Ueber den Multiplicator eines Jacobi'schen Systems.

Von

A. Mayer in Leipzig.

In dem vorhergehenden Bande dieser Annalen (p. 501 u. flg.) hat Lie gezeigt, dass, dem Jacobi'schen Multiplicator einer einzelnen linearen partiellen Differentialgleichung entsprechend, auch für jedes vollständige System ein Multiplicator von ganz analogen Eigenschaften existirt.

Für das gegebene vollständige System:

$$(1) \qquad A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r,$$

kann man, vorausgesetzt, dass die Determinante:

$$\Delta = \sum \pm X_1^1 X_2^2 \cdots X_r^r$$

nicht $= 0$ ist, diesen Lie'schen Multiplicator M ebensowohl durch die Formel:

$$(\alpha) \qquad M = \frac{1}{\Delta} \sum \pm \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial f_{r+2}}{\partial x_{r+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

in der $f_{r+1}, f_{r+2}, \cdots f_n$ irgend $n-r$ von einander unabhängige Lösungen des Systems (1) bezeichnen, als auch, nachdem man mittels Auflösung nach $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_r}$ dieses System auf die Form:

$$(\beta) \qquad \Delta \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{h=r+1}^{h=n} \Delta_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0$$

gebracht hat, durch die r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial \Delta M}{\partial x_i} + \sum_{h=r+1}^{h=n} \frac{\partial \Delta_h^i M}{\partial x_h} = 0$$

definiren.

Aus diesen Definitionen erhellt unmittelbar, dass für ein vollständiges System von der Form (β) der Lie'sche Multiplicator des ganzen Systems zugleich ein, allen r Gleichungen des Systems gemeinsamer Jacobi'scher Multiplicator, oder kurz gesagt, ein *gemeinsamer Multiplicator* des Systems ist. Aber nicht jedes vollständige System theilt diese Eigenschaft. Im Allgemeinen besitzt vielmehr ein vollständiges System gar keinen gemeinsamen Multiplicator, oder es giebt, auch wenn die r Gleichungen (1) ein vollständiges System bilden, doch im Allgemeinen keine Function M, die allen r Gleichungen:

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h} = 0$$

gleichzeitig genügte. Gäbe es nämlich für jedes vollständige System eine solche Function, so müssten im Besondern auch je n unabhängige Gleichungen von der Form (2) eine gemeinsame Lösung zulassen, insofern die zugehörigen n Gleichungen (1), aufgefasst als partielle Differentialgleichungen zwischen f und $n+1$ unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n x_{n+1}$, die gemeinsame Lösung $f = x_{n+1}$ besitzen und somit stets als ein vollständiges System angesehen werden können. Man erkennt aber sofort, dass n beliebige Gleichungen von der Form (2) nicht eo ipso die Integrabilitätsbedingungen erfüllen. So ergeben z. B. die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \log M}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \log M}{\partial x_2} = 0,$$

$$x_2 \frac{\partial \log M}{\partial x_1} + (1 + x_1 x_2) \frac{\partial \log M}{\partial x_2} + x_1 = 0,$$

denen der gemeinsame Multiplicator des vollständigen Systems:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (1 + x_1 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

genügen müsste, die mit einander unvereinbaren Werthe:

$$\frac{\partial \log M}{\partial x_1} = x_1^2, \qquad \frac{\partial \log M}{\partial x_2} = -x_1.$$

Für ein Jacobi'sches System aber, d. h. für ein vollständiges System von der beliebigen Form (1), in welchem aber jedes:

$$A_i\big(A_k(f)\big) - A_k\big(A_i(f)\big)$$

identisch Null ist*), existirt, wie ebenfalls Lie nachgewiesen hat**), stets ein gemeinsamer Multiplicator und es ist bereits früher***) behauptet worden, dass auch für solche Systeme gemeinsamer Multiplicator und Lie'scher Multiplicator identische Begriffe seien. Diese Behauptung zu beweisen, ist der Hauptzweck der folgenden Note.

Der Beweis lässt sich fast ganz ohne Rechnung dadurch führen, dass man die Regel, die Jacobi (Crelle J. 27, p. 242) zur Ableitung des Multiplicators einer durch Einführung neuer unabhängiger Variabeln transformirten linearen partiellen Differentialgleichung aus dem Multiplicator der ursprünglichen Gleichung gegeben hat, mit denjenigen Formeln in Verbindung bringt, die sich aus Satz 17. der Lie'schen Abhandlung für ein n-gliedriges Jacobi'sches System mit n unabhängigen Variabeln ergeben. Da aber diese Jacobi'sche Regel, soweit ich weiss, ohne Anwendung fremder Hülfsmittel†), bisher immer nur aus derjenigen Definition des Jacobi'schen Multiplicators abgeleitet worden ist, der für ein vollständiges System die Lie'sche Formel (α) entspricht, so schien es nicht uninteressant, zunächst lediglich von der Voraussetzung ausgehend, dass die r Gleichungen (2) eine gemeinsame Lösung besitzen, direct aus diesen Gleichungen selbst die Jacobi'sche Regel zu gewinnen und sodann durch Anwendung derselben auf den Fall eines Jacobi'schen Systems gleichzeitig die Existenz eines gemeinsamen Multiplicators und seine Identität mit dem Lie'schen Multiplicator nachzuweisen. Der Vollständigkeit halber füge ich in § 3. noch die Form hinzu, welche das Princip des letzten Multiplicators annimmt, wenn man an Stelle einer einzelnen Gleichung ein Jacobi'sches System treten lässt. —

§ 1.

Ableitung des gemeinsamen Multiplicators transformirter linearer partieller Differentialgleichungen aus dem gemeinsamen Multiplicator der ursprünglichen Gleichungen.

Es sei:

$$(1) \qquad A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r,$$

---

*) Ich gebrauche hier die Bezeichnung Jacobi'sches System in dem ursprünglichen engeren Sinne, in welchem dieselbe von Clebsch (Borchardt's J. 65, p. 259) eingeführt ist, für das, was man nach der Lie'schen Terminologie etwa vollständiges System von involutorischer Form nennen würde.

**) A. a. O. p. 505, Satz 15.

***) Ib. p. 509, Anmerkung.

†) Boole (treatise on differential equations, suppl. vol. p. 216) hat die hübsche Bemerkung gemacht, dass die Jacobi'sche Regel sich unmittelbar aus der bekannten Jacobi'schen Transformationsformel ergiebt, die man durch Umformung und Variation eines n-fachen Integrales erhält.

ein beliebig gegebenes System partieller Differentialgleichungen, das einen gemeinsamen Multiplicator M besitze, oder also, für welches eine Grösse M existire, die den r Gleichungen:

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h} = 0$$

gleichzeitig genügt.

Führt man durch die n Gleichungen:

$$(3) \qquad \psi_1 = y_1, \quad \psi_2 = y_2, \cdots \psi_n = y_n,$$

in denen $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n$ irgend n gegebene, von einander unabhängige Functionen von $x_1 \cdots x_n$ bedeuten, die y an Stelle der x als neue Variable ein und bezeichnet der Deutlichkeit halber die Substitution der aus (3) folgenden Werthe von $x_1 \cdots x_n$ durch das Zeichen [ ], so wird:

$$(4) \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial x_h}\right] = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial [f]}{\partial y_k} \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right],$$

folglich, wenn man:

$$(5) \qquad Y_k^i = \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]$$

setzt:

$$(6) \qquad \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h}\right] = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial [f]}{\partial y_k}.$$

Durch Einführung der neuen unabhängigen Variabeln y verwandeln sich also die r Gleichungen (1) in die r Gleichungen:

$$(7) \qquad B_i[f] = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial [f]}{\partial y_k} = 0.$$

Es fragt sich, wie kann man aus irgend einer gemeinsamen Lösung M der r Gleichungen (2) eine gemeinsame Lösung N der r Gleichungen:

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial \log N}{\partial y_k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = 0$$

erhalten?

Zu diesem Ende bemerke ich, dass nach (5):

$$\frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial [X_h^i]}{\partial y_k} \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right] + \sum_{h=1}^{h=n} [X_h^i] \frac{\partial \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]}{\partial y_k},$$

folglich nach (4):

$$(9)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{\partial X_h^i}{\partial x_h}\right] + \sum_{h=1}^{h=n} \left[X_h^i\right] \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]}{\partial y_k}$$

ist. Weiter hat man:

$$(10)\quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \left[\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_h \partial x_1}\right] \frac{\partial [x_1]}{\partial y_k} + \cdots + \left[\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_h \partial x_n}\right] \frac{\partial [x_n]}{\partial y_k} \right\}.$$

Aus den Identitäten

$$[\psi_i] = y_i$$

aber folgt:

$$\sum_{h=1}^{k=n} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_h}\right] \frac{\partial [x_h]}{\partial y_k} = \frac{\partial y_i}{\partial y_k},$$

d. h. $= 0$, oder $= 1$, jenachdem $i \gtrless k$, oder $i = k$ ist, also, wenn man die Determinante:

$$(11)\qquad \sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} = A$$

setzt, durch Auflösung:

$$\frac{\partial [x_h]}{\partial y_k} = \left[\frac{\partial \log A}{\partial \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}}\right].$$

Hierdurch geht (10) über in:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}\right]}{\partial y_k} = \left[\sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \frac{\partial \log A}{\partial \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_1 \partial x_h} + \cdots + \frac{\partial \log A}{\partial \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_n \partial x_h} \right\}\right] = \left[\frac{\partial \log A}{\partial x_h}\right]$$

und daher lässt sich die Formel (9) so schreiben:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \left[\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h}\right] + \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log A}{\partial x_h}\right],$$

oder nach (6):

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \left[\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h}\right] + \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial \log [A]}{\partial y_k}.$$

Addirt man hierzu die aus (6) folgende Formel:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial \log [M]}{\partial y_k} = \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h}\right],$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial \log \left[\frac{M}{A}\right]}{\partial y_k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial Y_k^i}{\partial y_k} = \left[\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h}\right]$$

und diese Identität liefert uns als Antwort auf unsere Frage die Jacobi'sche Regel:

Satz 1. *Es sei:*

$$A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

ein beliebig gegebenes System linearer partieller Differentialgleichungen, das einen gemeinsamen Multiplicator M besitze. Führt man dann vermittelst irgend n unabhängiger Substitutionen:

$$\psi_1 = y_1, \quad \psi_2 = y_2, \cdots \psi_n = y_n$$

dieses System über in das folgende:

$$B_i(f) = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0,$$

dessen Coefficienten als Functionen der neuen Variabeln y nach den Formeln:

$$Y_k^i = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h}$$

zu berechnen sind, so ist, ausgedrückt in diesen neuen Variabeln:

$$N = \frac{M}{\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}}$$

ein gemeinsamer Multiplicator des transformirten Systems $B_i(f) = 0$. Kennt man umgekehrt irgend einen gemeinsamen Multiplicator N dieses letzteren Systems, so erhält man aus der Formel:

$$M = N \sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n},$$

wenn man darin für die y_h wieder ihre Werthe ψ_h setzt, einen gemeinsamen Multiplicator M des gegebenen Systems $A_i(f) = 0$.

§ 2.

Anwendung auf Jacobi'sche Systeme.

Nehmen wir nunmehr an, dass das gegebene System:

$$(1) \qquad A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

ein Jacobi'sches System sei. Dann ist bekanntlich auch das transformirte System:

(7) $$B_i[f] = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^i \frac{\partial [f]}{\partial y_k} = 0\,.$$

ein Jacobi'sches System. In der That aus der Identität:

$$[A_i(\varphi)] = B_i[\varphi]$$

folgt, wenn man

$$\varphi = A_k(f)$$

setzt:

$$[A_i(A_k(f))] = B_i[A_k(f)] = B_i[B_k[f]]\,;$$

die Bedingungen:

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = 0$$

ziehen daher stets die folgenden:

(12) $$B_i[B_k[f]] - B_k[B_i[f]] = 0$$

nach sich.

Die r Gleichungen (1), da sie ein Jacobi'sches System bilden sollen, müssen sich auflösen lassen nach r von den Differentialquotienten der Function f. Der Einfachheit halber will ich annehmen, dass $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_r}$ solche r Differentialquotienten seien, oder dass die Determinante:

(13) $$\Delta = \sum \pm X_1^1 X_2^2 \cdots X_r^r$$

verschieden von Null sei. Nennen wir dann $f_{r+1}, \cdots f_n$ irgend $n-r$ unabhängige Lösungen des Systems (1), so sind diese Functionen unabhängig von einander hinsichtlich $x_{r+1}, \cdots x_n$*). Wir können daher in dem vorhergehenden Satze:

$$\psi_1 = x_1, \cdots \psi_r = x_r, \quad \psi_{r+1} = f_{r+1}, \cdots \psi_n = f_n$$

nehmen. Hierdurch wird nach (8):

$$Y_k^i = [X_k^i] \text{ für } k = 1, 2, \cdots r$$

und

$$Y_k^i = 0 \quad \text{für } k = r+1, \cdots n,$$

und das System (6) reducirt sich folglich auf:

(14) $$B_i[f] = \sum_{k=1}^{k=r} [X_k^i] \frac{\partial [f]}{\partial x_k} = 0,$$

wo nunmehr die [] anzeigt, dass für $x_{r+1} \cdots x_n$ ihre, aus den Gleichungen:

*) Vgl. diese Annalen Bd. V. p. 469.

$$f_{r+1} = y_{r+1}, \cdots f_n = y_n$$

folgenden Werthe zu substituiren sind.

Der gemeinsame Multiplicator $[N]$ des r-gliedrigen Jacobi'schen Systems (14) wird definirt durch die r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(15) \qquad \sum_{k=1}^{k=r} [X_k^i] \frac{\partial \log [N]}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial [X_k^i]}{\partial x_k} = 0$$

und aus jeder gemeinsamen Lösung $[N]$ dieser r Gleichungen ergiebt sich nach Satz 1., ein gemeinsamer Multiplicator des gegebenen Jacobi'schen Systems (1) durch die Formel:

$$M = N \sum \pm \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Können wir daher nachweisen, dass die r Gleichungen (15) eine gemeinsame Lösung besitzen, so ist damit zugleich bewiesen, dass für jedes Jacobi'sche System ein gemeinsamer Multiplicator existirt. Die r Gleichungen (15) enthalten ferner nur die Differentialquotienten von $\log [N]$ nach $x_1 \cdots x_r$ und lassen sich nach diesen Differentialquotienten auflösen. Sie können daher abgesehen von einer additiven willkürlichen Constante oder von einer additiven willkürlichen Function von $y_{r+1}, \cdots y_n$ nur eine einzige gemeinsame Lösung $\log [N]$ besitzen. Gelingt es uns also irgend eine solche Lösung zu entdecken, so ist damit zugleich auch die allgemeine Form des gemeinsamen Multiplicators des gegebenen Jacobi'schen Systems (1) gefunden.

Aus den Identitäten (12) ergeben sich nun, wenn man $f = x_h$ und für die $B[f]$ ihre Werthe (14) einsetzt, die Relationen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^k] \frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \frac{\partial [X_h^k]}{\partial x_\lambda}.$$

Setzt man hierin $k = 1, 2, \cdots r$ und löst nach $\frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_h}$ auf, so folgt, da nach (13):

$$\sum \pm [X_1^1] [X_2^2] \cdots [X_r^r] = [\Delta]$$

ist:

$$[\Delta] \frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_h} = \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial [\Delta]}{\partial [X_h^k]} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \frac{\partial [X_h^k]}{\partial x_\lambda},$$

und hieraus durch Summation nach h:

$$[\Delta] \sum_{h=1}^{h=r} \frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_h} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \sum_{h=1}^{h=r} \sum_{k=1}^{k=r} \frac{\partial [\Delta]}{\partial [X_h^k]} \frac{\partial [X_h^k]}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \frac{\partial [\Delta]}{\partial x_\lambda}$$

oder:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} [X_\lambda^i] \frac{\partial \log \frac{1}{|\Delta|}}{\partial x_\lambda} + \sum_{h=1}^{h=r} \frac{\partial [X_h^i]}{\partial x_h} = 0 \text{*)}.$$

Demnach ist:

$$[N] = \frac{1}{[\Delta]}$$

eine gemeinsame Lösung der r Gleichungen (16) und damit nach dem Vorhergehenden der Satz gewonnen:

Satz 2. *Jedes Jacobi'sche System besitzt einen gemeinsamen Multiplicator. Für das gegebene Jacobi'sche System:*

$$\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

ist, wenn $f_{r+1}, \cdots f_n$ irgend $n-r$ von einander unabhängige Lösungen desselben bezeichnen und die Determinante:

$$\Delta = \sum \pm X_1^1 X_2^2 \cdots X_r^r$$

nicht Null ist, der allgemeine Werth dieses Multiplicators:

$$M = \frac{F(f_{r+1}, \cdots f_n)}{\Delta} \sum \pm \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

wo F eine willkürliche Function bedeutet.

Hiermit ist, wie man aus dem Vergleich der letzten Formel mit der früheren Formel (α) unmittelbar erkennt, der Nachweis geliefert, *dass für ein Jacobi'ches System gemeinsamer Multiplicator und Lie'scher Multiplicator identische Begriffe sind.*

§ 3.

Das Princip des letzten Multiplicators für ein Jacobi'sches System.

Es seien jetzt von dem gegebenen r-gliedrigen Jacobi'schen Systeme mit n unabhängigen Variabeln:

$$(1) \qquad A_i(f) = \sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

bekannt ein gemeinsamer Multiplicator M und $n-r-1$ von einander unabhängige Lösungen $f_{r+2}, \cdots f_n$. Führt man dann durch die Gleiungen:

$$\psi_1 = y_1, \cdots \psi_{r+1} = y_{r+1}, \quad f_{r+2} = y_{r+2}, \cdots f_n = y_n.$$

in denen $\psi_1, \cdots \psi_{r+1}$ willkürlich gewählte, von einander, wie von $f_{r+1}, \cdots f_n$ unabhängige Functionen der x bedeuten, $y_1 \cdots y_n$ als neue unabhängige

*) Diese Formel ist nur ein specieller Fall des allgemeineren Satzes 17. von Lie. Vgl. diese Annalen Bd. XI, p. 510.

Variable ein, so verwandelt sich hierdurch nach dem Vorhergehenden das System (1) in das r-gliedrige Jacobi'sche System mit nur noch $r+1$ unabhängigen Variabeln:

$$(16) \qquad B_i[f] = \sum_{k=1}^{k=r+1} Y_k^i \frac{\partial [f]}{\partial y_k} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r,$$

welches bloss eine einzige Lösung zulässt, die durch $[f_{r+1}]$ bezeichnet werde, und aus dem bekannten gemeinsamen Multiplicator M des gegebenen Systems (1) ergiebt sich ein gemeinsamer Multiplicator N des reducirten Systems (16) durch die Formel:

$$N = \left[\frac{M}{\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \cdot \frac{\partial f_{r+2}}{\partial x_{r+2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}} \right].$$

Auf der anderen Seite, wenn wir annehmen, dass die r unabhängigen Gleichungen (16) nach $\frac{\partial [f]}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial [f]}{\partial y_r}$ auflösbar seien, und:

$$\sum \pm Y_1^1 Y_2^2 \cdots Y_r^r = \Delta_{r+1}$$

setzen, so muss nach Satz 2., als gemeinsamer Multiplicator des Jacobi'schen Systems (16), N nothwendig die Form haben:

$$(17) \qquad N = \frac{F}{\Delta_{r+1}} \frac{\partial [f_{r+1}]}{\partial y_{r+1}},$$

wo F eine blosse Function von $[f_{r+1}]$ ist.

Durch Auflösung nach $\frac{\partial [f]}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial [f]}{\partial y_r}$ erhält nun das System (16) die Form:

$$\Delta_{r+1} \frac{\partial [f]}{\partial y_i} + \Delta_i \frac{\partial [f]}{\partial y_{r+1}} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

und wird folglich äquivalent der linearen totalen Differentialgleichung:

$$(18) \qquad \Delta_{r+1} dy_{r+1} - \sum_{i=1}^{i=r} \Delta_i dy_i = 0.$$

Diese totale Differentialgleichung besitzt also das Integral $[f_{r+1}] = \text{const.}$, oder es giebt einen Multiplicator μ, für welchen:

$$\mu \left\{ \Delta_{r+1} dy_{r+1} - \sum_{i=1}^{i=r} \Delta_i dy_i \right\} = d[f_{r+1}]$$

wird. Aus dieser Identität aber folgt:

$$\mu = \frac{1}{\Delta_{r+1}} \frac{\partial [f_{r+1}]}{\partial y_{r+1}}.$$

Nach (17) ist also auch die bekannte Grösse N ein Multiplicator der Gleichung (18) und daher lässt sich das Integral $[f_{r+1}] = \text{const.}$ und damit auch die noch fehlende Lösung f_{r+1} des Systems (1) durch blosse Quadraturen finden, d. h.:

Satz 3. *Kennt man von dem gegebenen r-gliedrigen Jacobi'schen Systeme:*

$$\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

alle Lösungen bis auf eine und ausserdem noch irgend eine gemeinsame Lösung der r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\sum_{h=1}^{h=n} X_h^i \frac{\partial \log M}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial X_h^i}{\partial x_h} = 0,$$

so kann man die fehlende Lösung stets durch blosse Quadraturen berechnen.

Die einfachste Art, ein gegebenes r-gliedriges vollständiges System auf ein Jacobi'sches zurückzuführen, ist*) die, dass man es durch Auflösung nach r Differentialquotienten auf die Form:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{h=r+1}^{h=n} A_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots r$$

bringt. Für ein Jacobi'sches System von dieser besonderen Form kann man einen gemeinsamen Multiplicator M immer aus der Gleichung:

$$d \log M = - \sum_{i=1}^{i=r} d x_i \sum_{h=r+1}^{h=n} \frac{\partial A_h^i}{\partial x_h} \;**)$$

erhalten, sobald die rechte Seite derselben entweder an sich ein vollständiges Differential, oder mit Hülfe der $n-r$ Gleichungen:

$$d x_h = \sum_{i=1}^{i=r} A_h^i \, d x_i, \quad h = r+1, \cdots n$$

zu einem solchen gemacht worden ist.

---

*) Vgl. diese Annalen Bd. IV, p. 94.

**) Nach einem Referat im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. VII, p. 168, ist diese Formel zuerst von Herrn N. Sonine aufgestellt worden.