Note über die Integration totaler Differentialgleichungen.

Von

P. du Bois-Reymond in Tübingen.

1.

Die Auflösung der Differentialgleichung

$$0 = Xdx + Ydy + Zdz,$$

in der $X : Y : Z \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, ist neuerdings wieder zur Sprache gekommen, weshalb es mir gestattet sein mag, früher darüber Beigebrachtes*) durch einige Bemerkungen zu vervollständigen.

Bei drei Veränderlichen hat man den Vortheil der geometrischen Anschauung, und so habe ich damals mit Hülfe gewisser Constructionen die älteren Regeln für die Auflösung jener Differentialgleichung und einige neue nach übrigens sehr natürlich sich darbietenden allgemeinen Gesichtspunkten darzulegen gesucht. Man gelangt auf höchst einfache Weise zur Euler'schen Auflösungsmethode durch zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen die zweite erst aufgestellt werden kann, wenn die erste gelöst ist. Diese Methode habe ich in meinen Veröffentlichungen nicht geometrisch abgeleitet, was ich hier nach einem indessen etwas abweichenden Verfahren nachtragen werde. Weiter folgt ebenso leicht die Natani'sche Methode der Auflösung durch die Integrale zweier zugleich aufstellbarer Differentialgleichungen. Endlich eine dritte Methode, bei welcher die Auflösung einer Differentialgleichung genügt. Hierzu ist kürzlich noch ein Verfahren gekommen**), welches der Euler'schen Methode verwandter ist als der eben erwähnten zweiten und dritten Methode, und welches ich deshalb zugleich mit jener aus der geometrischen Vorstellung ableiten will.

---

*) *Beiträge zur Integration der partiellen Differentialgleichungen*, Leipzig 1864 bei Ambr. Barth, § 1., und *Ueber die Integration linearer totaler Differentialgleichungen* etc., Borch. Journ. Bd. 70.

**) Bertrand, Comptes Rendus.

2.

Sind dx, dy, dz die Projectionen eines Elements ds einer Curve auf einer Fläche der Schaar $\varphi(x, y, z) = c$, so genügen sie stets der Gleichung:

$$M d\varphi = X dx + Y dy + Z dz = 0 \tag{1}$$

und noch einer anderen ganz beliebigen Gleichung:

$$U dx + V dy + W dz = 0. \tag{2}$$

Man kann die Sache aber auch so darstellen, dass die Projectionen dx, dy, dz den Gleichungen

$$dx : dy : dz = X_1 : Y_1 : Z_1 \tag{3}$$

genügen, wo X_1, Y_1, Z_1 die Bedingung:

$$X X_1 + Y Y_1 + Z Z_1 = 0 \tag{4}$$

identisch erfüllen.

Nun seien

$$\begin{cases} \alpha = \psi\,(x, y, z), \\ \beta = \psi_1(x, y, z) \end{cases} \tag{5}$$

die Integrale von (3). Sie bedeuten eine räumliche (zweifach unendliche) Schaar von Curven, die sämmtlich auf den Oberflächen $\varphi(x, y, z) = c$ liegen. Differentiirt man die Gleichungen (5) so, dass man sich vorstellt, man bleibe nicht auf einer Curve der räumlichen Schaar, sondern bewege sich auf einer Transversalen, die aber auch auf der Oberfläche $\varphi(x, y, z) = c$ liegen soll, so dass also die dx, dy, dz der Gleichung (1) genügen, und eliminirt aus $d\alpha = d\psi$, $d\beta = d\psi_1$ und (1) die Differentiale dx, dy, dz, so folgt eine Gleichung der Form:

$$A d\alpha + B d\beta = 0, \tag{6}$$

die, weil der Gang der transversalen Curve nur der Beschränkung unterlag, eine Fläche $\varphi = c$ nicht zu verlassen, nach Elimination von z. B. y und z kein x mehr enthalten darf. Eben weil die Gleichung $A d\alpha + B d\beta = 0$ sämmtlichen Curven (5) auf einem Individuum $\varphi = c$ angehören muss. Man wird also aus (6) eine Beziehung zwischen α und β erhalten, die mit (5) den Ort der Curven des Systems (5) giebt, also die Fläche $\varphi = c$.

Setzt man in (3) $Z_1 = 0$, so kommt die Euler'sche Methode zum Vorschein, setzt man für X_1, Y_1, Z_1 die Grössen $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$, $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$, so erhält man die Methode des Herrn Bertrand.

3.

Man hat versucht, die drei ersten im Art. 1. erwähnten Methoden in Bezug auf ihre Brauchbarkeit unter einander zu vergleichen*). Eine derartige Untersuchung halte ich, wenn sie glückt, für sehr nützlich, aber auch für sehr schwierig.

Nach Durchlesung der ersten Hälfte meines Aufsatzes (Borch. Journ. Bd. 70, *Ueber die Integration* etc.) wird man mir zugeben, dass man zahllose ähnliche Regeln aus den allgemeinen Principien ableiten kann, und dass jene drei Methoden nur durch den einfachen Ausdruck, den sie gestatten, hervorragen. Wer ausserdem, wie ich es gethan, die Methoden an zahlreichen möglichst verschiedenartigen Beispielen prüfte, würde mir Recht geben, wenn ich es für misslich erachte, a priori einer dieser Regeln in allen oder doch den weitaus meisten Fällen den Vorzug zu ertheilen. Das richtige Verfahren ist, im gegebenen Falle der allgemeinen Grundsätze eingedenk zu sein, und sie der Beschaffenheit der gerade vorliegenden Differentialgleichung möglichst anzupassen, um zu sehen, ob sie vielleicht zugänglich ist. Ich habe den Eindruck behalten, dass von den angeführten einfachsten drei Regeln bei den naheliegenderen Beispielen die Natani'sche häufig rasch zum Ziele führt, wo die Euler'sche Schwierigkeiten macht, und dass endlich in manchen Fällen die dritte Methode oder ihr ähnliche Kunstgriffe eine Integration gestatten, während die beiden anderen zu gleichem Zwecke erst eine vorgängige, manchmal nicht naheliegende Veränderung der totalen Differentialgleichung durch geeignete Substitutionen erheischen. Im Allgemeinen aber scheinen die Methoden entweder alle drei auf mehr oder weniger Umwegen zum Ziele zu führen, oder es ist mit keiner etwas anzufangen. Eine Untersuchung, welche von den drei Methoden die Mehrzahl günstiger Chancen für sich habe, schiene mir ein gewagtes Unternehmen. Mehr Erfolg als dergleichen Speculationen versprächen wiederholte Untersuchungen besonderer Fälle und tafelartige Zusammenstellungen ihrer Ergebnisse, für welche saure Arbeit das Problem selbst aber schwerlich Interesse genug bietet. Das in diesem Artikel Gesagte will ich an einem Beispiele erläutern.

4.

Eine besondere Behandlung gestatten die totalen Differentialgleichungen $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, wenn die Coefficienten X, Y, Z nur von zwei Veränderlichen oder von zwei Combinationen der Veränderlichen abhängen, und unter diesen wollen wir wieder die Gleichungen homogenen Charakters herausgreifen, worunter ich diese verstehe:

*) A. Weiler, Schlömilch's Zeitschrift Jahrg. 1875, kleinere Mittheilungen p. 78.

$$(1)\qquad \varphi_0(u,v)\,dx+\varphi_1(u,v)\,dy+\varphi_2(u,v)\,dz=0,$$

wo

$$u=\frac{y}{x},\quad v=\frac{z}{x}.$$

Um die Gleichung

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)-Y\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0$$

zu bilden, hat man:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}\right), \\ \dfrac{\partial X}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial x}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial v}+u\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}+v\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\right), \\ \dfrac{\partial X}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial u}+u\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}+v\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Wenn die Gleichung (1) nicht transformirt wird und keine besonderen Functionen φ eingeführt werden, so ist sie weder für die erste und zweite noch für die vierte Methode des Art. 1. zugänglich, da von den Functionen φ_0, φ_1, φ_2 zwei beliebig sind. Aber mit der dritten Methode lässt sie sich behandeln.

Denn man führe $y=ux$, $dy=udx$ ein, so hat man die Gleichung:

$$\varphi_0(u,v)\,dx+\varphi_1(u,v)\,udx+\varphi_2(u,v)\,dz=0$$

zu integriren, indem man u als eine Constante ansieht. Zu diesem Zwecke setzt man $z=vx$ und hat die Gleichung:

$$\frac{dx}{x}(\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2)+\varphi_2dv=0$$

aufzulösen, wodurch man erhält:

$$\int\frac{\varphi_2dv}{\varphi_0+u\,\varphi_1+v\,\varphi_2}+lx=c.$$

Nach dem Inhalt der dritten Methode ist nun c eine Function von u allein, die man gewöhnlich erhält, wenn man $x=0$ und $z=$ einer willkürlichen Constanten setzt. Hier kann man aber die Function c von u auf diese Weise nicht bestimmen, weil wegen $v=\frac{z}{x}$, und wegen des Logarithmus lx x nicht gleich Null gesetzt werden kann. Differentiirt man jedoch die vorstehende Gleichung nach allen Variabeln, so erhält man (wenn man der Kürze wegen die Variable v statt z beibehält, wodurch (1) in:

$$(1')\qquad \frac{dx}{x}[\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2]+\varphi_1du+\varphi_2dv=0$$

übergeht) die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial u}\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\,\varphi_1+v\,\varphi_2}-\frac{\varphi_1}{\varphi_0+u\,\varphi_1+v\,\varphi_2}=\frac{dc}{du}$$

oder:

$$\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}-\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}=c,$$

woraus sich das Integral von (1) ergiebt. Es lautet:

$$\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}+\left[\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}-\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\,\varphi_2}\right]+lx=\text{Constans}.$$

Die Klammer [] enthält kein v, und es darf also darin $v=0$ gesetzt werden.

Wenn man aber in der Differentialgleichung:

$$\varphi_0(u,v)\,dx+\varphi_1(u,v)\,dy+\varphi_2(u,v)\,dz=0$$

statt y und z die Veränderlichen u und v einführt, so lässt diese transformirte Gleichung sich auch mit den Methoden von Euler und Natani behandeln. Man hat aber alsdann eine *neue* Differentialgleichung vor sich, die in diesem Falle allerdings sehr leicht aus der ersten folgt, ebenso gut aber auch in höchst verborgenem Zusammenhang mit ihr stehen könnte. Nun die neue Gleichung lautet:

$$(1')\qquad \frac{dx}{x}(\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2)+\varphi_1 du+\varphi_2 dv=0.$$

Die Euler'sche Methode würde hier vorschreiben, dass man z. B. $du=0$ setzte und die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{x}(\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2)+\varphi_2 dv=0$$

auflöste, und dass man ferner die Integrationsconstante, die nur von u abhängen kann, aus (1'), dem Integral vorstehender gewöhnlicher Differentialgleichung, und dessen Differential nach allen Veränderlichen eliminirte, was offenbar genau auf die eben dargelegte directe Operation nach der dritten Methode hinausläuft, so dass man auch identisch dasselbe Integral von (1) findet.

Nach der Natani'schen Methode hätte man so zu verfahren: Setzt man $1'\equiv\psi_0(x,u,v)\,dx+\psi_1(x,u,v)\,du+\psi_2(x,u,v)\,dv=0$, so erhält man nach dieser Regel das Integral (1') durch Auflösung z. B. folgender Gleichungen:

$$\psi_0(x,u,v)\,dx+\psi_2(x,u,v)\,dv=0,$$
$$\psi_0(x,u,0)\,dx+\psi_1(x,u,0)\,du=0.$$

Sind $\Psi(x,u,v)=c$, $\Psi_1(x,u)=c_1$ die Integrale beider Gleichungen, so ist das Integral von (1') dieses:

$$\Psi(x,u,v)-\Psi(x_1,u,0)=0,$$
$$\Psi_1(x_1,u)\quad-\Psi(x_0,0)\quad=0,$$

x_1 aus beiden Gleichungen eliminirt gedacht. Wir haben also die Differentialgleichungen aufzulösen:

$$\frac{dx}{x}[\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2]+\varphi_2 dv=0,$$

$$\frac{dx}{x}[\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2]_{v=0}+\varphi_1(u,0)\,du=0.$$

Die erste giebt:

$$\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}+lx=\left[\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{v=0}+lx_1$$

die zweite:

$$\left[\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{v=0}+lx_1=\left[\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{u=0,\ v=0}+lx_0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt das Integral von (1):

$$\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}+\left[\int\frac{\varphi_1 du}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{v=0}-\left[\int\frac{\varphi_2 dv}{\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2}\right]_{v=0}+lx=\text{Constans.}$$

wie oben.

Endlich nach der vierten Methode scheint ohne Kenntniss der Functionen φ hier eine Integration nicht angänglich zu sein, oder wenigstens nicht ohne Weiteres. Dagegen kann man die dritte Methode auch direct auf die transformirte Gleichung:

$$\frac{dx}{x}\left|\varphi_0+u\varphi_1+v\varphi_2\right|+\varphi_1 du+\varphi_2 dv=0$$

anwenden, indem man z. B. $v=\gamma u$ einführt. Dadurch wird, γ als constant behandelt, folgende Gleichung aufzulösen sein:

$$\frac{dx}{x}\left|\varphi_0(u,\gamma u)+u\varphi_1+\gamma u\varphi_2\right|+\left|\varphi_1+\gamma\varphi_2\right|du=0.$$

Sie giebt integrirt:

$$\int du\,\frac{\varphi_1+\gamma\varphi_2}{\varphi_0+u\varphi_1+\gamma u\varphi_2}+lx=c.$$

Hierin $u=0$, $x=x_1$ gesetzt, erhält man c als Function von γ und x_1, und hat dann für γ zurückzusetzen $\frac{v}{u}$.

5.

Wir erhalten also folgende Ergebnisse. Von den Art. 1. angeführten einfachen Regeln gestattet eine directe Anwendung auf die Gleichung:

$$\varphi_0\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)dx+\varphi_1\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)dy+\varphi_2\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)dz=0$$

nur die dritte. Transformirt man diese Gleichung in:

$$\frac{dx}{x}\left\{\varphi_0(u,v)+u\varphi_1(u,v)+v\varphi_2(u,v)\right\}+\varphi_1(u,v)du+\varphi_2(u,v)dv=0,$$

so liefern die erste und zweite Methode dieselben Lösungsformen, wie bei der ursprünglichen Differentialgleichung die dritte. Endlich liefert die dritte Methode, auf die transformirte Differentialgleichung angewandt, eine der Form nach andere Lösung, indem jene Methoden zwei Quadraturen verlangen, diese nur eine, aber dem Anschein nach wohl etwas zusammengesetztere, als jede einzelne der zwei Quadraturen, was aber in Wirklichkeit auch manchmal sich anders verhalten kann. Die vierte Methode scheint, weder auf die ursprüngliche noch auf die transformirte Differentialgleichung angewandt, leichten Erfolg zu versprechen, so dass, wenn man bei irgend einer Untersuchung das Bedürfniss empfunden hätte, die allgemeine Auflösung der Gleichung:

$$\varphi_0\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)dx+\varphi_1\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)dy+\varphi_2\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)dz=0$$

kennen zu lernen, man diesem Bedürfniss nur mit den drei ersten von den angeführten Methoden sofort hätte genügen können, am directesten aber mit der dritten. Aehnliche Ergebnisse erhält man, wenn statt der Functionen $u=\frac{y}{x}$, $v=\frac{z}{x}$ andere einer Integration günstige eingeführt werden, z. B. lineare. Specialisirt man im obigen Beispiel die Functionen φ, so hat Herr Bertrand an mehreren derartigen besonderen Fällen, die aber alle homogene Differentialgleichungen sind, gezeigt, dass auch seine (die vierte) Methode, wiewohl sie eigentlich am meisten Anstrengungen zu verlangen scheint, unter Umständen eine rasche Herleitung des Integrals ermöglicht. In der Bemerkung am Schlusse seiner Note scheint mir aus $\lambda d\varphi=0$, wenn $\alpha=\lambda$, $\beta=\varphi$ gesetzt wird, $\alpha d\beta=0$ zu folgen.

6.

Indessen, wie bemerkt, wird man im gegebenen Falle nicht an den Wortlaut einzelner Regeln sich halten, sondern an die allgemeinen Ueberlegungen, aus denen sie folgen, und wird die allgemeinen Grundsätze an den besonderen Fall anzupassen suchen.

Etwas anderes ist es, wenn man von dem Problem mit drei Veränderlichen zur totalen Differentialgleichung mit n Veränderlichen fortschreitet. Ich habe für diese Gleichungen, wenn ihnen durch ein Integral Genüge geschieht, zwei Behandlungsweisen vorgeschlagen*) und möchte

*) Borch. Journal Bd. 70. Ueber die Integration etc § 5., sqq.

mit ein paar Worten auf deren relative Vorzüge eingehen. Die zweite Behandlungsweise schreibt die Einführung einer Substitution von einer gewissen Form vor, wodurch die Integration (ihre Thunlichkeit angenommen) sehr erschwert werden kann, während, diese Integration vollzogen gedacht, man sofort das Integral der Differentialgleichung vor sich hat. Die erste Methode lässt die Form der Substitution viel unbeschränkter, ja fast ganz unbeschränkt, und wird so leichtere Integration gestatten, während nachher noch Eliminationen zu vollziehen sind, aus denen sich erst das Integral ergiebt. Mit Recht pflegt man diese weniger zu fürchten. Man wird es sogar meistens unterlassen dürfen, die Eliminationen wirklich auszuführen, und das Integral in Form mehrerer Gleichungen beibehalten*). Somit glaube ich also, dass man in der ungeheuren Mehrzahl der Fälle der ersten Methode unbedingt den Vorzug zuerkennen muss. Dementsprechend ist es mir auch wahrscheinlich, dass die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit $n+1$ Variabeln mehr Vortheil aus der ersten, denn aus der zweiten Methode würde ziehen können.

Weil ich nun gerade auf ältere Untersuchungen hier wieder zu sprechen gekommen bin, so sei es mir gestattet, einer Angelegenheit, die ich schon längere Zeit auf dem Herzen habe, eine kurze doch lediglich vorläufige Bemerkung zu widmen, denn ich beabsichtige, in einiger Zeit meine früheren Untersuchungen wieder aufzunehmen. In einem in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatze**) über Complexe etc., und in weiteren ähnliche Gegenstände behandelnden Untersuchungen ist in einigen Nebensächliches betreffenden Stellen meiner früheren Arbeiten Erwähnung geschehen, allein bezüglich der Kegeltheorie der partiellen Differentialgleichung wird mir nicht der geringste Antheil zugebilligt. Ich meine aber: Die Thatsache lässt sich nicht ungeschehen machen, dass ich die geometrische Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung auf die der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ zugehörigen Kegelflächen gegründet, und bis zu einer gewissen für meine Zwecke genügenden und die Hauptsätze deutlich enthaltenden Vollendung durchgeführt habe. Mir ist allerdings ebenfalls bei Monge und auch bei Lagrange eine Stelle aufgestossen, wo diese Autoren bemerken, dass der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ ein gewisser Kegel entspricht, was übrigens auch nahe liegt. Es folgt aber bei den genannten Autoren auf diese Bemerkung ein Weiteres nicht, und insbesondere Monge macht von ihr keinen Gebrauch in seiner Theorie der Charakteristiken. Die vielen Dinge, welche diese Theorie dunkel liess, waren für mich

---

*) L. c. § 5. am Schlusse. Die Werthe $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{n-1}$ dürfen auch unendlich wenig verschieden sein, wodurch eine besondere Auflösungsform entsteht.

**) Sophus Lie, Diese Annalen Bd.

gerade Veranlassung auf dem *ganz neuen* Wege der Kegeltheorie in die Lehre der partiellen Diffentialgleichungen tiefer einzudringen. Es verlangte dies den damals neuen Begriff der in Kegeln oder Conoiden angeordneten Systeme von Geraden oder Curven. Diese Vorstellung war so neu, dass ein guter Geometer behauptete, sie müsse unter den Hamilton'schen Begriff eines allgemeinen Systems von Geraden sich unterbringen lassen. Mir ist zur Stunde nicht bekannt, wem, Plücker oder mir, das publicatorische Erstlingsrecht an die Idee der Complexe zukommt. Sicher jedoch ist, dass, wenn meine „Beiträge etc." später als Plücker's erste Mittheilungen erschienen sein sollten, dieser Zeitunterschied nicht bedeutend sein kann. Aber die Urheberschaft in der Anwendung jener geometrischen Gebilde auf die Deutung der partiellen Differentialgleichungen und ihrer Lösungen wird mir schwerlich mit Erfolg streitig gemacht werden können.

Tübingen, Februar 1877.