Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen.

Von Dr. Martin Krause in Breslau.

Ausser den Modulargleichungen ergiebt die Theorie der elliptischen Functionen noch mehrere andere Gleichungen, welche von ähnlicher Wichtigkeit für Algebra und Zahlentheorie sind. Zu ihnen gehören die Gleichungen zwischen dem Producte des transformirten Moduls in dessen complementären und dem Producte des ursprünglichen in dessen complementären. Joubert*) hat zuerst auf diese Gleichungen aufmerksam gemacht, indem er die beiden Haupteigenschaften derselben angiebt — die eine derselben rührt von Hermite her — und die Formen für die einfachsten Transformationsgrade wirklich aufstellt. Später sind von Hermite**) und Joubert***) die zu den Transformationen dritten resp. fünften Grades gehörenden Gleichungen zur Auflösung der Gleichungen vierten resp. fünften Grades benutzt worden, endlich hat Königsberger im 72sten Bande des Crelle'schen Journals eine längere Theorie derselben gegeben.

In allen diesen Arbeiten ist die Discriminante der Gleichungen unberücksichtigt geblieben. Die nähere Untersuchung derselben ergiebt gleich wichtige Resultate, wie die Untersuchung der Gleichungen selbst. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, einige derselben mitzutheilen und zwar solche, die hauptsächlich für die Algebra von Bedeutung sind. Es soll nämlich gezeigt werden, dass diese Discriminanten eine weitere Classe von Gleichungen bilden, deren Wurzeln vermöge bestimmter, näher anzugebender Methoden sämmtlich gefunden werden können.

Die Arbeit zerfällt in zwei Theile. In dem ersten wird eine Methode angegeben werden, mit deren Hülfe alle von einander verschiedenen Wurzeln der Discriminante zu bestimmen sind, in dem zweiten Theile soll die Entscheidung darüber getroffen werden, wie vielfach eine jede

---

*) Comptes rendus tome XLVII, pag. 341—345.

**) Sur la théorie des équations modulaires. Paris 1859, pag. 9—24.

***) Comptes rendus tome XLVIII, pag. 290—294.

dieser Wurzeln ist. Der erste Theil schliesst sich in mehreren Punkten an frühere Arbeiten des Verfassers über entsprechende Eigenschaften der Modulargleichungen*) an. Insofern dieses geschieht, soll sich derselbe auf eine blosse Angabe der Resultate beschränken. Der zweite Theil dagegen, dessen Grundlage die Lösung des allgemeinen Problems der Wurzelentwickelung bildet, unterscheidet sich wesentlich von dem entsprechenden bei den Modulargleichungen und soll daher etwas ausführlicher behandelt werden.

In der Bezeichnungsweise folgen wir dem Vorgange von Königsberger.

Setzt man:

$$U = \chi(\tau) = \varphi(\tau)\psi(\tau),$$

wo $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ die bekannten Hermite'schen Modularfunctionen bedeuten, so besteht, falls $n = a_0 a_1 \cdots a_p$ eine unpaare Zahl ohne quadratischen Theiler ist, — eine Annahme, die in der Folge beibehalten werden soll — zwischen $U = \chi(\tau)$ und den Grössen $V = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right)$, die entstehen, wenn man $\delta = \frac{n}{\delta_1}$ alle Theiler von n bedeuten und ξ_1 alle Werthe von 0 bis $\delta_1 - 1$ annehmen lässt, eine algebraische Gleichung, die in Bezug auf V vom $(a_0+1)(a_1+1)\cdots(a_p+1)^{\text{ten}}$ Grade ist — die U-V Gleichung, wie sie im Folgenden bezeichnet werden möge.

Die Form und der Grad der Discriminanten dieser Gleichungen ist leicht festzustellen.

Wenn $q = e^{\pi i \tau}$ gesetzt wird, so ist:

$$U = \chi(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \left[(1+q^2)(1+q^4)\cdots\right]^3 \left[(1-q)(1-q^3)\cdots\right]^3.$$

Hieraus folgt durch Umkehrung:

$$e^{\frac{\pi i \tau}{8}} = U\left[b_0 + b_1 U^8 + b_2 U^{16} + \cdots\right],$$

mithin allgemein:

$$\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) = U^{\frac{\delta}{\delta_1}}\left[c_0 + \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}\, U^{\frac{8\alpha\delta + 8\beta\delta_1}{\delta_1}}\right]^3_{\alpha = 1\ldots\infty,\ \beta = 1\ldots\infty}.$$

Setzt man die entsprechenden Ausdrücke für sämmtliche Wurzeln in die Discriminante:

---

*) Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Math. Annalen Band VIII und IX. In letzterem Aufsatze lies

p. 556, Zeile 2 v. o. $\xi_2' - k_2 u_1'$ statt $\xi_2' + k_2 u_1'$.

p. 562, Zeile 7 v. u. P, $2Q$, R statt P, Q, R.

p. 565, Zeile 1 v. o. stets $\frac{\sigma}{2}$ statt σ.

$$D = \prod \left[\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) - \chi\left(\frac{\delta'\tau - 16\xi_1'}{\delta_1'}\right)\right]^2$$

ein, so zeigt es sich unter Berücksichtigung der Werthe von c_0, dass dieselbe den Factor:

$$U^N = U^{nS'(n) - S(n) + 2\Delta(n)}$$

hat, wobei $S(n)$ gleich der Summe der Divisoren der Zahl n, $S'(n)$ gleich der Anzahl dieser Divisoren, ferner $\Delta(n) = \Sigma tt_1$ ist, und t und t_1 alle Divisoren von n bedeuten, für welche $tt_1 < n$ ist.

Aus dem Umstande, dass die U-V Gleichung unverändert bleibt, wenn man an Stelle von U: $Ue^{\frac{2is\pi}{8}}$, an Stelle von V: $Ve^{\frac{2isn\pi}{8}}$ setzt, folgt ferner, dass die Discriminante, von dem Factor U^N abgesehen, eine ganze Function von U^8 ist, endlich schliessen wir daraus, dass die U-V Gleichung unverändert bleibt, wenn man an Stelle von U: $\frac{1}{U\sqrt{2}}$, an Stelle von V: $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \frac{1}{V\sqrt{2}}$ setzt, dass der Grad der Discriminante gleich:

$$2S(n)\,(S(n)-1) - N \text{ ist. —}$$

Nachdem die Form und der Grad der Discriminante bestimmt ist, gehen wir zu der Bestimmung der Wurzeln selbst über.

Aehnlich wie bei den Modulargleichungen folgt als nothwendige und hinreichende Bedingung, damit zwei Wurzeln $\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right)$ und $\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)$ einander gleich werden, dass:

$$\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \frac{b_0 - a_0\,\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1\,\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1}$$

werde, vorausgesetzt, dass a_0, b_0, a_1, b_1 lineare Transformationszahlen sind, welche überdies den Bedingungen genügen:

$$1)\quad a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 0,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1 \mod 2 \text{ und}$$

$$\left(\frac{2}{a_0 b_1}\right) e^{-\frac{i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)} = 1$$

oder:

$$2)\quad a_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 0 \mod 2 \text{ und}$$

$$\left(\frac{2}{a_1 b_0}\right) e^{\frac{i\pi}{8}(a_0 b_0 - a_1 b_1)} = 1.$$

Wie wir sehen, erhalten wir auf diese Weise eine quadratische Gleichung in τ:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0,$$

deren Determinante die Form:

$$\Delta = a^2 - n^2$$

hat und deren eine Lösung mindestens das Argument einer Wurzel der Discriminante ist.

Die Coefficienten P, Q, R haben die Form:

$$P = a_1 \delta u,$$
$$2Q = u[a_0\delta_1 - a_1 16\xi_1] - \delta[b_1 u_1 + a_1 16\xi_2],$$
$$R = a_1 16^2 \xi_1 \xi_2 + b_1 u_1 16\xi_1 - a_0 \delta_1 16 \xi_2 - b_0 \delta_1 u_1.$$

Hieran knüpfen wir eine wichtige Bemerkung. Die soeben näher definirten Werthe von τ sind zu gleicher Zeit die Argumente der Moduln $\varphi(\tau)^8$, für welche complexe Multiplication stattfindet. Nach einer Bemerkung von Abel*) und Kronecker**) lassen letztere sich durch Wurzelzeichen ausdrücken. Hieraus folgt, dass auch die Lösungen der betrachteten Discriminanten durch Wurzelzeichen ausdrückbar sind.

Untersucht man nun die obigen Ausdrücke von P, Q, R näher***), so ergiebt sich der:

Lehrsatz.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit zu einer Lösung von:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

eine Function $\chi(\tau)$ gehöre, die Wurzel der Discriminante

$$D = 0$$

ist, sind:

1) *Die Determinante muss sich in eine der vier Formen:*

$$\Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta), \quad \Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta),$$
$$\Delta = 8(n - 4\delta)(n - 8\delta), \quad \Delta = -32\delta(n - 8\delta)$$

bringen lassen und negativ sein,

2) *falls* $\Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta)$ *ist, muss* δ *ungerade*

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 0 \bmod 4 \text{ und } P + R \equiv 0 \bmod 16 \text{ sein,}$$

falls $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta)$ *ist, muss*

$$P \equiv 1, \quad Q \equiv 0, \quad R \equiv 1 \bmod 2 \text{ sein,}$$

falls $\Delta = 8(n - 4\delta)(n - 8\delta)$ *ist, muss*

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 2 \bmod 4 \text{ sein,}$$

falls $\Delta = -32\delta(n - 8\delta)$, *muss*

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 0 \bmod 4 \text{ und } P + R \equiv 0 \bmod 16 \text{ sein.}$$

---

*) Oeuvres complètes, tome I, pag. 272.

**) Monatsberichte der Berliner Akademie aus dem Jahre 1857, pag. 455.

***) Siehe die entsprechenden Betrachtungen: Mathem. Annalen Bd. VIII, pag. 542–554.

Schliessen wir den Fall $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta) = -n^2$ aus, so zeigt es sich, dass für die zugehörige Function $\chi(\tau)$ im Ganzen m von einander verschiedene Wurzelpaare der U-V Gleichung denselben Werth annehmen, wenn $m = 1$ oder $m = (a_p + 1)(a_q + 1) \cdots$ ist, je nachdem die Coefficienten P, Q, R mit n den grössten gemeinsamen Theiler 1 oder $\alpha = a_p a_q \cdots$ haben.

Es soll diese Bedeutung von m für die Folge beibehalten werden. Der Fall $\Delta = -n^2$ muss gesondert betrachtet werden. Für denselben wird $a = 0$. Nehmen wir zunächst an, dass P, Q, R mit n keinen gemeinsamen Theiler haben, so wird δ gleich u gleich dem grössten gemeinsamen Theiler von P, Q, n, während ξ_1 und ξ_2 aus den Congruenzen zu bestimmen sind:

$$16\,\xi_1 \frac{P}{\delta} \equiv -Q \bmod n,$$

$$16\,\xi_2 \frac{P}{\delta} \equiv -Q \bmod n.$$

Wie wir sehen, ergiebt sich:

$$u = \delta, \quad u_1 = \delta_1, \quad \xi_1 = \xi_2,$$

d. h.: die beiden gleich werdenden Wurzeln fallen in eine zusammen, so *dass dieser Fall einfach auszuschliessen ist.*

Mögen zweitens P, Q, R mit n den grössten gemeinsamen Theiler a_p haben, wobei a_p eine Primzahl ist und $\frac{P}{a_p}$ den Theiler a_p nicht mehr enthält. Alsdann sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

1) δ sowohl, wie u enthalten den Factor a_p nicht.

Dann folgt, dass $\delta = u$ ist, ferner, dass $\frac{P}{a_p \delta^2}$ nur Theiler von der Form $4s + 1$ hat. In der That, setzen wir:

$$P = a_p P', \quad Q = a_p Q', \quad R = a_p R',$$

so ist:

$$Q'^2 - P' Q' = -\left(\frac{n}{a_p}\right)^2,$$

also:

$$\left(\frac{Q'}{\delta}\right)^2 - \frac{P'}{\delta^2} Q' = -\left(\frac{n}{a_p \delta}\right)^2.$$

Hieraus folgt, dass für jeden Theiler p von $\frac{P'}{\delta^2}$ oder $\frac{P}{a_p \delta^2}$ die Congruenz bestehen muss:

$$\left(\frac{Q'}{\delta}\right)^2 \equiv -\left(\frac{n}{a_p \delta}\right)^2 \bmod p.$$

Das aber ist nur möglich, wenn ein jedes $p \equiv 1 \bmod 4$ ist.

Die Werthe von ξ_1 und ξ_2 sind bis auf Vielfache von $\frac{\delta_1}{a_p}$ dadurch eindeutig bestimmt, dass a_0 und b_1 sich aus:

$$n\delta a_0 = \quad (Q\delta + P16\xi_1),$$
$$n\delta b_1 = -(Q\delta + P16\xi_2)$$

als ganze Zahlen ergeben müssen. Da $a_1 = \frac{P}{\delta^2}$ auch eine ganze Zahl ist, so ist die einzige noch zu erfüllende Bedingung, dass b_0 sich aus:

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

als ganze Zahl ergiebt. Dieses liefert die Congruenz:

$$\left(\frac{Q\delta + P16\xi_1}{n\delta}\right)\left(\frac{Q\delta + P16\xi_2}{n\delta}\right) \equiv -1 \bmod \frac{P}{a_p\delta^2} a_p.$$

Dieselbe ist symmetrisch in Bezug auf ξ_1 und ξ_2. Hieraus folgt, dass sie im Ganzen $\frac{a_p - 1}{2}$ nach dem Modul δ_1 incongruente Paare $\xi_1 \xi_2$ ergeben wird. Diesen werden ebenso viele Paare von gleich werdenden Wurzeln der U-V Gleichung entsprechen, falls nicht einmal $\xi_1 = \xi_2$ wird. Dieses findet entweder zweimal oder gar nicht statt, je nachdem die Congruenz:

$$x^2 \equiv -1 \bmod \frac{P}{a_p\delta^2} a_p$$

auflösbar ist, oder nicht. Vermöge der gemachten Bemerkung über die Factoren von $\frac{P}{a_p\delta^2}$ ist dieses aber damit identisch, ob die Congruenz:

$$x^2 \equiv -1 \bmod a_p$$

auflösbar ist oder nicht.

Es ergeben sich also in diesem Falle

$$\frac{a_p - 1 - 2\varepsilon}{2}$$

von einander verschiedene, einander gleich werdende Wurzelpaare der U-V Gleichung, wobei $\varepsilon = 1$ oder 0 ist, je nachdem

$$\left(\frac{-1}{a_p}\right) = \pm 1$$

ist.

2) δ ist durch a_p theilbar, u nicht. Dieser Fall fällt mit Fall 3) zusammen, in welchem u durch a_p theilbar ist, δ nicht. Beide liefern nur *ein* neues Wurzelpaar.

Im Ganzen erhalten wir also:

$$\frac{a_p + 1 - 2\varepsilon}{2}$$

von einander verschiedene Wurzelpaare, die denselben Werth annehmen. Dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn $\frac{P}{a_p}$ den Theiler a_p enthält.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass zu einer Form:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + Q = 0,$$

deren Determinante gleich $-n^2$ ist und deren Coefficienten den aufgestellten Bedingungen genügen, eine Wurzel der Discriminante gehört, für welche:

$$\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2}$$

von einander verschiedene Wurzelpaare der U-V Gleichung einander gleich werden, wobei $\varepsilon = 1$ oder 0 ist, je nachdem ein jedes der Legendre'schen Zeichen:

$$\left(\frac{-1}{a_p}\right), \quad \left(\frac{-1}{a_q}\right) \cdots$$

gleich 1 ist oder nicht und r die Zahl der von der Einheit verschiedenen Primfactoren von $\alpha = a_p a_q \cdots$ bedeutet*).

Mit Hülfe dieser Sätze ist es möglich, sämmtliche Gleichungen

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

aufzustellen, deren Lösungen die Argumente der von einander verschiedenen achten Potenzen der Wurzeln der Discriminante ergeben — es kommt nur auf die achten Potenzen der Wurzeln an, da die Discriminante, von U^N abgesehen, eine ganze Function von U^8 ist**).

Hierbei schicken wir eine Bemerkung voraus. Aus dem vorhin aufgestellten Lehrsatz folgt, dass bei drei Arten von Determinanten die Coefficienten den gemeinsamen Theiler 2 resp. 4 haben.

Es soll im Folgenden davon abgesehen werden.

Schliessen wir dann vorläufig die Determinanten:

$$-\Delta = \sigma^2 = 16\sigma_1^2, \text{ und } -4\Delta = 3\sigma^2$$

aus, wo σ den grössten gemeinsamen Theiler von P, $2Q$, R bedeutet, so folgt der

Lehrsatz:

Ist $\Delta = (3n - 8\delta)(n - 2\delta)$ *und* δ *ungerade, so liefert eine jede Classe Formen der verlangten Art und zwar die uneigentlich primitiven je drei, alle übrigen je eine.*

Ist $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta)$ *oder* $\Delta = 2(n - 4\delta)(n - 8\delta)$, *so liefert eine jede Classe eine Form der verlangten Art.*

Dasselbe findet statt, wenn $\Delta = -2\delta(n - 8\delta)$ *und* δ *ungerade ist.*

*) Für den speciellen Fall einer Primzahltransformation und die specielle Form: $n\tau^2 + n = 0$ ist dieser Satz von Joubert ohne Beweis mitgetheilt worden: Comptes rendus, tome XLVIII, pag. 292.

**) Siche die entsprechenden Betrachtungen: Math. Ann. Bd. IX, p. 560 sq.

Ist dagegen δ gerade, so sind nur diejenigen Classen beizubehalten, bei welchen sämmtliche Coefficienten durch 2 theilbar sind und zwar liefern die Classen, bei welchen $P \equiv R \equiv 0 \bmod 4$ ist, je drei, alle übrigen je eine Form.

Dabei genügt es, in denjenigen Classen, denen drei Formen entsprechen, eine einzige anzugeben, da die beiden andern aus derselben durch eine lineare Transformation des 3ten und 5ten Falles erhalten werden können.

Die Wahl der repräsentirenden Form soll später vorgenommen werden.

Wir kommen zu den Ausnahmen.

Dieselben beziehen sich auf die beiden Classen, die von den Formen:

$$(4\sigma,\ 0,\ 4\sigma) \text{ und } \left(\sigma,\ \frac{\sigma}{2},\ \sigma\right)$$

abgeleitet sind.

Man erhält die ersten, wenn n oder einer seiner Theiler von der Form:

$$64\alpha^2 + \beta^2$$

ist. Alsdann hat man an Stelle von drei Formen nur zwei zu nehmen:

$$4\sigma_1\tau^2 + 4\sigma_1 = 0,$$

woraus $\tau = i$; $\chi^8(\tau) = \frac{1}{4}$ folgt,

$$8\sigma_1\tau^2 + 8\sigma_1\tau + 4\sigma_1 = 0,$$

woraus $\tau = \frac{-1}{1+i}$; $\chi^8(\tau) = -2$ folgt.

Man erhält ferner die zweiten, wenn n oder einer seiner Theiler von einer der beiden Formen:

$$12\alpha^2 + \beta^2,$$

oder

$$4\alpha^2 + 3\beta^2$$

ist. Alsdann hat man an Stelle von drei Formen nur eine zu wählen, nämlich:

$$\sigma\tau^2 + \sigma\tau + \sigma = 0,$$

woraus $\tau = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; $\chi^8(\tau) = 1$ folgt.

Wir kommen zu dem zweiten Theile der Aufgabe, durch welchen bestimmt werden soll, wie vielfach eine jede der Wurzeln ist. Die Bestimmung beruht auf der Lösung folgender Aufgabe: Sei $U = U_0$ eine beliebige Wurzel der Discriminante ausser $U = 0$, für welche mehrere Wurzeln der U-V Gleichung gleich V_0 werden, so sollen alle diejenigen Stellen angegeben werden, welche in der Nähe von $U_0\,V_0$ liegen. Nehmen wir die Punkte $U = 0$ und $U = \infty$ hinzu, so kann die Aufgabe auch dahin präcisirt werden: es soll die Riemann'sche Fläche der algebraischen Function V construirt werden.

Ist

$$u^8 = \varphi(\tau)^8 = 1 - u'^8 = 1 - \psi(\tau)^8$$

der primäre Modul,

$$v^8 = \varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right)^8 = 1 - v'^2 = 1 - \psi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right)^8$$

ein transformirter, so besteht bekanntlich zwischen diesen Grössen und dem zugehörigen Multiplicator die Relation:

$$M^2 = \frac{1}{n}\,\frac{v}{u}\,\frac{v'^8}{u'^8}\,\frac{du}{dv}.$$

Hieraus folgt, da: $U = uu'$; $V = vv'$ ist:

$$M^2 = \frac{1}{n}\,\frac{V}{U}\,\frac{v'^8 - v^8}{u'^8 - u^8}\,\frac{dU}{dV}.$$

Da der Multiplicator nie für einen endlichen Werth von U oder u Null oder unendlich gross werden kann, so lehrt diese Formel, dass bei Ausschluss von $U = 0$ und $U = \infty$, $\left(\frac{dU}{dV}\right)$ stets endlich ist, wenn sowohl u^8, wie v^8 von $\frac{1}{2}$ verschieden sind, sie lehrt zweitens, dass $\left(\frac{dV}{dU}\right)$ unendlich gross wird, wenn allein $u^8 = \frac{1}{2}$ ist, doch so, dass:

$$\lim\left[(u'^8 - u^8)\,\frac{dV}{dU}\right]_{u^8 = \frac{1}{2}}$$

eine endliche von Null verschiedene Grösse ist, sie lehrt drittens, dass $\left(\frac{dV}{dU}\right)$ gleich Null wird, wenn allein $v^8 = \frac{1}{2}$ ist, doch so, dass:

$$\lim\left[(v'^8 - v^8)\,\frac{dU}{dV}\right]_{v^8 = \frac{1}{2}}$$

eine endliche von Null verschiedene Grösse ist. Ist schliesslich sowohl $u^8 = \frac{1}{2}$, wie $v^8 = \frac{1}{2}$, so lehrt diese Formel, dass jedenfalls:

$$\lim\left[\frac{v'^8 - v^8}{u'^8 - u^8}\,\frac{dU}{dV}\right]_{u^8 = \frac{1}{2},\; v^8 = \frac{1}{2}}$$

eine endliche von Null verschiedene Grösse ist.

Mögen ferner für $U = U_0$ mehrere Wurzeln der U-V Gleichung $V_1, V_2, V_3, \cdots$ gleich V_0 werden, so beweisen wir, dass die Quotienten

$$\left(\frac{dV_\alpha}{dU}\right) : \left(\frac{dV_\beta}{dU}\right)_{\substack{\alpha = 1, 2, 3, \ldots \\ \beta = 1, 2, 3, \ldots}}$$

an der Stelle $U_0\,V_0$ stets einen endlichen von Null und der Einheit verschiedenen Werth haben, wenn α von β verschieden ist.

Wenn zwei Wurzeln:

$$V_1 = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right) \text{ und } V_2 = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1}\right)$$

einander gleich werden, so besteht zwischen den Argumenten eine lineare Relation des ersten oder des zweiten Falles. Nehmen wir zunächst an, es bestehe eine solche des ersten Falles, so werden zu gleicher Zeit für die entsprechenden v Grössen die Relationen stattfinden:

$$v_1{}^8 = v_2{}^8; \quad v_1'{}^8 = v_2'{}^8.$$

Hieraus folgt, wenn wir die entsprechenden Werthe der Multiplicatoren mit M_1 und M_2 bezeichnen:

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{\left(\frac{dU}{dV_1}\right)}{\left(\frac{dU}{dV_2}\right)} = \text{einem endlichen, von Null verschiedenen Werth.}$$

Nun ist bekanntlich, wenn auf den primären Modul τ die Substitution $\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ 16\xi_1 & \delta_1 \end{vmatrix}$ angewandt wird:

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} M_1 = \frac{C}{K_1} \frac{\delta_1}{n},$$

wenn C das zu dem Modul τ, K_1 das zu dem Modul $\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}$ gehörende geradlinige Normalintegral erster Gattung bedeutet.

Ebenso folgt:

$$(-1)^{\frac{u-1}{2}} M_2 = \frac{C}{K_2} \frac{u_1}{n},$$

wenn K_2 das zu dem Modul $\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}$ gehörende Integral bedeutet. Also wird:

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{K_2^2}{K_1^2} \frac{\delta_1^2}{u_1^2} = \frac{\left(\frac{dU}{dV_1}\right)}{\left(\frac{dU}{dV_2}\right)}.$$

Nun ist:

$$K_1 = 2\pi\,\vartheta\left(0, \frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right)_3^2,$$

$$K_2 = 2\pi\,\vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^2,$$

also:

$$\frac{\left(\frac{dU}{dV_1}\right)}{\left(\frac{dU}{dV_2}\right)} = \frac{\vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1{}^2}{\vartheta\left(0, \frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right)_3^4 u_1{}^2} = \frac{\vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1{}^2}{\vartheta\left(0, \dfrac{b_0 - a_0\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1}\right)_3^4 u_1{}^2}.$$

Sollte dieser Ausdruck gleich der Einheit werden, so müsste:

$$\vartheta\left(0, \dfrac{b_0 - a_0\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1}\right)_3^4 u_1{}^2 = \vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1{}^2$$

werden. Nun ist, wenn a_0, b_1, a_1, b_0 Transformationszahlen des ersten Falles bedeuten, und $a_1 = 2^\alpha \beta$ gesetzt wird, allgemein:

$$\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3$$

$$= e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{(\beta-1)^2 + (a_0\beta+1)^2}{2}\right]} \left(\frac{-a_0}{\beta}\right) (-1)^{\frac{a_0^2-1}{8}(\alpha+1)} \sqrt{-i(a_1\tau - b_1)}\, \vartheta(0, \tau)_3\,{}^{*}).$$

Setzen wir an Stelle von τ: $\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}$, so müsste also in unserem Falle werden:

$$u_1^2 \left[a_1 \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1\right]^2 = \delta_1^2.$$

Das aber ist unmöglich, da τ, mit ihm $\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}$ die Form hat $A + Bi$, wo B eine von Null verschiedene positive Grösse ist und a_1 von Null verschieden sein muss.

Aehnlich gestaltet sich die Sache, wenn zwischen den Moduln eine lineare Transformation des zweiten Falles besteht. Alsdann wird:

$$v_1^8 = v_2'^8; \quad v_2^8 = v_1'^8,$$

also:

$$\frac{\left(\frac{dU}{dV_1}\right)}{\left(\frac{dU}{dV_2}\right)} = -\frac{M_1^2}{M_2^2} = -\frac{\vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1^2}{\vartheta\left(0, \frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right)_3^4 u_1^2} = \text{endl. von 0 verschied. Grösse.}$$

Sollte dieser Ausdruck gleich der Einheit werden, so müsste sein:

$$\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1}\right)_3^4 u_1^2 = -\vartheta\left(0, \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)_3^4 \delta_1^2.$$

Nun ist für Transformationszahlen des zweiten Falles allgemein:

$$\vartheta\left(0, \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)_3 = \left(\frac{\frac{-a_0}{2}}{a_1}\right) i^{\left(\frac{a_1-1}{2}\right)^2} \sqrt{-i(a_1\tau - b_1)}\, \vartheta(0, \tau)_3,$$

mithin müsste werden:

$$\delta_1^2 = u_1^2\left[a_1 \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1\right]^2, \text{ w. n. g.}$$

Die Schlüsse werden unstrenge, wenn $v_1^8 = v_1'^8 = v_2^8 = v_2'^8 = \frac{1}{2}$ wird, indessen zeigt eine leichte Ueberlegung, dass sie auch dann richtig bleiben.

---

*) Siehe Journal de Mathématiques par Liouville, tome III, 1858, pag. 26 sq., oder Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, Leipzig 1874, Vierundzwanzigste Vorlesung.

Hieraus folgt das Resultat: Mögen für $U = U_0$ mehrere Wurzeln der U-V Gleichung gleich V_0 werden, so denke man sich dieselbe nach Potenzen von $U - U_0$ und $V - V_0$ entwickelt. Die niedrigste alleinstehende Potenz von $V - V_0$ sei die $\varkappa^{\text{te}}$, d. h. es mögen für $U = U_0$ $\varkappa$ Wurzeln der U-V Gleichung gleich V_0 werden, die niedrigste alleinstehende Potenz von $U - U_0$ sei die $\varkappa_1^{\text{te}}$, d. h. es mögen für $V = V_0$ $\varkappa_1$ Wurzeln der V-U Gleichung gleich U_0 werden, ferner sei λ der grösste gemeinsame Theiler von $\varkappa$ und $\varkappa_1$ und zwar:

$$\lambda\mu = \varkappa, \quad \lambda\nu = \varkappa_1,$$

so ergeben sich die gesuchten Wurzelentwickelungen in der Form:

$$V_{r\mu+s} - V_0 = c_{r\mu} e^{\frac{2s\nu i\pi}{\mu}} (U - U_0)^{\frac{\nu}{\mu}} + d_{r\mu} e^{\frac{2s(\nu+1)i\pi}{\mu}} (U - U_0)^{\frac{\nu+1}{\mu}} + \cdots,$$
$$r = 0, 1 \cdots \lambda - 1; \quad s = 1, 2, \cdots \mu,$$

wobei die Grössen $(c_{r\mu})^{\mu}_{r=0\ldots\lambda-1}$ sämmtlich von einander verschieden sind. —

Nun haben wir aber gesehen, dass an allen Stellen, an welchen sowohl U_0 wie V_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden sind, der Ausdruck:

$$\left(\frac{dV}{dU}\right)$$

einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat. Daraus folgt, dass für alle diese Stellen $\mu = \nu = 1$ ist, d. h. in diesen Punkten $U = U_0$ hängen die entsprechenden Blätter der Riemann'schen Fläche von V gar nicht zusammen.

Wir sahen ferner, dass, wenn $U_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$, dagegen V_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden war, der Ausdruck $\left(\frac{dV}{dU}\right)$ unendlich gross wurde, doch so, dass

$$\lim \left[(u_1^8 - u^8)\,\frac{dV}{dU}\right] = \text{endl. von Null verschied. Grösse ist.}$$

Nun ist allgemein:

$$\frac{u_1^8 - u^8}{\left(U^8 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1 - 2u^8}{\left(u^8(1-u^8) - \frac{1}{4}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1 - 2u^8}{(-1)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2p}{q}} \left(1 - 2u^8\right)^{\frac{2p}{q}}}$$
$$= \frac{(1 - 2u^8)^{1 - \frac{2p}{q}}}{(-1)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2p}{q}}}.$$

Daher wird:

$$\lim \left[\frac{u_1^8 - u^8}{\left(U^8 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{p}{q}}}\right]_{u^8 = \frac{1}{2}}$$

dann und nur dann einen endlichen von Null verschiedenen Werth annehmen, wenn $\frac{2p}{q} = 1$ ist. Dasselbe findet also für:

$$\lim \left[\frac{u_1^8 - u^8}{\left(U - \sqrt[8]{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{p}{q}}} \right]_{u^8 = \frac{1}{2}}$$

statt.

Wenden wir dieses Resultat auf unseren Fall an, so zeigt sich, dass wenn $U_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$, dagegen V_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden ist, $\frac{\nu}{\mu} = \frac{1}{2}$ oder $\nu = 1$, $\mu = 2$ wird.

In dem Punkte $U_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ hängen also die entsprechenden Blätter der Riemann'schen Fläche zu je zwei zusammen, ausser etwa, es entspräche einem derselben der Werth $V_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$.

In ähnlicher Weise zeigt sich, dass, wenn U_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden, dagegen V_0 gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ wird, $\nu = 2$, $\mu = 1$ zu setzen ist, so dass in diesen Punkten die entsprechenden Blätter der Riemann'schen Fläche nicht an einander geheftet sind, und ebendasselbe Resultat ergiebt sich, wenn U_0 wie V_0 gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ wird, indem diesem Falle $\nu = 1$, $\mu = 1$ entspricht.

Für den Punkt $U = 0$ sind die Cyklen schon gebildet, es bliebe nur der Punkt $U = \infty$ zu betrachten übrig, doch kann derselbe ausser Acht gelassen werden, da durch Herstellung der Cyklen in allen andern Punkten die Aufgabe für den Unendlichkeitspunkt zu gleicher Zeit gelöst ist.

Wie wir sehen, ergiebt sich das merkwürdige Resultat, dass die Riemann'sche Fläche der algebraischen Function V aus $(a_0 + 1)(a_1 + 1) \cdots$ Blättern besteht — $n = a_0 a_1 \cdots$ —, welche nur in den Punkten $U = 0$, $U = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$, $U = \infty$ an einander geheftet sind und hier in einer für alle Transformationsgrade bestimmten Weise*). —

Nachdem dieses festgestellt ist, gehen wir zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück und untersuchen zunächst, welches die nothwendigen Bedingungen dafür sind, dass U oder V gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ wird.

---

*) Aehnlich ergiebt sich bei den Modulargleichungen: Die Riemann'sche Fläche von v, welches sich aus zu dem Transformationsgrade n gehörender Modulargleichung als algebraische Function von u ergiebt, besteht aus $(a_0 + 1)(a_1 + 1) \cdots$ Blättern, welche nur in den Punkten $u = 0$, $u = \sqrt[8]{1}$, $u = \infty$ zusammenhängen.

Zu $U^8 = \frac{1}{4}$ gehört $\tau = i$ und alle diejenigen Grössen, welche aus $\tau = i$ durch eine lineare Substitution des ersten oder zweiten Falles abgeleitet sind, so dass dieser Werth von U nur aus Classen erhalten werden kann, deren Repräsentanten Formen:

$$d\tau^2 + d = 0$$

sind.

Der Fall $V^8 = \frac{1}{4}$ kann jedenfalls auch nur bei Formen eintreten, deren Determinante gleich $-d^2$ ist, da ja, wenn τ einer Gleichung:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

genügt, zwei zugehörige Werthe $\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}$ und $\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}$ einer Gleichung mit derselben Determinante genügen, z. B. $\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \tau_1$ der Gleichung:

$$\frac{P}{\delta}\delta_1\tau_1^2 + 2\left[\frac{P}{\delta}16\xi_1 + Q\right]\tau_1 + \frac{\frac{P}{\delta}16^2\xi_1^2 + 2Q16\xi_1 + \delta R}{\delta_1} = 0.$$

Die nothwendigen Bedingungen dafür, dass hieraus sich $\chi(\tau_1)^8 = V^8 = \frac{1}{4}$ ergiebt, sind, dass:

$$\frac{P}{\delta}\delta_1 = dP_1,$$

$$\frac{P}{\delta}16\xi_1 + Q = dQ_1,$$

$$\frac{P}{\delta}16^2\xi_1^2 + 2Q16\xi_1 + \delta R = d\delta_1 R_1$$

gesetzt werden kann. Mag nun d mit n den grössten gemeinsamen Theiler d' haben und $\frac{d}{d'} = d^{(2)}$ sein, so müssen zur Erfüllung der obigen Bedingungen P, Q, R nothwendig durch $d^{(2)}$ theilbar sein. Wir schliessen alle Classen, die Formen dieser Art enthalten, vorläufig von der Betrachtung aus.

Mögen unter Ausschluss dieser Classen sich unter den zu n gehörenden Determinanten eine beliebige Anzahl von den Formen:

$$-d_1^2\Delta_1, \quad -d_2^2\Delta_1, \quad -d_3^2\Delta_1, \ \cdots$$

ergeben, wo Δ_1 kein volles Quadrat mehr enthält, so werden zu diesen Determinanten eine Reihe von repräsentirenden Formen gehören:

$$g_1 P\tau^2 + 2g_1 Q\tau + g_1 R = 0,$$
$$g_2 P\tau^2 + 2g_2 Q\tau + g_2 R = 0,$$
$$g_3 P\tau^2 + 2g_3 Q\tau + g_3 R = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Zunächst ist klar, dass sich nicht aus zweien dieser Formen zu gleicher Zeit ergeben kann:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right),$$

da sonst die Gleichung:

$$\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \frac{b_0 - a_0\dfrac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}}{a_1\dfrac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} - b_1}$$

auf eine der obigen Formen führen müsste, was nur bei den vorläufig ausgeschlossenen Determinanten möglich wäre.

Nennen wir daher $m_1, m_2, m_3 \cdots$ die zu den einzelnen Formen gehörenden Werthe von m, so giebt

$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = \Sigma m$$

die Anzahl der für $U_0 = \chi(\tau)$ einander gleich werdenden verschiedenen Wurzelpaare an.

Es soll bewiesen werden, dass $U_0 = \chi(\tau)$ eine $2\Sigma m$-fache Wurzel der Discriminante ist.

Der Beweis ist in einem Falle unmittelbar geliefert, wenn nämlich nie mehr als zwei Wurzeln einander gleich werden. Dann ergeben sich vermöge der vorhin gefundenen Resultate Σm Entwickelungen der Form:

$$\begin{aligned} V_{2s-1} - V_0^{(s)} &= c_{2s-2}(U - U_0) + d_{2s-2}(U - U_0)^2 + \cdots, \\ V_{2s} - V_0^{(s)} &= c_{2s-1}(U - U_0) + d_{2s-1}(U - U_0)^2 + \cdots, \\ s &= 1 \cdots \Sigma m, \end{aligned}$$

wo die Grössen $V_0^{(s)}$ die verschiedenen Werthe der Σm gleichen Wurzelpaare bezeichnen und c_{2s-2} von c_{2s-1} verschieden ist. Setzen wir diese Entwickelungen in die Discriminante ein, so ergiebt sich in der That das obige Resultat.

Aber der Satz bleibt allgemein richtig. Mögen für $U_0 = \chi(\tau)$ im Ganzen k Wurzeln $V_1, V_2, \cdots V_k$ gleich V_0 werden, so entsprechen diesen k gleichen Wurzeln im Ganzen $\frac{k(k-1)}{2}$ gleiche Wurzelpaare. Es wird daher U_0 in $2\Sigma m$ insofern für dasselbe k Wurzeln gleich V_0 werden, $k(k-1)$ mal gezählt. Dasselbe Resultat ergeben aber die Wurzelentwickelungen, die in diesem Falle lauten:

$$\begin{aligned} V_1 - V_0 &= c_0 \quad (U - U_0) + d_0 \quad (U - U_0)^2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_k - V_0 &= c_{k-1}(U - U_0) + d_{k-1}(U - U_0)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Sehen wir davon ab, dass die aufgestellten Gleichungen stets denselben Werth von τ ergeben, so können wir den Satz auch so aussprechen:

Eine jede Function $\chi(\tau)$, die zu einer Gleichung der betrachteten Art:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

gehört, ist eine $2m$-fache Wurzel der Discriminante. —

Wir kommen zu den ausgeschlossenen Fällen. Dieselben beziehen sich auf gewisse Classen der Determinanten von der Form $-d^2$.

Eine solche Determinante tritt bei einem jeden Transformationsgrad auf, da sich aus $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta)$ stets $\Delta = -n^2$ ergiebt.

Ist aber n oder einer seiner Theiler von der Form: $16\alpha^2 + \beta^2$, so ergeben sich überdies aus $\Delta = (7n - 8\delta)(9n - 8\delta)$ und $\Delta = -2\delta(n - 8\delta)$ eine gleiche Anzahl ungerader und gerader Determinanten der genannten Art. Wir bezeichnen die ersteren mit $-D_1^2, -D_2^2, \cdots$ die letzteren mit $-d_1^2, -d_2^2, \cdots$, so zwar, dass D_α und d_α mit n denselben grössten gemeinsamen Theiler haben. Eine leichte Betrachtung zeigt, dass diese Zuordnung stets möglich ist.

Wir betrachten die Classen, deren Repräsentanten die Formen sind:

$$\begin{array}{ll} n\tau^2 + n = 0, & \\ D_1\tau^2 + D_1 = 0, & d_1\tau^2 + d_1 = 0, \\ D_2\tau^2 + D_2 = 0, & d_2\tau^2 + d_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Die zugehörigen Werthe von m bezeichnen wir mit $m, M_1, M_2, \cdots, m_1, m_2, \cdots$. Es fragt sich zunächst, ob und wann zwei dieser Gleichungen dasselbe gleiche Wurzelpaar:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)$$

ergeben können. Offenbar muss dann sowohl

$$\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \frac{b_0 - a_0\dfrac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}}{a_1\dfrac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} - b_1}$$

wie

$$\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} = \frac{b_0' - a_0'\dfrac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}}{a_1'\dfrac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1'}$$

werden, während zu gleicher Zeit ξ_1 und ξ_2 der Congruenz genügen:

$$16^2\xi^2 \equiv -1 \bmod n.$$

Dann ist aber:

$$\left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\chi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right) = V_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}},$$

da $\delta = u = 1$; ferner:

$$\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \tau_1$$

der Gleichung genügt:

$$n^2\tau_1^2 + 2n16\xi_1\tau_1 + 16^2\xi_1^2 + 1 = 0$$

und $16^2\xi_1^2 + 1$ durch n theilbar ist.

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass, wenn eine der aufgestellten Formen ein gleiches Wurzelpaar liefert, welches gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ ist, eine und nur eine der übrigen Formen dasselbe gleiche Wurzelpaar ergiebt.

Nennen wir daher λ die Zahl der Wurzelpaare, welche den Werth $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ annehmen, so ist die Zahl der von einander verschiedenen gleichen Wurzelpaare vermöge der früheren Betrachtungen gleich:

$$\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2} + M_1 + M_2 + \cdots + m_1 + m_2 + \cdots - \lambda.$$

Ist V_0 von $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ verschieden, so schreiten die Wurzelentwickelungen nach Potenzen von $(U - U_0)^{\frac{1}{2}}$ fort, ist V_0 gleich $\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$, so schreiten sie nach Potenzen von $(U - U_0)$ fort; daraus folgt vermittelst einer einfachen Ueberlegung, dass die zu den obigen Formen gehörende Function $\chi(\tau) = U_0 = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ eine

$$\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2} + M_1 + M_2 + \cdots + m_1 + m_2 + \cdots,$$

oder:

$$\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2} + 2\,(m_1 + m_2 + \cdots)$$

-fache Wurzel der Discriminante ist.

Sehen wir davon ab, dass diese Gleichungen denselben Werth von $\chi(\tau)$ ergeben, so können wir das Resultat auch so aussprechen: Beim Abzählen der Wurzeln hat man die ungeraden von $-n^2$ verschiedenen Determinanten einfach fortzulassen. Die zu der Gleichung:

$$n\tau^2 + n = 0$$

gehörende Function $\chi(\tau)$ ist dann eine $\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2}$-fache Wurzel der Discriminante, eine jede zu einer anderen Gleichung:

$$d\tau^2 + d = 0$$

gehörende Function $\chi(\tau)$ dagegen eine $2m$-fache Wurzel der Discriminante. —

In ähnlicher Weise ist der allgemeinere Fall zu behandeln. Wir fassen die Resultate, die sich für denselben ergeben, mit den früheren zusammen in folgenden

Lehrsatz.

Bei der Untersuchung, wievielfach eine jede Wurzel der Discriminante ist, hat man diejenigen Classen der ungeraden von $-n^2$ *ver-*

schiedenen Determinanten einfach fortzulassen, deren Repräsentanten die Formen:

$$D\tau^2 + D = 0$$

sind. Alsdann ist:

1) *die zu der Form:* $n\tau^2 + n = 0$ *gehörende Function* $\chi(\tau) = \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ *eine* $\frac{m - \varepsilon \cdot 2^r}{2}$*-fache Wurzel der Discriminante.*

2) *ist die zu einer Form:* $P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$ *gehörende Function* $\chi(\tau)$ *eine* $m - \varepsilon \cdot 2^r$*-fache Wurzel der Discriminante, wenn* $Q^2 - PR = -n^2$ *ist und die Form selbst sich nicht in der durch* $n\tau^2 + n = 0$ *repräsentirten Classe befindet.*

3) *ist die zu einer jeden anderen Form:* $P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$ *gehörende Function* $\chi(\tau)$ *eine* $2m$*-fache Wurzel der Discriminante.*

Die Bedeutung der Grössen m, ε, r ist früher gegeben worden, ferner ist natürlich vorausgesetzt, dass die Coefficienten der Formen den früher aufgestellten Bedingungen sämmtlich Genüge leisten. — Hiermit sind die am Anfange erwähnten Aufgaben vollkommen gelöst und es wird sich nur noch darum handeln, die gefundenen Resultate an einigen Beispielen zu erläutern.

Bezeichnen wir mit $(P, Q, R)_1$ die Form

$$(P,\ Q - P,\ P - 2Q + R) = (P,\ Q,\ R)_1,$$

mit $(P, Q, R)_2$ die Form

$$(P - 2Q + R,\ Q - R,\ R) = (P,\ Q,\ R)_2,$$

und nehmen an, dass (P, Q, R) selbst eine reducirte ist, so kann als Repräsentant einer jeden Classe stets eine der drei Formen (P, Q, R), $(P, Q, R)_1$, $(P, Q, R)_2$ genommen werden, wie es in der Folge geschehen soll.

Wir können ferner vermöge der gefundenen Resultate die Discriminante schreiben:

$$D = U^N (a_0 + a_1 U^8 + \cdots + a_\nu U^{8\nu})^2,$$

wobei:

$$N = nS'(n) - S(n) + 2\Delta(n)$$

und

$$8\nu = S(n)(S(n) - 1) - N$$

ist.

Andererseits aber haben wir Methoden angegeben, wie alle von einander verschiedenen Wurzeln der Discriminante gefunden werden können und Criterien erhalten, vermöge deren festgestellt werden kann, wie vielfach eine jede Wurzel ist. Es muss sich hierbei in Bezug auf den Grad der Discriminante dasselbe Resultat wie vorher ergeben, was an den Beispielen der Transformationszahlen bis 30 nachgewiesen werden soll. —

Sei jetzt $n = 3$, $\nu = 1$.

Es ergiebt sich lediglich die Determinante $\Delta = -9$ und als einzige Form: $(3, 0, 3)$ mithin wird die Discriminante

$$D = U^4 (1 - 4 U^8)^2,$$

$$n = 5, \quad \nu = 3.$$

Es ergeben sich die Determinanten $\Delta = -6$ und $\Delta = -25$ mit den Formen:

$$(1, 0, 6)_1, \quad (2, 0, 3)_2, \quad (5, 0, 5),$$

mithin wird die Discriminante

$$D = U^6 (1 - 4 U^8)^2 (1 + 2^3 \cdot 17 U^8 + 2^4 U^{16})^2\text{*)},$$

$$n = 7, \quad \nu = 6.$$

Es ergeben sich die Determinanten $\Delta = -3$, $\Delta = -6$, $\Delta = -49$ mit den Formen:

$$(1, 0, 3), \quad (2, 1, 2), \quad (1, 0, 6)_1, \quad (2, 0, 3)_2, \quad (7, 0, 7),$$

mithin wird die Discriminante:

$$D = U^8 (1 - 4 U^8)^4 (1 - U^8)^2 (1 - 16 U^8)^2 (1 + 2^3 \cdot 17 U^8 + 2^4 U^{16})^2.$$

In diesen drei Discriminanten ist von etwaigen numerischen Factoren abgesehen.

Die Resultate für die andern Transformationszahlen sind in der folgenden Tabelle enthalten. In derselben ist gesetzt:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

wobei ν_1 den Theil von ν bezeichnet, welcher von den ungeraden Determinanten herrührt, ν_2 denjenigen, welcher von den geraden herrührt.

n	Ungerade Determinanten	Gerade Determinanten	ν
11	$-\Delta = 7$ $(1, 0, 7)\ (2, 1, 4)_2$. $-\Delta = 57$ $(1, 0, 57)\ \ (3, 0, 19)\ \ (2, 1, 29)_2$ $(6, 3, 11)_2$. $-\Delta = 121$ $(11, 0, 11)$. $\nu_1 = 9$.	$-\Delta = 6$ (s. $n = 5$). $-\Delta = 30$ $(1, 0, 30)_1\ (2, 0, 15)_2\ (3, 0, 10)_1$ $(5, 0, 6)_1$. $\nu_2 = 6$.	15

*) Der Ausdruck für diese Discriminante ist schon von Joubert aufgestellt worden. Comptes rendus, tome XLVIII, pag. 293.

n	Ungerade Determinanten	Gerade Determinanten	ν
13	$-\Delta = 3$ $(1, 0, 3)$ $(2, 1, 2)$. $-\Delta = 105$ $(1, 0, 105)$ $(3, 0, 35)$ $(5, 0, 21)$ $(7, 0, 15)$ $(2, 1, 53)_2$ $(6, 3, 19)_2$ $(11, 4, 11)$ $(10, 5, 13)_2$. $-\Delta = 169$ $(13, 0, 13)$. $\nu_1 = 13$.	$-\Delta = 10$. $(1, 0)$ $10)_1$ $(2, 0, 5)_2$. $-\Delta = 30$ (s. $n = 11$). $-\Delta = 22$ $(1, 0, 22)_1$ $(2, 0, 11)_2$. $\nu_2 = 8$.	21
15	$-\Delta = 11$ $(1, 0, 11)$ $(2, 1, 6)$ $(3, \pm 1, 4)_1$. $-\Delta = 161$ $(1, 0, 161)$ $(7, 0, 23)$ $(2, 1, 81)_2$ $(3, \pm 1, 54)_1$ $(6, \pm 1, 27)_2$ $(9, \pm 1, 18)_1$ $(5, \pm 2, 33)$ $(11, \pm 2, 15)$ $(10, \pm 3, 17)_2$ $(14, 7, 15)_2$. $-\Delta = 225$ $(3, 0, 75)$ $(5, 0, 45)$ $(15, 0, 15)$ $(6, 3, 39)_2$ $(10, 5, 25)_2$. $\nu_1 = 36$.	$-\Delta = 14$ $(1, 0, 14)_1$ $(2, 0, 7)_2$ $(3, \pm 1, 5)$. $-\Delta = 14$ (s. vorher). $-\Delta = 54$ $(1, 0, 54)_1$ $(2, 0, 27)_2$ $(3, 0, 18)_1$ $(6, 0, 9)_2$ $(5, \pm 1, 11)$ $(7, \pm 3, 9)$. $\nu_2 = 22$.	58
17	$-\Delta = 15$ $(1, 0, 15)$ $(3, 0, 5)$ $(2, 1, 8)_2$ $(4, 1, 4)$. $-\Delta = 33$ $(1, 0, 33)$ $(3, 0, 11)$ $(2, 1, 17)_2$ $(6, 3, 7)_2$. $-\Delta = 225$ $(1, 0, 225)$ $(3, 0, 75)$ $(5, 0, 45)$ $(9, 0, 25)$ $(2, 1, 113)_2$ $(6, 3, 39)_2$ $(9, \pm 3, 26)_1$ $(13, \pm 3, 18)_1$ $(10, 5, 25)_2$ $(17, 8, 17)$. $-\Delta = 289$ $(17, 0, 17)$. $\nu_1 = 24$.	$-\Delta = 18$ $(1, 0, 18)_1$ $(2, 0, 9)_2$ $(3, 0, 6)_1$. $-\Delta = 4$ $(2, 0, 2)$. $-\Delta = 70$ $(1, 0, 70)_1$ $(2, 0, 35)_2$ $(5, 0, 14)_1$ $(7, 0, 10)_1$. $-\Delta = 30$ (s. $n = 11$). $\nu_2 = 12$.	36

n	Ungerade Determinanten	Gerade Determinanten	ν
19	$-\Delta = 15$ (siehe $n=17$). $-\Delta = 105$ (s. $n=13$). $-\Delta = 297$ $(1, 0, 297)$ $(3, 0, 99)$ $(9, 0, 33)$ $(11, 0, 27)$ $(2, 1, 149)_2$ $(7, \pm 2, 43)$ $(6, 3, 51)_2$ $(9, \pm 3, 34)_1$ $(17, \pm 3, 18)_1$ $(14, \pm 5, 23)_2$ $(19, 8, 19)$ $(18, 9, 21)_2$. $-\Delta = 381$ $(19, 0, 19)$. $\nu_1 = 33$.	$-\Delta = 22$ (siehe $n = 13$). $-\Delta = 12$ $(2, 0, 6)$ $(4, 2, 4)$. $-\Delta = 70$ (siehe $n = 17$). $-\Delta = 78$ $(1, 0, 78)_1$ $(2, 0, 39)_2$ $(3, 0, 26)_1$ $(6, 0, 13)_2$. $\nu_2 = 12$.	45
21	$-\Delta = 27$ $(1, 0, 27)$ $(3, 0, 9)$ $(2, 1, 14)$ $(4, \pm 1, 7)_2$ $(6, 3, 6)$. $-\Delta = 185$ $(1, 0, 185)$ $(5, 0, 37)$ $(2, 1, 93)_2$ $(3, \pm 1, 62)_1$ $(6, \pm 1, 31)_2$ $(7, \pm 2, 27)$ $(9, \pm 2, 21)$ $(10, 5, 21)_2$ $(14, \pm 5, 15)_2$ $(13, \pm 6, 17)$. $-\Delta = 377$ $(1, 0, 377)$ $(13, 0, 29)$ $(2, 1, 189)_2$ $(3, \pm 1, 126)_1$ $(6, \pm 1, 63)_2$ $(7, \pm 1, 54)_1$ $(9, \pm 1, 42)_1$ $(14, \pm 1, 27)_2$ $(18, \pm 1, 21)_2$ $(21, 8, 21)$. $-\Delta = 441$ $(3, 0, 147)$ $(7, 0, 63)$ $(21, 0, 21)$ $(6, 3, 75)_2$ $(15, \pm 3, 30)_1$ $(14, 7, 35)_2$. $\nu_1 = 70$.	$-\Delta = 26$ $(1, 0, 26)_1$ $(2, 0, 13)_2$ $(3, \pm 1, 9)$ $(5, \pm 2, 6)_1$. $-\Delta = 20$ $(2, 0, 10)$ $(4, 2, 6)_2$. $-\Delta = 54$ (siehe $n = 15$). $-\Delta = 110$ $(1, 0, 110)_1$ $(2, 0, 55)_2$ $(5, 0, 22)_1$ $(10, 0, 11)_2$ $(3, \pm 1, 37)$ $(6, \pm 2, 19)_2$ $(7, \pm 3, 17)$ $(9, \pm 4, 14)_1$. $-\Delta = 38$ $(1, 0, 38)_1$ $(2, 0, 19)_2$ $(3, \pm 1, 13)$ $(6, \pm 2, 7)_2$. $\nu_2 = 40$.	110
23	$-\Delta = 15$ (siehe $n=17$). $-\Delta = 19$ $(1, 0, 19)$ $(2, 1, 10)$ $(4, \pm 1, 5)_2$. $-\Delta = 273$ $(1, 0, 273)$ $(3, 0, 91)$ $(7, 0, 39)$ $(13, 0, 21)$ $(2, 1, 137)_2$ $(6, 3, 47)_2$ $(17, 4, 17)$ $(14, 7, 23)_2$.	$-\Delta = 30$ (siehe $n = 11$). $-\Delta = 28$ $(2, 0, 14)$ $(4, 2, 8)$. $-\Delta = 22$ (siehe $n = 13$).	66

n	Ungerade Determinanten	Gerade Determinanten	ν
23	$-\Delta = 465$ $(1, 0, 465)\ (3, 0, 155)\ (5, 0, 93)$ $(10, 0, 31)_2\ (2, 1, 233)_2\ (7, \pm 2, 67)$ $(6, 3, 79)_2\ (13, \pm 4, 37)\ (10, 5, 49)_2$ $(14, \pm 5, 35)_2\ (23, 8, 23)\ (21, \pm 9, 26)_1.$ $-\Delta = 529$ $(23, 0, 23).$ $\nu_1 = 40.$	$-\Delta = 126$ $(1, 0, 126)\ (2, 0, 63)_2\ (3, 0, 42)_1$ $(6, 0, 21)_2\ (7, 0, 18)_1\ (9, 0, 14)_1$ $(5, \pm 2, 26)_1\ (10, \pm 2, 13)_2$ $(9, \pm 3, 15).$ $-\Delta = 102$ $(1, 0, 102)_1\ (2, 0, 51)_2\ (3, 0, 34)_1$ $(6, 0, 17)_2.$ $\nu_2 = 26.$	66
29	$-\Delta = 7$ (siehe $n = 11$). $-\Delta = 51$ $(1, 0, 51)\ (3, 0, 17)\ (2, 1, 26)$ $(4, \pm 1, 13)_2\ (5, \pm 2, 11)\ (6, 3, 10).$ $-\Delta = 265$ $(1, 0, 265)\ (5, 0, 53)\ (2, 1, 133)_2$ $(7, \pm 1, 38)_1\ (14, \pm 1, 19)_2\ (10, 5, 29)_2.$ $-\Delta = 585$ $(1, 0, 585)\ (3, 0, 195)\ (5, 0, 117)$ $(9, 0, 65)\ (13, 0, 45)\ (15, 0, 39)$ $(2, 1, 293)_2\ (19, \pm 2, 31)\ (6, 3, 99)_2$ $(9, \pm 3, 66)_1\ (11, \pm 3, 54)_1\ (18, \pm 3, 33)_2$ $(22, \pm 3, 27)_2\ (10, 5, 61)\ (23, \pm 6, 27)$ $(18, 9, 37)_2\ (27, 12, 27)\ (26, 13, 29)_2.$ $-\Delta = 777$ $(1, 0, 777)\ (3, 0, 259)\ (7, 0, 111)$ $(21, 0, 37)\ (2, 1, 389)_2\ (11, \pm 2, 71)$ $(6, 3, 131)_2\ (13, \pm 4, 61)\ (14, 7, 59)_2$ $(29, 8, 29)\ (22, \pm 9, 39)_2\ (26, \pm 9, 33)_2.$ $-\Delta = 841$ $(29, 0, 29).$ $\nu_1 = 69.$	$-\Delta = 42$ $(1, 0, 42)_1\ (2, 0, 21)_2\ (3, 0, 14)_1$ $(6, 0, 7)_2.$ $-\Delta = 52$ $(2, 0, 26)\ (4, 2, 14)_2.$ $-\Delta = 30$ (siehe $n = 11$). $-\Delta = 78$ (siehe $n = 19$). $-\Delta = 198$ $(1, 0, 198)_1\ (2, 0, 99)_2\ (3, 0, 66)_1$ $(6, 0, 33)_2\ (9, 0, 22)_1\ (11, 0, 18)_1$ $(9, \pm 3, 23)\ (13, \pm 6, 18)_1.$ $-\Delta = 190$ $(1, 0, 190)_1\ (2, 0, 95)_2\ (5, 0, 38)_1$ $(10, 0, 19)_2.$ $-\Delta = 54$ (siehe $n = 15$). $\nu_2 = 36.$	105