Ueber die Discriminante.

Von

A. Brill in München.

In dieser Note beabsichtige ich, eine in der Geometrie gebräuchliche Untersuchungsmethode für die Theorie der Gleichungen zu verwerthen, um einige in der nachfolgenden Abhandlung öfter angewendete Sätze zu beweisen. Gegeben sei eine Gleichung mit einer Unbekannten und reellen Coefficienten, die nicht absolut constant, sondern von einer Anzahl von veränderlichen Parametern abhängig zu denken sind. Dann kann man den folgenden Satz aussprechen: Wenn die Discriminante dieser Gleichung bei stetiger Veränderung der Coefficienten den Werth Null passirt, indem sie ihr Vorzeichen *ändert*, so geht eine *ungerade* Anzahl von Wurzelpaaren der Gleichung aus dem Reellen in das Imaginäre über (oder umgekehrt); *ändert* die Discriminante aber, indem sie durch Null geht, ihre Vorzeichen *nicht*, so ändert sich die Zahl der complexen Wurzelpaare um eine *gerade* Anzahl oder überhaupt nicht. Lässt sich also beispielsweise aus der Discriminante ein in jenen Parametern rationaler Factor *doppelt* ausscheiden, so wird allemal, wenn dieser den Werth Null passirt, sich die Anzahl der reellen Wurzeln entweder überhaupt nicht, oder um ein Vielfaches von 4 ändern.

Der Satz ist eine unmittelbare Folge des nachstehenden:

Das Vorzeichen der Discriminante einer Gleichung — lauter verschiedene Wurzeln vorausgesetzt — ist negativ, wenn die Anzahl der complexen Wurzelpaare eine ungerade ist, positiv, wenn diese Zahl gerade ist.

Die Discriminante kann man hierbei durch das Quadrat der Wurzeldifferenzen, das von ihr sich um eine positive Constante unterscheidet, ersetzen. Wir betrachten das Quadrat des Differenzenproducts Δ_n von n reellen bez. paarweise conjugirt imaginären Grössen:

$$x_1\ x_2\ x_3 \cdot \cdot \cdot \cdot x_n,$$

und nehmen an, das Product:

$$\Delta_n^2 = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \cdot \cdot \cdot \cdot (x_{n-1} - x_n)^2$$

habe einen positiven oder negativen Werth, je nachdem die Zahl der conjugirt imaginären Grössenpaare x eine gerade oder ungerade ist. Dann bleibt die Behauptung noch richtig, wenn man zu den vorhandenen n Grössen eine weitere reelle Grösse x_{n+1} hinzunimmt, wodurch zu Δ_n^2 der positive Factor:

$$(x_{n+1}-x_1)^2\,(x_{n+1}-x_2)^2\cdots(x_{n+1}-x_n)^2$$

hinzutritt; ebenso bei Hinzunahme von beliebig vielen reellen Grössen. Nimmt man aber zu jenen n Grössen 2 conjugirt imaginäre x_{n+1}, x_{n+2} hinzu, so erhält Δ_n^2 den Factor:

$$\begin{aligned}&(x_{n+1}-x_1)^2\,(x_{n+1}-x_2)^2\cdots(x_{n+1}-x_n)^2\cdot\\ \cdot\,&(x_{n+2}-x_1)^2\,(x_{n+2}-x_2)^2\cdots(x_{n+2}-x_n)^2\cdot\\ \cdot\,&(x_{n+2}-x_{n+1})^2,\end{aligned}$$

der wegen des letzten Klammerfactors eine negative Grösse ist. Der Satz ist also für $n+1$ und $n+2$ richtig, wenn er es für n ist. Für $n=2$ und $n=3$ ist die Giltigkeit aber evident, und was so für das Quadrat des Differenzenproducts bewiesen ist, gilt unmittelbar von der Discriminante selbst.

Bei Gleichungen, die der Analysis oder der Geometrie entstammen, kommt es vor, dass die Discriminante, als Function der Parameter, von welchen die Coefficienten abhängen, aufgefasst, in rationale Factoren zerfällt. Um den Zusammenhang zwischen dem Grade der Vielfachheit, in welchem ein solcher Factor in der Discriminante vorkommt, und der Anzahl der durch das Verschwinden derselben herbeigeführten Wurzelübergänge zu finden, ermittle man zunächst die entstehenden Doppel- oder vielfachen Wurzeln, und bestimme aus einer Variation, die man den Parametern zugleich mit den Variabeln ertheilt, die Zuwächse der letzteren als Function der ersteren.

Sei ξ die Doppelwurzel, so berechnet sich die Variation ε von ξ aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}&\delta f+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}\cdot\varepsilon^2+2\cdot\frac{\partial\,\delta f}{\partial\xi}\cdot\varepsilon+\delta^2 f\right)\\ &\quad+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial\xi^3}\cdot\varepsilon^3+3\cdot\frac{\partial^2\delta f}{\partial\xi^2}\cdot\varepsilon^2+3\cdot\frac{\partial\,\delta^2 f}{\partial\xi}\cdot\varepsilon+\delta^3 f\right)+\cdots=0,\end{aligned}$$

wo unter δf die erste, $\delta^2 f$ die zweite etc. Variation von f hinsichtlich der darin auftretenden Parameter zu verstehen ist und für x überall ξ, für die Parameter diejenigen Werthe angenommen sind, für die ξ eine Doppelwurzel wird. Aber indem man über das Verhalten der Variationen der Parameter beim Durchgang durch Null passend verfügt, kann man in der nächsten Nähe der Verschwindungswerthe alle Variationen einer unter ihnen proportional setzen, die dann als linearer Factor von δf, als quadratischer von $\delta^2 f$ etc. auftritt, so dass man hat:

$$\eta f_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\cdot \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cdot\eta\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \eta^2\cdot f_2\right)$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}\cdot\varepsilon^3 + 3\cdot\varepsilon^2\eta\cdot\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + 3\varepsilon\eta^2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \eta^3\cdot f_3\right) + \cdots = 0.$$

Nimmt man nun η und damit ε sehr klein an, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$\eta f_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\cdot\varepsilon^2 = 0$$

sofern nicht einer dieser Terme einzeln für sich verschwindet.

Im anderen Falle muss man zu höheren Potenzen von ε bez. η fortschreiten und durch die bekannten (Puiseux'schen) Regeln die beizubehaltenden Terme bestimmen. Ebenso nun, wie in der Nähe des Verschwindungswerthes der Grösse η die Gleichung für ε, von welchem Grade sie auch immer sein mag, diejenige für x ersetzen kann, *so vertritt in der Nähe des Verschwindungswerthes der Variationen der Parameter die Discriminante der Gleichung für ε diejenige der Gleichung für x,* indem die erstere das Quadrat des Differenzenproducts der einander gleich werdenden Wurzeln und somit, bis auf einen constanten Factor, den verschwindenden Theil der Discriminante der Gleichung für x darstellt.

Aus dieser Bemerkung lässt sich aber die Vielfachheit desjenigen Factors der Discriminante der Gleichung für x bestimmen, dessen Verschwinden die Wurzel ξ zur Doppel- oder vielfachen Wurzel macht. Diese Zahl ist offenbar *gleich dem Grade der Discriminante der Gleichung für ε in Bezug auf η*, oder wenn zugleich mit ξ auch noch andere davon und untereinander verschiedene Wurzeln ξ', ξ'', $\cdots$ mehrfache Wurzeln werden, gleich dem Product der Grade der Discriminanten der entsprechenden Gleichungen.

Beispiele zu diesem Satz findet man bei Plücker, algebraische Curven (2. Abschnitt) und bei Zeuthen, der von ähnlichen Ueberlegungen geleitet eine auf zusammenfallende Lösungen bezügliche Modification des Chasles'schen Correspondenzprincips angab (Almindelige Egenskaber, Acad. Kopenhagen Ser. V, Vol. 10, § 26.) sowie in der nachfolgenden Abhandlung § 6., 7.