Ueber rationale Curven vierter Ordnung.

Von

A. Brill in München.

(Mit zwei lithographirten Tafeln.)

Die eleganten Eigenschaften einzelner rationaler Curven 4. Ordnung und ihr Vorkommen in Problemen der angewandten Mathematik hat die Geometer seit Langem und wiederholt zu Untersuchungen veranlasst, die interessante Details hinsichtlich der Gestalt und Erzeugungsweise dieser Curven zu Tage förderten. Viele jener Eigenschaften erscheinen aber bei näherer Betrachtung als Ausdruck bekannter Sätze der projectivischen Geometrie. Der Zweck des Nachfolgenden ist, eine zusammenfassende, auch die speciellen Fälle nicht ausschliessende Darstellung der projectivischen Eigenschaften der Curven 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten und ihrer gestaltlichen Formen zu geben, in welche sich die bekannteren bequem einreihen lassen. Es liegt nahe, hierbei auf gewisse Fragen einzugehen, die für die Curven 4. Ordnung ohne Doppelpunkt noch unbeantwortet, für die rationalen Curven aber wegen der Einfachheit ihrer Gleichung eben noch discutirbar sind. Ich habe namentlich die Eigenschaften der Wendepunkte und deren gegenseitige Lage im Auge, sowie den engen Zusammenhang derselben mit den Doppeltangenten, wie er nach den Untersuchungen von Zeuthen*) über Systeme von Curven 4. Ordnung und dessen Sätzen über die Realitätsverhältnisse der Doppeltangenten und Wendepunkte, die Klein auf Curven n. Ordnung ausgedehnt hat, bestehen muss.

Die Doppeltangenten der rationalen Curven 4. Ordnung hat Salmon**) durch eine geschickte Umformung der Gleichung dieser Curven dargestellt; zur Untersuchung der Wendepunkte muss man jedoch einen anderen Weg einschlagen. Ich gehe von der Darstellung der Coordinaten der Curve durch einen Parameter aus, was die Entwickelung

---

*) Zeuthen, Almindelige Egenskaber etc. (s. vorige Note), ferner: Sur les courbes du 4. ordre. Diese Annalen Bd. VII. — Klein, Eine neue Relation zwischen den Singularitäten etc., ibid. Bd. X.

**) Salmon, höhere Curven, herausg. von Fiedler, Art. 284 ff.

an die Bildungen eines simultanen Systems von 3 quadratischen Factoren zu knüpfen gestattet, und bilde in diesen die Gleichungen 6. und 8. Grades für die Parameter bez. der Wendepunkte und Doppeltangenten. Die erstere erweist sich als im Allgemeinen auf Gleichungen niederen Grades nicht zurückführbar; dies bestätigt die auch sonst sich ergebende Bemerkung, dass die Eigenschaften der Wendepunkte tiefer liegen als die der Doppeltangenten. Die 6 Wendepunkte zeigen ein den 3 Wendepunkten einer rationalen Curve 3. Ordnung, die auf einer Geraden liegen, analoges Verhalten: sie liegen auf einem Kegelschnitt, der die Curve in noch 2 Punkten von übrigens nicht weiter bemerkenswerthen Eigenschaften schneidet. Namentlich geht derselbe im Allgemeinen nicht durch einen Doppelpunkt der Curve, woraus man denn ersieht, dass beim Uebergang von einer rationalen zu einer Curve 4. Ordnung ohne Doppelpunkte dieser Kegelschnitt nicht in einen solchen durch 8 Wendepunkte übergehen kann.

Ein merkwürdiges Verhalten zeigen die Discriminanten der erwähnten Doppeltangenten- und Wendepunkts-Gleichungen; sie zerfallen nämlich (s. den vorstehenden Aufsatz) in Factoren, die in den Coefficienten der betreffenden Gleichung rational sind. Bei der Bedeutung derselben für die Curve erschien es zweckmässig, ihnen besondere Namen beizulegen; ich nenne z. B. „Undulationsfactor“ den Factor, der durch sein Verschwinden das Auftreten einer Undulationstangente anzeigt. Diese Factoren nun sind alle bis auf einen den Discriminanten der Wendepunkts- und der Doppeltangentengleichung, zum Theil in verschiedener Vielfachheit, gemeinsam, und in dieser Erscheinung finde ich den algebraischen Erklärungsgrund für die von Zeuthen und Klein bemerkten Beziehungen zwischen den reellen Wendepunkten und den isolirten Doppeltangenten, wonach die Zahl der Ersteren zwar von den isolirten, nicht aber von den etwa vorhandenen imaginären Doppeltangenten abhängt. Wenn nämlich ein solcher Factor, wie z. B. der „Undulationsfactor“, einfacher Factor in beiden Discriminanten ist, so verschwinden, nach dem in vorstehender Note aufgestellten Satz, gleichzeitig mit zwei reellen Wendepunkten auch zwei reelle Berührungspunkte einer Doppeltangente, sie wird zur isolirten Doppeltangente; wenn aber andererseits z. B. der „Cuspidalfactor“, dessen Verschwinden nämlich das Auftreten eines Rückkehrpunktes anzeigt, in der Discriminante der Wendepunktsgleichung einfach, in der der Doppeltangentengleichung doppelt auftritt, so erkennt man daraus, dass beim Durchgang durch den Verschwindungswerth die Zahl der reellen Wendepunkte um 2, die der Berührungspunkte der Doppeltangenten entweder um 4 oder überhaupt nicht ab- oder zunimmt, d. h. die Zahl der Doppeltangenten mit reellen Berührungspunkten ändert sich entweder überhaupt nicht, oder es werden 2 conjugirt imaginär.

Man findet zum Schluss eine vollständige Aufzählung der verschiedenen Curvenformen, auf welche sich unsere Darstellung bezieht. Von allen rationalen Curven 4. Ordnung ist die Curve mit dreifachem Punkt die einzige, auf die unsere Untersuchungen keine unmittelbare Anwendung haben, weil diese Curve nicht, wie alle anderen, selbst die Grenzfälle nicht ausgenommen, durch quadratische Transformation aus einem Kegelschnitt erhalten werden kann.

§ 1.

Die Gleichungen für die Singularitäten einer rationalen Curve.

Wenn die Coordinaten einer Curve rational durch einen Parameter darstellbar sind, so lassen sich die homogenen (Dreiecks-)Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ ganzen Functionen $F_i(\lambda)$, $(i = 1, 2, 3)$ desselben proportional setzen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho \cdot x_1 = F_1(\lambda) \\ \varrho \cdot x_2 = F_2(\lambda) \\ \varrho \cdot x_3 = F_3(\lambda), \end{cases}$$

wo von den Functionen $F_i(\lambda)$ mindestens eine den n. Grad erreicht, wenn die Curve von der n. Ordnung ist.

Es mögen zunächst die Gleichungen für die Singularitäten wie Wendungen, Doppelpunkte, Doppeltangenten in einer Form aufgestellt werden, welche eine bequeme Berechnung der Coefficienten dieser Gleichungen ermöglicht und darum für nicht zu hohe Werthe von n vor der üblichen Darstellung den Vorzug zu verdienen scheint. Ich beschränke mich der Einfachheit halber auf Curven 4. Ordnung:

$$F_i(\lambda) = a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i + \lambda^3 d_i + \lambda^4 e_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo die $a, b, c, \cdots$ constante (reelle oder imaginäre) Grössen sind, und beginne mit der Aufstellung der Beziehung zwischen den Parametern $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ von 3 auf einer geraden Linie:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

liegenden Punkten der Curve. Ist λ_4 der dem 4. Schnittpunkt zugehörige Parameter, so erhält man, nach Substitution der $F_i(\lambda)$ in die Gleichung der Geraden, die symmetrischen Functionen der Wurzeln dieser Gleichung ausgedrückt durch:

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \sigma \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = -\sigma \cdot \lambda_4 (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) - \sigma \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 = \sigma \cdot \lambda_4 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \sigma (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2), \\ \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 = -\sigma \cdot \lambda_4 \cdot 1 - \sigma (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \sigma \cdot 1, \end{cases}$$

wo σ ein constanter Factor ist. Hieraus ergiebt sich die Gleichung zwischen den Parametern $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ dreier auf gerader Linie liegender Punkte der Curve:

$$(4)\quad 0 = D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -\lambda_2\lambda_3-\lambda_3\lambda_1-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -1 & -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wir betrachten einige besondere Lagen der Geraden.

I. Der Punkt ϱ (wo der Parameter zur Benennung des Punktes verwendet ist) liege auf der *Tangente* an einem Punkt λ der Curve; dann besteht zwischen ϱ und λ eine „Correspondenz"-Gleichung, die aus (4) erhalten wird, indem man $\lambda_3 = \varrho$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ setzt:

$$D(\varrho\lambda\lambda) \equiv D_1(\lambda\lambda)\cdot\varrho^2 + D_2(\lambda\lambda)\cdot\varrho + D_3(\lambda\lambda) = 0.$$

Die Ausdrücke D_1, D_2, D_3 gehen aus den unten (IV) ebenso bezeichneten hervor, indem man dort $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ setzt, und sind demnach vom 4. Grad in λ.

II. Neben $D(\varrho\lambda\lambda) = 0$ besteht dieselbe nach ϱ differentiirte Gleichung, wenn ϱ, λ ein den Berührungspunkten einer *Doppeltangente* zukommendes Parameterpaar ist. Durch Elimination von ϱ erhält man die Discriminante:

$$D_2{}^2(\lambda\lambda) - 4\,D_1(\lambda\lambda)\,D_3(\lambda\lambda) = 0$$

als Gleichung für die den Berührungspunkten zugehörigen 8 Parameterwerthe.

Aus den 5 Gleichungen (3) ergeben sich für das *einer* Doppeltangente zugehörige Parameterpaar Λ_1, Λ_2, indem

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \Lambda_1; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \Lambda_2$$

gesetzt wird, 5 Gleichungen, welche sich durch Elimination der Verhältnisse $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \sigma$ auf ein (zweien äquivalentes) System von Gleichungen zwischen Λ_1 und Λ_2 reduciren. Eine dieser Gleichungen ist:

$$(1)\qquad \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3}{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3} = \Lambda_1{}^2\Lambda_2{}^2,$$

wenn, wie wir dies später annehmen werden, $a_1 = a_2 = e_1 = e_2 = 0$ ist.

III. Wird die Gerade Wendetangente, so erhält man die Bedingungsgleichung für den Parameter eines *Wendepunkts*:

$$D(\lambda\lambda\lambda) = 0 = D_1(\lambda\lambda)\cdot\lambda^2 + D_2(\lambda\lambda)\cdot\lambda + D_3(\lambda\lambda).$$

IV. Gehören endlich die Parameter λ_1 und λ_2 den 2 Zweigen eines Doppelpunkts an, so wird der Parameter $\lambda_3 = \varrho$ eines dritten Schnittpunktes der Geraden unbestimmt. Ordnet man also $D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$ nach Potenzen von λ_3 an, so verschwinden die Coefficienten derselben einzeln. Nun ist aber:

$$D(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = D_1(\lambda_1\lambda_2)\cdot\lambda_3^2 + D_2(\lambda_1\lambda_2)\cdot\lambda_3 + D_3(\lambda_1\lambda_2),$$

wo die D durch folgende Determinanten darstellbar sind:

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
D_1(\lambda_1\lambda_2) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -\lambda_1-\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 & \lambda_1+\lambda_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & -1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \end{vmatrix};\\
D_2(\lambda_1\lambda_2) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -\lambda_1-\lambda_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 & \lambda_1\lambda_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & -\lambda_1-\lambda_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix};\\
D_3(\lambda_1\lambda_2) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0. & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -\lambda_1\lambda_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -1 & -\lambda_1-\lambda_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Die Parameterwerthe eines Doppelpunktes genügen also den 3 Gleichungen*):

$$D_1(\lambda_1\lambda_2) = 0,\quad D_2(\lambda_1\lambda_2) = 0,\quad D_3(\lambda_1\lambda_2) = 0.$$

§ 2.

Die Gleichungen für die Wendepunkte und Doppeltangenten unter Adjunction der Coordinaten der Doppelpunkte.

Die Gleichungen des vorigen Paragraphen werden weiterer Behandlung zugänglich, wenn man die Doppelpunkte der rationalen Curve 4. Ordnung in die Eckpunkte des Coordinatendreiecks verlegt. Von den linearen Factoren, in welche man die $F_i(\lambda)$ zerfällen kann,

*) Diese Gleichungen sind zweien äquivalent; denn die D gehören einer Matrix von 5 Horizontal- und 6 Verticalreihen an, für welche sich in bekannter Weise (Salmon-Fiedler, Raumgeometrie II., Art. 408) die gemeinsamen Verschwindungswerthe aller Determinanten durch die von zweien und gewissen Unterdeterminanten darstellen lassen.

sind dann je 2 paarweise einander gleich, und man erhält so die Coordinaten in der Form:

$$(7)\qquad \begin{cases} \varrho \cdot x_1 = F_1 = f_2 f_3\,, \\ \varrho \cdot x_2 = F_2 = f_3 f_1\,, \\ \varrho \cdot x_3 = F_3 = f_1 f_2\,, \end{cases}$$

wo f_1, f_2, f_3 quadratische Functionen von λ sind.

Die Gleichungen für die Parameter der Doppelpunkte werden dann gegenstandslos, und diejenigen für die Wendepunkte $W = 0$ und die Berührungspunkte der Doppeltangenten $T = 0$ erhalten eine einfachere Gestalt, wenn man die folgende kanonische Form der Functionen f zu Grunde legt:

$$(8)\qquad \begin{cases} f_1 = \lambda^2 + a\lambda + b\,, \\ f_2 = \lambda^2 + c\lambda + d\,, \\ f_3 = \lambda. \end{cases}$$

wodurch man dann erhält:

$$(9)\quad \begin{cases} \varrho \cdot x_1 = \lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda\,, \\ \varrho \cdot x_2 = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda\,, \\ \varrho \cdot x_3 = \lambda^4 + \lambda^3(a+c) + \lambda^2(b+d+ac) + \lambda(bc+ad) + bd. \end{cases}$$

Diese Form der f ist noch allgemein genug, um alle invarianten Bildungen, die in den Coefficienten derselben erhalten werden, auf allgemeine quadratische Formen übertragen zu können. Die Gleichungen $W = 0$ und $T = 0$ erhalten wir (§ 1., III., II.) in der Form:

$$W \equiv D_1 \cdot \lambda^2 + D_2 \cdot \lambda + D_3 = 0\,,$$
$$T \equiv D_2^2 - 4\, D_1 D_3 \qquad = 0\,.$$

Führt man die Coefficienten der kanonischen Form von $F_1\, F_2\, F_3$, wie sie oben (7), (8) angenommen wurde, ein, so erhält man:

$$D_1 = -\lambda^2 \cdot K; \qquad D_2 = L\,; \qquad D_3 = -bd \cdot K\,,$$

wo:

$$(10)\quad \begin{cases} K = \lambda^2(c-a) + 2\lambda(d-b) + ad - bc\,, \\ L = \lambda^4(b-d) + 2\lambda^3(bc-ad) + \lambda^2(b-d)(ac-b-d) \\ \qquad\qquad\qquad + 2\lambda bd(a-c) + bd(b-d) \end{cases}$$

ist. Es ist somit die Gleichung für die Wendepunkte:

$$(11)\qquad W \equiv \lambda \cdot L - (\lambda^4 + bd)K = 0\,.$$

Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten wird:

$$(12)\qquad T \equiv L^2 - 4bd \cdot \lambda^2 K^2 = 0\,.$$

Das Product endlich der Parameter $\Lambda_1\, \Lambda_2$ zweier derselben Doppeltangente zugehörigen Berührungspunkte ist für unsere Annahmen eine constante Grösse und zwar (§ 1. (5)):

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 = b\,d. \tag{13}$$

Wir werden weiter unten aus den Gleichungen (9) durch Elimination von λ die Gleichung der Curve 4. Ordnung Φ in homogenen Coordinaten $x_1\,x_2\,x_3$ ableiten, wobei sich die Coefficienten als simultane Invarianten der 3 quadratischen Formen f ergeben. Man denke sich nun die Gleichungen derjenigen Curven gebildet, durch welche die Wendepunkte und Berührungspunkte der Doppeltangenten aus Φ ausgeschnitten werden. Setzt man in diese Gleichungen für die Coordinaten x_1 etc. wieder ihre Werthe $f_2\,f_3$ etc., so erhält man resp. W und T durch simultane Invarianten der f dargestellt. Nachdem man sich nun aber von der Möglichkeit einer solchen Darstellung überzeugt hat, verfährt man zweckmässiger umgekehrt und bildet mit Hülfe des „vollständigen" Formensystems, wie Gordan das System der In- und Covarianten genannt hat, durch die alle anderen in der Form von ganzen Functionen darstellbar sind, die allgemeinen Ausdrücke für W und T aus den oben für die kanonische Form aufgestellten.

Das vollständige System von 3 quadratischen Formen f_1, f_2, f_3 besteht aber aus folgenden Bildungen (Clebsch, binäre Formen, p. 201 ff.):

$$f_1\,f_2\,f_3\,\vartheta_{23}\,\vartheta_{31}\,\vartheta_{12}\,D_{23}\,D_{31}\,D_{12}\,D_{11}\,D_{22}\,D_{33}\,R_{123},$$

wo die Indices jedesmal angeben, in welcher Ordnung die Coefficienten der 3 Formen auftreten. Die Bedeutung der ϑ, D und R ist, in den homogenen binären Variabeln λ, μ geschrieben, die folgende:

$$\vartheta_{ik} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} f_i'(\lambda) & f_i'(\mu) \\ f_k'(\lambda) & f_k'(\mu) \end{vmatrix};$$

$$R_{123} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} f_1''(\lambda\lambda) & f_1''(\lambda\mu) & f_1''(\mu\mu) \\ f_2''(\lambda\lambda) & f_2''(\lambda\mu) & f_2''(\mu\mu) \\ f_3''(\lambda\lambda) & f_3''(\lambda\mu) & f_3''(\mu\mu) \end{vmatrix};$$

$$D_{ik} = \frac{1}{4} f_i''(\lambda\lambda)\cdot f_k''(\mu\mu) + \frac{1}{4} f_i''(\mu\mu)\cdot f_k''(\lambda\lambda) - \frac{1}{2} f_i''(\lambda\mu)\cdot f_k''(\lambda\mu).$$

Ausser den Formen selbst und deren Functionaldeterminanten sind keine Covarianten in dem System enthalten. Dies erleichtert die Umwandlung von L und K, aus denen sich W und T zusammensetzen, in invariante Bildungen wesentlich. Das vollständige System lautet in der von uns angenommenen kanonischen Form folgendermassen (μ werde $= 1$ gesetzt):

$$(14)\quad \begin{cases} f_1 = \lambda^2 + a\lambda + b, \\ f_2 = \lambda^2 + c\lambda + d, \\ f_3 = \lambda; \\ \vartheta_{23} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - d), \\ \vartheta_{31} = -\frac{1}{2}(\lambda^2 - b), \\ \vartheta_{12} = \frac{1}{2}\left\{\lambda^2(c-a) + 2\lambda(b-d) + ad - bc\right\}; \\ D_{11} = 2\left(b - \frac{a^2}{4}\right), \\ D_{22} = 2\left(d - \frac{c^2}{4}\right), \\ D_{33} = -\frac{1}{2}; \\ D_{23} = -\frac{c}{2}, \\ D_{31} = -\frac{a}{2}, \\ D_{12} = b + d - \frac{ac}{2}; \\ R = R_{123} = \frac{1}{2}(b-d). \end{cases}$$

Endlich mögen gleich hier noch die folgenden Invarianten, welche sich später als die Coefficienten in der Gleichung $\Phi(x_1 x_2 x_3) = 0$ unserer Curve 4. Ordnung in homogenen Coordinaten erweisen werden, Platz finden:

$$(15)\quad \begin{cases} d_{11} = \Delta_{2233} = D_{22}D_{33} - D_{23}{}^2 = -d, \\ d_{22} = \Delta_{3311} = D_{33}D_{11} - D_{13}{}^2 = -b, \\ d_{33} = \Delta_{2211} = D_{11}D_{22} - D_{12}{}^2 = (bc - ad)(a-c) - (b-d)^2; \\ d_{23} = \Delta_{2311} = D_{31}D_{21} - D_{11}D_{23} = bc - \frac{a}{2}(b+d), \\ d_{31} = \Delta_{3122} = D_{23}D_{21} - D_{22}D_{31} = ad - \frac{c}{2}(b+d), \\ d_{12} = \Delta_{1233} = D_{31}D_{32} - D_{33}D_{12} = \frac{1}{2}(b+d), \end{cases}$$

für welche meist die kürzere, aber mit der obigen Bestimmung bezüglich der Indices nicht mehr übereinstimmende Bezeichnung d_{ik} gebraucht werden wird. Wir merken noch an:

$$(15^a)\quad \vartheta_{ik} = -\vartheta_{ki}; \quad D_{ik} = D_{ki}; \quad d_{ik} = d_{ki}.$$

Man hat nun sogleich:

$$K = 2\vartheta_{12}.$$

T ist in den Coefficienten jeder der 3 Formen vom 4., W vom 2. Grad. L muss sich also aus Covariantenproducten von der Form: $\Pi^{(4)}_{11223}$, wo der obere Index den Grad in λ, μ angiebt, zusammensetzen. Ein solches Product ist:

$$R_{123} \cdot f_1 f_2\,,$$

welches schon im ersten und letzten Glied mit L übereinstimmt. Zur Herstellung der übrigen kann also nur noch ein Product verwendet werden, das f_3 als Factor hat; das einzige dieser Art, das den vorigen Bedingungen genügt, ist:

$$f_3 \cdot \vartheta_{12} \cdot D_{12}\,.$$

In der That ist:

$$2\,R_{123} f_1 f_2 + 2\,\vartheta_{12} D_{12} f_3 = L - \frac{ac}{2} \cdot \lambda K = L - ac \cdot \lambda \cdot \vartheta_{12}\,.$$

Aber die Grösse $ac \cdot \lambda$, welche ein Product von der Form $\Pi^{(2)}_{123}$ sein müsste, lässt sich als solches nicht darstellen, und man darf dies nicht einmal erwarten, da ja zwar W und T, nicht aber K und L einzeln invariante Bildungen sein müssen. Andererseits ist aber:

$$-(\lambda^4 + bd) + (b+d)\,\lambda^2 = -\,4\,\vartheta_{13}\vartheta_{23}\,,$$

und weiter durch Vereinigung:

$$(ac - 2(b+d))\,\lambda^2 = -\,2\,D_{12} f_3^2\,,$$

so dass schliesslich *die Gleichung zur Bestimmung der Wendepunkte den folgenden einfachen Ausdruck erhält:*

$$\frac{W}{2} = R_{123} \cdot f_1 f_2 f_3 + 4\,\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_{31}\,. \tag{16}$$

Mit Hülfe der Identitäten (Clebsch, binäre Formen l. c.):

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{lrl}
\text{(a)} & R \cdot f_i = & D_{1i}\vartheta_{23} + D_{2i}\vartheta_{31} + D_{3i}\vartheta_{12}\,,\\
\text{(b)} & 0 = & f_1\vartheta_{12} + f_2\vartheta_{31} + f_3\vartheta_{12}\,,\\
\text{(c)} & 2\,\vartheta_{21}\vartheta_{31} = & -\,f_2 f_3 D_{11} - f_1^2 D_{23} + f_1 f_2 D_{31} + f_1 f_3 D_{12}\,,\\
\text{(d)} & 2\,\vartheta_{23}^2 = & -\,f_2^2 D_{33} - f_3^2 D_{22} + 2 f_2 f_3 D_{23}\,,\\
\text{(e)} & 2\,R \cdot \vartheta_{ik} = & \begin{vmatrix} D_{1i} & D_{2i} & D_{3i} \\ D_{1k} & D_{2k} & D_{3k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix};\\
\text{(f)} & 2\,R^2 = & \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix};\\
\text{(g)} & 2\,R_{123}^2 \cdot D_{12} = & d_{21} d_{33} - d_{23} d_{31}\,,
\end{array}\right.$$

und der analog gebildeten kann man den Ausdruck für W oder vielmehr für $R \cdot W$ auf eine für das Folgende wichtige Form bringen. Es ist nämlich:

$$\frac{W}{2} = 4\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_{31} + f_1 f_2 (D_{13}\vartheta_{23} + D_{23}\vartheta_{31} + D_{33}\vartheta_{12}) + D_{12} f_3 (f_1\vartheta_{23} + f_2\vartheta_{31} + f_3\vartheta$$
$$= -\vartheta_{23}(2\vartheta_{31}\vartheta_{21} - f_1 f_2 D_{31} - f_1 f_3 D_{12}) - \vartheta_{31}(2\vartheta_{23}\vartheta_{12} - f_1 f_2 D_{23} - f_2 f_3 D_{12})$$
$$+ \vartheta_{12}(f_3^2 D_{12} + f_1 f_2 D_{33})$$
$$= \vartheta_{23}(f_2 f_3 D_{11} + f_1^2 D_{23}) + \vartheta_{31}(f_3 f_1 D_{22} + f_2^2 D_{31}) + \vartheta_{12}(f_3^2 D_{12} + f_1 f_2 D_{33}).$$

Daher endlich:

$$R \cdot W = - \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & f_2 f_3 D_{11} + f_1^2 D_{23} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & f_3 f_1 D_{22} + f_2^2 D_{31} \\ D_{31} & D_{23} & D_{33} & f_1 f_2 D_{33} + f_3^2 D_{12} \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da die Formen f_i den reciproken Werthen der Coordinaten x_i proportional sind, so hat die Gleichung $W = 0$ in dieser Darstellung (die den Fall $R = 0$ natürlich ausschliesst) die Bedeutung einer Curvengleichung, und zwar *werden durch diese Curve, die von der* 6. *Ordnung ist, die Wendepunkte aus der gegebenen Curve* 4. *Ordnung* Φ *ausgeschnitten.* In welchem Zusammenhang dieselbe mit der Hesse'schen von Φ steht, die sie in vielen Beziehungen zu ersetzen geeignet ist, wird weiter unten (§ 4.) erörtert werden. — Rechnet man die Determinante aus, so kommt unter Einführung der oben (15) definirten Invarianten d_{ik}, für welche Identitäten bestehen, wie:

$$(17^{\text{h}}) \quad \begin{cases} d_{11} D_{11} + d_{12} D_{12} + d_{13} D_{13} = 2 R^2, \\ d_{11} D_{13} + d_{12} D_{23} + d_{13} D_{33} = 0, \end{cases}$$

der Ausdruck:

$$(18) \quad \varpi(f_1 f_2 f_3) = R \cdot W = \begin{cases} \quad d_{11} f_1^2 (\;\; D_{23} f_1 - D_{31} f_2 - D_{12} f_3) + D_{11} d_{11} f_1 f_2 f_3 \\ + d_{22} f_2^2 (-D_{23} f_1 + D_{31} f_2 - D_{12} f_3) + D_{22} d_{22} f_1 f_2 f_3 \\ + d_{33} f_3^2 (-D_{23} f_1 - D_{31} f_2 + D_{12} f_3) + D_{33} d_{33} f_1 f_2 f_3. \end{cases}$$

Wir wenden uns zur Umgestaltung der *Gleichung* $T = 0$ *für die Doppeltangenten.* Man hat oben den Ausdruck für L erhalten in der Form:

$$\frac{1}{2} L = \Pi_{11223} + \frac{ac}{2} f_3 \vartheta_{12},$$

wo

$$\Pi_{11223} = R_{123} f_1 f_2 + \vartheta_{12} D_{13} f_3.$$

Daher

$$\frac{T}{4} = \frac{L^2}{4} - b d \lambda^2 \cdot K^2 = \left(\Pi + \frac{ac}{2} f_3 \vartheta_{12}\right)^2 - 4 b d \cdot f_3^2 \vartheta_{12}^2$$
$$= -2\Pi^2 \cdot D_{33} + 4\Pi f_3 D_{13} D_{23} \vartheta_{12} + \vartheta_{12}^2 f_3^2 \left(\frac{a^2 c^2}{4} - 4 b d\right).$$

Nun ist:

$$\frac{a^2 c^2}{4} - 4 b d = 2 (D_{11} D_{22} D_{33} - D_{22} D_{12}^2 - D_{11} D_{23}^2).$$

Vereinigt man diese Glieder mit den übrigen, welche den Factor ϑ_{12}^2 besitzen, so kommt, unter Benutzung der Identität (17^i):

$$(19)\quad \frac{T}{8}=R\left[-R(f_2^2f_3^2D_{11}+f_3^2f_1^2D_{22}+f_1^2f_2^2D_{33})+2f_1f_2f_3(\vartheta_{23}D_{12}D_{13}+\vartheta_{31}D_{23}D_{21}+\vartheta_{12}D_{13}D_{23})\right]$$

was endlich, mit Hülfe von (17^h) und (17^e), übergeht in:

$$(20)\quad \frac{T}{4}=(f_2f_3d_{23}+f_3f_1d_{13}+f_1f_2d_{12})^2-f_2^2f_3^2d_{22}d_{33}-f_3^2f_1^2d_{33}d_{11}-f_1^2f_2^2d_{11}d_{22}.$$

Unter Einführung der den f_i proportionalen reciproken Werthe der Coordinaten x_i in $T=0$ erhält man *die Gleichung des die Berührungspunkte der Doppeltangenten ausschneidenden Kegelschnitts*, eine Gleichung, die auf anderem Wege Salmon (a. a. O.) aufgestellt hat.

§ 3.

Die Curvengleichung in homogenen Coordinaten. Specielle Fälle.

Bevor die erhaltenen Gleichungen weiter discutirt werden, möge die geometrische Bedeutung der vorstehenden Darstellung in Kürze untersucht werden.

Zwischen den simultanen Invarianten D_{ik} und den quadratischen Formen $f_1\,f_2\,f_3$ besteht nach Clebsch, bin. Formen p. 205, die identische Relation:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & f_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & f_2 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Setzt man die Formen f_i proportional den homogenen Coordinaten y_i eines Punktes in der Ebene, so repräsentirt diese Gleichung einen Kegelschnitt:

$$(2)\quad \varphi(y)\equiv d_{11}y_1^2+d_{22}y_2^2+d_{33}y_3^2+2d_{23}y_2y_3+2d_{31}y_1y_3+2d_{12}y_1y_2=0,$$

welcher aus der Curve 4. Ordnung Φ durch die quadratische Transformation:

$$(3)\qquad x_1:x_2:x_3=\frac{1}{y_1}:\frac{1}{y_2}:\frac{1}{y_3}=y_2y_3:y_3y_1:y_1y_2$$

hervorgegangen ist. Die Gleichung unserer Curve ist demnach:

$$(4)\quad \Phi(x)\equiv d_{11}x_2^2x_3^2+d_{22}x_3^2x_1^2+d_{33}x_1^2x_2^2+2d_{23}x_1^2x_2x_3+2d_{31}x_2^2x_3x_1+2d_{12}x_3^2x_1x_2=0,$$

wo die d_{ik} die in § 2. (15) definirten Combinationen der Coefficienten der 3 quadratischen Formen f sind.

Umgekehrt kann man die Coordinaten jeder Curve 4. Ordnung, deren Gleichung in dieser Form gegeben ist, in der angegebenen

Weise darstellen, indem man die Coordinaten des zugehörigen Kegelschnitts durch einen Parameter ausdrückt. Ueberhaupt gehört in den Bereich unserer Darstellung jede rationale Curve 4. Ordnung, die durch eine quadratische Transformation der angegebenen Form in einen Kegelschnitt überführbar ist; und dies ist immer möglich, so lange die Doppel- (oder Rückkehr-) punkte, die reell oder imaginär (vgl. § 8.) sein können, nicht zusammenfallen. Dass jedoch durch passende Grenzübergänge auch diese Fälle mit in den Kreis der Untersuchung hereingezogen werden können, wird weiterhin (s. III., sowie § 6.) gezeigt werden.

Aus den Gleichungen (3) folgt:

$$(5) \qquad y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 = f_1 : f_2 : f_3 .$$

Die Substitution der x für die f in die Gleichungen ((18) und (20) § 2.) $R \cdot W = 0$ und $T = 0$ für die Wendepunkte und Doppeltangenten ergiebt Gleichungen von Curven von bez. der 6. und 2. Ordnung, von denen die erste in den Eckpunkten des Coordinatendreiecks 3-fache Punkte besitzt. Ersetzt man dagegen die f_i durch die y_i, so erhält man die aus jenen durch quadratische Transformation hervorgegangenen Curven, welche auf dem Kegelschnitt $\varphi(y) = 0$ diejenigen Punkte ausschneiden, in welchen Kegelschnitte, die durch die 3 Eckpunkte des Fundamental(Coordinaten)-Dreiecks gehen, osculiren, bez. doppelt berühren.

Einige specielle Fälle, auf die später öfters Bezug genommen wird, mögen gleich hier an die Darstellung der Curvengleichung angeschlossen werden.

I. Für $d_{11} = D_{22} D_{33} - D_{23}{}^2 = 0$ *zerfällt die Curve* 4. *Ordnung* (sofern nicht gleichzeitig $R = 0$ ist) in die Seite $x_1 = 0$ des Coordinatendreiecks und eine rationale Curve 3. Ordnung; zugleich haben f_1 und f_2 einen linearen Factor gemeinsam, der als solcher auch aus den $F_1 = f_2 f_3$, etc. sich ausscheiden und mit dem Proportionalitätsfactor ϱ vereinigen lässt. Es bleiben so die Coordinaten der Curve 3. Ordnung, ausgedrückt durch einen Parameter*).

---

*) Es ist bemerkenswerth — und diese Bemerkung gilt ganz allgemein, wenn eine rationale Curve in der angegebenen Weise in solche von niederer Ordnung zerfällt — dass man auch die Gleichung der sich absondernden Geraden erhalten kann, indem man die *durch ihr Verschwinden das Zerfallen bewirkende Grösse d_{11} nicht absolut $= 0$ setzt*, sondern zugleich mit dem verschwindenden Factor $(\lambda - \alpha)$ unendlich klein werden lässt, was denn, unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\lambda - \alpha$, für die x_i homogene lineare Functionen von $\lambda - \alpha$ und d_{11} ergiebt, welche, indem nun $\frac{\lambda - \alpha}{d_{11}}$ alle möglichen Werthe durchläuft, die Gleichung der Geraden darstellen. (Ein Beispiel bietet die kanonische Form der x_i für $d = 0$, $\lambda = 0$.)

II. Zerfällt für $R=0$ der Kegelschnitt φ in 2 Gerade, so spaltet sich die Curve Φ *in 2 Kegelschnitte*, deren Gleichungen unmittelbar durch die jener Geraden gegeben sind*).

III. Rücken 2 Seiten des Coordinatendreiecks zusammen, so erhält man einen *Selbstberührungspunkt.* Dann werden z. B. f_1 und f_2 einander proportional, also $d_{33}=R=0$. Setzt man, um das identische Verschwinden zu vermeiden:

$$f_2 = f_1 + \varepsilon \cdot f_4,$$

wo ε eine gegen Null convergirende Grösse und f_4 eine beliebige quadratische Form ist, so bleiben in der Tabelle des § 2. die Formen $f_1 f_3 \vartheta_{31} D_{11} D_{33} D_{31}$ ungeändert, ferner wird:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 + \varepsilon f_4, & D_{22} &= D_{11} + 2\varepsilon D_{14} + \varepsilon^2 D_{44}, & & \\ \vartheta_{12} &= \varepsilon \cdot \vartheta_{14}, & D_{23} &= D_{13} + \varepsilon D_{43}, & R_{123} &= \varepsilon \cdot R_{143}. \\ \vartheta_{23} &= \vartheta_{13} + \varepsilon \cdot \vartheta_{43}, & D_{12} &= D_{11} + \varepsilon D_{14}, & & \end{aligned}$$

Die Transformationsformeln (3) werden:

$$x_1 : x_2 : x_3 = f_2 f_3 : f_3 f_1 : f_1^2 = y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1^2$$

und die Gleichungen für die Wendepunkte und Doppeltangenten gewinnen die Form:

$$\frac{W}{2\cdot\varepsilon} \equiv f_1^2 f_3 R_{143} - 4\vartheta_{13}^2 \vartheta_{14} = 0,$$

$$\frac{T}{8R\cdot\varepsilon} \equiv f_1^2[-R_{143}(2D_{11}f_3^2 + D_{33}f_1^2) + 2f_3(D_{31}D_{11}\vartheta_{43} + D_{43}D_{11}\vartheta_{31} + D_{31}^2\vartheta_{14})] = 0.$$

Durch das Auftreten eines Selbstberührungspunktes werden also zwei Doppeltangenten, jedoch kein Wendepunkt absorbirt.

---

*) Die Bedingung für das Zerfallen des Kegelschnitts:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= f_1(\lambda) = a_1\lambda^2 + 2b_1\lambda + c_1, \\ \varrho y_2 &= f_2(\lambda) = a_2\lambda^2 + 2b_2\lambda + c_2, \\ \varrho y_3 &= f_3(\lambda) = a_3\lambda^2 + 2b_3\lambda + c_3 \end{aligned}$$

ist die folgende:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus erhält man ein System von Grössen $u_1\ u_2\ u_3$, so dass:

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0.$$

Einem Punkt y, der dieser Gleichung genügt, entsprechen dann 2 Werthe λ, welche sich aus zweien von den obigen Gleichungen bestimmen. *Diese Gerade,* welche von dem System der Werthe von λ *doppelt* überdeckt wird, *repräsentirt im Allgemeinen, doppelt gerechnet, den Kegelschnitt.* Nur in dem speciellen Fall, dass die 3 Functionen f einen *Factor* gemeinsam haben, wird jene Gerade blos einfach erzeugt. Man hat dann den in der vorhergehenden Note besprochenen Fall, für welchen der Kegelschnitt in 2 *discrete* Curven (hier Gerade) zerfällt, deren Gleichungen man in der dort angegebenen Weise bestimmt.

Ein noch speciellerer Fall ist der einer Curve mit (Selbst)-*Osculationspunkt.* Es rücken dann die 3 Eckpunkte des Coordinatendreiecks so aneinander, dass sie consecutive Punkte des durch sie gehenden Kreises (des Bildes der unendlich fernen Punkte, § 9.) werden. Man kann dann die Formen f in folgender Weise annehmen:

$$f_2 = f_1 + \varepsilon f_4; \quad f_3 = f_1 + m\varepsilon f_4 + \varepsilon^2 m(m-1) f_5,$$

wo wieder ε eine gegen Null convergirende Grösse, m eine Constante und f_4, f_5 quadratische Formen sind. Die Coordinaten der Curve stellen sich unter Einführung von linearen Combinationen der x_i in der Form dar:

$$\xi_1 = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{x_1 - x_3}{m} - \frac{x_2 - x_3}{m-1}\right) = f_4^2 - f_1 f_5; \quad \xi_2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{x_2 - x_3}{m-1} = f_1 f_4; \quad \xi_3 = f_1^2,$$

und die Gleichungen für die Wendepunkte und Doppeltangenten werden:

$$\frac{W}{2\varepsilon^3 m(m-1)} = R_{145} f_1^3 - 4\vartheta_{14} = 0,$$

$$\frac{T}{8R\varepsilon^3 m(m-1)} = f_1^3[-3f_1 D_{11}^2 R_{145} + 2\vartheta_{14}(D_{14}^2 - D_{11}D_{44}) \\ + m\vartheta_{11} D_{11} D_{51} + \vartheta_{45} D_{11}^2 + \vartheta_{51} D_{11} D_{14}] = 0,$$

wo dann ersichtlich wieder die Zahl der Wendepunkte ungeändert bleibt, während 3 Doppeltangenten in die Osculationstangente fallen.

IV. Ein Doppelpunkt der Curve 4. Ordnung geht in einen *Rückkehrpunkt* über, wenn eine der 3 Formen 2 gleiche Factoren erhält, also wenn z. B. $D_{11} = 0$ ist.

Dass sich dann die Classe der Curve um 1 reducirt, erkennt man durch Darstellung der *Liniencoordinaten* $u_1\, u_2\, u_3$ *der rationalen Curve 4. Ordnung* als Functionen eines Parameters, was bei diesem Anlass geschehen möge. Die Liniencoordinaten sind bekanntlich proportional den Grössen:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \mu} - \frac{\partial x_k}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \mu},$$

wenn man sich mit der Variabeln μ die Homogeneität hergestellt denkt. Nun ist aber z. B.:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(f_2 f_3)\frac{\partial}{\partial \mu}(f_3 f_1) - \frac{\partial}{\partial \lambda}(f_3 f_1)\frac{\partial}{\partial \mu}(f_2 f_3) = f_3(f_1\vartheta_{23} + f_2\vartheta_{31} - f_3\vartheta_{12}) = -2f_3^2\vartheta_{12},$$

und man hat also die folgende Darstellung:

$$u_1 : u_2 : u_3 = f_1^2\vartheta_{23} : f_2^2\vartheta_{31} : f_3^2\vartheta_{12}.$$

Diese Ausdrücke sind vom 6. Grade und bekommen für $D_{11} = 0$ den auch in ϑ_{13} und ϑ_{12} enthaltenen linearen Factor $\sqrt{f_1}$.

V. Die Bedeutung, welche das Verschwinden der Invarianten d_{ii} und D_{ii} besitzt, ist in I. und IV. auseinandergesetzt. Hier möge noch kurz über das *Verschwinden der* D_{ik} *und* d_{ik} gesprochen werden. Wenn

D_{12} verschwindet, so bilden die Wurzelpaare von f_1 und f_2 auf der Curve 4 *harmonische* Punkte. Das Verschwinden von $d_{12} = D_{23} D_{31} - D_{12} D_{33}$ veranlasst, dass die Tangenten des Doppelpunkts in der Ecke $x_1 = x_2 = 0$ zu den anstossenden Seiten des Coordinatendreiecks *harmonisch* liegen.

VI. $d_{12} D_{12} + d_{13} D_{13} = 0$ ist die Bedingung dafür, dass eine Tangente in dem Doppelpunkt $x_2 = x_3 = 0$ Wendetangente wird (vgl. § 4. am Ende).

VII. Weiter unten (§ 6.) wird eine Curve auftreten, für welche die Bedingungsgleichung erfüllt ist:

$$D_{11} D_{23}^2 - D_{22} D_{31}^2 = \frac{1}{2}(b c^2 - d a^2) = \frac{1}{R^2}(d_{11} d_{23}^2 - d_{22} d_{31}^2) = D_{22} d_{22} - D_{11} d_{11} = 0.$$

Dies geschieht allgemein durch die Annahme:

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda^2 + a\lambda + b &&= (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), \\ f_2 &= \lambda^2 + ak\lambda + bk^2 &&= (\lambda - k\alpha)(\lambda - k\beta), \\ f_3 &= \lambda &&= \lambda, \end{aligned}$$

wodurch die Wurzeln von f_1 und f_2, *übers Kreuz gepaart, mit denen von f_3 in Involution zu stehen kommen*; denn die Determinante R der Formen:

$$\varphi_1 = (\lambda - \alpha)(\lambda - k\beta); \quad \varphi_2 = (\lambda - \beta)(\lambda - k\alpha); \quad \varphi_3 = \lambda$$

verschwindet identisch.

Für die Curve 4. Ordnung sagt dies aus, dass *von den 4 Schnittpunkten der Tangenten in zwei Doppelpunkten zwei auf einer durch den dritten Doppelpunkt gehenden Geraden liegen.* Denn die Tangenten in $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 = x_3 = 0$ sind:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ x_1 k\alpha - x_3 f_1(k\alpha) = 0, \qquad &&\text{c)}\ x_2\alpha - x_3 f_2(\alpha) = 0, \\ &\text{b)}\ x_1 k\beta - x_3 f_1(k\beta) = 0, \qquad &&\text{d)}\ x_2\beta - x_3 f_2(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Schneidet man a) mit d) und b) mit c), so liegen, wie man sogleich erkennt, die Schnittpunkte auf der Linie: $x_1 k - x_2 = 0$, q. e. d.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Curve eine *Symmetrieaxe* besitzt oder aus einer solchen durch Centralprojection hervorgegangen ist.

§ 4.

Der Wendekegelschnitt.

Für die Wendepunkte ergab sich oben (§ 2.) eine Gleichung 3. Grades in den Formen f_i: $R \cdot W = 0$, welche durch Einführung der x_i in eine die Wendepunkte ausschneidende Curve 6. Ordnung (mit 3-fachen Punkten in den Eckpunkten des Coordinatendreiecks) überführbar war. Man kann nun die Gleichung dieser Curve mit Hülfe der Gleichung $\Phi = 0$ der gegebenen Curve in die *eines durch die Wende-*

punkte gehenden Kegelschnitts $\Gamma=0$ überführen*). Dies wird jedoch zweckmässig nicht erst an der Curve 6. Ordnung, sondern an der ihr vermöge der quadratischen Transformation entsprechenden Curve $R\cdot W=0$ oder $\varpi(y_1y_2y_3)=0$, wie ihre Gleichung in den y geschrieben heissen möge, vorgenommen, wo denn unter Adjunction des Kegelschnitts $\varphi=0$ (§ 3.) eine rationale Curve 4. Ordnung $\gamma=0$ mit 3 Doppelpunkten in den Eckpunkten des Coordinatendreiecks (statt des Kegelschnitts $\Gamma=0$) zu erzeugen ist. Der Ausdruck:

$$\varpi=\begin{cases} d_{11}y_1^2(\;\;y_1D_{23}-y_2D_{31}-y_3D_{12}) \\ +d_{22}y_2^2(-y_1D_{23}+y_2D_{31}-y_3D_{12})+y_1y_2y_3(d_{11}D_{11}+d_{22}D_{22}+d_{33}D_{33}) \\ +d_{33}y_3^2(-y_1D_{23}-y_2D_{31}+y_3D_{12}),\end{cases}$$

(wo zwischen den d_{ik} und D_{ik} die § 2. angeführten Beziehungen bestehen) ist also mit Hülfe von:

$$\varphi=d_{11}y_1^2+d_{22}y_2^2+d_{33}y_3^2+2d_{23}y_2y_3+2d_{31}y_3y_1+2d_{12}y_1y_2$$

und gewisser noch zu bestimmender Formen 1. und 2. Ordnung q und p in eine solche Gestalt γ zu verwandeln, dass in:

(1) $$\gamma=\varpi q+p\varphi$$

die Coefficienten der Glieder von y_1^4, $y_1^3y_2$ und der analogen Glieder sämmtlich verschwinden. Aber man hat zu Erfüllung dieser 9 Gleichungen nur 8 Grössen: die Verhältnisse der Coefficienten in q und p, zur Verfügung, und es muss demnach eine dieser Gleichungen eine Folge der übrigen sein. Indem man die Coefficienten in p eliminirt, bleiben 3 Gleichungen für die in q, die sich als in der That mit einander verträglich erweisen. Man erfüllt sie durch die Annahme:

$$q=d_{11}d_{23}y_1+d_{22}d_{31}y_2+d_{33}d_{12}y_3$$

und es ergiebt sich weiter:

$$p=-D_{23}d_{23}d_{11}y_1^2-\cdots+2d_{23}(d_{12}D_{12}+d_{13}D_{13})y_2y_3+\cdots$$

wo die den angeschriebenen analog gebildeten Glieder hier wie im Folgenden durch Punkte bezeichnet sind. Endlich wird der Coefficient von $y_2^3y_3^3$ des Ausdrucks γ:

$$\gamma_{11}=-4R^2D_{11}(d_{12}D_{12}+d_{13}D_{13});$$

der Coefficient von $2y_1^2y_2y_3$ wird:

---

*) Ich erhalte nachträglich Kenntniss von einer Arbeit des Herrn J. Grassmann über Wendepunkte (Dissertat. Berlin 1875), in welcher derselbe ebenfalls die Existenz des Wendekegelschnitts und zwar durch directe Umgestaltung der ausgerechneten Hesse'schen Determinante erst auf die Form L (s. unten), dann auf die Form Γ nachweist.

$$\begin{aligned}\gamma_{23} &= 2R^2(d_{12}d_{13}+D_{22}D_{33}d_{23}+D_{23}^2d_{23}+\tfrac{1}{2}d_{11}d_{23})\\ &= R^2(2d_{12}d_{13}+3d_{11}d_{23}+4d_{23}D_{23}^2),\end{aligned}$$

wo man wie oben hat:

$$2R^2\cdot D_{11}=d_{22}d_{33}-d_{23}^2;\quad 2R^2D_{23}=d_{31}d_{12}-d_{11}d_{23},\ \text{etc.}$$

während die Determinante der $D_{ik}=2R^2$, die der $d_{ik}=4R^4$ ist.

Wendet man auf die Glieder der Identität (1) die quadratische Transformation $y_1:y_2:y_3=x_2x_3:x_3x_1:x_1x_2$ an, so erhält sie die Form:

$$\Omega_6Q_2+P_4\Phi_4=\Gamma_2\cdot x_1^2x_2^2x_3^2,$$

und die Gleichung des Wendekegelschnitts wird:

$$0=\Gamma=\begin{cases}-4D_{11}(d_{12}D_{12}+d_{13}D_{13})x_1^2+2(2d_{12}d_{13}+3d_{11}d_{23}+4d_{23}D_{23}^2)x_2x_3\\ -4D_{22}(d_{23}D_{23}+d_{21}D_{21})x_2^2+2(2d_{23}d_{21}+3d_{22}d_{31}+4d_{31}D_{31}^2)x_3x_1\\ -4D_{33}(d_{31}D_{31}+d_{32}D_{32})x_3^2+2(2d_{31}d_{32}+3d_{33}d_{12}+4d_{12}D_{12}^2)x_1x_2.\end{cases}$$

Dieser Kegelschnitt geht durch einen Eckpunkt des Coordinatendreiecks, wenn $D_{11}=0$, d. h., wenn ein Doppelpunkt zum Rückkehrpunkt geworden ist, oder für $d_{12}D_{12}+d_{13}D_{13}=0$, was dann eine Wendetangente im Doppelpunkt anzeigt. Dann muss durch diesen auch die *Verbindungslinie $G=0$ der beiden mit den Wendepunkten auf einem Kegelschnitt gelegenen Punkte* gehen. Man erhält die Gleichung derselben durch Combination von Q mit Φ zu folgender Identität:

$$\Phi\cdot d_{11}d_{22}d_{33}-Q(x_2x_3d_{13}d_{12}+\cdots)=2x_1x_2x_3\cdot G\cdot R^2,$$

wo die Gleichung der gesuchten Geraden wird:

$$\begin{aligned}0=G=x_1d_{23}(d_{12}D_{12}+d_{13}D_{13})&+x_2d_{31}(d_{21}D_{21}+d_{23}D_{23})\\ &+x_3d_{12}(d_{31}D_{31}+d_{32}D_{32}).\end{aligned}$$

Diese Gerade geht durch den Doppelpunkt $x_2=x_3=0$ auch dann hindurch, wenn $d_{23}=0$ ist, d. h., wenn die Tangenten desselben zu den anstossenden Seiten des Fundamentaldreiecks harmonisch sind (§ 3.).

Die Curve 6. Grades $\Omega=0$ schneidet in den Eckpunkten des Coordinatendreiecks die gegebene Curve $\Phi=0$ in 6 Punkten, also ebensovielmal, wie in diesen Punkten die *Hesse'sche Curve* $H=0$ von $\Phi=0$ schneidet. Der Ausdruck Ω lässt sich aber trotzdem nicht mit Hülfe von Φ auf die Form H bringen, man hat es hier vielmehr mit einem der wohl von Nöther zuerst bemerkten Fälle zu thun, wo die Division $\frac{\Omega}{H}$ auch unter Adjunction von Φ nicht ausführbar ist, obgleich Zähler und Nenner dieselben Verschwindungspunkte auf $\Phi=0$ besitzen. Man kann jedoch eine Uebereinstimmung von Ω und H in möglichst vielen Gliedern verlangen und erhält so die Identität:

$$H=6\Omega+3\Phi B+3x_1x_2x_3L,$$

wo H die Hesse'sche Determinante ist:

$$H = \frac{1}{8}\,\Sigma \pm \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} =$$
$$= 3x_1^4(d_{23}^2 - d_{22}d_{33})\,(d_{33}x_2^2 + 2d_{23}x_2x_3 + d_{22}x_3^2) + \cdots$$
$$+ 6x_1^3x_2x_3\,(d_{33}d_{22} + 2d_{23}^2)\,(d_{13}x_2 + d_{12}x_3) + \cdots$$
$$+ 6x_1^3x_2^3d_{33}(2d_{13}d_{23} - d_{12}d_{33}) + \cdots$$
$$+ 18x_1^2x_2^2x_3^2\,(d_{11}\,d_{22}d_{33} + d_{12}d_{23}\,d_{31}),$$

B eine Form 2. Grades:

$$B = -x_1^2(d_{22}d_{33} - d_{23}^2) - \cdots + 2d_{12}d_{13}x_2x_3 + \cdots$$

und endlich $L = 0$ die Gleichung einer durch die Wendepunkte gehenden Curve 3. Ordnung ist:

$$L = 2x_1^2(d_{22}d_{33} - d_{23}^2) + \cdots + x_1x_2x_3\,(d_{11}\,d_{23}^2 + d_{22}\,d_{31}^2 + d_{33}\,d_{12}^2 + 3d_{11}d_{22}d_{33} - 6d_{12}d_{23}\,d_{31}).$$

§ 5.

Die Wendepunktsgleichung.

Indem wir von der allgemeinen Form zu den im §. 2 aufgestellten Gleichungen für die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten und der Wendepunkte in der kanonischen Darstellung zurückkehren, bemerken wir zunächst, dass die Erstere in zwei zerfällt:

$$T = L^2 - 4bd\cdot\lambda^2K^2 = (L + 2\sqrt{b}\,d\cdot\lambda K)\,(L - 2\sqrt{b}\,d\cdot\lambda K) = T_1\cdot T_2 = 0.$$

Man kann diese Factoren T_1, T_2 sowie die Gleichung:

$$W = \lambda L - (\lambda^4 + bd)\,K = 0$$

dadurch auf einfachere Form bringen, dass man statt der Constanten a, b, c, d vier andere Grössen einführt, nämlich:

$$\alpha = \frac{3}{2}\,\frac{b-d}{a-c}; \quad \beta = \frac{bc - ad}{a-c}; \quad \gamma = \frac{ac - b - d}{6}; \quad \delta = bd.$$

Man erhält so:

$$\left.\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix}\right\} = \frac{2}{3}\,(a-c)\left[\alpha\lambda^4 + 3\lambda^3\left(\beta \pm \sqrt{\delta}\right) + 6\lambda^2\alpha\left(\gamma \pm \frac{2}{3}\sqrt{\delta}\right) \pm 3\lambda\sqrt{\delta}\left(\beta \pm \sqrt{\delta}\right) + \alpha\delta\right],$$

$$\frac{W}{a-c} = \lambda^6 + 2\lambda^5\alpha + 3\lambda^4\beta + 4\lambda^3\alpha\gamma + 3\lambda^2\delta + 2\lambda\alpha\delta + \beta\delta.$$

Setzt man noch für einen Augenblick:

$$\lambda^4 = \delta\cdot\varrho^4;\ \text{also}\ \lambda = \varrho\cdot\sqrt[4]{\delta} = \varrho\cdot\varepsilon,$$

ferner:

$$p = \frac{\alpha}{\varepsilon}; \quad q = \frac{\beta}{\varepsilon^2}; \quad r = \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon^3},$$

so gewinnt W die Form:

$$\frac{W}{a-c} = \left\{ \begin{array}{lll} \varrho^6 & + 2p\varrho^5 + 3q\varrho^4 \\ + 3\varrho^2 + 2p\varrho + & q \end{array} \right. + 4r\varrho^3 = 0.$$

Diese Gleichung geht für $q = 1$ in eine reciproke über. Es treten dann die Wurzeln in Involution; aber der Punkt, in welchem sich dann die Verbindungslinien der (paarweise verbundenen) Bilder der Wendepunkte auf dem Kegelschnitt $\varphi = 0$ schneiden, und der in diesem Falle sich rational ergiebt, ist in einem anderen speciellen Fall $(a = 0, b = -d)$ nur durch Auflösung einer quadratischen Gleichung zu finden und kann demnach nicht für die allgemeine Gleichung rational vorhanden sein. Ueberhaupt scheint jene Gleichung 6. Grades keine Invarianteneigenschaften zu besitzen, die eine Zurückführung ihrer Auflösung auf solche von niedrigerem Grade ermöglicht*).

Den Fall involutorisch gepaarter Wurzeln mögen wir hier etwas näher erörtern. Zunächst folgt aus der Bedingungsgleichung:

$$1 = q^2 = \frac{\beta^2}{\delta}$$

---

*) In der That kann man folgendermassen zeigen, dass die 6 Wurzeln jener Gleichung 6. Grades im Allgemeinen in keiner Beziehung zu einander stehen. Man nehme die Coordinaten der Curve 4. Ordnung in der Form an:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda^3(\lambda + a) : (\lambda + b) : (\lambda + 1)^3 (\lambda + c),$$

wodurch die Tangenten in 3 Wendepunkten $(\lambda = 0, -1, \infty)$ adjungirt und zu Seiten des Coordinatendreiecks gemacht werden. Dann wird die Gleichung für die 3 übrigen Wendepunkte:

$$W' = \lambda^3(A + 3) + \lambda^2(2Ab - A + 3C) + \lambda(aC + 2B) + aB = 0,$$

wo

$$A = c - a; \quad B = 3bc - c + b; \quad C = c + 2b$$

ist. Die Wurzeln dieser Gleichung stehn aber augenscheinlich zu den Parametern der angenommenen Wendepunkte in keiner projectivischen Beziehung.

Für diese Darstellung der Gleichung der Curve lässt sich auch *die Bedingung, dass 3 Wendepunkte auf gerader Linie liegen*, in einfacher Weise ausdrücken. Wenn nämlich die Parameter $0, -1, \infty$ dreien in gerader Linie liegenden Punkten zugehören sollen, so muss die Grösse $D_1(\lambda_1 \lambda_2)$ (§ 1.) verschwinden, wenn man $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und für die Coefficienten $a_i, b_i, \cdots$ ihre Werthe einsetzt. Man erhält so:

$$ab = bc + b - c$$

als Bedingungsgleichung dafür, dass die 3 adjungirten Wendepunkte in gerader Linie liegen. Auf dieser Linie liegt aber noch ein weiterer Punkt der Curve, dessen Parameter:

$$\lambda = -\frac{B}{C}$$

in die Gleichung $W' = 0$ eingesetzt, dieselbe erfüllt. Denn mit Hülfe der Bedingungsgleichung lässt sich W' auf die Form bringen:

$$W' = (C\lambda + B)(\lambda^2 + \lambda(2b + a) + ab) = 0,$$

und *der 4. Schnittpunkt ist also ebenfalls ein Wendepunkt*, wie dies übrigens aus anderen Gründen vorauszusehen war.

entweder $b = d$, also Zerfallen (§ 3.), oder:

$$bc^2 - a^2 d = 0,$$

eine Gleichung, die (§ 3., VII) eine involutorische Paarung der Wurzeln der Formen f_1 und f_2 übers Kreuz mit denen von f_3 aussagt und durch Einführung der besonderen Form (§ 3.) für $f_1 f_2 f_3$ erfüllt wird. Nun folgt aus der Bedingungsgleichung aber weiter (Bezeichnungen wie in § 3.):

$$\beta = bk = \varepsilon^2.$$

Ist also λ eine Wurzel, so ist entsprechend dem Wurzelpaare ϱ und $\frac{1}{\varrho}$ der reciproken Gleichung, $\frac{bk}{\lambda}$ eine andere. Nun hat man:

$$f_1\left(\frac{bk}{\lambda}\right) = \frac{b}{\lambda^2} f_2(\lambda); \quad f_2\left(\frac{bk}{\lambda}\right) = \frac{bk^2}{\lambda^2} \cdot f_1(\lambda),$$

die Coordinaten eines Wendepunktpaares sind also von der Form:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda f_2(\lambda); & x_1' &= f_1(\lambda) \cdot \frac{b^2 k^3}{\lambda^3}, \\
x_2 &= \lambda f_1(\lambda); & x_2' &= f_2(\lambda) \cdot \frac{b^2 k}{\lambda^3}, \\
x_3 &= f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda); & x_3' &= f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \frac{b^2 k^2}{\lambda^4}.
\end{aligned}$$

Die Gleichung der Verbindungslinie dieser Punkte:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & x_1' \\ \xi_2 & x_2 & x_2' \\ \xi_3 & x_3 & x_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \lambda f_2 & k(kf_1 - f_2) \\ \xi_2 & \lambda f_1 & f_2 - kf_1 \\ \xi_3 & f_1 f_2 & 0 \end{vmatrix} \frac{b^2 k}{\lambda^3} = 0,$$

(wo ξ laufende Coordinaten sind) hat nun aber die Eigenschaft, unabhängig von λ erfüllt zu werden durch:

$$\xi_3 = 0, \quad \xi_1 + \xi_2 k = 0.$$

Die Coordinaten dieser Punktes befriedigen ferner, wie man sich leicht überzeugt, die Gleichung der Verbindungsgeraden $G = 0$ der beiden mit den Wendepunkten auf dem Wendekegelschnitt liegenden Punkten der Curve 4. Ordnung, und man hat also den Satz:

Wenn 2 von den Schnittpunkten der Tangenten in zwei Doppelpunkten der Curve 4. Ordnung auf einer Geraden mit dem dritten Doppelpunkt liegen (s. § 3.), so schneiden sich die Verbindungslinien der 3 Paare, in welche dann die 6 Wendepunkte zerfallen, in einem Punkte der Geraden G, durch welchen die Verbindungslinie jener 2 Doppelpunkte geht. — Der Fall, wo die Curve eine Symmetrieaxe besitzt, liefert ein anschauliches Bild dieses Vorkommens.

Die einfache Form, auf welche oben die Wendepunktsgleichung gebracht wurde, führt auf einen wichtigen *Factor der Discriminante* derselben.

Man bemerkt, dass die Gleichung (2) durch $\varrho = 1$ befriedigt wird, wenn die Bedingung:

$$1 + p + q + r = 0$$

zwischen den Coefficienten erfüllt ist, und dass dann zugleich auch:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{W}{a-c}\right)$$

für $\varrho = 1$ verschwindet. Ist also $\varrho = 1$ eine Wurzel der umgestalteten, oder ist $\lambda = \sqrt[4]{b\,d}$ eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung für die Wendepunkte, so ist sie eine *Doppelwurzel* derselben. Der Ausdruck:

$$\varphi(\varepsilon) \equiv (a-c)\,(1+p+q+r) = (a-c)\,(\varepsilon^3 + \varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta + \alpha\gamma)$$

ist also ein Factor der Discriminante Δ_W von W. Da dieser jedoch eine rationale Function der Grösse $\varepsilon^4 = \delta$ ist, in welcher Δ_W rational ist, so müssen noch die 3 anderen Ausdrücke, die man durch Vertauschung von ε mit den 3 übrigen vierten Wurzeln von δ erhält, Factoren von Δ_W sein. Man erhält durch Ausrechnung des Products aller 4 Factoren:

$$\begin{aligned}(4)\quad V &\equiv \varphi(\varepsilon)\cdot\varphi(-\varepsilon)\cdot\varphi(\sqrt{-\varepsilon})\cdot\varphi(-\sqrt{-\varepsilon})\\ &= (a-c)^4\left[\alpha^2(\sqrt{\delta}+\gamma)^2 - \sqrt{\delta}(\sqrt{\delta}+\beta)^2\right]\left[\alpha^2(-\sqrt{\delta}+\gamma)^2 + \sqrt{\delta}(-\sqrt{\delta}+\beta)^2\right]\\ &= (a-c)^4\left[\alpha^4(\gamma^2-\delta)^2 + 4\alpha^2\delta(\beta\gamma-\delta)(\beta-\gamma) - \delta(\beta^2-\delta)^2\right].\end{aligned}$$

Indem für die α, β, γ, δ wieder die Werthe in a, b, c, d eingeführt werden, kann man zunächst den Factor $(b-d)^2$ ausscheiden. Denn es ist:

$$\alpha(a-c) = \frac{2}{3}(b-d);$$

$$(\beta^2-\delta)(a-c)^2 = (bc-ad)^2 - bd(a-c)^2 = (b-d)^2(bc^2-a^2d).$$

Man erhält so:

$$V = \left(\frac{b-d}{2}\right)^2\cdot\left[81\left(\frac{b-d}{2}\right)^2(\gamma^2-\delta)^2 + 36\,b\,d(\beta\gamma-\delta)(\beta-\gamma) - 4\,b\,d(bc^2-a^2d)^2\right].$$

Berücksichtigt man ferner, dass:

$$\gamma^2 - \delta = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{b-d}{2}\right)^2 - \frac{ac}{4}\left(b+d-\frac{ac}{2}\right) - 8\,b\,d\right],$$

und substituirt für β, γ und δ auch sonst ihre Werthe in a, b, c, d, so kommt nach einer Reduction:

$$\begin{aligned}V = \left(\frac{b-d}{2}\right)^2\cdot\Bigg\{&\left(\frac{b-d}{2}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{b-d}{2}\right)^2 - \frac{ac}{4}\left(b+d-\frac{ac}{2}\right)\right]^2 +\\ &+ 4\,b\,d\left[(bc-ad)(a-c)-(b-d)^2\right]\left[\left(\frac{b-d}{2}\right)^2 - 4\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\left(d-\frac{c^2}{4}\right)\right]\Bigg\},\end{aligned}$$

oder endlich indem man von der kanonischen Form der f mittelst der Formeln des § 2. zu der allgemeinen übergeht und die simultanen Invarianten in der dortigen Bezeichnung einführt:

$$V = R^2 \cdot U,$$

wo:

$$U = R^2 (R^2 - 2 D_{11} D_{22} D_{33})^2 + 4 d_{11} d_{22} d_{33} (R^2 + 2 D_{11} D_{22} D_{33}).$$

Die Symmetrie dieses eleganten Ausdrucks ist eine Bestätigung für die Richtigkeit unserer Rechnung*). Der gefundene Ausdruck ist Factor der Discriminante der allgemeinen Wendepunktsgleichung 6. Grades (§ 2.):

$$\frac{W}{2} \equiv R \cdot f_1 f_2 f_3 + 4 \vartheta_{12} \vartheta_{23} \vartheta_{31} = 0$$

— die übrigen leichter zu bestimmenden Factoren werden unten angegeben — und sein Verschwinden bewirkt, dass $\lambda = \sqrt[4]{b\,d}$ Doppelwurzel der Gleichung $W = 0$ wird. Aber für $\lambda = \sqrt[4]{\delta} = \varepsilon$ nimmt der Factor T_1 von T (s. oben) die Form $4 \cdot \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)$ an, und da auch $\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$ für $\lambda = \varepsilon$ den Factor $\varphi(\varepsilon)$ erhält, so schliesst man wie oben, dass *der Factor* $V = R^2 U$ *auch in der Discriminante* Δ_T *der Doppeltangentengleichung:* $T_1 T_2 = 0$ *auftritt.* Andererseits erfüllt der Werth $\lambda = \sqrt[4]{b\,d}$, der auch hier Doppelwurzel wird, für die Parameter Λ_1 und Λ_2 der Berührungspunkte einer Doppeltangente gesetzt, die zwischen denselben bestehende Gleichung (§ 2.):

$$\Lambda_1{}^2 \Lambda_2{}^2 = b\,d,$$

und da man diesen Schluss umkehren kann, so hat die Curve in diesem Falle eine in dem Punkt $\lambda = \sqrt[4]{b\,d}$ vierfach berührende Tangente (Undulationstangente). $U = 0$ *ist also die Bedingung für das Auftreten eines Undulationspunktes*, und der Factor U möge darum der „*Undulationsfactor*" der Discriminante heissen.

Um U in den Coefficienten der Curvengleichung $\Phi = 0$ selbst anzuschreiben, multiplicire man U mit R^{10}, und setze für $2 R^2 D_{ik}$ die Werthe aus § 4. ein. Der so umgestaltete Ausdruck bildet dann den Hauptbestandtheil der *Tactinvariante* der Curve 4. Ordnung und ihrer Hesse'schen Curve (deren Verschwinden aussagt, dass beide Curven sich berühren, Salmon-Fiedler, höh. Curven § 377.); die übrigen Factoren sind diejenigen, welche sogleich noch für Δ_W bestimmt werden.

U ist vom 6. Grade in den Coefficienten jeder der 3 quadratischen Formen f_1, f_2, f_3 und im Allgemeinen nicht in rationale Factoren zerfällbar, wie man z. B. erkennt, indem man $D_{33} = 0$ setzt. Dann

---

*) Den Zusammenhang zwischen den d_{ik}, D_{ik} und R findet man in § 2. angegeben.

scheidet sich der Factor R^2 aus (was im Allgemeinen nicht der Fall ist) und der übrig bleibende Factor ist durch Einführung der a, b, c, d leicht als unzerfällbar zu erkennen. Dagegen lässt sich, wie sogleich gezeigt werden wird, U in irrationale Factoren auflösen.

Die übrigen Factoren, welche die Discriminante Δ_W ausser V besitzt, lassen sich in folgender Weise ermitteln.

I. $W=0$ erhält beim Auftreten eines Rückkehrpunktes (§ 3., III) einen Doppelfactor, der $=\sqrt{f_1}$ ist, wenn etwa $D_{11}=0$ oder $b=\frac{a^2}{4}$ angenommen wird. Daher besitzt (vgl. d. vorstehenden Aufsatz) die Discriminante Δ_W den Factor D_{11}, und der Symmetrie wegen auch die Factoren D_{22}, D_{33}, deren Product:

$$D_{11} D_{22} D_{33}$$

der „*Cuspidalfactor*“ heissen möge.

II. $d_{11}=-d=0$ veranlasst die dreifache Wurzel $\lambda=0$ von $W=0$, daher (vgl. d. vorstehenden Aufsatz) Δ_W den Factor $d_{11}d_{22}d_{33}$ mindestens quadratisch besitzt. Dieser Factor, dessen Verschwinden im Allgemeinen anzeigt (§ 3., I), dass die Curve sich in eine Gerade und eine Curve 3. Ordnung spaltet, heisse „*Spaltungsfactor*“ 1. Art.

III. Endlich bemerke man, dass, wenn die Curve in 2 Kegelschnitte zerfällt, d. h. für $b=d$ oder $R=0$, W ein vollständiger Cubus wird, dass also 2mal 3 Wurzeln zusammenfallen, was dann den „*Spaltungsfactor* 2. *Art*“ R^4 ergiebt (vorstehende Note).

Das Product:

$$\Delta_W = U \cdot R^4 \cdot d_{11}{}^2 d_{22}{}^2 d_{33}{}^2 \cdot D_{11} D_{22} D_{33}$$

ist aber in den Coefficienten jeder der 3 quadratischen Formen vom $6+14=20$. Grade.

Andererseits muss die Discriminante der Wendepunktsgleichung in den Coefficienten:

$$(a-c),\quad \alpha(a-c),\quad \beta(a-c),\ \cdots\ \beta\delta(a-c)$$

der Gleichung 6. Grades $W=0$ vom Grade $2(6-1)=10$ sein. Jeder dieser Coefficienten ist aber in den Coefficienten der quadratischen Formen von höchstens dem 2. Grade, die Discriminante kann also den 20. Grad nicht übersteigen und das obige *Product* Δ_W *repräsentirt somit in der That die gesuchte Discriminante.*

§ 6.

Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten.

Man hat oben die Zerfällbarkeit der Gleichung $T=0$ in der kanonischen Form in zwei in den Coefficienten von T irrationale Factoren bemerkt. Aber die Eigenschaften der Doppeltangenten gestatten eine solche Zerfällung von T auch in der nicht kanonischen Form und zwar gleich in quadratische Factoren. Man kann nämlich den Ausdruck T durch Adjunction der Identität (§ 3. (I)) zwischen den f_i und d_{ik} in folgender Weise umgestalten:

$$\begin{aligned}\frac{T}{4} &= (f_2f_3d_{23}+f_3f_1d_{13}+f_1f_2d_{12})^2-f_2^2f_3^2d_{22}d_{33}-f_3^2f_1^2d_{33}d_{11}-f_1^2f_2^2d_{11}d_{22}\\ &= \frac{1}{4}\ (f_1\sqrt{d_{11}}+f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}})(-f_1\sqrt{d_{11}}+f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}})\\ &\quad\cdot(f_1\sqrt{d_{11}}-f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}})(\ f_1\sqrt{d_{11}}+f_2\sqrt{d_{22}}-f_3\sqrt{d_{33}})\\ &= \frac{1}{4}t_1t_2t_3t_4,\end{aligned}$$

wo nun jeder dieser quadratischen Factoren die Berührungspunkte einer Doppeltangente ergiebt. Wir benutzen diese Zerfällung zur Bildung der *Discriminante* Δ_T *der Gleichung für die Doppeltangenten.*

Die Discriminante eines Products ist bekanntlich gleich dem Product (Π) der Discriminante der einzelnen Factoren mal dem Quadrat des Products (P) der Resultanten derselben, wenn man sie zu je zweien combinirt.

Was zunächst die Grösse P angeht, so lässt sich die Resultante aus je zweien der 4 Factoren von T, z. B. aus den beiden ersten t_1 und t_2, in die Form bringen:

$$\text{Res. }(t_1, t_2) = d_{11}\cdot\text{Res. }(f_1, f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}}) = d_{11}\cdot\text{Res. }(f_1, f_i),$$

wo für einen Augenblick:

$$f_i = f_2\sqrt{d_{22}}+f_3\sqrt{d_{33}}$$

gesetzt ist. Nun ist aber (Clebsch, bin. Formen p. 201) in den Bezeichnungen des § 2. geschrieben:

$$\begin{aligned}\text{Res. }(f_1, f_i) &= D_{11}D_{ii}-D_{i1}^2\\ &= D_{11}(D_{22}d_{22}+2D_{23}\sqrt{d_{22}d_{33}}+D_{33}d_{33})-(D_{12}\sqrt{d_{22}}+D_{13}\sqrt{d_{33}})^2\\ &= 2\,d_{22}d_{33}-2\,d_{23}\sqrt{d_{22}d_{33}}\,.\end{aligned}$$

Daher endlich:

$$\text{Res. }(t_1, t_2) = 2d_{11}\sqrt{d_{22}d_{33}}\,(\sqrt{d_{22}d_{33}}-d_{23})\,.$$

Die Resultante von t_3 und t_4 unterscheidet sich hiervon nur durch das Vorzeichen des Wurzelausdrucks, und man hat also:

$$\text{Res. }(t_1, t_2)\cdot\text{Res. }(t_3, t_4) = -\,4d_{11}^2d_{22}d_{33}\cdot 2R^2\cdot D_{11}$$

und somit das Product P aller 6 Resultanten bis auf einen Zahlenfactor

$$P = (d_{11}d_{22}d_{33})^4D_{11}D_{22}D_{33}\cdot R^6.$$

Wir wenden uns zur Bildung des Products Π der 4 Discriminanten. Man erhält diese aus der Discriminante von t_1:

$$\text{Discr.}(t_1) = D_{11}d_{11} + D_{22}d_{22} + D_{33}d_{33} + 2\sqrt{d_{22}d_{33}}\,D_{23} + 2\sqrt{d_{33}d_{11}}\,D_{31} + 2\sqrt{d_{11}d_{22}}\,D_{12}$$

durch paarweise Aenderung der Wurzelvorzeichen. Aber die Ausrechnung des Products aller vier lässt sich vermeiden, wenn man bedenkt, dass seiner Bedeutung nach dieses Product Π von dem oben gefundenen Undulationsfactor U nur um einen unwesentlichen Factor sich unterscheiden kann. Wir können Letzteren durch eine Abzählung bestimmen.

T ist in den Coefficienten jeder der 3 quadratischen Formen f vom 4. Grade, Δ_T muss also in den Coefficienten beispielsweise von f_1 vom $4 \cdot 2\,(8-1) = 56$. Grade sein. Nun ist aber P^2 vom Grade $2 \cdot 24 = 48$, U vom 6. Grade, es fehlt also in Δ_T noch ein Ausdruck 2. Grades. T enthält aber den Factor R (§ 2. (9)) explicite, und die Discriminante Δ_T muss demnach R zur 14. Potenz enthalten. Jener fehlende Factor ist also R^2 und man hat:

$$\Delta_T = \Pi \cdot P^2 = R^{14} \cdot U \cdot (d_{11}d_{22}d_{33})^8 \cdot (D_{11}D_{22}D_{33})^2,$$

wo denn also auf Π das Product der Discriminante der 4 Factoren t

$$\Pi = R^2 \cdot U = V$$

kommt.

Mit Hülfe dieser Zerfällung des Undulationsfactors U (oder eigentlich von V) in 4 irrationale Factoren kann man sofort *die reellen (gemeinen), isolirten und imaginären Doppeltangenten, bez. Undulationstangenten, welche eine durch ihre Gleichung gegebene Curve besitzt, angeben.*

Für $d_{11} = d_{22} = d_{33}$ und $d_{12} = d_{23} = d_{31}$ werden die Discriminanten von t_2, t_3 und t_4 einander gleich und verschwinden für einen leicht angebbaren Werth des Verhältnisses $\frac{d_{11}}{d_{12}}$, was dann einer Curve mit 3 Undulationstangenten entspricht.

Sind von den Grössen d_{ik} eine oder zwei negativ, d. h. fallen ein oder zwei Eckpunkte des Fundamentaldreiecks ins Innere des Kreises, so werden 2 Doppeltangenten conjugirt imaginär. Das Gleiche tritt ein, wenn etwa f_1 und f_2 Formen mit conjugirt imaginären Coefficienten, d. h., wenn zwei Doppelpunkte conjugirt imaginär geworden sind (s. § 8.). Dann werden auch D_{11} und D_{22}, D_{13} und D_{23} und ebenso d_{11} und d_{22} je conjugirt imaginär, während D_{33}, D_{12} und d_{33} reell bleiben, so dass 2 Doppeltangenten conjugirt imaginär werden.

Wenn endlich die Curve einen Selbstberührungs- oder Osculationspunkt besitzt, so bestimmen sich die Factoren des Undulationsfactors ohne Mühe aus den hierfür aufgestellten Gleichungen des § 3., III. Statt der Gleichung $T = 0$ (für welche sich indess die Rechnung bequemer gestaltet) hätte man auch die von dem Factor R befreite Gleichung (§ 2.):

$$\mathsf{T} = \frac{T}{R} = 0$$

als Bestimmungsgleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten ansehn können. Uebrigens unterscheidet sich die Discriminante Δ_{T} von Δ_T bloss um den Factor R^{14}, d. h. die *Discriminante der von dem überflüssigen Factor R befreiten Doppeltangentengleichung erhält den Ausdruck:*

$$\Delta_{\mathsf{T}} = U(d_{11}\,d_{22}\,d_{33})^8 \cdot (D_{11}\,D_{22}\,D_{33})^2.$$

Hier bezieht sich dann also der Factor U auf das Zusammenfallen der Berührungspunkte auf einer Doppeltangente, alle anderen Factoren auf das Zusammenfallen der Berührungspunkte verschiedener.

Diese Unterscheidung zwischen zwei Gattungen von Factoren der Discriminante der Doppeltangentengleichung, die hier ein näheres Interesse kaum gewährt, wird von Bedeutung bei einer anderen Auffassung der Frage. Ich entnehme einer brieflichen Mittheilung von Herrn Zeuthen die Bemerkung, dass man die Frage nach den Factoren der Discriminante der Doppeltangenten- und Wendepunktsgleichung — unter Beschränkung auf ein einfach unendliches Curvensystem — auch für allgemeine Curven 4. Ordnung mit etwa vorhandenen (Plücker'schen) Singularitäten beantworten kann. Man hat dann nur unter der Gleichung für die Doppeltangenten etc. die für *eine Coordinate* der betreffenden Singularität zu verstehen; die auftretenden Factoren, deren Zahl und Bedeutung eine wesentlich andere wird, zerfallen dann für die Doppeltangentengleichung in die oben angegebenen 2 Gattungen. Zur ersten Gattung gehört, wie ich den von Herrn Zeuthen mir mitgetheilten Formeln entnehme, u. A. ein Factor, den man „Selbstberührungsfactor" nennen könnte. Für unsere Darstellung der Gleichung der Curve ist das Auftreten eines Selbstberührungspunktes an *zwei* Bedingungsgleichungen geknüpft, deren Verschwinden — ohne gleichzeitiges Zusammenfallen zweier Eckpunkte des Coordinatendreiecks — eine andere Bedeutung besitzt (§ 3., III.), so dass hier ein „Selbstberührungsfactor" im eigentlichen Sinne nicht auftritt.

§ 7.

Vergleichung der Discriminanten beider Gleichungen.

Ein Vergleich der Discriminante der Wendepunkts- und der Doppeltangentengleichung zeigt zunächst, dass sämmtliche in Δ_W auftretende Factoren, bis auf R, auch in Δ_{T} vorkommen. Verschwindet also einer dieser Factoren, so erhalten W und T gleiche Wurzeln, was denn je nach der Vielfachheit des verschwindenden Factors eine Aenderung in der Zahl der reellen Wurzeln hervorbringt oder nicht. Nach den Bemerkungen des vorstehenden Aufsatzes sind jedoch bei der Beurtheilung dieser Aenderung noch andere Umstände mit in Betracht zu ziehen; diese sollen im Nachfolgenden untersucht werden.

I. Was zunächst den Undulationsfactor betrifft, so kommt derselbe einfach in Δ_W und Δ_T vor; verschwindet er, so ändert sich also die Zahl der reellen Wendepunkte und Berührungspunkte um 2. Dass nun mit dem Gewinn (oder Verlust) von 2 *reellen* Wendepunkten immer ein solcher von 2 *reellen* Berührungspunkten verbunden ist, erkennt man daraus, dass für $U=0$ die kleinen Zuwächse σ der 2 gleichen Wurzeln $\lambda=\sqrt[4]{b\,d}$ der Gleichung $W=0$ und die Zuwächse τ der gleichen Wurzeln $\lambda=\sqrt[4]{b\,d}$ der Gleichung*) $T=0$ sich nur um einen *Zahlenfactor* unterscheiden.

In der That, es bestimmen sich σ und τ aus den Gleichungen:

$$\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda^2}\right]+\left[\delta W\right]=0,\quad \frac{\tau^2}{2}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial\lambda^2}\right]+\left[\delta T\right]=0,$$

wo die Variationen sich auf alle Coefficienten in W und T erstrecken, und die eckigen Klammern um einen Ausdruck bedeuten, dass $U=0$, d. h. (für $\varepsilon=\sqrt[4]{b\,d}$):

$$\varepsilon^3+\varepsilon^2\alpha+\varepsilon\beta+\alpha\gamma=0$$

und $\lambda^4=b\,d$ angenommen wird. Nun ist aber:

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda^2}\right]=-12\left[\lambda^2 K\right];\quad \left[\frac{\partial^2 T}{\partial\lambda^2}\right]=-16\left[\lambda^2 K\right]^2;$$

ferner ist:

$$[\delta T]=[4\lambda^2 K]\cdot[\delta W],$$

und somit:

$$3\sigma^2=\tau^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial W}{\lambda^2 K}\right],$$

wo denn ersichtlich die Zuwächse σ und τ gleichzeitig reell und imaginär werden.

Da bezüglich des betrachteten Undulationspunktes keinerlei beschränkende Voraussetzung gemacht wurde, so gilt die folgende aus Vorstehendem sich ergebende Bemerkung ganz allgemein, dass nämlich *die Geschwindigkeit, mit welcher, beim Durchgang durch den Fall einer Curve mit Undulationspunkt, die Berührungspunkte der Doppeltangenten sich von einander entfernen, zu derjenigen der Wendepunkte sich wie*

$$\sqrt{3}:1$$

*) Statt der Gleichung T möge in der Folge der Bequemlichkeit wegen die für alle Factoren ausser R äquivalente Gleichung T genommen werden (§ 6.).

verhält. Vorausgesetzt ist hierbei selbstverständlich, dass die Deformation der Curve *stetig* vor sich geht.

II. Verschwindet der *Cuspidalfactor*, indem z. B. $D_{11} = b - \frac{a^2}{4} = 0$ wird, so wird $f_1 = \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2$ Factor von T (§ 2. (19)), aber auch von $\vartheta_{12} = 2K$, und also von L (wegen § 2. (18ᵃ)). Demnach verschwindet nicht nur T selbst, sondern auch die erste Variation von T, welche dem Werth $\frac{a^2}{4} + \delta b$ von b entspricht, so dass sich die zugehörigen Zuwächse τ von λ (vgl. d. vorstehenden Aufsatz) aus einer quadratischen Gleichung von der Form:

$$\frac{\tau^2}{2}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}\right]_{\lambda = -\frac{a}{2}} + (\delta b)^2 \cdot T_1 = 0,$$

berechnen, wo T_1 und die eckige Klammer Constante sind. Passirt also δb den Werth Null stetig, so ändert τ^2 sein Vorzeichen nicht und die Zahl der reellen Wurzeln bleibt dieselbe.

Durch das Verschwinden des Cuspidalfactors bleibt also in T die Zahl der reellen Wurzeln ungeändert, während die von W um 2 zu- oder abnimmt, weil dieser Factor einfach in Δ_W auftritt.

III. Das Verschwinden des Spaltungsfactors veranlasst für W keine Aenderung in der Realität der Wurzeln, weil, beispielsweise für ein verschwindendes d, die zugehörige Wurzel λ sich dreifach ausscheidet. In T tritt, wenn die Zahl der reellen Wurzeln überhaupt sich ändert, eine Vermehrung oder Verminderung immer um 4 ein.

§ 8.

Fall imaginärer Doppelpunkte.

In den vorstehenden Paragraphen werden die Coefficienten der Gleichungen für Wendepunkte und Doppeltangenten als reell vorausgesetzt. Es ist nun bemerkenwerth, dass dies auch dann noch gestattet ist, wenn die Coefficienten von zweien der 3 quadratischen Formen, z. B. von f_1 und f_2, conjugirt imaginär sind. Dann werden auch die Coordinaten x_1 und x_2 conjugirt imaginär, und sofern man die homogenen Coordinaten eines Punktes den Abständen desselben von den Seiten eines Coordinatendreiecks gleich (oder von denselben um reelle Constante verschieden) setzt, werden dann auch 2 Seiten des Coordinatendreiecks und die 2 darauf liegenden Doppelpunkte der Curve imaginär, ohne dass es diese selbst wird. Setzt man:

$$\varrho \cdot y_1 = f_1 = \varphi_1 + i\varphi_2; \quad \varrho \cdot y_2 = f_2 = \varphi_1 - i\varphi_2; \quad \varrho \cdot y_3 = f_3,$$

wo $i = \sqrt{-1}$ und die φ und f_3 quadratische Functionen mit reellen Coefficienten sind, so kann man diese wieder in einer kanonischen

Form derart annehmen, das $f_3 = 0$ und in f_1 und f_2 die Coefficienten von λ^2 wie früher $= 1$, a und c dagegen ebenso wie b und d conjugirt imaginär sind. Dann werden aber die 4 Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (§ 6. ff.), aus denen sich die Gleichungen $W = 0$, $T = 0$ u. s. w. zusammensetzen, wieder reell und alle auf die Realität dieser Grössen gestützten Schlüsse, d. h. der Inhalt der vorstehenden Paragraphen fahren fort zu gelten. Um die so dargestellten Curven construiren zu können, führe man reelle rechtwinklige Coordinaten ξ, η ein durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{\varphi_1}{f_3}; \quad \eta = \frac{\varphi_2}{f_3},$$

so wird:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \xi + i\eta : \xi - i\eta : 1;$$

ferner werden die durch quadratische Transformation aus y erhaltenen Coordinaten x:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2} : \frac{\xi + i\eta}{\xi^2 + \eta^2} : 1 = \frac{1}{\xi + i\eta} : \frac{1}{\xi - i\eta} : 1 =$$
$$= \xi' + i\eta' : \xi' - i\eta' : 1.$$

Daher stehen die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η der y-Ebene mit den Coordinaten $\xi'\eta'$ der durch quadratische Transformation aus der y-Ebene hervorgegangenen x-Ebene in der Beziehung:

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}; \quad \eta' = \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

eine Transformation, die, wenn man $\xi'\eta'$ wieder als rechtwinklige Coordinaten deutet, bekanntlich durch reciproke Radienvectoren hergestellt wird. Wird also eine Curve 4. Ordnung auf diesem Wege aus einem Kegelschnitte abgeleitet, *so fahren für diese alle die vorstehenden Betrachtungen fort zu gelten, obgleich die zu Grunde gelegte Darstellung der Coordinaten nicht mehr reell ist.* Natürlich gilt das Gleiche von Curven, die durch reelle *Projection* aus einer solchen entstanden sind, wobei die imaginären Kreispunkte, welche für die Transformation durch reciproke Radienvectoren als Ecken des Coordinatendreiecks gelten müssen, sich in das Endliche hereinschieben. Lässt man diese schliesslich noch zusammenrücken, so hat man den Fall einer Curve mit Selbstberührungspunkt als Uebergang zu der mit 2 reellen Doppelpunkten.

§ 9.

Graphische Darstellung.

Bei den mannigfaltigen Anwendungen, welche die rationalen Curven 4. Ordnung in der Mechanik erfahren haben und in gewissen Zweigen derselben, wie der Kinematik, allem Anscheine nach noch erfahren werden, spielen die gestaltlichen Verhältnisse eine hervorragende Rolle.

Es scheint daher der Mühe nicht unwerth, die verschiedenen Formen, deren eine Curve 4. Ordnung fähig ist, zu einem übersichtlichen Schema zusammenzustellen, in welches die bekannten sich bequem einreihen lassen. Ich werde anknüpfend an eine bekannte Constructionsmethode (Salmon-Fiedler höh. Curven Art. 284) einen kurzen Ueberblick über das Gebiet der Gestalten der rationalen Curven 4. Ordnung geben, indem ich einige Betrachtungen über die Construction der Doppeltangenten vorausschicke.

Man denke sich in der y-Ebene den Kegelschnitt φ (§ 3., wir werden ihn später als Kreis annehmen) und ein reelles Dreieck gegeben, dessen Winkel $A_1 A_2 A_3$ seien; die Coordinaten seien gleich den Abständen von den Seiten desselben; man ordne der Ebene y die Ebene x durch quadratische Transformation:

$$\frac{y_i}{y_k} = \frac{x_k}{x_i}$$

zu. Dann erhält man die Curve Φ, indem man die beiden Ebenen sowie die Coordinatendreiecke zusammenfallen lässt, den Punkt y von φ mit den Eckpunkten $A_1 A_2 A_3$ dieses Dreiecks verbindet und die Winkel, die jeder dieser Strahlen mit den 2 durch den Eckpunkt gehenden Seiten bildet, je mit einander vertauscht, der so erhaltene Punkt x gehört dann der Curve Φ an. Der unendlich fernen Geraden der einen Ebene:

$$y_1 \sin A_1 + y_2 \sin A_2 + y_3 \sin A_3 = 0$$

entspricht dann in der anderen der dem Coordinatendreieck umschriebene Kreis $(\varkappa)$:

$$\varkappa \equiv x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0,$$

und man findet also die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten von Φ durch Construction der Bilder der Schnittpunkte von φ mit $\varkappa$.

Den Wendepunkten und Doppeltangenten an Φ entsprechen osculirende bez. doppelt berührende Kegelschnitte zu φ, welche durch die Eckpunkte $A_1 A_2 A_3$ gehen. Aber während die Gleichung für die Ersteren im Allgemeinen durch Quadratwurzeln nicht auflösbar, also die Construction der Wendepunkte durch Zirkel und Lineal nicht möglich ist, lassen sich die Doppeltangenten aus der Bemerkung construiren, dass die Verbindungslinien der Berührungspunkte, deren Gleichungen (§. 6.):

$$y_1 \sqrt{d_{11}} \pm y_2 \sqrt{d_{22}} + y_3 \sqrt{d_{33}} = 0,$$
$$y_1 \sqrt{d_{11}} \pm y_2 \sqrt{d_{22}} - y_3 \sqrt{d_{33}} = 0$$

sind, sich paarweise auf den Seiten des Coordinatendreiecks schneiden, und zwar in Punkten, die offenbar sowohl zu den Eckpunkten des Dreiecks wie zu dessen Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt φ harmonisch gelegen sind (geometrisch beweist diesen Satz v. Staudt, Beiträge p. 238). Ueberträgt man die so erhaltenen Punkte von φ auf Φ, so erhält man die Berührungspunkte der reellen Doppeltangenten, bez. die isolirten Doppeltangenten, Letztere aus der bekannten Construction*) eines durch 3 feste Punkte gehenden Kegelschnitts, der durch die imaginären Schnittpunkte einer Geraden mit einem anderen Kegelschnitt geht.

Instructiv ist der Fall zweier Rückkehrpunkte, wo dann nur eine Doppeltangente vorhanden ist. Den Uebergang derselben vom Reellen zum Imaginären bildet die Undulationstangente, der ein 4-punktig berührender Kegelschnitt entspricht. Hält man diejenigen Seiten des Coordinatendreiecks fest, welche φ berühren, und lässt die dritte so sich bewegen, dass immer eine Curve mit Undulationspunkt entsteht, so umhüllt dieselbe einen jene 2 Seiten ebenfalls berührenden Kegelschnitt.

Auf diese Fälle beziehen sich die Zeichnungen Taf. II, Fig. 1, 2. Fig. 5 (Taf. II) zeigt eine Curve mit zerfallendem Wendekegelschnitt (und Osculationspunkt), für welche 4 Wendepunkte in gerader Linie liegen.

Zur *Aufzählung der verschiedenen Curven 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten übergehend* schicke ich voraus, dass nach Früherem in das Bereich unserer Darstellung sowohl Curven mit Selbstberührungspunkt und Osculationspunkt als auch Curven mit conjugirt imaginären Doppelpunkten fallen (§ 3., 6., 8.).

Es mögen nun als zu demselben Typus gehörig alle diejenigen Curvenformen angesehen werden, welche durch stetige Deformation (die Durchführung durch das unendlich Weite mit eingerechnet) in einander überführbar sind, ohne dass der Charakter einer der 3 Doppelpunkte (reell, imaginär oder isolirt zu sein) geändert wird. Zu demselben Typus gehören also namentlich alle durch Centralprojection aus einander ableitbaren Curven. Wir wollen nun das Coordinatendreieck der x mit dem der y zusammenfallen lassen — da man durch Projection jedes beliebige Dreieck in ein gegebenes überführen kann — und mit der gleichen Berechtigung auch den Einheitspunkt in den Schnittpunkt der Halbirungslinien der 3 Winkel verlegen, was zu der im Anfang dieses § angegebenen Constructionsmethode führt. Aber man kann die Zahl der zu construirenden Formen noch mehr beschränken. Denn, hat man mit diesem Dreieck auf alle Weisen einen Kegelschnitt zu combiniren, so kann man doch sich darauf beschränken, entweder: das Dreieck fest anzunehmen und Form und Lage des Kegelschnittes gegen dasselbe zu verändern, oder: den Kegelschnitt z. B. in Form eines Kreises, in der Ebene fest zu legen, und dem Dreieck alle möglichen Formen und Lagen gegen denselben zu ertheilen. Wir wählen der Uebersichtlichkeit wegen für den Fall des reellen Coordinatendreiecks

---

*) v. Staudt, Geometrie der Lage, p. 185 ff.

die letzte Erzeugungsweise, wobei dann 2 Dreiecke denselben Typus ergeben, wenn das eine in das andere überführbar ist, ohne dass zu den vorhandenen Schnittpunkten desselben mit dem Kreis neue hinzutreten oder eine Ecke des Dreiecks von dem Kreis überschritten wird. Hier kann es sich jedoch ereignen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks unendlich gross wird, indem die unendlich ferne Gerade dasselbe zu theilen kommt.

Man erhält so (abgesehen von den Grenzfällen) 9 wesentlich verschiedene Typen. Sie sind durch schematische Figuren*) auf der beigegebenen Tafel I (1—9) veranschaulicht, je mit den Kreisen φ, aus welchen sie entstanden sind. Daran reihen sich die 8 Uebergangstypen (1^a—9^a) mit Selbstberührungspunkten bez. isolirten consecutiven Doppelpunkten**), die sich ebenso wie bei einem Fundamentaldreieck mit getrennten Ecken durch Abtragen gleicher Winkel aus dem Kreise φ construiren lassen. Zur leichteren Vergleichung ist je der Grenzfall mit der gleichen Nummer bezeichnet, wie der Fall, aus dem er hervorgegangen (bei 7^a geschieht der Uebergang aus (7) dadurch, dass die Begrenzungspunkte der Grundlinie des Dreiecks zu beiden Seiten ins Unendliche rücken). Endlich kommen hierzu noch die 2 Fälle (Taf. II, 1^b, 5^b) eines Osculationsknotens, für welche die 3 Eckpunkte des Coordinatendreiecks consecutive Punkte eines Curvenelements sind.

Die Construction der Curven mit Osculationsknoten ergiebt sich durch einen Grenzübergang aus der für ein endliches Fundamentaldreieck, indem man dasselbe etwa gleichschenklig, mit den Eckpunkten auf einem festen Kreis, annimmt und die Länge $\overline{AB} = 2\delta$ (Taf. II, Fig. 3) der Grundlinie gegen Null convergiren lässt. Verbindet man den Punkt P und dessen Bild p je mit A und B, so ist $\sphericalangle\, \overline{ApB} - 2\varphi = \sphericalangle\, \overline{APB}$. Ist nun v der Neigungswinkel, den der Strahl $r = \overline{BP}$ in der Grenze mit $\overline{AB}$ bildet, so ist $-v$ der des Strahles $R = \overline{Bp}$ in der Grenze; ferner hat man, wenn a der Radius des durch die 3 Eckpunkte ABC gehenden Kreises $\varkappa$ ist:

$$\lim\,(\varphi) = \lim\left(\frac{\delta}{2a}\right);$$

sowie:

$$\lim\,(R \sin\alpha) = \lim\,(2\delta \sin v),$$
$$\lim\,(r \sin(\alpha + 2\varphi)) = \lim\,(2\delta \sin v),$$

wenn $\sphericalangle\, \overline{APB} = \alpha$ gesetzt ist. Eliminirt man α, so kommt:

$$\lim\left(\frac{R}{r}\right) = \lim\left(\frac{2a}{2a - \frac{r}{\sin v}}\right).$$

---

*) Die Curven sind, wie dies schon der angewandte Massstab mit sich bringt, nur in den Hauptzügen richtig.

**) Isolirte Punkte sind durch kleine Kreise bezeichnet.

Man erhält daher P aus p durch folgende Construction: Das Fundamentaldreieck werde durch 3 consecutive Punkte in A des Kreises $\varkappa$ mit $\overline{OA} = a$ als Halbmesser (Taf. II. Fig. 4) dargestellt. Man verbinde p mit A, trage den Winkel v auf der anderen Seite der Tangente in A ab und mache $\overline{Ap'} = \overline{Ap}$. Man errichte nun $qp' \perp \overline{Ap'}$, mache $\overline{DQ} = \overline{Aq}$ und ziehe $\overline{DP} \parallel \overline{Qp'}$, dann ist $\overline{AP} = R$ und P der gesuchte Punkt.

Auf diese Weise sind die Curven 1^b und 5^b entstanden. Der Typus 1^b ist merkwürdig wegen der 3 consecutiven isolirten Punkte, welche die Curve in A hat.

Die dem Auftreten von Rückkehrpunkten entsprechenden Typen lassen sich leicht aus denen mit wirklichen Doppelpunkten durch Zuziehen der Schleifen ableiten und sind deshalb übergangen worden.

Die Typen 1, 4 und 5 können 3 Symmetrieaxen besitzen und gehören dann dem Geschlecht der *Hypotrochoiden* (im Grenzfall des Rückkehrpunktes: den *Hypocycloiden*) an, welche ein Punkt beim Abrollen eines Kreises in einem anderen von dreifachem Durchmesser beschreibt.

Zu den Typen 6^a bez 7^a zählen die *Conchoiden* (6^a vermöge einer Collineation, durch welche der Selbstberührungspunkt ins Unendliche rückt).

Um die Typen mit imaginären Doppelpunkten zu erhalten, nehme man das Coordinatendreieck als fest, den Kegelschnitt aber in Lage und Form beweglich an. Man verlege die beiden imaginären Doppelpunkte in die unendlich fernen Kreispunkte, die quadratische Transformation reducirt sich dann auf die Verwandlung mittelst reciproker Radienvectoren und man erhält somit je nach Form und Lage des Kegelschnitts 4 verschiedene Typen, indem man Ellipse und Hyperbel mit dem Inversionscentrum innerhalb und ausserhalb combinirt (Taf. II, Nr. I—IV). Die der Parabel entsprechenden Curven, die im Inversionscentrum einen Rückkehrpunkt haben würden, sind hier übergangen worden, ebenso wie die Curven mit imaginären Rückkehrpunkten, die aus der Annahme des Inversionscentrums in einem Brennpunkte des Kegelschnitts entstehen.

Zu Typus I gehört die *Fusspunktscurve der Ellipse*, zu III die *Lemniscate*, zu II bez. IV die *Pascal'sche Schneckenlinie* (im Grenzfall die *Cardioide*).

München, im März 1877.