zahlenfactoren verstanden, den Ansatz:

$$\Sigma t = 0, \quad \Sigma t^2 = \varkappa f, \quad \Sigma t^3 = 0, \quad \Sigma t^4 = \lambda f$$

und findet so die Gleichung:

$$t^5 - 10 t^3 f + 45 t f^2 - 12 T = 0. \tag{27}$$

Dies ist eine Gleichung fünften Grades, welche durch die Relationen charakterisirt ist:

$$\Sigma t = 0, \quad \Sigma t^3 = 0, \quad 20 \Sigma t^4 = (\Sigma t^2)^2.$$

Sie ist der specielle Fall, der sich aus der Brioschi'schen Resolvente (22) ergiebt, wenn man $A = 0$ setzt. Zugleich gehen dann die Formeln (20), (21) in (26) über, nachdem für A_0, A_1, A_2 bez. gesetzt ist $\eta_1 \eta_2$, $+\eta_2^2$, $-\eta_1^2$. Vielleicht hat die Bemerkung Interesse, dass die Discriminante von (27) eine sechste Potenz ist. Denn man findet sie durch Ausrechnung bis auf einen Zahlenfactor gleich:

$$(T^2 - 12 f^5)^2 = 12^8 H^6.$$

Also stellt $t_i - t_k = 0$ ein Aggregat von drei zu H gehörigen Punktepaaren dar, was man durch unmittelbare Ueberlegung bestätigt.

§ 16.

Die Resolvente der W_ν.

Berechnet man W_ν als Hesse'sche Form von t_ν, so findet man bis auf einen Zahlenfactor, den ich durchgängig unterdrücke:

$$W_\nu = (\varepsilon^\nu \eta_1 - \varepsilon^{2\nu} \eta_2)(-\eta_1^7 + 7 \eta_1^2 \eta_2^5) + (\varepsilon^{3\nu} \eta_1 + \varepsilon^{4\nu} \eta_2)(-7 \eta_1^5 \eta_2^2 - \eta_2^7). \tag{28}$$

Man findet:

$$\Sigma W = 0, \quad \Sigma W^2 = 0, \quad \Sigma W^3 = -120 f^2, \quad \Sigma W^4 = 2880 f H,$$
$$\Sigma W^5 = 5 W_0 W_1 W_2 W_3 W_4 = -5 \cdot 12^4 H^2.$$

Also kommt:

$$W^5 + 40 f^2 \cdot W^2 - 720 f H \cdot W + 12^4 H^2 = 0, \tag{29}$$

eine Gleichung, die durch die Relationen

$$\Sigma W = 0, \quad \Sigma W^2 = 0, \quad \Sigma W^3 \cdot \Sigma W^5 = 6 (\Sigma W^4)^2$$

charakterisirt ist.

Ich notire noch die Beziehung

$$\frac{12^2 H}{W_\nu} = t_\nu^2 - 3 f. \tag{30}$$

§ 17.

Eine allgemeinere Resolvente fünften Grades.

Die Ueberlegungen, welche ich im dritten Abschnitte des Folgenden auseinandersetze, liessen es mir wünschenswerth erscheinen, eine allgemeinere Resolvente fünften Grades zu besitzen, welche nur den

Bedingungen $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ genügt (unter y die Wurzel verstanden). Ich bin dazu auf folgendem Wege gelangt. Eine Combination von f und t_ν, welche den genannten Bedingungen genügt, ist diese, wie man leicht controlirt:

$$(31) \qquad \sigma_\nu = 24 f^2 - 7 f t_\nu^2 + t_\nu^4.$$

Nun ergiebt sich dieselbe durch Ausrechnung gleich:

$$(\varepsilon^\nu \eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)(-46\eta_1^{20}\eta_2^3 + 1173\eta_1^{15}\eta_2^8 + 391\eta_1^{10}\eta_2^{13} + 207\eta_1^5\eta_2^{18} - \eta_2^{23})$$
$$+ (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)(\eta_1^{23} + 207\eta_1^{18}\eta_2^5 - 391\eta_1^{13}\eta_2^{10} + 1173\eta_1^8\eta_2^{15} + 46\eta_1^3\eta_2^{20}).$$

Sie hat also dieselbe Form

$$(\varepsilon^\nu \eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2) R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2) S,$$

welche auch W_ν besitzt. Da umgekehrt aus dieser Form folgt, dass die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet, *so erhält man eine allgemeinere Function der gesuchten Eigenschaft, indem man W_ν und σ_ν mit einem Parameter zusammenfügt.* Ich setze also homogen machend:

$$(32) \qquad y_\nu = \frac{\lambda f W_\nu}{H} + \frac{\mu \sigma_\nu}{f^2} \;{}^{*)},$$

wo λ, μ beliebige Constante sind. Dann ergiebt sich eine Gleichung fünften Grades, die folgendermassen lautet:

$$(33) \qquad y^5 + 5\mathsf{A} y^2 + 5\mathsf{B} y + \Gamma = 0,$$

wo A, B, Γ die Ausdrücke bezeichnen**):

---

*) Ich bemerkte im Gespräche mit Gordan, der seinerseits auf ganz anderem Wege zu eben diesen Ausdrücken geführt worden war (vergl. seine in der Einleitung citirte, in den Erlanger Berichten (Juli 1877) erschienene Note), dass sich unter ihnen insbesondere noch folgende einfache befinden:

$$\frac{t_\nu \cdot W_\nu \cdot T}{f^2 H} \quad\text{und}\quad \frac{t_\nu (t_\nu^2 - 7f)\, T}{f^4}.$$

In der That ist

$$\frac{t_\nu\, W_\nu \cdot T}{f^2 H} = \frac{6 f W_\nu}{H} + \frac{12\sigma_\nu}{f^2},$$

$$\frac{t_\nu (t_\nu^2 - 7f)\cdot T}{f^4} = -X \cdot \frac{f W_\nu}{H} - \frac{2\sigma_\nu}{f^2},$$

wo

$$X = 1728 \frac{H^3}{f^5}.$$

**) Bestimmt man $\frac{\lambda}{\mu}$ aus den Gleichungen $\frac{\partial^2 \mathsf{A}}{\partial \lambda^2} = 0$ oder $\frac{\partial^3 \mathsf{B}}{\partial \lambda^3} = 0$, $\frac{\partial^4 \Gamma}{\partial \lambda^4} = 0$, und trägt die Werthe in (32) ein, so erhält man bis auf Factoren eben die beiden in der voranstehenden Note genannten Functionen $t_\nu W_\nu$ und $t_\nu (t_\nu^2 - 7f)$.

$$
(34)\begin{cases}
\mathsf{A} = 12^3\left(\frac{8\lambda^3}{X} - 12\lambda^2\mu + 6\lambda\mu^2 - (2-X)\mu^3\right),\\
\mathsf{B} = 9\cdot 12^3\left(\frac{-16\lambda^4+32\lambda^3\mu}{X} - 24\lambda^2\mu^2 + 8(2X-1)\lambda\mu^3 - (5X-4)\mu^4\right),\\
\Gamma = 12^3\left(\frac{12^4\lambda^5 - 30\cdot 12^3\lambda^4\mu}{X} + 10\cdot 12^3\left(1+\frac{2}{X}\right)\lambda^3\mu^2 - 10\cdot 12^2\cdot\lambda^2\mu^3\right.\\
\qquad\qquad \left. + 45\cdot 12^2 X\lambda\mu^4 - 72(12-27X+24X^2)\mu^5\right).
\end{cases}
$$

Ich habe in denselben statt $1728\frac{H^3}{f^5}$ wieder X geschrieben. *Macht man durch Wahl von* $\frac{\lambda}{\mu}$ $\mathsf{A}=0$, *so hat man die Jerrard'sche Form.*

§ 18.

Rationale Transformationen einer Ikosaedergleichung in eine zweite.

Ein Problem, welches um so interessanter ist, weil es eine sehr einfache Lösung gestattet, ist die Frage nach der rationalen Umformung einer Ikosaedergleichung in eine zweite. Ich suche solche rationale Functionen ζ von η, welche selbst wieder einer Ikosaedergleichung genügen. Wendet man auf η die 60 Substitutionen (3) an, so muss also auch ζ diese Substitutionen erfahren. Aber es ist nicht nöthig, dass ζ im Einzelnen dieselbe Substitution wie η erleidet; nur die Periode der Substitution muss beiderseits die gleiche sein. Die Reihe der hier vorliegenden Möglichkeiten reducirt sich inzwischen bedeutend. Lassen wir nämlich etwa η in $\varepsilon\eta$ übergehen. So wird unter den 60 Ausdrücken, welche aus ζ durch die Ikosaedersubstitutionen (3) entstehen, jedenfalls einer sein, der auch in ein Multiplum seiner selbst übergeht, und zwar muss der zutretende Factor, da die Periode der Substitution 5 ist, eine fünfte Einheitswurzel sein. Diesen einen Ausdruck nennen wir dann ζ und operiren mit ihm. Die zutretende fünfte Einheitswurzel kann noch ε oder ε^2, ε^3, ε^4 sein. Aber den dritten und vierten Fall führt man sofort auf den zweiten und ersten zurück, indem man ζ durch $-\frac{1}{\zeta}$ ersetzt (welches auch einer der 60 Ausdrücke ist). *Es bleiben also nur noch zwei Fälle:*

1) ζ *ändert sich durch dieselben Substitutionen wie* η;
2) *man erhält die Substitutionen, welche* ζ *erleidet, wenn man in derjenigen, die* η *erfährt,* ε *in* ε^2 *verwandelt.*

Im ersteren Falle setze ich

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -\frac{\varphi_2(\eta_1, \eta_2)}{\varphi_1(\eta_1, \eta_2)},$$

wo die φ ganze homogene Functionen vom Grade n sein mögen. Ich schreibe dann:

$$\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2 = 0$$

und entwickele die linke Seite in bekannter Weise (Clebsch, Theorie der binären Formen p. 15, Gordan, Math. Annalen Bd. III, p. 360) nach Polaren:

$$\left(\zeta_1 \frac{\partial P}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial P}{\partial \eta_2}\right) + (\zeta_1 \eta_2 - \zeta_2 \eta_1)\, Q = 0,$$

wo P, Q zwei Functionen von η_1, η_2 vom Grade $n+1$, $n-1$ sind. Indem man jetzt $\zeta = \eta$ setzt, erschliesst man, dass P, Q solche Functionen von η_1, η_2 sind, welche sich bei den Ikosaedersubstitutionen reproduciren, d. h. es sind ganze Functionen von f, H, T. Umgekehrt, wenn man für P, Q ganze Functionen von f, H, T setzt, welche um zwei Einheiten im Grade differiren, so hat $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ die gewünschte Eigenschaft. *Diess also ist die allgemeine Lösung des Problems im ersten Falle*)*.

Man kann ihr noch eine viel einfachere Form geben, wenn man bemerkt, dass es genügt, nur einen Parameter in die Transformationsformel aufzunehmen, da die Ikosaedergleichung selbst nur einen Parameter besitzt. Man setze also etwa:

$$P = fH, \quad Q = \lambda T.$$

So wird

$$\zeta = \frac{\left(-f\frac{\partial H}{\partial \eta_2} - H\frac{\partial f}{\partial \eta_2}\right) + \lambda \eta_1 T}{\left(\ f\frac{\partial H}{\partial \eta_1} + H\frac{\partial f}{\partial \eta_1}\right) + \lambda \eta_2 T} \tag{35}$$

und diese Formel begreift für geeignete Werthe von λ in der That alle anderen unter sich.

Was den *zweiten* Fall unseres Problems betrifft, so wird er durch Betrachtung der fünfwerthigen Functionen des vorigen Paragraphen erledigt. Sei

$$(\varepsilon^{\nu}\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)\, R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu} y_2)\, S$$

die allgemeinste dort definirte Function, so ist einfach

---

*) Die einfachsten in Betracht kommenden Functionen sind diese:

$$\zeta = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial f}{\partial \eta_1}}, \quad = -\frac{\frac{\partial H}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial H}{\partial \eta_1}}, \quad = -\frac{\frac{\partial T}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial T}{\partial \eta_1}},$$

Man zeigt leicht: Wenn sich $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ auf der η Kugel über eins der 120 Dreiecke (§ 6.) mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$ bewegt, so bewegen sich die drei Werthe von ζ über die drei anliegenden von denselben Kreisbögen begrenzten Dreiecke, welche die Winkel $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$, bez. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$, bez. $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$ besitzen.

$$\zeta = \frac{R}{S}$$

die allgemeinste hier aufzustellende Transformationsformel. Der Beweis ergiebt sich am einfachsten aus den Entwickelungen des dritten Abschnittes, auf die ich hier verweisen muss (§ 4 Schluss).

Abschnitt II.

Das Ikosaeder und eine quadratische Form.

Dieser zweite Abschnitt bringt eine Theorie der allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen vom sechsten Grade (vergl. § 12. des Vorhergehenden). Aber ich gehe dabei zunächst wieder aus von einem Probleme, welches man beim Ikosaeder stellen kann und zeige erst hinterher die Beziehung zu den Jacobi'schen Gleichungen. Man kann das Fundamentalproblem des vorigen Abschnittes (§ 1.) so hinstellen: Es ist ein Ikosaeder $f(x_1 x_2)$ in kanonischer Form gegeben und es sind die Zahlwerthe gegeben, welche die *simultanen Invarianten* des Ikosaeders und einer unbekannten linearen Form

$$\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2$$

besitzen, man soll die Coefficienten η_2, η_1 der letzteren bestimmen.

Eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe ergiebt sich sofort, wenn man an Stelle der linearen Form eine von höherem Grade treten lässt. Ich beschränke mich hier auf die Betrachtung des Falles einer *quadratischen* Form, deren Untersuchung, wie man sofort sieht, dadurch besonders erleichtert wird, dass die Covarianten f, H, T des Ikosaeders alle eine *gerade* Ordnung besitzen.

§ 1.

Das simultane System eines Ikosaeders und einer quadratischen Form.

Es sollen f, H, T in der immer festgehaltenen kanonischen Form vorausgesetzt sein, aber, um Verwechselungen zu vermeiden, mit den Variabeln x_1, x_2 geschrieben werden. Der quadratischen Form ertheile ich, damit später in der Bezeichnung Uebereinstimmung herrscht mit der bei den Jacobi'schen Gleichungen üblichen, die Gestalt:

$$q = A_1 x_1^2 + 2\, A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2.$$

Man hat dann als Invarianten zunächst die Determinante:

$$A = A_0^2 + A_1 A_2, \tag{1}$$

dann weiter die Ueberschiebungen

$$(f,\, q^6)_{12}, \quad (H,\, q^{10})_{20}, \quad (T,\, q^{15})_{30},$$

die ich mit B', C', D bezeichnen will und die ausgerechnet folgende Werthe darbieten:

$$
(2)\quad \begin{cases}
21\,B' = 16\,A_0^6 - 120\,A_0^4 A_1 A_2 + 90\,A_0^2 A_1^2 A_2^2 \\
\qquad\qquad + 21\,A_0(A_1^5 + A_2^5) - 5\,A_1^3 A_2^3, \\
11\cdot 17\cdot 144\,C' = -512\,A_0^{10} + 11520\,A_0^8 A_1 A_2 - 40320\,A_0^6 A_1^2 A_2^2 \\
\qquad\qquad + 33600\,A_0^4 A_1^3 A_2^3 - 6300\,A_0^2 A_1^4 A_2^4 + 126\,A_1^5 A_2^5 \\
\qquad\qquad + A_0(A_1^5 + A_2^5)(2464\,A_0^4 \quad 16280\,A_0^2 A_1 A_2 + 1980\,A_1^2 A_2^2) \\
\qquad\qquad - 187\,(A_1^{10} + A_2^{10}), \\
12\,D = (A_1^5 - A_2^5)\,(-1024\,A_0^{10} + 3840\,A_0^8 A_1 A_2 \\
\qquad\qquad - 3840\,A_0^6 A_1^2 A_2^2 + 1200\,A_0^4 A_1^3 A_2^3 \\
\qquad\qquad - \;100\,A_0^2 A_1^4 A_2^4 + A_1^5 A_2^5) \\
\qquad\qquad + A_0(A_1^{10} - A_2^{10})(352\,A_0^4 - 160\,A_0^2 A_1 A_2 + 10\,A_1^2 A_2^2) \\
\qquad\qquad + (A_1^{15} - A_2^{15}).
\end{cases}
$$

Mit diesen Formen ist das System der Invarianten bereits abgeschlossen, wie man nach Analogie ähnlicher Beweise folgendermassen zeigt. Wenn $A = 0$, also die quadratische Form das Quadrat einer linearen ist:

$$q = (\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2)^2,$$

so gehen B', C', D einfach über in $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ und andere simultane Invarianten giebt es dann nicht (Annalen Bd. IX, p. 200). Im allgemeinen Falle bestehen daher die gesuchten Invarianten aus B', C', D resp. aus Gliedern, welche aus ihnen zusammengesetzt sind, plus Gliedern, welche den Factor A enthalten. Diese Glieder müssen, nach Abtrennung des Factors A, für sich Invariantencharakter besitzen, für sie gilt also dasselbe Gesetz u. s. w.

Zwischen diesen vier Formen A, B', C', D besteht dann noch eine Relation entsprechend der früheren Bedingung:

$$T^2 = 12\,f^5 - 12^4\,H^3;$$

ich werde erst weiter unten diese Relation angeben (§ 4. Glch. (10)).

Das neue Problem aber, welches ich aufstelle, ist dieses: *Es sind, in Uebereinstimmung mit dieser Relation, die Zahlenwerthe gegeben, welche A, B', C', D für eine unbekannte quadratische Form $A_1 x_1^2 + 2\,A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2$ annehmen; man soll die Coefficienten A_1, A_0, A_2 bestimmen.*

Dies Problem hat 60 Lösungen resp. Lösungssysteme. Denn zunächst ergeben zwar die Gleichungen: A, B', C' = gegebenen Constanten $2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$ Lösungen, aber von diesen unterscheiden sich, da A, B', C' gerade Functionen von A_0, A_1, A_2 sind, je zwei immer nur durch die Vorzeichen der A_0, A_1, A_2, und D, welches eine ungerade Function ist, entscheidet, welche Vorzeichencombination zu nehmen ist.

§ 2.

Ableitung aller Lösungen aus einer derselben.

Wenn wir *eine* quadratische Form kennen:

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

welche dem gestellten Probleme genügt, so ergeben sich die 59 anderen, indem man auf x_1, x_2 die 120 binären Ikosaedersubstitutionen (4) des vorigen Abschnittes anwendet. Denn da es sich um simultane Invarianten von q und f handelt, $f(x_1, x_2)$ aber durch diese Substitutionen in sich übergeht und die Substitutionsdeterminante $+1$ ist, so werden die simultanen Invarianten der transformirten quadratischen Form und des ursprünglichen Ikosaeders die vorgeschriebenen Werthe behalten haben. In der That entstehen durch die 120 Substitutionen aus der einen quadratischen Form auch nur 60, da sich immer zwei Substitutionen nur durch gleichzeitige Vorzeichenänderung beider Variablen x_1, x_2 unterscheiden. Ich will diese 60 Formen mit

$$A_1' x_1^2 + 2 A_0' x_1 x_2 - A_2' x_2^2$$

bezeichnen. So findet man für die A_1', A_0', A_2' folgende Tabelle:

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{c}
A_1' \\ \hline
\varepsilon^{-\nu} A_1 \\
-\varepsilon^{-\nu} A_2 \\
-\frac{\varepsilon^{-\mu}}{\sqrt{5}}\left((\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{+\nu} A_1 + 2A_0 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} A_2\right) \\
+\frac{\varepsilon^{-\mu}}{\sqrt{5}}\left((\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} A_1 + 2A_0 + (\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{+\nu} A_2\right) \\ \hline\hline
A_0' \\ \hline
A_0 \\
-A_0 \\
-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varepsilon^{\nu} A_1 + A_0 + \varepsilon^{-\nu} A_2\right) \\
+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varepsilon^{-\nu} A_1 + A_0 + \varepsilon^{+\nu} A_2\right) \\ \hline\hline
\end{array}\right.$$

$$A_2'$$

$$\varepsilon^{+\nu} A_2$$

$$-\varepsilon^{+\nu} A_1$$

$$\frac{-\varepsilon^{\mu}}{\sqrt{5}} \left((\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\,\varepsilon^{+\nu} A_1 + 2A_0 + (\varepsilon + \varepsilon^4)\,\varepsilon^{-\nu} A_2\right)$$

$$\frac{+\varepsilon^{\mu}}{\sqrt{5}} \left((\varepsilon + \varepsilon^4)\,\varepsilon^{-\nu} A_1 + 2A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\,\varepsilon^{+\nu} A_2\right)$$

$$\left(\sqrt{5} = \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3\right).$$

Man hat also hier an Stelle der seither betrachteten Gruppe von 120 *binären Substitutionen eine Gruppe von* 60 *ternären. Die Determinante der einzelnen Substitution ist wiederum* $= +1$.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Gruppe von Substitutionen zugleich die Galois'sche Gruppe des neuen Problems ist. In der That, die rational bekannten Grössen A, B', C', D werden durch diese 60 Substitutionen in sich verwandelt und umgekehrt lässt sich zeigen, dass jede ganze Function von A_0, A_1, A_2, welche durch diese Substitutionen in sich verwandelt wird, eine ganze Function von A, B', C', D ist [sie hat also, wenn ungerade, nothwendig D zum Factor]. — Der Beweis ist derselbe, der soeben beim Nachweise der Vollständigkeit des Systems der Invarianten gebraucht wurde. Wenn $A = 0$, so ist die Behauptung richtig, wie ich Annalen Bd. IX, p. 194 ff. nachwies. Also bestehen die gesuchten Ausdrücke aus ganzen Functionen von B', C', D, plus Gliedern, welche A zum Factor haben. Diese Glieder behandelt man nach Abtrennung des Factors ebenso etc. *Also auch hier decken sich die rational bekannten Functionen mit den Invarianten.*

§ 3.

Verschiedene Arten der geometrischen Veranschaulichung.

Eine geometrische Veranschaulichung des neuen Problems erhält man sofort, wenn man die Wurzelwerthe der quadratischen Form als Punkte auf der $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$-Kugel deutet, und diese Interpretation leistet nach Seite der vollen Anschaulichkeit Alles, was man wünschen kann. Inzwischen werde ich fortan des kürzeren Ausdrucks wegen zumeist Gebrauch machen von der geläufigeren Deutung, *welche die Verhältnisse* $A_0 : A_1 : A_2$ *als trimetrische Coordinaten eines Punktes in der Ebene betrachtet.* Dieser Punkt wird durch die 60 ternären Substitutionen der vorigen Paragraphen, welche jetzt die Bedeutung von 60 Collineationen gewinnen, auf 60 Weisen versetzt, und unser Problem verlangt vor allen Dingen, die so entstehenden 60 Punkte zu bestimmen, hernach, die absoluten Werthe ihrer Coordinaten anzugeben. Die Curven $A = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$, $D = 0$ gehen bei den Collineationen in sich über, ebenso z. B. die Curven $B' - \lambda A^3 = 0$, $C' - \mu A^5 = 0$, als deren vollständiger Schnitt jedes System von 60 zusammengehörigen Punkten dargestellt werden kann.

Neben diese Interpretation in der Ebene stellt sich noch eine andere im Raume, die ich wenigstens anführen will, wenn ich sie auch nicht weiter benutze. Unter x, y, z rechtwinkelige Raumcoordinaten verstanden, setze ich:

$$A_0 = z, \quad A_1 = x + iy, \quad A_2 = x - iy.$$

So wird $A = A_0^2 + A_1 A_2 = x^2 + y^2 + z^2$, und die 60 gesuchten quadratischen Formen werden vorgestellt durch 60 auf der Kugel vom Radius $\sqrt{A}$ befindliche Raumpunkte. Die ternären Substitutionen (3) erhalten jetzt, in x, y, z geschrieben, reelle Coefficienten, und da sie $x^2 + y^2 + z^2$ in sich überführen, übrigens die Determinante 1 besitzen, so gewinnen sie die Bedeutung von 60 reellen Drehungen um den Anfangspunkt. *Es sind keine anderen als die 60 Drehungen, welche ein der Kugel eingeschriebenes Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen. Dies ist also ein ganz elementarer Weg, um den Zusammenhang zwischen den Jacobi'schen Gleichungen und dem Ikosaeder zu erkennen.*

Verbindet man den Punkt A_0, A_1, A_2 mit dem Anfangspunkte durch eine gerade Linie und betrachtet sie als Vertreterin der Verhältnissgrössen $A_0 : A_1 : A_2$, so hat man eine letzte Interpretation, die sich von der Interpretation in der Ebene nur dadurch unterscheidet, dass als Träger des ternären Gebietes der Kugelmittelpunkt mit den durch ihn hindurchgehenden Strahlen gedacht ist*). Ich werde weiterhin zeigen, dass die von uns in der Ebene zu studirenden Figuren auf das Genaueste zusammenhängen mit der ebenen Abbildung der von Clebsch so genannten *Diagonalfläche* dritter Ordnung (Annalen Bd. IV, p. 331). Clebsch spricht bei diesen Untersuchungen insbesondere von einem merkwürdigen durch die 6 Fundamentalpunkte der Abbildung gebildeten Sechsecke, welches die Eigenschaft besitzt, zehnfach Brianchon'sch zu sein. Betrachten wir statt der Ebene den vom Mittelpunkte des Ikosaeders ausgehenden Strahlenbündel, so erkennen wir, dass dieses Sechseck eine sehr bekannte Configuration ist. *Die sechs durch die Ecken des Ikosaeders hindurchlaufenden Durchmesser sind sein Gegenbild.* Denn in der That schneiden sich die fünfzehn

*) Leider sind bei dieser Interpretation die Kegel $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ durchaus imaginär.

durch zwei derselben hindurchgelegten Ebenen*) zehnmal zu drei in einer geraden Linie, nämlich längs der zehn Durchmesser, welche die Ecken des zugehörigen Pentagondodekaeders enthalten.

§ 4.

Orientirung in der Bildebene $A_0 : A_1 : A_2$.

Wenn die quadratische Form

$$q = A_1 x_1^2 + 2\, A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

wie zunächst angenommen sei, das Quadrat einer linearen wird:

$$q = (\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2)^2,$$

so rückt der Punkt $A_0 : A_1 : A_2$ der Ebene auf den Kegelschnitt $A = 0$, und dessen Punkte also repräsentiren die Grössensysteme $\eta_1 : \eta_2$. Insbesondere also befinden sich auf $A = 0$ Gruppen von bez. 12, 20, 30 ausgezeichneten Punkten, entsprechend $f(\eta_1, \eta_2) = 0$, $H(\eta_1, \eta_2) = 0$, $T(\eta_1, \eta_2) = 0$. Wichtig zumal ist die Beziehung eines Punktes $A_0 : A_1 : A_2$ der Ebene zu den beiden Berührungspunkten der von ihm an den Kegelschnitt A gelegten Tangenten. *Diese Berührungspunkte erhalten, wie man sofort zeigt, als Werthe von* $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ *die Wurzeln der quadratischen Gleichung*

$$q(\eta) = A_1 \eta_1^2 + 2 A_0 \eta_1 \eta_2 - A_2 \eta_2^2 = 0.$$

Fragen wir nach der Lage derjenigen Punkte der Ebene, welche der Zerlegung von f, H, T in quadratische Factoren entsprechen. So haben wir zunächst sechs Punkte mit den Coordinaten

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu}, \end{array} \right.$$

entsprechend der Zerlegung von f. Sie bilden das soeben erwähnte zehnfach Brianchon'sche Sechseck und sollen als die *Fundamentalpunkte* der Ebene bezeichnet werden. — Wir haben ferner, entsprechend der Zerlegung von H, zehn zusammengehörige Punkte:

$$(5)\qquad \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu} \end{array}$$

*) Diese Ebenen zusammen bilden den Kegel $D = 0$.

und fünfzehn zusammengehörige Punkte, welche den Factoren von T entsprechen:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu} \\ 0 & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu}. \end{array}\right.$$

Die fünfzehn Verbindungslinien der sechs Fundamentalpunkte (4) *schneiden sich zu je drei in den Punkten* (5), *zu je zwei in den Punkten* (6); *sie sind überdies die Polaren der Punkte* (6) *in Bezug auf den Kegelschnitt* $A = 0$. *Ihre Schnittpunkte mit* A *bilden die* 30 *Punkte* $T(\eta_1, \eta_2) = 0$.

Man entnimmt diese Angaben in bekannter Weise der Figur des Ikosaeders; übrigens mag man sie durch die Gleichungen der fünfzehn geraden Linien:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} (1\pm\sqrt{5})A_0 + \varepsilon^{\nu}A_1 + \varepsilon^{-\nu}A_2 &= 0, \\ \varepsilon^{\nu}A_1 + \varepsilon^{-\nu}A_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

controliren. Diese fünfzehn Geraden zusammengenommen stellen eine Curve fünfzehnter Ordnung vor, welche bei den 60 ternären linearen Substitutionen (3) ungeändert bleibt. Daher folgt aus § 2.:

Das Aggregat der 15 *Geraden ist dargestellt durch* $D = 0$.

Für die Curven $B' = 0$, $C' = 0$ ergeben sich nicht gleich einfache Interpretationen. Ich will dieselben mit Hülfe von $A = 0$ in der Weise modificiren, dass sie in den sechs Fundamentalpunkten möglichst hohe vielfache Punkte erhalten. Zu dem Zwecke hat man nur dafür zu sorgen, dass einer dieser Punkte, z. B.

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0$$

vielfacher Punkt wird, dann werden es die anderen Fundamentalpunkte von selbst, wegen der Eigenschaft der in Betracht kommenden Ausdrücke, bei den 60 ternären Substitutionen ungeändert zu bleiben. Das heisst also: wir müssen vermöge $A = A_0^2 + A_1A_2$ die Ausdrücke B', C' so modificiren, dass möglichst die höchsten Potenzen von A_0 herausfallen. Auf diese Weise gewinnt man zwei Ausdrücke, die B und C heissen sollen:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} B &= -B' + \frac{16}{21}A^3 \\ &= 8A_0^4A_1A_2 - 2A_0^2A_1^2A_2^2 + A_1^3A_2^3 - A_0(A_1^5 + A_2^5), \\ C &= -144C' - \frac{160}{17}A^2B' + \frac{1024}{11\cdot 21}A^5 \\ &= 320A_0^6A_1^2A_2^2 - 160A_0^4A_1^3A_2^3 + 20A_0^2A_1^4A_2^4 + 6A_1^5A_2^5 \\ &\quad - 4A_0(A_1^5+A_2^5)(32A_0^4 - 20A_0^2A_1A_2 + 5A_1^2A_2^2) + A_1^{10} + A_2^{10}. \end{aligned}\right.$$

Die Curve $B = 0$ hat in den Fundamentalpunkten Doppelpunkte, ist übrigens vom Geschlechte 4. Die Curve $C = 0$ zehnter Ordnung hat in den Fundamentalpunkten Spitzenpaare, d. h. vierfache Punkte; ihr Geschlecht ist Null. *Uebrigens sind jetzt B und C eben die Ausdrücke sechster resp. zehnter Ordnung geworden, welche wir oben* (I, § 12.) *bei den allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen so bezeichneten.* Dadurch also sind B, C in neuer Weise definirt: als gewisse simultane Invarianten des in kanonischer Form gegebenen Ikosaeders und einer zutretenden quadratischen Form*). Aber auch die Discriminante der Jacobi'schen Gleichung findet ihre volle Deutung: *die vierte Wurzel aus der Discriminante ist bis auf einen Zahlenfactor gleich D*:

$$\sqrt[4]{\Pi} = 12\,D. \tag{9}$$

In der That findet man in Uebereinstimmung mit Gleichung (23) (Abschn. I.):

$$144 D^2 = -1728 B^5 + 720 A C B^3 - 80 A^2 C^2 B + 64 A^3 (5B^2 - AC)^2 + C^3, \tag{10}$$

was zugleich die Relation zwischen den Invarianten A, B, C, D, resp. A, B', C', D ist, welche noch aufzustellen war (Abschn. II., § 1.).

§ 5.

Die allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen vom sechsten Grade.

Aus den letzten Bemerkungen geht hervor, dass sich unser neues Problem mit den allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades deckt, sobald man bei der letzteren die vierte Wurzel aus der Discriminante adjungirt**). In der That berechnet sich die Jacobi'sche Gleichung als Resolvente unseres Problems nunmehr folgendermassen einfach. Die sechs Wurzeln der Jacobi'schen Gleichung:

$$\begin{aligned} z_\infty &= 5\,A_0{}^2, \\ z_\nu &= (A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{-\nu} A_2)^2 \end{aligned}$$

---

*) Eine andere Art, diese Ausdrücke zu definiren, erhält man, wenn man sie als *ternäre* Formen auffasst. Ich will hier nur ohne Beweis angeben: Betrachtet man C als Grundform; so lassen sich A, B, D als Covarianten derselben darstellen und zwar bilden sie das *volle* System der Covarianten.

**) Wenn man eine Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades nach Kronecker-Brioschi als Resolvente einer Gleichung fünften Grades aufstellt, so ist diese Adjunction von vornherein geleistet. Ich finde dies in dem citirten Kronecker'schen Aufsatze (Borchardt's Journ. Bd. 59) nicht explicite angegeben und doch beruhen, wie mir scheint, verschiedene Aussagen nur auf diesem Umstande und gelten nicht für Jacobi'sche Gleichungen sechsten Grades schlechthin.

stellen, gleich Null gesetzt, doppeltzählend die 6 Polaren dar, welche die 6 Fundamentalpunkte in Bezug auf den Kegelschnitt A besitzen. Es ist einfacher, statt ihrer die Aggregate

$$z_\infty - A, \quad z_\nu - A$$

zu betrachten. Sie repräsentiren, gleich Null gesetzt, diejenigen sechs Kegelschnitte, welche durch 5 der 6 Fundamentalpunkte hindurchgehen. In Folge dessen hat man nämlich folgenden Ansatz. Die in Betracht kommenden symmetrischen Functionen der $(z - A)$ sind [als gerade Functionen der A_0, A_1, A_2] ganze Functionen von A, B, C, die, gleich Null gesetzt, Curven vorstellen, *welche in den Fundamentalpunkten vielfache Punkte von bekannter Multiplicität besitzen.* Es ist daher unter $\varkappa$, λ, $\cdots$ numerische Factoren verstanden:

$$\Sigma(z_i - A) = \varkappa A,$$
$$\Sigma(z_i - A)(z_k - A) = 0,$$
$$\Sigma(z_i - A)(z_k - A)(z_l - A) = \lambda B, \text{ etc.}$$

Denn z. B. $\Sigma(z_i - A)(z_k - A)$ repräsentirt, gleich Null gesetzt, eine Curve vierter Ordnung, welche durch jeden Fundamentalpunkt einfach hindurchgeht. Eine solche Curve lässt sich aber aus A, B, C nicht zusammensetzen, also ist der Ausdruck identisch Null. — So kommt schliesslich die Jacobi'sche Gleichung in bekannter Form:

$$(12) \quad (z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 - C(z-A) + (5B^2 - AC) = 0,$$

wo nur die Zahlencoefficienten durch Vergleich einzelner Glieder haben bestimmt werden müssen.

§ 6.

Berechnung gewisser Ausdrücke.

Weiterhin bedarf ich gewisser Ausdrücke, die ich gleich hier, unter Benutzung des geometrischen Bildes, berechnen will.

Die erste Aufgabe sei: *das Aggregat der* 12, 20, 30 *geradlinigen Tangenten, welche* $A = 0$ *in den Punkten* $f(\eta_1, \eta_2) = 0$, $H(\eta_1, \eta_2) = 0$, $T(\eta_1, \eta_2) = 0$ *berühren, als ganze Functionen von* A, B, C *darzustellen.*

1) *Die* 12 *Tangenten in den Punkten* f. Ein Paar zusammengehöriger Tangenten heisst $A_1 A_2 = 0$, oder, wenn wir die Wurzeln z der Jacobi'schen Gleichung benutzen, $z_\infty - 5A = 0$. Daher erhält man den gesuchten Ausdruck (bis auf einen unbestimmt bleibenden Zahlenfactor), wenn man in die linke Seite der Jacobi'schen Gleichung $z = 5A$ einträgt. Auf diese Weise kommt:

$$(13) \quad L = B^2 - AC + 128 A^3 B.$$

2) *Die 20 Tangenten in den Punkten H.* Einen Punkt, der sich auf einer dieser Tangenten bewegt, kann man folgendermassen darstellen*):

$$A_0 = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\lambda + (5 + 3\sqrt{5})),$$
$$A_1 = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\lambda a - 4\sqrt{5}),$$
$$A_2 = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\lambda b - 4\sqrt{5}),$$
$$\left[(a+b) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad ab = -1\right].$$

So wird für $\lambda^3 = 2^5 \cdot 5 \cdot \mu$:

$$A = -300,$$
$$B = 2^{10} 5^8 (\mu^2 + 10\mu - 2),$$
$$C = 2^{19} \cdot 3 \cdot 5^{10} (5\mu^3 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \mu^2 - 2).$$

Nun eliminire man μ zwischen $\frac{B}{A^3}$ und $\frac{C}{A^5}$. So gewinnt man, abgesehen von Zahlenfactoren, den Ausdruck:

$$(14) \quad M = C^2 + 2^6 \cdot 75\, AB^3 + 2^6 \cdot 35\, A^2BC + \frac{2^{11} \cdot 125}{9} A^4B^2 - 2^{12} \cdot 13\, A^5C - 2^{17} \cdot 5\, A^7B + 2^{20}A^{10}.$$

3) *Die 30 Tangenten in den Punkten T.* Man setze

$$A_0 = i\sqrt{1+2i} \cdot \lambda,$$
$$A_1 = \sqrt{1+2i} \cdot \lambda + \sqrt{-5},$$
$$A_2 = \sqrt{1+2i} \cdot \lambda - \sqrt{-5}.$$

Dann wird:

$$\frac{B}{A^3} = -\lambda^6 - 5\lambda^4 + 5\lambda^2 + 1,$$
$$\frac{C}{2A^5} = -6\lambda^{10} + 90\lambda^8 + 20\lambda^6 + 28\lambda^4 + 50\lambda^2 + 1,$$

und hieraus durch Elimination von λ^2:

$$(15) \quad N = R^3 + P^3S^2 + ARS(3PQ - 10P^2) + 5A^2R^2(7P - Q) + (A^3QS + 5A^4R)(5P^2 + 5PQ - Q^2),$$

wo

$$P = -6(B + 612A^3),$$
$$Q = 120(B + 240A^3),$$
$$R = \left(\frac{C}{2} - 610A^2B + 609A^5\right),$$
$$S = B - A^3.$$

*) Ich beschränke mich hier und im Folgenden der Kürze wegen darauf, ohne Beweis die zweckmässigste Form der Rechnung anzugeben; die Art des Ansatzes bedarf einer gewissen Erläuterung, die ich bei nächster Gelegenheit nachtragen werde.

Die zweite Aufgabe erwächst aus Folgendem. Jedesmal 60 Punkte des Kegelschnittes A werden durch die ternären Substitutionen (3) zusammengeordnet. Man construire in ihnen die Tangenten und bringe sie zum gegenseitigen Durchschnitte. Es handelt sich darum, *den geometrischen Ort dieser Durchschnittspunkte, resp. die verschiedenen Theile, aus denen er besteht, durch A, B, C, D darzustellen.*

Wenn ein Kegelschnitt durch lineare Transformation in sich verwandelt wird und man bringt die Tangenten zum Durchschnitt, welche in Punkten berühren, die durch die Collineation einander zugeordnet sind, so ist der geometrische Ort dieser Durchschnittspunkte bekanntlich ein Kegelschnitt, welcher den gegebenen in denjenigen beiden Punkten berührt, die bei der Collineation fest bleiben. Derselbe Kegelschnitt wird erhalten, wenn man die betr. lineare Substitution durch ihre inverse ersetzt.

Nun sind uns 60 lineare Substitutionen gegeben, von denen eine, die Identität, als mit der Problemstellung nicht verknüpft, von vornherein auszuschliessen ist. Unter den 59 anderen finden sich zunächst 15 von der Periode 2, welche je ein Punktepaar von T ungeändert lassen. Bei ihnen ist die anfängliche Substitution mit der inversen identisch. In Folge dessen artet der Ortskegelschnitt für jede derselben aus in die gerade Linie, welche das festbleibende Paar von Punkten verbindet. *Daher haben wir als ersten Bestandtheil der gesuchten Ortscurve die aus 15 geraden Linien bestehende Curve*

$$D = 0.$$

Betrachten wir ferner die 20 Substitutionen von der Periode 3. Sie lassen paarweise dasselbe Punktepaar von H ungeändert, und von zwei in dieser Weise zusammengehörigen Substitutionen ist die eine die inverse der anderen. *Daher erhalten wir zehn Ortskegelschnitte, welche $A = 0$ in den Punktepaaren von H berühren.* Ich finde für einen derselben:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot A - \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot A_0 + A_1 + A_2\right)^2 = 0.$$

Ein beliebiger Punkt desselben wird gewonnen, wenn man setzt:

$$A_0 = -\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon^4}\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\lambda\mu + \sqrt{2}\,(\lambda^2 + \mu^2)\right],$$

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon^4}\left[-4\,\lambda\mu + \sqrt{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,(\lambda^2 + \mu^2)\right],$$

$$A_1 A_2 = \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon^4)^2}\Big[3\,(5+\sqrt{5})\,\lambda^2\mu^2 - (3+\sqrt{5})\,\sqrt{2}\,(\lambda^3\mu + \lambda\mu^3) - 2\,(\lambda^4 + \mu^4)\Big].$$

Trägt man diese Werthe in A, B, C ein, so erhält man Formeln von folgender Gestalt:

$$\frac{B}{A^3} = \alpha + \beta\varrho + \gamma\varrho^2,$$
$$\frac{C}{A^5} = \alpha' + \beta'\varrho + \gamma'\varrho^2 + \delta'\varrho^3,$$

wo α, β, $\cdots$ reelle ganze Zahlen sind (die ich noch nicht berechnete) und $\varrho = \frac{\lambda^6 + \mu^6}{\lambda^3\mu^3}$ gesetzt ist. Die Elimination von ϱ giebt den gesuchten Ausdruck:

$$\mathsf{H} = C^2 + AR, \tag{16}$$

der, gleich Null gesetzt, das Aggregat der 10 Kegelschnitte darstellt. [R bedeutet dabei eine von mir noch nicht berechnete ganze Function von A, B, C.]

Die 24 Substitutionen von der Periode fünf, welche noch übrig sind, liefern noch zwei Bestandtheile. Die vier Substitutionen nämlich, welche ein Punktepaar von f ungeändert lassen, gehören paarweise wieder zusammen als directe und inverse Operation, und durch sie werden also zwei Kegelschnitte bestimmt. Ich finde für eins dieser Paare:

$$A + (5 \pm 2\sqrt{5})A_0^2 = 0$$

oder, unter Benutzung der Jacobi'schen z:

$$z_\infty = (5 \mp 2\sqrt{5})A.$$

Substituirt man diese Werthe in die Jacobi'sche Gleichung, so kommen die beiden noch fehlenden Ausdrücke:

$$(17)\quad \begin{cases} F_1 = 2^{11}(445 + 199\sqrt{5})A^6 - 5\cdot 2^7(9 + 4\sqrt{5})A^3B \\ \qquad\qquad + (5 + 2\sqrt{5})AC + 5B^2, \\ F_2 = 2^{11}(445 - 199\sqrt{5})A^6 - 5\cdot 2^7(9 - 4\sqrt{5})A^3B \\ \qquad\qquad + (5 - 2\sqrt{5})AC + 5B^2, \end{cases}$$

und die Ortscurve, welche wir suchten, hat also schliesslich diese Gleichung:

$$D \cdot \mathsf{H} \cdot F_1 \cdot F_2 = 0.$$

§ 7.

Zurückführung des neuen Problems auf das Fundamentalproblem des ersten Abschnitts.

Mit Hülfe dieser Rechnungen kann man nun die Bestimmung der A_0, A_1, A_2 aus A, B, C, D folgendermassen explicite auf das Fundamentalproblem des vorigen Abschnittes zurückführen*). Es seien $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ und $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$q = A_1 x_1^2 + 2\, A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = 0,$$

so werden $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ und $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, jedes für sich, durch die 60 Ikosaedersubstitutionen des vorigen Abschnittes transformirt, wenn A_0, A_1, A_2 durch die 60 ternären Substitutionen (3) umgewandelt werden. *Daher hängen* $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ *und* $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ *jedes von einer Ikosaedergleichung ab:*

$$(18) \qquad 1728\, \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X_1, \qquad 1728\, \frac{H^3(\zeta_1, \zeta_2)}{f^5(\zeta_1, \zeta_2)} = X_2,$$

wo die Parameter X_1, X_2 *rationale Functionen von* $\sqrt{A}$, B, C, D *vorstellen.*

Diese X_1, X_2 berechne ich nach einer Methode, die ich auch im folgenden Abschnitte bei ähnlichen Aufgaben noch anwende (obgleich ich ihr keinerlei principielle Bedeutung beilege). Ich setze vorab:

$$q = A_1 x_1^2 + 2\, A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = (\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2)\,(\zeta_2 x_1 - \zeta_1 x_2)$$

und betrachte nun die drei Resultanten:

$$(19) \qquad \begin{cases} 12^{\frac{2}{3}}\, f(\eta_1, \eta_2) \cdot f(\zeta_1, \zeta_2) = l\,, \\ 12^{\frac{3}{3}}\, H(\eta_1, \eta_2) \cdot H(\zeta_1, \zeta_2) = m\,, \\ \quad T(\eta_1, \eta_2) \cdot T(\zeta_1, \zeta_2) = n\,. \end{cases}$$

Diese drei Resultanten, gleich Null gesetzt, stellen im Sinne des vorigen Paragraphen die dort berechneten Aggregate der an A in den Punkten f, H, T construirbaren Tangenten vor. Denn wenn z. B. die Resultante von f und q verschwindet, so bedeutet das, für jene Interpretation, dass eine der beiden Tangenten, welche man von A_0, A_1, A_2 an A legen kann, in einem Punkte f berührt. — *Die Resultanten l, m, n sind daher, bis auf Zahlenfactoren, gleich den drei soeben berechneten Ausdrücken L, M, N.* Die Zahlenfactoren aber ergeben sich einfach, wenn man $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ setzt, wo denn $A = 0$, $B = -f$, $C = -144\, H$ wird. Auf diese Weise kommt:

$$(20) \qquad \begin{cases} l = 12^{\frac{2}{3}} L\,, \\ m = 12^{-\frac{4}{3}} M\,, \\ n = \dfrac{N}{18}\,. \end{cases}$$

Aber es sind X_1, X_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

---

*) Vergl. dazu Brioschi, Annali di Matematica, Ser. II, t. I, p. 230.

$$f^5(\eta)\cdot f^5(\zeta)\cdot X^2 - 1728[f^5(\eta)\cdot H^3(\zeta)+f^5(\zeta)\cdot H^3(\eta)]\cdot X + 1728^2 H^3(\eta)\,H^3(\zeta) = 0.$$

Hier ist der erste Coefficient $=\frac{l^5}{144}$, der dritte $=\frac{m^3}{144}$, und der mittlere berechnet sich wegen

$$T^2 = 12\,f^5 - 12^4\,H^3$$

gleich:

$$\frac{l^5+m^3-n^2}{144}.$$

Daher erhält man als Werthe der Parameter:

$$(21)\qquad \left\{\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \frac{l^5+m^3-n^2 \pm \sqrt{(l^5+m^3-n^2)^2-4\,l^5m^3}}{2\,l^5},$$

wo die l, m, n durch Formel (20) definirt sind.

Untersuchen wir noch den Werth der Discriminante. Es werden X_1 und X_2 zunächst einander gleich, wenn $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ mit $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ identisch ist. *Dies giebt für die Discriminante den Factor A.* X_1 und X_2 werden aber auch einander gleich, wenn $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ aus $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, oder, was dasselbe ist, $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ aus $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ durch eine der 59 nicht identischen Ikosaedersubstitutionen hervorgeht. *Die Discriminante enthält daher noch die im vorigen Paragraphen berechneten Ausdrücke D, H, F_1, F_2, jeden quadratisch.* Hiermit ist sie, da sie vom 120^{ten} Grade ist:

$$120 = 2 + 2\,(15+20+12+12),$$

erschöpft, man hat also, unter c einen Zahlenfactor verstanden:

$$(22)\qquad \pm\sqrt{(l^5+m^3-n^2)^2-4\,l^5m^3} = \pm\,c\,D\cdot\mathsf{H}\cdot F_1\cdot F_2\cdot\sqrt{A}.$$

Durch Vergleichung eines Gliedes beiderseits findet man:

$$(23)\qquad c = \tfrac{2}{5}.$$

§ 8.

Bestimmung der A_0, A_1, A_2.

Um jetzt A_0, A_1, A_2 zu bestimmen, berechne man zunächst η_1 und η_2, sowie ζ_1 und ζ_2 nach Anleitung des vorigen Abschnittes aus den hier aufgestellten Ikosaedergleichungen und bemesse ihre absoluten Werthe der Art, dass die Resultanten $f(\eta_1,\eta_2)\cdot f(\zeta_1,\zeta_2)$ etc. mit L, M, N übereinstimmen. Die Frage, welche Werthe η und ζ zusammengehören, beantwortet sich im Allgemeinen aus der Formel:

$$(24)\qquad \eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1=\sqrt{A}.$$

Die zusammengehörigen Vorzeichen, welche man η_1, η_2 und ζ_1, ζ_2 zu ertheilen hat, folgen aus dem Werthe von D. Schliesslich ist:

$$(25)\quad A_1 = \eta_2\zeta_2\,, \qquad A_2 = -\eta_1\zeta_1\,, \qquad A_0 = -\frac{\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1}{2}\,.$$

Man kann verlangen, das ζ_1, ζ_2, welches zu einem η_1, η_2 gehört, rational durch dieses und bekannte Grössen auszudrücken. Nach einer Mittheilung, die ich Gordan verdanke, erreicht man dies folgendermassen. Man stelle

$$f(\eta_1, \eta_2)\cdot f(\zeta_1, \zeta_2) = L\,, \qquad H(\eta_1, \eta_2)\cdot H(\zeta_1, \zeta_2) = 12^{-4} M,$$
$$T(\eta_1, \eta_2)\cdot T(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{N}{18}\cdot$$

wie soeben geschehen, als Functionen von A, B, C dar und polarisire $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ nach $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$. So wird A_ζ $\left(\text{d. h. } \frac{\partial A}{\partial \eta_1}\cdot\zeta_1 + \frac{\partial A}{\partial \eta_2}\cdot\zeta_2\right)$ gleich Null und also:

$$12\; f(\eta)_\zeta \cdot f(\zeta) = \frac{\partial L}{\partial B}\cdot B_\eta + \frac{\partial L}{\partial C}\cdot C_\eta\,,$$
$$12^4\cdot 20\, H(\eta)_\zeta\cdot H(\zeta) = \frac{\partial M}{\partial B}\cdot B_\eta + \frac{\partial M}{\partial C}\cdot C_\eta\,,$$
$$18\cdot 30\, T(\eta)_\zeta\cdot T(\zeta) = \frac{\partial N}{\partial B}\cdot B_\eta + \frac{\partial N}{\partial C}\cdot C_\eta\,.$$

Daher:

$$(26)\quad 0 = \begin{vmatrix} 12\,L\,\frac{f(\eta)_\zeta}{f(\eta)} & 12^4\cdot 20\,M\,\frac{H(\eta)_\zeta}{H(\eta)} & 18\cdot 30\,N\,\frac{T(\eta)_\zeta}{T(\eta)} \\ \frac{\partial L}{\partial B} & \frac{\partial M}{\partial B} & \frac{\partial N}{\partial B} \\ \frac{\partial L}{\partial C} & \frac{\partial M}{\partial C} & \frac{\partial N}{\partial C} \end{vmatrix}\,.$$

Diese Formel ist in ζ_1, ζ_2 linear, liefert also $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ als rationale Function von $\frac{\eta_1}{\eta_2}$.

§ 9.

Ueber die Nothwendigkeit der bei der Auflösung benutzten Quadratwurzel*).

Die Quadratwurzel, welche die beiden Parameter X_1, X_2 scheidet, spielt eine bemerkenswerthe Rolle. Sie dient nicht dazu, die Galois'sche Gruppe des Problems zu reduciren. Denn die Galois'sche Gruppe umfasst vorher wie nachher (bei der Ikosaedergleichung) 60 Substitutionen. Trotzdem ist sie (oder eine äquivalente Irrationalität) bei der Zurückführung des Problems auf eine Ikosaedergleichung im Allgemeinen nothwendig. Es sei nämlich

$$\frac{\varphi(A_0, A_1, A_2)}{\psi(A_0, A_1, A_2)}\,,$$

*) Vergl. den letzten Paragraphen des dritten Abschnittes.

wo φ, ψ ganze rationale Functionen ohne gemeinsamen Theiler, von einer Ikosaedergleichung abhängig. Dann soll sich $\frac{\varphi}{\psi}$, sobald auf A_0, A_1, A_2 die 60 ternären Substitutionen (3) angewandt werden, durch die 60 Ikosaedersubstitutionen transformiren. Das ist bei durchaus willkürlichen A_0, A_1, A_2 nur möglich, wenn sich φ und ψ durch die *binären* Substitutionen (4) des vorigen Abschnittes umformen. Aber die Zahl dieser Substitutionen ist (mindestens) 120 und das ist mit der Zahl 60 der ternären Substitutionen unverträglich.

Dagegen giebt es selbstverständlich specielle Werthsysteme von A_0, A_1, A_2, bei denen die Quadratwurzel vermieden werden kann. Ein Beispiel ist dieses. Es giebt *rationale* Curven, welche durch die 60 ternären Substitutionen in sich übergeführt werden. So ist der Kegelschnitt $A = 0$ (bei dem unsere Behauptung selbstverständlich ist), so ist die Curve 10$^{\text{ter}}$ Ordnung $C = 0$. Stellt man jetzt die Coordinaten A_0, A_1, A_2 eines Punktes einer solchen Curve in gewöhnlicher Weise rational durch einen Parameter λ dar, so wird λ, sobald man eine der 60 ternären Substitutionen macht, seinerseits eine (gebrochene) lineare Substitution erfahren, weil das ganze Gebiet der Curve eindeutig in sich transformirt wird. Daher hängt nach § 4. des ersten Abschnittes eine geeignete lineare Function von λ, d. h. eine rationale Function von A_0, A_1, A_2 von einer Ikosaedergleichung ab. — Eine ähnliche Ueberlegung war es, wie ich beiläufig bemerke, welche mich zuerst zu der Methode des § 7. geführt hat. Um das allgemeine Problem auf eine Ikosaedergleichung zurückzuführen, suchte ich dem Punkte A_0, A_1, A_2 in einer durch lineare Substitution unzerstörbaren Weise einen Punkt des Kegelschnittes A zuzuordnen, dessen Bestimmung dann von einer Ikosaedergleichung abhängen musste. Die Zuordnung, wie sie in § 7. verwandt wird, besteht, geometrisch zu reden, einfach darin, dass man von A_0, A_1, A_2 eine Tangente an A legt und nun den Berührungspunkt als zugeordnet ansieht. —

Ein anderes Beispiel von mehr particulärem Charakter giebt der Fall $B = 0$. Die sogleich aufzustellende (Brioschi'sche) Resolvente fünften Grades nimmt dann die Jerrard'sche Form an und diese subsumirt sich unter diejenigen Gleichungen fünften Grades, welche ich im dritten Abschnitte durch eine Ikosaedergleichung löse. Dem geht folgende Construction in der Ebene A_0, A_1, A_2 parallel, wie ich hier ohne Beweis angebe. Man kann um $A = 0$ unendlich viele Dreiecke beschreiben, deren Ecken auf B liegen. Jeder Punkt auf B ist Ecke eines solchen Dreiecks, während jede Tangente von A dreimal als Dreiecksseite benutzt wird. Ordnet man nun dem Punkte auf B den Berührungspunkt der gegenüberstehenden Seite mit A zu, so ist B auf A eindeutig (allerdings nicht umkehrbar eindeutig) bezogen.

Der Punkt auf A ist durch eine Ikosaedergleichung bestimmt, und von ihm geht man rational zu dem Punkte auf B zurück, indem man die Coefficienten der vorgelegten Jacobi'schen Gleichung benutzt.

§ 10.

Brioschi's Resolvente vom fünften Grade und die Diagonalfläche dritter Ordnung.

Ich betrachte zum Schlusse noch die Resolvente fünften Grades, welche Brioschi, wie in § 13. des ersten Abschnittes berichtet, bei den allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen aufgestellt hat. Dieselbe erwächst geometrisch aus dem Umstande, dass man die 15 Verbindungsgeraden der sechs Fundamentalpunkte der Ebene A_0, A_1, A_2 derart auf fünf Dreiecke vertheilen kann, dass die Seiten jedes Dreiecks alle Fundamentalpunkte enthalten*). In der That stellt der Ausdruck (Gleichung (20) des Abschn. I):

$$y_\nu = \varepsilon^\nu P_1 + \varepsilon^{2\nu} P_2 + \varepsilon^{3\nu} P_3 + \varepsilon^{4\nu} P_4, \tag{27}$$

gleich Null gesetzt, für die verschiedenen Werthe von ν die fünf Dreiecke dar, wie leicht zu controliren. P_1, P_2, P_3, P_4 repräsentiren, gleich Null gesetzt, Curven dritter Ordnung, welche ebenfalls durch sämmtliche Fundamentalpunkte hindurchgehen. Die Gleichung fünften Grades selbst (Gleichung (22) des Abschn. I):

$$y^5 + 10\,By^3 + 5\,(9\,B^2 - AC)\,y - 12\,D = 0$$

berechnet man wieder mit Leichtigkeit aus dem Verhalten der Curven y_ν in den Fundamentalpunkten (vergl. § 5., Absch. II.). Zumal sieht man a priori ein, dass

$$\Sigma y = 0, \quad \Sigma y^3 = 0 \tag{28}$$

sein muss, weil es keine ganze Function von A, B, C, D giebt, welche den dritten oder neunten Grad besitzt.

Nun kann man diesen Formeln eine geometrische Deutung geben, durch welche der Zusammenhang dieser Betrachtungen hergestellt wird mit denjenigen, die Clebsch im vierten Annalenbande (p. 336 ff.) entwickelt hat. Die in A_0, A_1, A_2 rationalen Ausdrücke y_ν befriedigen in allgemeinster Weise die Bedingungen $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^3 = 0$. *Betrachtet man also (wie im folgenden Abschnitte durchgängig geschieht) die y als Pentaedercoordinaten im Raume, so vermitteln sie die eindeutige Abbildung der durch dieses Gleichungspaar dargestellten Diagonalfläche auf die Ebene A_0, A_1, A_2.* Es ist nützlich, sich zu orientiren, was die hauptsächlichen in der Ebene verlaufenden Curven für die Fläche bedeuten. Die sechs Fundamentalpunkte der Ebene sind in der

*) Diese fünf Dreiecke sind zugleich Polardreiecke für den Kegelschnitt $A = 0$.

That die Fundamentalpunkte der Abbildung; sie stellen sechs auf der Fläche verlaufende gerade Linien dar. Die sechs weiteren geraden Linien, welche mit ihnen die ausgezeichnete Doppelsechs bilden (Clebsch, Annalen Bd. IV, p. 336), sind durch die Kegelschnitte $z - A = 0$ des § 5. gegeben. Die Curve $D = 0$ repräsentirt die 15 übrigen geraden Linien der Diagonalfläche. $B = 0$ giebt den Schnitt der Diagonalfläche mit der Fläche zweiter Ordnung $\Sigma y^2 = 0$, und endlich $A = 0$ und $C = 0$ bilden gemeinsam den in zwei rationale Bestandtheile zerfallenden Schnitt der Diagonalfläche mit der Fläche vierter Ordnung $20\, \Sigma y^4 = (\Sigma y^2)^2$ (vergl. Abschn. I, § 15.).

Wenn man jetzt die y beliebig unter einander vertauscht, so erfährt die Diagonalfläche (räumliche) Collineationen, welche sie in sich überführen. Denselben entsprechen eindeutige Transformationen der Bildebene in sich. Den *geraden* Vertauschungen der y insbesondere entsprechen die 60 ternären Substitutionen des § 3. dieses Abschnittes. Die ungeraden Vertauschungen aber ergeben Umformungen, welche über den Kreis der bisher betrachteten Gegenstände hinausführen. *Es sind* 60 *Cremonatransformationen, welche die geraden Linien der Ebene in Curven fünfter Ordnung überführen, die in den Fundamentalpunkten Doppelpunkte haben*). Sie bilden mit den* 60 *Collineationen zusammen eine Gruppe von* 120 *Transformationen.* Bei ihnen bleiben die Curven $B=0$, $D=0$ ungeändert, die Curven $A=0$ und $C=0$ vertauschen sich, desgleichen die Fundamentalpunkte mit den Kegelschnitten, welche durch die 5 anderen Fundamentalpunkte hindurchgehen. Wendet man auf die ursprünglichen A_0, A_1, A_2 die ternären linearen Substitutionen an, so erfahren auch die transformirten A_0, A_1, A_2 derartige Substitutionen. *Aber ε ist dabei durch ε^2 ersetzt.* Wir finden also eine Umformung der allgemeinen Jacobi'schen Gleichung in eine zweite, analog der zweiten Classe von Umformungen, die wir beim Ikosaeder in § 18. des vorigen Abschnittes studirten. Eben diese Umformungen (und die anderen hier nicht berührten, welche ε ungeändert lassen) hat Brioschi im ersten Bande der Annali di Matematica, ser. 2., untersucht; ich gehe deshalb nicht näher auf sie ein; aber ich wollte wenigstens aussprechen, wie naturgemäss man zu ihnen gelangt, wenn man von den Collineationen ausgeht, welche die Diagonalfläche in sich überführen.

---

*) Z. B. unter ϱ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\varrho A_0' = -8\, A_0^3 A_1 A_2 + 6\, A_0 A_1^2 A_2^2 - (A_1^5 + A_2^5),$$
$$\varrho A_1' = 2\,(8\, A_0^3 A_2^2 - 4\, A_0^2 A_1^3 - 2\, A_0 A_1 A_2^3 + A_1^4 A_2),$$
$$\varrho A_2' = 2\,(8\, A_0^3 A_1^2 - 4\, A_0^2 A_2^3 - 2\, A_0 A_1^3 A_2 + A_1 A_2^4).$$

Abschnitt III.

Eine neue Lösung der Gleichungen fünften Grades.

In diesem dritten Abschnitte zeige ich, dass man die Gleichungen fünften Grades, bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet, explicite mit Hülfe einer Ikosaedergleichung lösen kann. Es ist das gewissermassen die Umkehr der Betrachtungen in § 16., 17. des ersten Abschnittes. Die Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades ist dadurch darauf zurückgeführt, die Gleichung vorab durch eine rationale Transformation auf die genannte einfache Form zu bringen. Ich würde gern eine ausgeführte Vergleichung dieser Lösungsmethode mit der Hermite'schen und der Kronecker'schen hinzugefügt haben, die alle unter einander enge verwandt sind. Aber es verlangt Das durchaus ein Eingehen auf die Eigenthümlichkeit der elliptischen Functionen und deshalb verschiebe ich noch diese Auseinandersetzung*).

§ 1.

Geometrischer Ansatz.

Es mögen die fünf Wurzeln y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 einer Gleichung fünften Grades an die Bedingung geknüpft sein: $\Sigma y = 0$ und übrigens nur die Verhältnisse der Wurzeln beachtet werden. Dann fasse ich die y auf als *Pentaeder-Coordinaten* eines Raumpunktes, der 120 im Allgemeinen verschiedene Lagen annimmt, wenn man die y auf beliebige Weise permutirt. *Diesen Permutationen gebe ich dann, und das ist für meine Anschauung das Wesentliche, die Bedeutung von Collineationen des Raumes* (Annalen Bd. IV, p. 353).

Ist nun insbesondere noch $\Sigma y^2 = 0$, so liegen die 120 Punkte alle auf der durch diese Gleichung dargestellten Fläche zweiten Grades, die ich als Fläche Ψ bezeichne. Aber eine Fläche zweiten Grades trägt zwei Schaaren geradliniger Erzeugender, und auch diese werden bei den 120 Collineationen transformirt. Man zeigt leicht: *Bei den 60 Collineationen, welche durch gerade Vertauschungen der y vorgestellt sind, wird jede Schaar der Erzeugenden in sich transformirt; bei den 60 übrigen Collineationen werden die Schaaren unter einander vertauscht.* Nun mache man denselben Schluss, der schon in § 9. des vorigen Abschnittes angewandt wurde. Die Erzeugenden einer Art der Fläche zweiten Grades bilden eine *rationale* Mannigfaltigkeit erster Dimension;

*) Vergl. die bereits genannte Note in den Rendiconti des Istituto Lombardo vom April 1877.

sie lassen sich rational durch einen Parameter λ darstellen, so dass zu jeder Erzeugenden nur ein Werth von λ gehört. Eine räumliche Collineation daher, welche die Erzeugendenschaar in sich transformirt, ist mit einer *linearen* Transformation von λ äquivalent (vergl. Annalen Bd. IX, p. 188). *Also sind, nach* § 4. *des ersten Abschnittes, die* 60 *Werthe von* λ, *welche* 60 *zusammengehörigen Erzeugenden entsprechen, von einer Ikosaedergleichung abhängig.*

Um jetzt die Gleichung fünften Grades zu lösen, bei der $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$, bestimme man vor Allem die 60 Erzeugenden der einen (ersten) Art, welche durch die 60 Punkte hindurchlaufen, die aus dem Punkte $y_0 y_1 y_2 y_3 y_4$ durch die geraden Vertauschungen der y entstehen. Die Parameter dieser Erzeugenden sind gebrochene lineare homogene Functionen der y; es wird in *erster* Linie darauf ankommen, die Parameter so zu wählen, dass die aufzustellende Ikosaedergleichung in kanonischer Form erscheint. Dann handelt es sich *zweitens* darum, die Ikosaedergleichung wirklich zu bilden. Und *drittens* sind die Wurzeln y als rationale Functionen der Wurzeln dieser Ikosaedergleichung, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als rationale Functionen *einer* Wurzel der Ikosaedergleichung darzustellen. Mit diesen drei Problemen werde ich mich der Reihe nach beschäftigen.

§ 2.

Nähere Betrachtung der Fläche Ψ.

Durch die 60 geraden Vertauschungen der y, — welche fortan allein in Betracht kommen sollen —, werden die Erzeugenden erster Art auf Ψ und ebenso die Erzeugenden zweiter Art in Gruppen von je 60 zusammengefasst. Unter diesen Gruppen muss es jedesmal eine geben — sie soll f_1, bez. f_2 heissen —, die nur aus 12 verschiedenen Linien besteht, eine zweite — H_1 oder H_2 — die nur 20, und eine dritte — T_1 oder T_2 —, die nur 30 verschiedene Linien umfasst. Ich werde hier zuvörderst diese ausgezeichneten Gruppen analytisch bestimmen.

Zu dem Zwecke bemerke man, dass man auf Ψ von vornherein gewisse Gruppen zusammengehöriger Punkte kennt, die weniger als 60 verschiedene Punkte umfassen. Es sind dies:

I. *Zwei Gruppen von je* 12 *Punkten.* Die Coordinaten dieser Punkte sind die fünften Einheitswurzeln. Man erhält die ersten zwölf, wenn man

$$1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon$$

auf gerade Weise vertauscht, und die zweiten zwölf entsprechend aus

$$1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^2.$$

II. *Eine Gruppe von* 20 *Punkten.* Unter α eine dritte Einheitswurzel verstanden, sind die Coordinaten dieser Punkte in wechselnder Anordnung:

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ 0,\ 0.$$

III. *Eine Gruppe von* 30 *Punkten.* Die Coordinaten dieser Punkte sind, abgesehen von der Reihenfolge:

$$1,\ \beta,\ \beta^2,\ \beta^3,\ 0,$$

wo β eine primitive vierte Einheitswurzel bedeutet.

In demselben Sinne, wie die Punkte, gruppiren sich die zugehörigen Tangentialebenen und die Erzeugenden erster Art oder zweiter Art, welche dieselben ausschneiden. Die Tangentialebene eines Punktes y' lautet:

$$\Sigma y_i' y_i = 0.$$

Es entsprechen also den Punkten I, II, III folgende Tangentialebenen (in den hingeschriebenen Gleichungen hat man die y immer vermöge der 60 geraden Vertauschungen umzusetzen):

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{I.} \begin{cases} y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4 = 0, \\ y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4 = 0, \end{cases} \\ \text{II.}\quad y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 = 0, \\ \text{III.}\quad y_0 + \beta y_1 + \beta^2 y_2 + \beta^3 y_3 = 0. \end{cases}$$

Dabei bemerke man, *dass die Erzeugenden, welche die* $2 \cdot 12$ *Ebenen* I *ausschneiden, paarweise identisch sind.* Denn man kann die $2 \cdot 12$ Ebenen in der Weise auf 6 Tetraeder vertheilen, dass immer vier Kanten des Tetraeders der Fläche Ψ angehören. Ein solches Tetraeder bilden z. B. die vier Ebenen:

$$(2)\qquad \begin{cases} p_1 = y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4, \\ p_2 = y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4, \\ p_3 = y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4, \\ p_4 = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4, \end{cases}$$

die in der Weise zusammengehören, dass alle aus einer hervorgehen, indem man statt ε schreibt ε^2, ε^3, ε^4 *). Man hat nämlich vermöge $\Sigma y = 0$:

*) Diese vier Ausdrücke, durch die sich die y_ν in der Form darstellen:

$$5\, y_\nu = \varepsilon^\nu p_1 + \varepsilon^{2\nu} p_2 + \varepsilon^{3\nu} p_3 + \varepsilon^{4\nu} p_4,$$

spielen von jeher in der Theorie der Gleichungen fünften Grades eine wichtige Rolle. Ich möchte hier nur daran erinnern, dass es eben diese Ausdrücke sind, welche oben (Abschn. I., § 13., Abschn. II., § 10.) bei der Brioschi'schen Resolvente fünften Grades mit P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnet sind.

$$\Psi = \Sigma y^2 = p_1 p_4 + p_2 p_3 ,$$

und die beiden Erzeugenden von $\Psi = 0$ also, die etwa durch $p_1 = 0$ ausgeschnitten werden, sind auch bez. enthalten in $p_2 = 0$, $p_3 = 0$.

Man erhält daher nur 24 Erzeugende I, dagegen 40 Erzeugende II, 60 Erzeugende III, die sich auf 12, 20, 30 Erzeugende der einen Art und ebensoviele der anderen Art vertheilen. Nun giebt es unter den Linien erster oder zweiter Art keine anderen Gruppen von 12, 20, 30 zusammengehörigen, als f_1, H_1, T_1 bez. f_2, H_2, T_2. *Daher also werden auf* $\Psi = 0$ *die 24 Geraden* $f_1 f_2$, *die 40 Geraden* $H_1 H_2$, *die 60 Geraden* $T_1 T_2$ *ausgeschnitten durch folgende Aggregate von Tangentenebenen:*

1) *die Geraden* $f_1 f_2$ *durch die 12 Ebenen:*

(3) $$\prod_{12} (y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4) = 0,$$

oder auch durch die 12 Ebenen:

(3ª) $$\prod_{12} (y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4) = 0;$$

2) *die Geraden* $H_1 H_2$ *durch die 20 Ebenen:*

(4) $$\prod_{20} (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2) = 0,$$

3) *Die Geraden* $T_1 T_2$ *durch die 30 Ebenen:*

(5) $$\prod_{30} (y_0 + \beta y_1 + \beta^2 y_2 + \beta^3 y_3) = 0.$$

§ 3.

Berechnung gewisser symmetrischer Functionen.

Sei jetzt die Gleichung fünften Grades mit $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$, wie ich immer schreiben will, in der Gestalt gegeben:

(6) $$y^5 + 5\,\alpha y^2 + 5\,\beta y + \gamma = 0.$$

Ich stelle zunächst die Aufgabe, die unter (3), (3ª), (4), (5) linker Hand vorkommenden symmetrischen Functionen der Wurzeln als Functionen von α, β, γ zu berechnen.

1) Ein Punkt, der auf einer Erzeugenden von f_1 oder f_2 gelegen ist, ist dargestellt durch:

$$y_i = \varrho\,(\varepsilon^i + \lambda\,\varepsilon^{2i}),$$

wo ϱ, λ wei Parameter. Die Gleichung (6), von der diese y_i abhängen, erhält als Coefficienten:

$$\alpha = -\varrho^3 \lambda^2, \quad \beta = -\varrho^4 \lambda, \quad \gamma = -\varrho^5 (1 + \lambda^5),$$

und also ist für sie:

$$\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3 = 0.$$

Daher ist die symmetrische Function (3), *oder, was auf dasselbe hinauskommt*, (3a), *bis auf einen nicht weiter in Betracht kommenden Zahlenfactor gleich dem Ausdrucke*

$$L = \alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3. \tag{7}$$

2) Analoger Weise findet man, dass die zweite symmetrische Function verschwindet, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} y_0 &= \varrho\,(\quad 2 + \lambda) \\ y_1 &= \varrho\,(\quad 2 + \lambda\alpha) \\ y_2 &= \varrho\,(\quad 2 + \lambda\alpha^2) \\ y_3 &= \varrho\,(-3 + \sqrt{-15}) \\ y_4 &= \varrho\,(-3 - \sqrt{-15}). \end{aligned} \qquad \left(\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Die betr. Gleichung fünften Grades lautet:

$$y^5 - \varrho^3(80 + \lambda^3)\,y^2 + 6\varrho^4(40 - \lambda^3)\,y - 24\varrho^5(8 + \lambda^3) = 0$$

und *man erhält durch Elimination von* ϱ, λ *den gesuchten Ausdruck:*

$$M = -192\alpha^5\gamma + 640\alpha^4\beta^2 + 40\alpha^2\beta\gamma - 120\alpha\beta^3\gamma - 144\beta^5 + \gamma^4. \tag{8}$$

3) Endlich, um die dritte symmetrische Function zu berechnen, multiplicirt man am einfachsten zunächst die 6 Factoren, welche y_0 in ausgezeichneter Weise enthalten. So kommt, mit Unterdrückung des Index:

$$-5\alpha y^3 + 15\beta y^2 - 25\gamma y - 8x^2.$$

Sodann eliminire man zwischen diesem Ausdrucke und der linken Seite der Gleichung fünften Grades:

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma$$

das y. *So ergiebt sich*:

$$\begin{aligned} N = {} & 1728\alpha^{10} - 7200\alpha^7\beta\gamma + 2080\alpha^6\beta^3 - 576\alpha^5\gamma^3 + 2760\alpha^4\beta^2\gamma^2 \\ & - 9360\alpha^3\beta^4\gamma + 16200\alpha^2\beta^6 - 60\alpha^2\beta\gamma^4 + 180\alpha\beta^3\gamma^3 - 648\beta^5\gamma^2 - \gamma^6. \end{aligned} \tag{9}$$

§ 4.

Die kanonischen Parameter der Erzeugenden.

Ich will den Parameter, durch den die Erzeugenden erster Art dargestellt werden, mit $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, den Parameter für die Erzeugenden zweiter Art mit $\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ bezeichnen. Dieselben sind, damit die Ikosaedergleichung in kanonischer Form erscheint, in der Weise auszusuchen, dass den 12 Linien der Gruppe f_1 und ebenso den 12 Linien der Gruppe f_2 diejenigen 12 Parameterwerthe zukommen, welche Wurzeln der kanonischen Gleichung $f = 0$ sind, d. h.:

$$0,\ \infty,\ (\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^\nu,\ \ (\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^\nu.$$

Man erreicht diess, indem man setzt:

$$(10)\qquad \begin{cases} \eta = -\dfrac{p_1}{p_2} = +\dfrac{p_4}{p_3}, \\ \zeta = +\dfrac{p_1}{p_3} = -\dfrac{p_2}{p_4}, \end{cases}$$

wo p_1, p_2, p_3, p_4 die schon wiederholt genannten Ausdrücke bezeichnen.

In der That

$$p_1 = -\lambda p_2,\quad p_1 = \mu p_3$$

stellen die Gleichungen zweier Ebenenbüschel dar, deren Axen der Fläche Ψ angehören, es ist also $-\frac{p_1}{p_2}$ ein Parameter für die Linien der einen Art, welche die erste heissen soll, $+\frac{p_1}{p_3}$ ein Parameter für die Linien der anderen Art. Trägt man sodann in $-\frac{p_1}{p_2}$ oder $+\frac{p_1}{p_3}$ die Coordinaten der Punkte I (§ 2.) ein, so entstehen genau die eben angegebenen Wurzelwerthe von f. Durch diese Punkte verlaufen aber die 12 Linien f_1 und die 12 Linien f_2, deren Parameter diese Werthe annehmen sollten.

Es ist auch nicht schwer, durch Rechnung zu verificiren, dass sich die Grössen η, ζ durch die 60 Ikosaedersubstitutionen (Abschn. I, Glch. (3)) transformiren, sobald man die y in gerader Weise vertauscht. Man braucht bei der Rechnung nur immer die Relationen $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ anzuwenden. Dabei zeigt sich das sehr bemerkenswerthe, ob auch selbstverständliche Verhalten, dass die linearen Substitutionen, denen η und ζ unterworfen werden, zwar in ihrer Gesammtheit identisch sind, im Einzelnen aber in der Weise unterschieden, dass immer, wo bei η die Wurzel ε steht, bei ζ zu setzen ist ε^2. Denn schreibt man in $\eta = -\frac{p_1}{p_2}$ statt ε ε^2, so kommt $-\frac{p_2}{p_4} = +\frac{p_1}{p_3} = \zeta$.

Ich füge hier zweckmässig *eine Ergänzung zu den Betrachtungen des ersten Abschnittes* ein. Bildet man für die Gleichungen fünften Grades, welche in § 17., 18. daselbst betrachtet wurden:

$$y_\nu = (\varepsilon^\nu\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)\,R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)\,S$$

die Grössen p_i, so kommt:

$$p_1 = 5\eta_1 R,\qquad p_2 = -5\eta_2 R,$$
$$p_3 = 5\eta_1 S,\qquad p_4 = +5\eta_2 S.$$

Daher wird für diese Gleichungen der eine Parameter $-\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4}$ gleich dem ursprünglichen $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, von dem die Betrachtungen des ersten Abschnittes ausgehen; der zweite Parameter $\frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}$ wird gleich

$\frac{R}{S}$. Desshalb ist, wie in § 18. daselbst ohne Beweis angegeben wurde, $\frac{R}{S}$ eine Function von $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, die sich selbst ikosaedrisch transformirt, wenn $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ den Ikosaedersubstitutionen unterworfen wird, doch so, dass ε durch ε^2 ersetzt ist.

§ 5.

Aufstellung der Ikosaedergleichungen.

Um jetzt die Parameter X_1, X_2 der Gleichungen:

$$(11) \qquad 1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X_1, \qquad 1728\,\frac{H^3(\zeta)}{f^5(\zeta)} = X_2$$

zu berechnen, schlage ich denselben Weg ein, der in Abschnitt II, § 7. zum Ziele führte, indem ich vor allen Dingen die Producte $f(\eta)\,f(\zeta)$, $H(\eta)\,H(\zeta)$, $T(\eta)\,T(\zeta)$ betrachte.

Die Gleichung

$$f(\eta)\cdot f(\zeta) = 0$$

stellt, wenn man sie unter Wegschaffung der Nenner so schreibt:

$$p_2^{12}p_3^{12}f\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)\cdot f\left(+\frac{p_1}{p_3}\right) = f(-p_1,\,p_2)\cdot f(p_1,\,p_3) = 0$$

ein Aggregat von 24 Ebenen dar, von denen 12 durch die Axe $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ hindurchgehen und übrigens durch die 12 Erzeugenden (erster Art) der Gruppe f_1, während die 12 anderen durch die Axe $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ hindurchgelegt sind und die 12 Erzeugenden zweiter Art der Gruppe f_2 ausschneiden. Aber dieselben Erzeugenden werden in gleicher Multiplicität auf $\Psi = 0$ ausgeschnitten durch die Fläche

$$p_1^{12}L = 0,$$

wo L den in § 3. berechneten Ausdruck (7) bedeutet. Daher kann man setzen, unter λ einen numerischen Factor verstanden:

$$(12) \qquad f(\eta)\,f(\zeta) = \frac{\lambda p_1^{12}}{p_2^{12}p_3^{12}}\cdot L.$$

Dieselbe Ueberlegung liefert die ferneren Gleichungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} H(\eta)\,H(\zeta) = \dfrac{\mu p_1^{20}}{p_2^{20}p_3^{20}}\,M, \\[2ex] T(\eta)\,T(\zeta) = \dfrac{\nu p_1^{30}}{p_2^{30}p_3^{30}}\,N, \end{cases}$$

wo M, N die Ausdrücke (8), (9) sind.

Um die Zahlenfactoren λ, μ, ν zu bestimmen, betrachte ich besondere Werthe der $y_0 \cdots y_4$. Zunächst setze ich die y gleich 0, 1, i, $-i$, -1. Die Gleichung fünften Grades lautet dann:

$$(y^4-1)\,y=0,$$

und für sie ist also

$$\alpha=0,\quad \beta=-\frac{1}{5},\quad \gamma=0,$$

und mithin

$$L=\frac{1}{5^3},\quad M=\frac{144}{5^5},\quad N=0.$$

Andererseits wird:

$$\eta=\zeta=-i,\quad p_2{}^2=p_3{}^2=(1+2i)\sqrt{5},$$

$$f(-i)=(1-2i)^3,\quad H(-i)=\frac{1}{12}(1-2i)^5,\quad T(-i)=0.$$

Somit kommt:

$$(14)\qquad \lambda=5^{12},\quad \mu=\frac{5^{20}}{144^2}.$$

Um ν zu finden, schreibe ich die betr. Gleichung (13) in der Form:

$$T(-p_1,p_2)\,T(p_1,p_3)=\nu p_1{}^{30}N$$

und setze jetzt die Wurzeln y gleich $1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^4$. So ist die Gleichung fünften Grades $y^5-1=0$, also $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=-1$, $N=-1$. Andererseits $p_1=5$, $p_2=0$, $p_3=0$, $T(\pm 5,0)=\frac{5^{30}}{12}$. Also ist:

$$(15)\qquad \nu=-\frac{5^{30}}{144}.$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung, unter Weglassung sich weghebender Zahlenfactoren:

$$l=12^{\frac{2}{5}}\cdot L,\quad \text{(Glch. (7))}$$

$$m=12^{-\frac{4}{3}}\cdot M,\quad \text{(Glch. (8))}$$

$$n=-\frac{1}{144}\cdot N,\quad \text{(Glch. (9))}$$

so kommt, durch eine Rechnung, die der in Abschn. II, § 7. angewandten ganz ähnlich ist:

$$(16)\qquad \left\{\begin{matrix}X_1\\X_2\end{matrix}\right\}=\frac{l^5+m^3-n^2\pm\sqrt{(l^5-m^3-n^2)^2-4l^5m^3}}{2l^5}.$$

§ 6.

Untersuchung der Discriminante.

Die hier auftretende Quadratwurzel lässt sich wieder zerlegen, nämlich in das Product aus der Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung fünften Grades und zweier rationaler Factoren. Indem man etwa $\zeta=+\frac{p_2}{p_3}$ der Reihe nach gleichsetzt den 60 Werthen von $\eta=-\frac{p_1}{p_2}$, findet man folgende Zerlegung:

(17)
$$\sqrt{(l^5+m^3-n^2)^2-4l^5m^3}=kPQ\sqrt{\Delta},$$

wo k ein Zahlenfactor, P und Q die symmetrischen Functionen bedeuten

(18)
$$P=\prod_{20}\left(y_0\cos\frac{2\pi}{5}-y_1\cos\frac{4\pi}{5}\right),$$

(19)
$$Q=\prod_{30}\left(y_0+\cos\frac{2\pi}{5}(y_1+y_2)+\cos\frac{4\pi}{5}(y_3+y_4)\right),$$

und Δ die Discriminante der Gleichung fünften Grades bedeutet, die ich immer von dem vortretenden Zahlenfactor 3125 befreit denke, so dass ich schreibe:

(29)
$$\Delta=108\alpha^5\gamma-135\alpha^4\beta^2+90\alpha^2\beta\gamma^2-320\alpha\beta^3\gamma+256\beta^5+\gamma^4.$$

Die Functionen P, Q findet man (bis auf Zahlenfactoren) gleich:

(21)
$$P=8\alpha^5\gamma+40\alpha^4\beta^2-10\alpha^2\beta\gamma^2-45\alpha\beta^3\gamma+81\beta^5+\gamma^4,$$

(22)
$$Q=64\alpha^{10}+40\alpha^7\beta\gamma-160\alpha^6\beta^3+\alpha^5\gamma^3-5\alpha^4\beta^2\gamma^2+5\alpha^3\beta^4\gamma-25\alpha^2\beta^6-\beta^5\gamma^2,$$

und den dann eintretenden Werth von k durch Vergleich eines einzelnen Gliedes:

(23)
$$k=\frac{1}{12}.$$

§ 7.

Rechnung für die Jerrard'sche Form.

Es hat Interesse, die hier entwickelten Formeln in der übersichtlichen Gestalt zu besitzen, welche sie für die Jerrard'sche Form annehmen. Ich will letztere in der Gestalt schreiben:

(24)
$$y^5-y+\gamma=0,$$

wo also $\alpha=0$, $\beta=-\frac{1}{5}$. Dann kommt:

$$l=\frac{12^{\frac{2}{5}}}{5^3},\quad m=\frac{12^{-\frac{4}{3}}}{5^5}(5^5\gamma^4+144),\quad n=\frac{-\gamma^2}{144}\cdot\frac{648-5^5\gamma^4}{5^5}.$$

Ich schreibe zur Abkürzung

(25)
$$5^5\gamma^4=\Gamma.$$

So ergiebt sich weiter:

$$l^5+m^3-n^2=\frac{1}{5^{15}\cdot 144^2}\left\{144^3+(\Gamma+144)^3-\Gamma(\Gamma-648)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{5^{15}\cdot 12}\left\{\Gamma^2-9\cdot 23\,\Gamma+3456\right\}.$$

Also:

$$(l^5+m^3-n^2)^2-4l^5m^3=\frac{\Gamma(\Gamma-81)^2(\Gamma-256)}{5^{30}\cdot 144}.$$

In Uebereinstimmung hiermit findet man:

$$\Delta = \frac{\Gamma - 256}{5^5}, \quad P = \frac{\Gamma - 81}{5^5}, \quad Q = -\frac{\gamma^2}{5^5} = -\frac{\sqrt{\Gamma}}{5^5\sqrt{5^5}},$$

und schliesslich kommt

$$(26) \qquad \left\{\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\Gamma^2 - 9\cdot 23\,\Gamma + 3456 \pm \sqrt{\Gamma}\,(\Gamma - 81)\sqrt{\Gamma - 256}}{3456}.$$

§ 8.

Berechnung der Wurzeln y*).

Um nunmehr die Wurzeln y rational durch das η (oder das ξ) auszudrücken, gehe ich von der Formel aus:

$$5y_\nu = \varepsilon^\nu p_1 + \varepsilon^{2\nu} p_2 + \varepsilon^{3\nu} p_3 + \varepsilon^{4\nu} p_4.$$

Es war $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2} = -\frac{p_1}{p_2} = +\frac{p_3}{p_4}$. Man kann daher setzen, unter R, S geeignete Grössen verstanden:

$$y_\nu = (\varepsilon^\nu \eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)\,R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)\,S.$$

Aber in § 17. des ersten Abschnittes haben wir die allgemeinsten fünfwerthigen Functionen von η_1, η_2 construirt, welche diese Gestalt besitzen, und gesehen, dass sie in der Form

$$\lambda \cdot \frac{f W_\nu}{H} + \mu \cdot \frac{\sigma_\nu}{f^2}$$

enthalten sind **).

Daher kann man die Wurzeln y_ν unmittelbar in der Gestalt beschreiben:

$$(27) \qquad y_\nu = \lambda \cdot \frac{f W_\nu}{H} + \mu \cdot \frac{\sigma_\nu}{f^2}.$$

Es sind nur noch die von η freien Constanten λ, μ als rationale Functionen von α, β, γ, $\sqrt{\Delta}$ auszurechnen.

Ich erreiche diess durch Coefficientenvergleichung, indem ich umgekehrt $\frac{f W_\nu}{H}$ und $\frac{\sigma_\nu}{f^2}$ als rationale Functionen von y_ν darstelle. Setzt man (siehe § 16., 17. des ersten Abschnittes):

---

*) Vergl. hierzu die Darstellung bei Gordan in der wiederholt citirten Note (Erlanger Berichte, Juli 1877). Es sind dort die Rechnungen, welche ich im Texte ausführe, durch systematischen Formenbildungsprocess ersetzt.

**) Geometrisch: Alle Punkte, deren Coordinaten diese Form besitzen, gehören der Erzeugenden erster Art an, welche durch den gesuchten Punkt y hindurchläuft.

(28) $$\frac{t_\nu^2}{f} = \xi_\nu,$$

so ist

(29) $$\frac{f W_\nu}{12^2 H} = \frac{1}{\xi_\nu - 3}, \quad \frac{\sigma_\nu}{f^2} = \xi_\nu^2 - 7\xi_\nu + 24.$$

Ich werde daher zunächst ξ_ν rational durch y_ν ausdrücken.

§ 9.

Die Function $\xi_\nu = \frac{t_1^2}{f}$.

Zu dem Zwecke stelle ich noch einmal ähnliche Ueberlegungen an, wie in § 7. des vorigen und in § 5. des gegenwärtigen Abschnittes. Ich betrachte vor allen Dingen die Producte:

$$f(\eta)f(\xi), \quad t_\nu(\eta)\,t_\nu(\xi), \quad \frac{H(\eta)\cdot H(\xi)}{W_1(\eta)\cdot W_1(\xi)}.$$

Für das erstere fanden wir bereits

$$f(\eta)f(\xi) = \frac{5^{12}p_1^{12}}{p_2^{12}p_3^{12}}(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3).$$

Für die anderen beiden berechnet sich in ähnlicher Weise, indem wir unter den Factoren der Producte (5) und (4) die geeigneten zusammenfassen:

(30) $$t_\nu(\eta)\,t_\nu(\xi) = \frac{5^6 p_1^6}{p_2^6 p_3^6}(-\alpha y_\nu^3 + 3\beta y_\nu^2 - \gamma y_\nu + 8\alpha^2),$$

(31) $$\frac{12^4 H(\eta)\,H(\xi)}{W_\nu(\eta)\,W_\nu(\xi)} = \frac{5^{12}p_1^{12}}{p_2^{12}p_3^{12}}\Big(-(\alpha\gamma - 3\beta^2)\,y_\nu^4 + (8\alpha^3 - 3\beta\gamma)y_\nu^3 - (8\alpha^2\beta - \gamma^2)y_\nu^2 + (3\alpha^2\gamma - 9\alpha\beta^2)\,y_\nu + (40\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma - 9\beta^3)\Big).$$

Nun ist das gesuchte ξ_ν Wurzel der folgenden quadratischen Gleichung, in der ich die Indices ν unterdrückt und die Buchstaben η, ξ durch 1, 2 ersetzt habe:

(32) $$f_1 f_2 \cdot \xi^2 - (t_1^2 f_2 + t_2^2 f_1)\xi + t_1^2 t_2^2 = 0.$$

Benutzt man hier, dass

$$12^4\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2} = (t_1^2 - 3f_1)(t_2^2 - 3f_1),$$

so folgt:

(33) $$\xi = \frac{\left(t_1^2 t_2^2 + 9f_1 f_2 - 12^4\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}\right) \pm \sqrt{\left(t_1^2 t_2^2 + 9f_1 f_2 - 12^4\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}\right)^2 - 36 t_1^2 t_2^2 f_1 f_2}}{6 f_1 f_2}.$$

Die Quadratwurzel zerlegt sich wieder. Die beiden Werthe $\frac{t_1^2}{f_1} = \frac{t_\nu^2(\eta)}{f(\eta)}$ und $\frac{t_2^2}{f_2} = \frac{t_\nu^2(\xi)}{f(\xi)}$ werden einander gleich, wenn η aus ξ hervorgeht durch eine derjenigen 12 Ikosaedersubstitutionen, welche das Oktaeder t_ν ungeändert lassen. Ich habe diese Substitutionen in § 14. des ersten Abschnittes für das Oktaeder t_0 angegeben. Man findet, dass zunächst als Factor auftritt das Product der Quadrate der Differenzen der vier von y_ν verschiedenen y. Dasselbe lautet, nachdem man es durch 125 dividirt hat:

$$(34)\quad \begin{aligned}\Delta_\nu = \{&(-6\alpha\gamma + 48\beta^2)y_\nu^4 + (-27\alpha^3 - 8\beta\gamma)y_\nu^3 + (27\alpha^2\beta + \gamma^2)y_\nu^2 \\ &+ (-27\alpha^2\gamma + 216\alpha\beta^2)y_\nu + (-135\alpha^4 - 72\alpha\beta\gamma + 256\beta^3)\}.\end{aligned}$$

Ausserdem tritt quadratisch das Product der 6 Ebenen auf:

$$y_\nu + \cos\frac{2\pi}{5}(y_i + y_k) + \cos\frac{4\pi}{5}(y_h + y_l)$$

(wo für i, k, h, l die von ν verschiedenen Indices zu setzen sind).

Dieses Product ist bis auf einen Zahlenfactor gleich:

$$(35)\quad \alpha y_\nu^3 + \beta y_\nu^2 + \alpha^2.$$

So wird der Werth der Quadratwurzel einfach:

$$(\alpha y_\nu^3 + \beta y_\nu^2 + \alpha^2)\sqrt{\Delta_\nu}.$$

Es ist zweckmässig, statt Δ_ν die (durch 3125 dividirte) Discriminante der Gleichung fünften Grades, Δ, (Glch. (20)), einzuführen, die mit Δ_ν durch die Formel verknüpft ist:

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm(y_\nu^4 + 2\alpha y_\nu + \beta)\sqrt{\Delta_\nu}.$$

So ergiebt sich, wenn wir in die Formel (33) jetzt die Werthe von $t_1 t_2$, $f_1 f_2$, $\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}$ eintragen:

$$(36)\quad \xi_\nu = \frac{(\alpha\gamma + 2\beta^2)y_\nu^4 + (\alpha^3 - \beta\gamma)y_\nu^3 - 5\alpha^2\beta y_\nu^2 + (4\alpha^2\gamma + 13\alpha\beta^2)y_\nu + (11\alpha^4 + 9\alpha\beta\gamma) \pm D}{2(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3)}.$$

wo D den Ausdruck bedeutet:

$$(37)\quad D = \frac{(y^4 + 2\alpha y + \beta)(\alpha y^3 + \beta y^2 + \alpha^2)\Delta_\nu}{\sqrt{\Delta}}.$$

Setzt man hier $\gamma = 0$, $y_\nu = 0$, also

$$\xi_\nu = \frac{11\alpha^4 \pm \alpha^2\sqrt{-135\alpha^4 + 256\beta^3}}{2(\alpha^4 - \beta^3)}$$

so erhält man nach der Formel (vergl. Annalen XII, p. 169):

$$1728(1 - X) = \xi(\xi^2 - 10\xi + 45)^2$$

für X einen Ausdruck, dessen irrationaler Bestandtheil dieser ist:

$$\pm\frac{\sqrt{-135\,\alpha^4+256\,\beta^3}}{2\cdot 1728\,(\alpha^4-\beta^3)^3}\,(2560\,\alpha^{14}\beta^2-1216\,\alpha^{10}\beta^5-13960\,\alpha^6\beta^8-2025\,\alpha^2\beta^{11}).$$

Derselbe Ausdruck ergiebt sich mit demselben Vorzeichen, wenn man in die allgemeine Formel (16) resp. (17) $\gamma=0$ setzt. *Es folgt daraus, dass das obere und untere Vorzeichen der Quadratwurzel aus der Discriminante, sowie dasselbe hier in* (37) *auftritt, dem oberen und unteren Vorzeichen derselben Quadratwurzel in* (17) *entspricht.*

§ 10.

Fertige Formeln für die y_ν.

Trägt man diesen Werth von ξ_ν ein in die Formeln (29) des § 8., so erhält man nach ziemlich langer Rechnung, unter L, M die früher so bezeichneten Grössen verstanden:

$$
\begin{aligned}
(38)\quad \frac{fW_\nu}{H} = \frac{\pm 72}{M\sqrt{\Delta}} \{[& y_\nu^4\,(144\,\alpha^7\gamma-720\,\alpha^6\beta^2+125\,\alpha^4\beta\gamma^2-595\,\alpha^3\beta^3\gamma \\
& \qquad +808\,\alpha^2\beta^5+3\,\alpha^2\gamma^4-15\,\alpha\beta^2\gamma^3+40\,\beta^4\gamma^2) \\
& +y_\nu^3\,(24\alpha^6\beta\gamma+240\alpha^5\beta^3+10\alpha^4\gamma^3+25\alpha^3\beta^2\gamma^2-370\alpha^2\beta^4\gamma \\
& \qquad +288\,\alpha\beta^6+3\,\alpha\beta\gamma^4-10\,\beta^3\gamma^3) \\
& +y_\nu^2\,(-48\,\alpha^6\gamma^2+208\,\alpha^5\beta^2\gamma-320\,\alpha^4\beta^4-55\,\alpha^3\beta\gamma^3 \\
& \qquad +165\alpha^2\beta^3\gamma^2+224\,\alpha\beta^5\gamma-\alpha\gamma^5-384\beta^7+\beta^2\gamma^4 \\
& +y_\nu\,(1296\,\alpha^8\gamma-4320\,\alpha^7\beta^2+1017\,\alpha^5\beta\gamma^2-5075\alpha^4\beta^3\gamma \\
& \qquad +6102\,\alpha^3\beta^5+17\,\alpha^3\gamma^4-130\,\alpha^2\beta^2\gamma^3+350\,\alpha\beta^4\gamma \\
& \qquad\qquad -96\,\beta^6\gamma-\beta\gamma^5) \\
& +\quad (648\,\alpha^7\beta\gamma-2160\,\alpha^6\beta^3+30\,\alpha^5\gamma^3+575\,\alpha^4\beta^2\gamma^2 \\
& \qquad -3490\,\alpha^3\beta^4\gamma+21\,\alpha^2\beta\gamma^4+4096\alpha^2\beta^6-90\alpha\beta^3\gamma \\
& \qquad\qquad +160\,\beta^5\gamma^2)]. \\
\mp\sqrt{\Delta}\ [& y_\nu^4\,(-16\alpha^4\beta-3\,\alpha^2\gamma^2+7\,\alpha\beta^2\gamma+24\,\beta^4) \\
& +y_\nu^3\,(-8\,\alpha^4\gamma+48\,\alpha^3\beta^2-\alpha\beta\gamma^2-6\,\beta^3\gamma) \\
& +y_\nu^2\,(16\,\alpha^3\beta\gamma-64\,\alpha^2\beta^3+\alpha\gamma^3-\beta^2\gamma^2) \\
& +y_\nu\,(-19\,\alpha^3\gamma^2+11\,\alpha^2\beta^2\gamma+162\,\alpha\beta^4-\beta\gamma^3) \\
& +\quad(-24\alpha^5\gamma+80\alpha^4\beta^2-15\alpha^2\beta\gamma^2+10\alpha\beta^3\gamma+96\beta^5)]\} \\
= \Sigma\,(\pm & \frac{Ai}{\sqrt{\Delta}}+B_i)\,y_\nu^i.
\end{aligned}
$$

$$(39)\quad \frac{\sigma_\nu}{f^2} = \frac{\pm 1}{2L^2\sqrt{\Delta}}\{[y_\nu^4(-216\alpha^{10}-87\alpha^7\beta\gamma+265\alpha^6\beta^3-9\alpha^5\gamma^3+35\alpha^4\beta^2\gamma^2$$
$$-465\alpha^3\beta^4\gamma+556\alpha^2\beta^6-4\alpha^2\beta\gamma^4+5\alpha\beta^3\gamma^3+4\beta^5\gamma^2)$$
$$+y_\nu^3(108\alpha^9\beta+66\alpha^7\gamma^2+122\alpha^6\beta^2\gamma-327\alpha^5\beta^4+49\alpha^4\beta\gamma^3$$
$$-75\alpha^3\beta^3\gamma^2+119\alpha^2\beta^5\gamma+\alpha^2\gamma^5-144\alpha\beta^7$$
$$-2\alpha\beta^2\gamma^4-\beta^4\gamma^3)$$
$$+y_\nu^2(72\alpha^9\gamma-144\alpha^8\beta^2-59\alpha^6\beta\gamma^2-251\alpha^5\beta^3\gamma+436\alpha^4\beta^5$$
$$+3\alpha^4\gamma^4-77\alpha^3\beta^2\gamma^3+255\alpha^2\beta^4\gamma^2-344\alpha\beta^6\gamma$$
$$+192\beta^8+\beta^3\gamma^4)$$
$$+y_\nu(-1080\alpha^{11}-1071\alpha^8\beta\gamma+2147\alpha^7\beta^3-31\alpha^6\gamma^3$$
$$-432\alpha^5\beta^2\gamma^2-55\alpha^4\beta^4\gamma+869\alpha^3\beta^6-15\alpha^3\beta\gamma^4$$
$$-104\alpha^2\beta^3\gamma^3+349\alpha\beta^5\gamma^2-240\beta^7\gamma-\beta^2\gamma^5$$
$$+(-540\alpha^{10}\beta+198\alpha^8\gamma^2+18\alpha^7\beta^2\gamma+79\alpha^6\beta^4$$
$$+111\alpha^5\beta\gamma^3-85\alpha^4\beta^3\gamma^2-1503\alpha^3\beta^5\gamma+3\alpha^3\gamma^5$$
$$+1792\alpha^2\beta^7-22\alpha^2\beta^2\gamma^4+17\alpha\beta^4\gamma^3+16\beta^6\gamma^2)]$$
$$\pm\sqrt{\Delta}[y_\nu^4(9\alpha^5\gamma+43\alpha^4\beta^2+4\alpha^2\beta\gamma^2-11\alpha\beta^3\gamma+12\beta^5)$$
$$+y_\nu^3(-12\alpha^7-4\alpha^4\beta\gamma-21\alpha^3\beta^3-\alpha^2\gamma^3+2\alpha\beta^2\gamma^2-3\beta^4\gamma)$$
$$+y_\nu^2(16\alpha^6\beta-3\alpha^4\gamma^2-9\alpha^3\beta^2\gamma+28\alpha^2\beta^4+\beta^3\gamma^2)$$
$$+y_\nu(29\alpha^6\gamma+185\alpha^5\beta^2+11\alpha^3\beta\gamma^2+\alpha^2\beta^3\gamma-9\alpha\beta^5-\beta^2\gamma^3)$$
$$+(-36\alpha^8+24\alpha^5\beta\gamma+109\alpha^4\beta^3-3\alpha^3\gamma^3+22\alpha^2\beta^2\gamma^2$$
$$-53\alpha\beta^4\gamma-48\beta^6)]\},$$
$$=\Sigma\left(\pm\frac{A_i'}{\sqrt{\Delta}}+B_i'\right)y_\nu^i.$$

In diesen beiden Ausdrücken sind nun in der That die Coefficienten von y_ν^4, y_ν^3, y_ν^2, y_ν^0 proportionirt. Man erhält daher übereinstimmend für $i=4, 3, 2, 0$:

$$(40)\quad y_\nu = \pm\sqrt{\Delta}\,\frac{(A_i'\pm B_i'\sqrt{\Delta})\cdot\frac{fW_\nu}{H^2}-(A_i\pm B_i\sqrt{\Delta})\cdot\frac{\sigma_\nu}{f^2}}{[(A_1A_i'-A_1'A_i)+(B_1B_i'-B_1'B_i)]\pm\sqrt{\Delta}[(A_1B_i'-A_1'B_i)+(A_i'B_1-A_1B_i')]}.$$

§ 11.

Die allgemeinen Gleichungen fünften Grades.

Um eine beliebige Gleichung fünften Grades zu lösen, bietet sich jetzt naturgemäss der Weg, dieselbe durch rationale Transformation in eine solche, bei der $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$, zu verwandeln. Dies kann auf sehr mannigfache Weise geschehen, aber jedesmal benöthigt man eine Quadratwurzel, welche keinen Einfluss hat auf die Zahl der Substitutionen der Galois'schen Gruppe der Gleichung. Das Gleiche galt von der Quadratwurzel, die nöthig war, um eine allgemeine Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades auf eine Ikosaedergleichung zu reduciren (Abschnitt II, § 9.), und in der That zeigt man hier genau wie damals: *Es giebt bei der allgemeinen Gleichung keine rationale Function der Wurzeln, welche einer Ikosaedergleichung genügt.*

Aus dieser negativen Proposition ergiebt sich nun auch der Beweis eines Satzes, den Kronecker 1861 ohne Beweis mittheilte und den man etwa so formuliren kann: *Es ist unmöglich, bei durchaus willkürlichen $y_0 \cdots y_4$ eine rationale Function $\varphi(y)$ zu finden, die von einer Gleichung abhängt, in der (wie in der Ikosaedergleichung) nur ein Parameter auftritt.* Wenn nämlich eine solche Resolvente existirte, so könnte man sie auf rationalem Wege in eine Ikosaedergleichung verwandeln, wie folgende Betrachtung zeigt.

Die verschiedenen Werthe, die φ bei Permutation der y annimmt, seien in bestimmter Anordnung:

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n.$$

Vertauscht man die y durch die 60 (hier immer allein gemeinten) geraden Permutationen, so erscheinen die $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ in anderer Anordnung wieder, und man betrachte die 60 *Anordnungen* der φ, welche auf diese Weise entstehen. Da die φ nur von einem Parameter abhängen, so durchlaufen die Anordnungen $\varphi_1 \cdots \varphi_n$, wenn sich die y beliebig ändern, ein irreducibeles Werthgebiet von nur *einer* Dimension. Dieses Werthgebiet ist rational durch einen Parameter darstellbar. Denn man kann die y jedenfalls solchen rationalen Functionen einer Grösse λ gleichsetzen, dass die φ nicht constant bleiben; dann durchlaufen die $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ als rationale Functionen von λ das ganze ihnen gestattete Werthgebiet. Nun kann man statt λ allemal (wenn es nöthig sein sollte) einen anderen Parameter μ in der Weise einführen, dass die φ nicht nur rationale Functionen des μ sind, sondern auch μ eine rationale Function der φ und also der y (vergl. einen Aufsatz von Lüroth im IX. Bd. der Math. Annalen p. 163). *Eine geeignete lineare Function dieses μ, $\frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}$ muss dann von einer Ikosaedergleichung abhängen.* Denn bei Permutation der y verwandelt sich das μ in ein μ', welches eindeutig dem μ zugeordnet ist, und umgekehrt entspricht dem μ' nur das eine μ, wie man sieht, wenn man die Permutation der y rückgängig macht. Es hängen also μ und μ' von einander *linear* ab, und also sind, da keine der 60 Permutationen der y eine Periode > 5 besitzt, die Vorbedingungen des § 4. des ersten Abschnittes gegeben. Es ist das derselbe Schluss, der in mehr particulären Fällen in § 9. des zweiten Abschnittes und in § 1. dieses Abschnittes bereits angewandt wurde.

Zugleich sieht man, dass ein Satz ähnlich dem nun für Gleichungen fünften Grades bewiesenen bei Gleichungen höheren Grades aus einem viel einfacheren Grunde gilt. Denn es giebt keine endlichen Gruppen linearer Substitutionen *einer* Veränderlichen, welche den Vertauschungen von sechs oder mehr Dingen entsprächen, und darum kann bei den allgemeinen Gleichungen sechsten und höheren Grades von einer Resolvente, die nur von einem Parameter abhängt, von vorneherein nicht die Rede sein.

München, den 20. August 1877.

Sur la distribution des tangentes doubles sur les divers systèmes de coniques ayant un contact quadruple avec une courbe du quatrième ordre.

Par C. Crone à Copenhague.

Le lecteur trouvera dans les „Higher plane curves" par M. Salmon, Dublin 1873, p. 214 et suiv., tous les renseignements sur les divers systèmes de coniques ayant avec une quartique un contact quadruple nécessaires pour comprendre le mémoire suivant. Notre article ne donne qu'une explication très courte sur la distribution des coniques composées soit de 2 tangentes doubles réelles soit de 2 tangentes doubles imaginaires conjuguées sur les divers systèmes, suivie d'une recherche sur les nombres des systèmes contenant des coniques réelles pour les différentes formes des quartiques. Un développement de la même matière avec des démonstrations plus détaillées a été donné dans le journal danois „Tidsskrift for Mathematik" cah. V, 1875. Quant aux différentes formes de la quartique ordinaire, et à la situation des branches par rapport aux tangentes doubles, on est renvoyé à un mémoire de M. le docteur H. G. Zeuthen dans les „Mathematische Annalen" t. VII.

I.

Il suffira d'examiner la distribution des tangentes doubles réelles sur les divers systèmes pour la quartique composée de 4 branches réelles; car en prenant celle-ci pour point de départ on pourra obtenir toute quartique ordinaire à 3 ou 2 branches, si d'abord on reserre 1 ou 2 branches à des points isolés et puis les fait disparaître; les coniques composées des tangentes doubles qui ne sont pas devenues imaginaires seront alors distribuées sur les systèmes comme auparavant. Quant aux quartiques à 1 ou 0 branches réelles et aux quartiques annulaires, les 4 tangentes doubles de première espèce qui sont leurs seules tangentes doubles réelles forment de 3 manières différentes 2 coniques appartenant au même système.

Comme toutes les coniques réelles d'un système se présentent pendant la variation continue d'une conique variable à l'équation:

$$l^2 U + 2 l V + W = 0,$$

$U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ étant les équations de 3 coniques, l un paramètre variable, on comprend immédiatement les lemmes suivants:

La conique variable d'un système décompose le plan en deux parties, et les branches de la courbe en deux groupes dont un situé dans chaque partie; ces deux groupes doivent rester les mêmes pendant toute la variation de la conique. Quand pendant la variation la conique variable devient un couple de droites c'est à dire si elle se décompose en deux tangentes doubles réelles, les branches qui étaient auparavant au dedans d'elle seront au dehors après la décomposition et vice-versa.

Les points de contact de la conique variable avec la courbe ne pourront devenir imaginaires qu'en se confondant deux à deux. Le nombre de points de contact avec la même branche doit donc être constamment pair pendant toute la variation, ou constamment impair.

On en conclut:

Tous les couples de droites d'un système décomposent les branches de la courbe de la même manière en deux groupes.

Les nombres de points de contact d'une même branche avec les différents couples de droites d'un système sont ou tous pairs, ou tous impairs.

2 tangentes communes à 2 branches qui renferment ces branches dans une même paire d'angles opposés s'appelleront tangentes communes *de même genre*; elles renferment nécessairement les autres branches de la courbe dans l'autre paire d'angles opposés. L'une de ces tangentes de même genre est „permutée" contre l'autre, quand en se tournant autour de leur point d'intersection elle passe sur les deux branches dont elle est une tangente commune, mais sur aucune autre branche de la courbe. 2 tangentes communes à 2 branches qui renferment ces branches dans différentes paires d'angles opposés s'appelleront tangentes communes *de différent genre*; l'une pourra être permutée contre l'autre, quand en touchant toujours l'une des deux branches elle passe sur l'autre. Les tangentes seront dites *opposées* à l'égard de cette dernière branche. On voit bien, que deux tangentes communes de genre différent ne renferment que la branche, à l'égard de laquelle elles sont opposées, dans l'une paire d'angles opposés, tandis que toutes les autres branches de la courbe sont situées dans l'autre. Le mémoire de M. H. G. Zeuthen dans „Mathematische Annalen" t. VII. démontre, que 2 tangentes doubles quelconques de première espèce d'une quartique à 4 branches réelles renferment toujours 2 branches dans chaque paire d'angles opposés; de deux telles tangentes l'une pourra donc être permutée contre l'autre, quand en se tournant autour de leur point d'intersection elle passe sur deux branches de la courbe.

II.

On pourra maintenant, en s'appuyant à la différente situation des branches par rapport aux tangentes doubles, diviser les systèmes d'une quartique à 4 branches réelles en 4 classes:

1. La conique variable a un nombre pair de points de contact avec chaque branche qu'elle touche, et 2 branches sont au dedans, 2 au dehors de sa concavité. Un tel système ne peut contenir d'autres coniques composées de deux tangentes doubles que les 4 coniques dont chacune est composée de deux tangentes communes de même genre à 2 branches toutes les deux situées du même côté de la conique variable et les 2 coniques dont chacune est composée de 2 tangentes doubles de première espèce. Comme le système doit contenir 6 coniques composées de 2 tangentes doubles, elle contiendra toutes les coniques nommées. Il y a 3 systèmes dans cette classe, car on peut de 3 manières différentes décomposer les 4 branches en deux groupes, chacun contenant deux branches.

2. La conique variable a un nombre pair de points de contact avec chaque branche qu'elle touche, et 1 branche est au dedans, 3 branches sont au dehors de sa concavité, ou vice versa. Tous les couples de droites d'un tel système sont composés de deux tangentes doubles de différent genre opposées à l'égard de la branche qui est séparée des 3 autres branches de la courbe par la conique variable. Toutes les 6 couples de droites qu'on peut composer de cette manière appartiennent donc au système. Il y a en tout 4 systèmes dans cette classe.

Note. Il n'existe pas des systèmes dont la conique variable a un nombre pair de points de contact avec chaque branche qu'elle touche, pendant qu'elle renferme toutes les 4 branches dans l'une des parties dans lesquelles elle décompose le plan, car nulle conique composée de deux tangentes doubles réelles ne pourra satisfaire à ces deux conditions.

3. La conique variable a un nombre impair de points de contact avec deux branches différentes. G_1 et G_2 étant ces deux branches, et G_3 et G_4 les deux autres branches de la courbe, le système pourra contenir 1 conique composée d'une tangente commune de $G_1 G_3$ et d'une tangente commune de $G_2 G_3$, et 1 conique composée des deux tangentes communes de $G_1 G_3$ et de $G_2 G_3$ opposées aux deux premières à l'égard de G_3; car en permutant les tangentes doubles de la première conique contre celles de la seconde on ne changera pas la distribution des branches sur les deux paires d'angles opposées, ce qui aura lieu, si d'une manière différente on permute les tangentes doubles du première couple de droites contre d'autres tangentes communes de $G_1 G_3$ et de $G_2 G_3$. Le système pourra de même contenir deux coniques dont chacune est composée d'une tangente commune de $G_1 G_4$ et d'une tangente commune de $G_2 G_4$. Le système pourra enfin contenir des coniques composées d'une tangente double de première espèce et d'une tangente commune de $G_1 G_2$; si dans une telle conique on permute la tangente double de première espèce contre une autre de même espèce,

deux branches passeront dans une autre paire d'angles opposés, et il faut donc permuter la tangente commune de $G_1 G_2$ contre la tangente commune de même genre, ce qui fera passer encore deux branches dans une autre paire d'angles opposés, afin que la distribution des branches sur les deux paires d'angles opposés ne soit pas changée. Le système ne contient donc que 2 coniques composées de cette manière. Les 6 couples de droites énumerés sont les seuls qui peuvent appartenir au système, et ils y appartiennent tous. Il y a 8 systèmes dont la conique variable a un nombre impair de points de contact et avec G_1 et avec G_2, car on pourra de 8 manières différentes diviser les 4 branches de la courbe en deux groupes, et à chaque division répondra un système dont la conique variable (et chacun des couples de droites) sépare les deux groupes. On peut choisir les branches G_1 et G_2 de 6 manières différentes; il y a donc 48 systèmes dans cette classe.

4 La conique variable a 1 point de contact avec chacune des 4 branches. Si un tel système contient une conique composée d'une tangente commune de $G_1 G_2$ et d'une tangente commune de $G_3 G_1$, on aura un autre couple de droites, qui peut appartenir au système en permutant les deux tangentes communes contre deux autres de même genre, car par cette permutation on fera passer chacune des 4 branches dans une autre paire d'angles opposés, tandis que toute autre permutation changera la distribution des branches sur les deux paires d'angles opposés. Le système pourra de même contenir 2 coniques composées d'une tangente commune de $G_1 G_3$ et d'une tangente commune de $G_2 G_1$, et 2 coniques composées d'une tangente commune de $G_1 G_4$ et d'une tangente commune de $G_2 G_3$. Ces 6 couples de droites sont les seules qui peuvent appartenir au système; ils y appartiennent donc tous. Il y a 8 systèmes dans cette classe.

Si l'on se souvient de ce qu'une tangente commune à 2 branches devient imaginaire, quand l'une des deux branches disparaît, on comprendra facilement l'énumération suivante des systèmes contenant des coniques composées de deux tangentes doubles réelles à une quartique ordinaire à 3 branches réelles:

3 systèmes de la première classe contenant chacun 4 couples de droites réels, dont 2 composés de 2 tangentes communes de même genre, et 2 composés de 2 tangentes doubles de première espèce.

3 systèmes de la seconde classe contenant chacun 4 couples de droites réels.

24 systèmes de la troisième classe contenant chacun 4 couples de droites réels, dont 2 composés de 2 tangentes communes à 2 paires de branches différentes, et 2 composés d'une tangente double de première et d'une de seconde espèce.

On voit de même, que pour les quartiques à deux branches réelles les systèmes contenant des coniques composées de deux tangentes doubles réelles seront:

3 systèmes de la première classe: 1 système contenant 4 couples de droites réels, dont 2 composés de tangentes communes de même genre, et 2 composés de tangentes doubles de première espèce; 2 systèmes contenant chacun 2 couples de droites réels composés de 2 tangentes doubles de première espèce.

2 systèmes de la seconde classe contenant chacun 2 couples de droites réels composés de 2 tangentes communes de différent genre.

8 systèmes de la troisième classe contenant chacun 2 couples de droites réels composés d'une tangente double de première et d'une tangente double de seconde espèce.

Les quartiques composées d'une seule branche, les quartiques qui n'ont aucun point réel et les quartiques annulaires n'ont d'autres tangentes doubles réelles que celles de première espèce. Ces tangentes déterminent 3 systèmes, dont chacun contient deux coniques composées de deux tangentes doubles réelles.

III.

Toute quartique representée par une équation réelle et contenant des branches réelles décompose le plan en plusieurs parties: la partie contenant les tangentes doubles réelles et toute partie laquelle on ne pourra atteindre, en sortant d'un point d'une tangente double réelle, qu'en passant la courbe un nombre pair de fois sera dite située *au dehors* de la courbe; toutes les autres parties du plan sont *au dedans* de la courbe. $V^2 - UW = 0$ *) étant l'équation de la courbe, on voit, que le premier membre de cette équation a le même signe pour toutes valeurs des coordonnées correspondantes aux points au dehors de la courbe, mais le signe contraire pour toutes valeurs correspondantes aux points au-dedans de la courbe. Soit:

$$l^2 U + 2 l V + W = 0$$

l'équation commune de toutes les coniques d'un système. Par un point quelconque du plan passeront évidemment deux coniques du système correspondantes aux valeurs

$$\frac{-V \pm \sqrt{V^2 - UW}}{U}$$

de l, où les coordonnées du point sont substituées dans V, U et W. Ces valeurs de l sont réelles ou imaginaires selon que $V^2 - UW \gtrless 0$;

---

*) $l^2 U + 2 l V + W = 0$ étant l'équation de la conique variable d'un système, l'équation de la courbe aura cette forme.

donc les coniques réelles du système sont toutes au dehors ou toutes au dedans de la courbe, et on appelle selon leur situation le système *extérieur* ou *intérieur*. Un système intérieur a des coniques réelles dans toutes les parties du plan au dedans de la courbe. Ce ne sont que les systèmes extérieurs qui contiennent des tangentes doubles réelles; toutes les deux espèces de systèmes peuvent contenir des coniques composées de deux tangentes doubles imaginaires conjuguées. Les coniques ainsi composées ont des équations de la forme

$$L^2 + M^2 = 0,$$

$L = 0$ et $M = 0$ étant les équations de deux droites réelles, et leur partie réelle est réduite à un seul point. Dans ce qui suit, nous les appellerons *points isolés extérieurs* ou *intérieurs*, selon que le système, auquel ils appartiennent, est extérieur ou intérieur.

Si l'on fait varier l d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, l'équation

$$l^2 U + 2\, l\, V + W = 0$$

représentera toutes les coniques réelles c'est à dire toutes les coniques à équation réelle du système; quand l prend une valeur corréspondante à un point isolé, il est évident, que là on passe de coniques contenant des points réels à des coniques qui n'ont aucun point réel. Comme une telle transition doit nécessairement s'accomplir un nombre pair de fois pendant la variation de l, le système doit contenir un nombre pair de points isolés.

Soient l_1 et l_2 deux valeurs de l corréspondantes à deux points isolés telles, que pour toutes les valeurs de $l > l_1$ et $< l_2$ on a des coniques à points réels, dont aucune n'est réduite à un point isolé. Les coniques remplissent une certaine partie A du plan, nécessairement comprise dans une des parties, dans lesquelles le plan est décomposé par la courbe; car les coniques se succèdent consécutivement, et aucune d'eux ne peut couper la courbe. La limitation de A doit être touchée dans chaque point par une des coniques; elle est donc formée ou par l'enveloppe des coniques c'est à dire par la quartique, ou par quelques-unes des coniques. Supposons qu'un arc d'une conique K corréspondante à $l = l'$, $l_1 < l' < l_2$ forme une partie de la limitation, et choississons un point p au dehors de A, mais dans la même partie du plan limitée par la quartique que A. On aura deux valeurs réelles de l corréspondantesà p, dont on pourra toujours rapprocher l'une de l'autre autant qu'on voudra, en choississant p suffisament près de K; on pourra donc toujours avoir cette valeur $> l_1$ et $< l_2$. Il faut donc, que toute la limitation soit formée par la quartique. Si celle-ci ne contient aucun point réel, les coniques, dont le paramètre l est $> l_1$ et $< l_2$, doivent remplir tout le plan.

Si les coniques corréspondantes à des valeurs de $l > l_1$ et $< l_2$ sont situées au dedans d'une des branches de la quartique, elles doivent remplir tout l'intérieur de cette branche. On voit facilement, que deux coniques doivent passer par un point quelconque p au dedans de la branche, car p est évidemment situé au dedans de quelques unes des coniques, parce que celles-ci remplissent tout l'intérieur de la branche, mais au dehors des deux points isolés, corréspondants à $l = l_1$ et à $l = l_2$. Il s'ensuit, que la conique variable, dont l'équation est:

$$l^2 U + 2 l V + W = 0,$$

doit passer deux fois par p. Comme aucune autre conique du système peut passer par p, il faut, que toutes les coniques corréspondantes à des valeurs de $l < l_1$ ou $> l_2$ soient situées au dehors de la branche. On voit donc, qu'un système ne peut avoir plus de deux points isolés au dedans d'une des branches de la courbe.

Si un système a des coniques réelles au dedans d'une branche G qui n'enferme aucune autre branche de la courbe on peut démontrer, qu'il doit se trouver deux points isolés parmi ces coniques. Chacune des coniques réelles doit avoir 4, 2 ou 0 points réels de contact avec G. Une conique K ayant 4 points réels de contact a, b, c, d décompose l'intérieur de la branche en 5 parties: l'intérieur de K et 4 segments limités par un arc de K et par un arc de G. La conique consécutive K', ne pouvant avoir plus de 4 points d'intersection avec K, ne peut traverser que 2 des 4 segments, et ses points de contact $a'\ b'\ c'\ d'$, étant consécutifs à $a\,b\,c\,d$, doivent être ainsi situés, que a' et b' p. ex. se trouvent sur l'arc $a\,b$, et c' et d' sur l'arc $c\,d$. Si de K' on passe à la conique consécutive K'', de K'' à la conique consécutive etc. on voit, que les points de contact se rapprochent deux à deux l'un de l'autre, et qu'ils finissent par se confondre. 2 points de contact après s'être confondus deviennent imaginaires; si non, ils s'éloigneraient l'un de l'autre, et alors il y aurait des points dans lesquels la quartique fut touchée par plus d'une conique du même système, ce qui est impossible. On voit donc, qu'il existera des coniques avec 2 points réels de contact. Une telle conique ne doit avoir que 2 points d'intersection avec la conique consécutive, et on verra par un raisonnement tout-à-fait analogue, qu'il existera des coniques, dont tous les points de contact sont imaginaires. Mais un système contenant une conique K avec 4 points de contact imaginaires, qui n'enferme aucune branche de la courbe, doit contenir un point isolé dans l'intérieur de cette conique. Car K doit enfermer une conique consécutive, celle-ci doit de même enfermer une conique consécutive etc., et à la fin on parviendra à une conique réduite à un point isolé. Si en sortant de ce point on parcourt la série de coniques consécutives du système, on voit bien, qu'on doit passer encore un point isolé dans l'intérieur de G. Donc nous avons le théorème:

I. *Si un système a des coniques réelles dans l'intérieur d'une branche, qui n'enferme aucune autre branche de la courbe, il doit se trouver 2 et pas plus de 2 points isolés parmi ces coniques.*

On peut démontrer, que les points de contact d'un point isolé extérieur et ceux d'une tangente double réelle quelconque se trouvent toujours sur une même conique. Choisissons un système de coordonnées triangulaires tel, que le point $x=0$, $y=0$ est un point isolé extérieur, et $z=0$ une tangente double réelle de la courbe. Alors l'équation de la courbe pourra s'écrire:

$$(x^2+y^2)\,V = U^2,$$

$V=0$ et $U=0$ étant les équations de deux coniques. Supposons, que

$$V \equiv ax^2+by^2+cxy+zA,$$
$$U \equiv \alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+zB,$$

A et B étant deux fonctions linéaires des coordonnées. Si $z=0$ est une tangente double, on aura:

$$(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy)^2-(x^2+y^2)(ax^2+by^2+cxy) \equiv \pm(mx^2+ny^2+lxy)^2.$$

Ici il faut rejeter le signe négatif dans le second membre, car on pourra démontrer, que les coefficients α^2-a et β^2-b de x^4 et y^4 dans le premier membre sont positifs. Comme en allant du point $x=0$, $y=0$ à un point quelconque de $z=0$ on doit passer la courbe un nombre pair de fois, $(x^2+y^2)V-U^2$ aura le même signe, quand on y substitue $x=0$, $y=0$; $y=0$, $z=0$; $z=0$, $x=0$. Les résultats de ces substitutions sont:

$$-U^2,\quad x^4(a-\alpha^2),\quad y^4(b-\beta^2)\;;$$

comme $-U^2$ est négatif, on aura $a-\alpha^2<0$ et $b-\beta^2<0$. Alors l'équation identique peut s'écrire de la manière suivante:

$$[(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy)+(mx^2+ny^2+lxy)]\,[(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy)-(mx^2+ny^2+lxy)]$$
$$\equiv [x^2+y^2]\,[ax^2+by^2+cxy].$$

x^2+y^2 étant composé de deux facteurs imaginaires doit être identique à un des facteurs du premier membre; supposons que:

$$(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy)+(mx^2+ny^2+lxy) \equiv x^2+y^2.$$

L'équation de la courbe peut donc être mise sous la forme:

$$(x^2+y^2)zA = (mx^2+ny^2+lxy)^2+z^2B^2+2zB[x^2+y^2-(mx^2+ny^2+lxy)]$$

ou

$$(x^2+y^2)z(A-2B) = (mx^2+ny^2+lxy-Bz)^2.$$

On a donc démontré, que les points de contact de $x^2+y^2=0$ et ceux de $z=0$ se trouvent sur une même conique. Il est de même démontré, que les coordonnées de tout point réel de la quartique doit rendre $z(A - 2B) > 0$: tous les points réels de la quartique sont situés dans la même paire d'angles opposés formée par les deux tangentes doubles réelles, dont les équations sont $z = 0$ et $A - 2B = 0$.

II. *Les points de contact d'un point isolé extérieur et ceux d'une tangente double réelle se trouvent toujours sur une même conique; 2 tangentes doubles réelles, dont les points de contact se trouvent sur une même conique avec ceux d'un point isolé extérieur, renferment toujours tous les points réels de la quartique dans la même paire d'angles opposés.*

Un système doit contenir un nombre infini de coniques réelles, s'il en contient une seule K; car on pourra faire passer par les points de contact de K un nombre infini de coniques et les points d'intersection de chacune de ces coniques avec la courbe seront les points de contact d'une conique réelle du système. Soit

$$l^2 U + 2l V + W = 0$$

l'équation commune des coniques d'un tel système réel. L'équation exprimant, qu'une conique se décompose en deux tangentes doubles, sera du sixième degré en l et aura des coefficients réels. A une racine réelle de l'équation répondra une conique composée de deux tangentes doubles réelles ou imaginaires conjuguées; à une racine imaginaire répondra une conique composée de deux tangentes imaginaires mais non conjuguées, dont l'équation aura la forme:

$$(A + B\sqrt{-1})(C + D\sqrt{-1}) = 0$$

ou

$$AC - BD + (AD + BC)\sqrt{-1} = 0$$

A, B, C, D étant des fonctions linéaires des coordonnées. La racine imaginaire conjuguée doit donc répondre à une conique dont l'équation est:

$$AC - BD - (AD + BC)\sqrt{-1} = 0$$

c'est à dire les tangentes doubles $A - B\sqrt{-1} = 0$ et $C - D\sqrt{-1} = 0$ forment une conique du système. 2 tangentes doubles, dont l'une est imaginaire, l'autre réelle, ne pourront former une conique du système, car si dans la démonstration que nous venons de donner on pose B identiquement $= 0$, on verra, que la tangente double réelle $A = 0$ doit alors faire partie de deux coniques différentes du système. 4 tangentes doubles imaginaires seront dites *former un groupe*, quand elles composent deux coniques imaginaires conjuguées d'un système. De 4 tangentes doubles, qui sont deux à deux imaginaires conjuguées et dont les points de contact se trouvent sur une même conique, on pourra donc former deux groupes différents. Comme nous venons de démontrer, qu'un système réel doit toujours contenir un nombre pair de coniques composées de 2 tangentes imaginaires conjuguées, on voit bien, que celles des tangentes doubles imaginaires d'un système qui ne forment pas des points isolés pourront être divisées en groupes.

Soient $A \pm B\sqrt{-1} = 0$ et $C \pm D\sqrt{-1} = 0$ les équations des tangentes d'un groupe. Alors l'équation de la quartique peut s'écrire:

$$\pm (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2.$$

Les 3 systèmes contenant les 4 tangentes sont représentés par les équations:

$$\pm (A^2 + B^2)\, l^2 + 2lV + C^2 + D^2 = 0$$

$$(AC - BD)(\pm l^2 + 1) + 2lV + \sqrt{-1}\,(AD + BC)(\pm l^2 - 1) = 0$$

$$(AC + BD)(\pm l^2 + 1) + 2lV + \sqrt{-1}\,(BC - AD)(\pm l^2 - 1) = 0,$$

Si, en prenant le signe positif, on pose dans les deux dernières équations $l = \pm 1$, on voit, que les deux derniers systèmes contiennent des coniques à des équations réelles. Par le point d'intersection réel de $A + B\sqrt{-1} = 0$ et $A - B\sqrt{-1} = 0$ passent deux coniques réelles du premier système et deux coniques imaginaires conjuguées de chacun des deux derniers systèmes; les deux derniers systèmes sont donc intérieurs ou extérieurs suivant que le premier système est extérieur ou intérieur. L'équation

$$+ (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$$

peut en premier lieu répondre à chaque courbe à points réels, dont les tangentes doubles ne sont pas toutes réelles; mais puis on peut démontrer, qu'elle pourra répondre à des courbes sans points réels. Car si l'on considère une équation de la forme:

$$k (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$$

k étant un constant et la conique $V = 0$ ne contenant des points réels, la fraction $\frac{V^2}{(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)}$ ne pourra devenir $= 0$ pour des valeurs réelles des coordonnées. Le numérateur ne peut devenir $= 0$, et le *dénominateur ne devient pas infini*, que si les coordonnées sont infinies; mais si l'on divise et le numérateur et le dénominateur par x^4 et qu'alors on pose les coordonnées $= \infty$, le numérateur ne deviendra pas $= 0$, car alors la conique $V = 0$ devait contenir des points réels à l'infini.

$$\frac{V^2}{(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)}$$

ne pourra donc devenir plus petit qu'une certaine valeur positive p pour des valeurs réelles des coordonnées, et si l'on prend $k < p$ et > 0, l'équation

$$k (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$$

répondra à une courbe sans points réels.

Si dans les équations des 3 systèmes contenant les 4 tangentes doubles $A \pm B\sqrt{-1} = 0$ et $C \pm D\sqrt{-1} = 0$ on prend le signe négatif, chacune des deux dernières équations aura la forme:

$$M(-l^2+1) + V\cdot 2l + N(-l^2-1)\sqrt{-1} = 0,$$

$M = 0$ et $N = 0$ étant les équations de deux coniques réelles. Cette équation ne répondra à une conique réelle pour aucune valeur de l. Car si l'on pose $l = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, α et β étant des quantités réelles, l'équation peut s'écrire:

$$M(-\alpha^2+\beta^2+1) + V\cdot 2\alpha + N\cdot 2\alpha\beta$$
$$+ [-M\cdot 2\alpha\beta + V\cdot 2\beta + N(-\alpha^2+\beta^2-1)]\sqrt{-1} = 0.$$

La partie réelle du premier membre ainsi que le facteur multipliant $\sqrt{-1}$ ne peut devenir identiquement $= 0$, à moins que les coniques $M = 0$, $N = 0$, $V = 0$ n'aient 4 points communs; mais dans ce cas la quartique, dont l'équation est

$$M^2 + N^2 + V^2 = 0,$$

se décompose en deux coniques. L'équation ne peut donc répondre à une conique réelle que si la partie réelle du premier membre et le facteur multipliant $\sqrt{-1}$ sont identiques. Alors il faut que:

$$\frac{-\alpha^2+\beta^2+1}{-2\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\alpha\beta}{-\alpha^2+\beta^2-1};$$

mais ces équations se réduisent à une seule:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0$$

qui ne peut être satisfaite pour des valeurs réelles de α et β. On pourra cependant démontrer, que deux coniques imaginaires conjuguées du système

$$M(-l^2+1) + V\cdot 2l + N(-l^2-1)\sqrt{-1} = 0$$

passent par un point quelconque du plan. L'équation peut s'écrire:

$$M\cdot\alpha + V\cdot\beta + N\sqrt{-1} = 0$$

en posant $\alpha = \frac{-l^2+1}{-l^2-1}$ et $\beta = \frac{2l}{-l^2-1}$, d'où $\alpha^2+\beta^2 = 1$. Si en substituant les coordonnées d'un point réel m on a $M = p$, $N = q$, $V = r$, on tirera des équations:

$$p\alpha + r\beta = -q\sqrt{-1} \text{ et } \alpha^2+\beta^2 = 1$$

les valeurs:

$$\alpha = \frac{-pq\sqrt{-1} \pm r\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{r^2+p^2}, \quad \beta = \frac{-rq\sqrt{-1} \mp p\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{r^2+p^2}.$$

Les équations des deux coniques passant par m sont donc:

$$\sqrt{-1}\,[-pqM - rqV + (r^2+p^2)N] \pm \sqrt{p^2+q^2+r^2}\,[rM - pV] = 0$$

représentant deux coniques imaginaires conjuguées. Si une conique

$$M \cdot \alpha' + V \cdot \beta' + N\sqrt{-1} = 0$$

appartient au système, la conique imaginaire conjuguée y appartiendra aussi; car si l'équation $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ est satisfaite pour $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, elle sera encore satisfaite pour $\alpha = -\alpha'$, $\beta = -\beta'$.

III. *Celles des tangentes doubles imaginaires d'un système réel qui ne forment pas des points isolées peuvent être divisées en groupes contenant chacun* 4 *tangentes conjuguées deux à deux, dont les points de contact se trouvent sur une même conique.* La quartique ayant des branches réelles, tout système contenant un tel groupe sera réel. Si l'on considère un système contenant deux points isolés et les deux systèmes contenant les deux groupes formés par les 4 tangentes doubles composant les deux points isolés, les deux derniers systèmes seront extérieurs ou intérieurs, suivant que le premier système est intérieur ou extérieur. Si la quartique n'a point des branches réelles, tout système contenant 1 groupe en contiendra 2 autres; le système contiendra des coniques réelles ou non, suivant que l'équation de la courbe a la forme

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = + V^2 \text{ ou } = - V^2,$$

$A^2 + B^2 = 0$, $C^2 + D^2 = 0$ et $V = 0$ étant les équations de deux points isolés composés des tangentes doubles d'un groupe du système et de la conique passant par leurs points de contact.

IV.

Maintenant on pourra trouver et le nombre des systèmes réels d'une quartique ordinaire et la distribution des coniques composées de deux tangentes doubles imaginaires conjuguées sur ces systèmes.

Une quartique composée de 4 branches réelles n'a que des systèmes réels et toutes ses tangentes doubles sont réelles.

Une quartique composée de 3 branches réelles a 12 tangentes doubles imaginaires qui forment 6 points isolés, dont aucun ne peut être extérieur; car un point isolé extérieur devrait avoir ses points de contact sur une même conique avec chacune des 16 tangentes doubles réelles. Il faut donc, qu'il existe un système intérieur qui a 2 points isolés dans l'intérieur de chaque branche (I). Les tangentes doubles imaginaires forment 30 groupes appartenant chacun à l'un des 30 systèmes qui contiennent les tangentes doubles réelles (III). La quartique a donc 31 systèmes réels.

Une quartique composée de 2 branches réelles l'une au dehors de l'autre a 20 tangentes doubles imaginaires, qui forment 10 points isolés, dont 0,4 ou 8 doivent être intérieurs (I). Chaque point isolé extérieur appartient au système contenant toutes les tangentes doubles réelles

(II), d'où l'on conclut, qu'il n'y a plus de 2 points isolés extérieurs. On aura donc 8 points isolés intérieurs, 4 dans l'intérieur de chaque branche. Ces 8 points isolés appartiennent à deux systèmes intérieurs, dont chacun a deux points isolés dans l'intérieur de chaque branche. Les tangentes doubles imaginaires des systèmes intérieurs forment 24 groupes dans les 12 systèmes, dont chacun contient 4 tangentes doubles réelles. *Les tangentes doubles qui composent les 2 points isolés extérieurs* forment 2 groupes appartenant aux 2 systèmes intérieurs (III). Il y a donc en tout 15 systèmes réels.

Une quartique qui ne contient qu'une seule branche réelle a 24 tangentes doubles imaginaires formant 12 points isolés. Supposons, qu'il y ait q systèmes extérieurs outre les 3 contenant les 4 tangentes doubles de la première espèce, r systèmes intérieurs et par conséquent $2r$ points intérieurs (I); il y a donc $2r$ groupes appartenant à des systèmes extérieurs et $12 - 2r$ points isolés extérieurs. Alors on aura, $6 + 3q$ étant le nombre total de paires de points isolés et de groupes, que demandent les systèmes extérieurs:

$$2r + 6 - r = 6 + 3q: \quad r = 3q.$$

Comme $r \leqq 6$, il faut, que q soit $= 0$, $= 1$ ou $= 2$. $q = 0$ donne $r = 0$, ce qui est impossible, car s'il y a des points extérieurs, il y a aussi des systèmes intérieurs (III) et par conséquent des points intérieurs (I). $q = 2$ donne $r = 6$: 6 systèmes intérieurs, dont chacun contient 2 points isolés, tandis que tous les groupes formés par les tangentes doubles imaginaires appartiennent à des systèmes extérieurs, ce qui est impossible aussi. On aura donc $q = 1$, $r = 3$. Chacun des 3 systèmes contenant les 4 tangentes doubles réelles doit contenir 2 points isolés; car si un de ces systèmes en contenait 4, on aurait 14 groupes appartenant aux 3 systèmes intérieurs, ce qui est impossible. Il y a donc en tout 7 systèmes réels: 3 systèmes intérieurs, dont chacun contient 2 points isolés, 3 systèmes extérieurs, dont chacun contient deux points isolés et 4 tangentes doubles réelles, et 1 système extérieur contenant ni des points isolés ni des tangentes doubles réelles.

Une quartique sans points réels a 24 tangentes doubles imaginaires et par conséquent 12 points isolés, dont chacun des 3 systèmes, auxquels appartiennent les tangentes doubles réelles, contient 4. Il y a 36 groupes appartenant à 12 autres systèmes (III). Ces systèmes ne contiendront jamais des coniques réelles à points réels, car on doit considérer tout le plan comme étant au dehors de la courbe, et les 12 systèmes comme intérieurs.

A moyen de III. on peut trouver le nombre des systèmes parmi les 12, qui contiennent des coniques à points réels. Soit $l^2 U + 2l V + W = 0$ l'équation de la conique variable d'un système contenant 4 points isolés corréspondants aux valeurs l_1, l_2, l_3, l_4 de l ($l_1 < l_2 < l_3 < l_4$). Supposons, que les coniques corréspondantes à des valeurs de $l > l_1$ et $< l_2$ contiennent des points réels; il en sera de même pour les coniques corréspondantes à $l > l_3$ et $< l_4$, tandis que toutes les autres valeurs de l répondront à des coniques sans points réels. Chacun de ces deux groupes de coniques contenant des points réels remplit complètement le plan; les deux coniques passant par un point quelconque appartiennent donc chacune à un des deux groupes. Si nous substituons les coordonnées d'un point p dans $l^2 U + 2 l V + W$, cette expression ne s'annulera que pour deux valeurs l' et l'' de l, et l'on doit avoir $l_1 < l' < l_2$ et $l_3 < l'' < l_4$; $l^2 U + 2 l V + W$ a donc le même signe pour $l = l_2$ et $l = l_3$, le signe contraire pour $l = l_1$ et $l = l_4$. Si dans l'équation de la courbe:

$$(l_r^2 U + 2 l_r V + W)(l_s^2 U + 2 l_s V + W) = (l_r l_s U + (l_r + l_s) V + W)^2$$

nous choisissons toujours pour r et s deux différentes des valeurs 1, 2, 3, 4, alors nous aurons 2 équations de la forme $+(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$ et 4 équations de la forme $-(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$. Comme les 12 groupes qu'on peut former des tangentes doubles du système appartiennent chacun à l'un des 12 systèmes (si non, deux systèmes auraient plus de 4 tangentes doubles en commun) on voit, que 4 systèmes seulement des 12 contiendront des coniques à équations réelles.

Une quartique annulaire a 12 points isolés, et l'on pourra démontrer, qu'ils sont tous extérieurs. Chacun des 3 systèmes contenant les 4 tangentes doubles réelles doit contenir 4 points isolés; car si dans l'équation commune de toutes les coniques d'un tel système l parcourt toutes les valeurs réelles, on doit passer des valeurs de l correspondantes à des coniques situées dans l'intérieur de la branche interne. Ces valeurs de l doivent être séparées de celles qui répondent à des coniques au dehors de la branche externe par des valeurs correspondantes à des coniques sans points réels. On doit donc passer 4 fois de coniques contenant des points réels à des coniques sans points réels c'est à dire on doit avoir 4 points isolés, dont 2 situés au dehors et 2 au dedans des deux branches. Les tangentes doubles imaginaires forment 36 groupes; il y a donc 12 systèmes intérieurs qui ne contiennent aucun point isolé, ou en tout 15 systèmes réels.

La plupart des résultats obtenus ici à l'égard du nombre des systèmes réels ont été déduits d'une manière différente par Mr. le professeur Klein dans les „Mathematische Annalen" vol. X.

M. le docteur Geiser a démontré, au premier volume des „Mathematische Annalen", qu'en projetant une surface du troisième ordre d'un de ces points sur un plan on aura une quartique, dont les tangentes doubles sont les projections des 27 droites de la surface et la ligne d'intersection T du plan tangent au centre de projection avec le plan de projection. Il y est également démontré, que les points de contact de 3 tangentes doubles, projections de 3 droites dans un même plan, et ceux de T se trouvent sur une même conique. Les points de contact de 4 tangentes doubles, projections de 4 droites de la surface, dont chacune n'est coupée que par 1 des trois autres, se trouvent aussi sur une même conique; ce qui a été démontré par le Dr. H. G. Zeuthen de la manière suivante. Soient les 4 tangentes doubles $A\ B\ C\ D$ les projections de 4 droites $A'\ B'\ C'\ D'$ de la surface, et supposons A' coupé par B' et C' par D', pendant qu'aucune des deux premières n'est coupée par C' ni par D'. Alors la ligne d'intersection E' des plans $(A'B')$ et $(C'D')$ est toute sur la surface, et par conséquent elle est projetée comme une tangente double E de la quartique. T étant la ligne d'intersection du plan tangent au centre de projection avec le plan de projection, les points de contact de T et de E se trouvent sur une même conique et avec ceux de A et de B, et avec ceux de C et de D; les points de contact de A, B, C et de D se trouvent donc sur une même conique. Dans les „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, von Dr. Ludwig Cremona, Cap. VII" il y a une énumération des droites sur une surface du troisième ordre qui se coupent; à moyen de cette énumération et des régles recemment données on retrouvera facilement les résultats obtenus plus haut.

Copenhague, 11 mai 1877.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879*).

Die hinterlassene Abhandlung Hansen's „Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter", abgedruckt im XI. Bande der Abhandlungen der mathematisch physischen Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, enthält als Anwendung der daselbst gelehrten Methode zur Entwickelung der planetaren Störungen die numerische Berechnung derjenigen Störungsglieder in der Bewegung des Jupiter, welche unter der Berücksichtigung der ersten Glieder ihrer analytischen Entwickelung abgeleitet werden können. Für die

*) Vgl. auch dieses Journal Bd. X. p. 417.

Berechnung der durch den Saturn bewirkten Störungen der Länge und des Radiusvectors dagegen erscheint die angeführte Methode nicht geeignet, und Hansen verweist in dieser Beziehung auf seine früheren Arbeiten aus der Störungstheorie, welche die erforderlichen Vorschriften enthalten. Ein grosser Theil der numerischen Rechnungen findet sich bereits in der im Jahre 1830 von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift „Ueber die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns" ausgeführt. Es ist jedoch der Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden. Sofern diese Glieder von Einfluss werden können auf die vollständige Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radiusvector, als in Bezug auf die Breite, sind auch die in der nachgelassenen Abhandlung Hansen's enthaltenen Werthe dieser Säcularglieder nicht als definitiv anzusehen.

In den letzten Jahren ist die Theorie der Jupitersbewegung durch die umfangreichen Arbeiten von Leverrier ihrem Abschlusse entgegengeführt worden. Da jedoch der berühmte französische Astronom sich wesentlich anderer Methoden, wie Hansen, bedient hat, so bleibt es dringend wünschenswerth und von hohem wissenschaftlichen Interesse, dass die vollständige Berechnung der Jupitersstörungen auf Grund der Hansen'schen Theorie zu Ende geführt werde. Die Gesellschaft stellt daher

die ergänzende Berechnung der vollständigen Jupitersstörungen nach den von Hansen angegebenen Methoden

als Preisaufgabe für den Termin des 30. November 1879. Preis 700 Mark. —

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind in *deutscher, lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, sie müssen mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. *November* 1879, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft zu machen. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.