Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1877
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0012
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0012

LOG Id: LOG_0016
LOG Titel: Das Correspondenzprincip für Gruppen von n Punkten und von n Strahlen
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Das Correspondenzprincip für Gruppen von n Punkten und von n Strahlen.

Von

H. Schubert in Hamburg.

Das Chasles'sche Correspondenzprincip, angewandt auf einen Ebenenbüschel, ergiebt ohne weiteres, dass die Anzahl ε derjenigen speciellen Punktepaare eines einstufigen Systems von Punktepaaren (c, d, g), bei denen die beiden Punkte c und d auf ihrem Verbindungsstrahle g unendlich nahe liegen, aus den einfachen Grundbedingungen des allgemeinen Punktepaars gewonnen werden kann. Bezeichnen nämlich

c und d auch *wieviel* Punktepaare des Systems ihren Punkt c resp. d auf einer gegebenen Ebene besitzen,

ferner g auch, *wieviel* Punktepaare des Systems ihren Verbindungsstrahl g eine gegebene Gerade schneiden lassen,

so besteht zwischen den 4 Zahlen c, d, g, ε die Gleichung:

$$c + d - g = \varepsilon \text{*)}. \tag{1}$$

Hat man nun statt des aus *zwei* Punkten bestehenden Gebildes ein Gebilde, welches aus n auf einer und derselben Geraden g liegenden Punkten

$$c_1, c_2, c_3, \ldots . c_n$$

besteht, und erzeugt dieses Gebilde, welches wir *Punktgruppe* nennen wollen, nicht ein *einstufiges*, sondern ein $(k-1)$-*stufiges* System, so wird ein solches System eine endliche Anzahl ε von Punktgruppen besitzen, bei denen gewisse k von den n Punkten, z. B.

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_k$$

in einem Punkte b ihres Verbindungsstrahls g coincidiren. Man kann

*) Aus dieser Formel entwickelt der Verfasser im IIIten Abschnitt seiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie" (Math. Ann. Bd. X, pag. 1 bis 112) *alle möglichen* Formeln zwischen den Grundbedingungen des *allgemeinen* Punktepaars einerseits und denen seiner *Coincidenz* andererseits, d. h. desjenigen speciellen Punktepaars, welches unendlich nahe Punkte enthält. Ebenso wird dort das Strahlenpaar behandelt. Damit sind dann alle Correspondenzprobleme erledigt, welche auf *nur zwei* Hauptelemente Bezug nehmen. Die eben citirte Abhandlung des Verfassers soll immer kurz „Beitr." genannt werden.

daher das Problem aufstellen, jene Zahl ε durch die $(k-1)$-fachen Grundbedingungen der Punktgruppe in ähnlicher Weise auszudrücken, wie dies die Formel (1) für $n = 2$ und $k = 2$ thut.

Dieses Problem und einige mit ihm verwandte, sowie die analogen Probleme für die Strahlengruppe sind im Folgenden gelöst.

Die bei der Behandlung der Punktgruppe gewonnenen Resultate sind dann namentlich zu einer *directen* Berechnung der Zahlen*) verwendet, welche sich auf die an einer oder mehreren Stellen zwei- oder mehrpunktig berührenden Tangenten einer Fläche $n$ter Ordnung beziehen. Dabei erscheint die Punktfläche als specieller Fall eines allgemeineren Gebildes, nämlich des vierstufigen Systems von Punktgruppen.

Das *liniengeometrische* Analogon dieser Anwendung führt zu Zahlen für gewisse Singularitäten des Complexes $n$ten Grades. Diese Zahlen, welche zum Theil schon durch die Arbeiten von Plücker, Clebsch, Klein, Voss bekannt sind, zum Theil aber bisher noch nicht bestimmt sind, habe ich in einer besonderen Abhandlung**) abgeleitet.

Bei der Ableitung der Correspondenzformeln für Punktgruppen und für Strahlengruppen werden ausser der Formel (1) und der Strahlenpaar-Formel erster Dimension (Beitr. § 20., I) nur die fundamentalen Formeln angewandt, welche die Grundbedingungen incidenter Hauptelemente***) mit einander verbinden. Diese Formeln sind im IIten Abschnitt der Beitr. (§ 9.) aus dem Princip von der Erhaltung der Anzahl (Beitr. § 7.) entwickelt.

Die Natur des hier behandelten Gegenstandes erforderte wieder die Benutzung der vom Verfasser eingeführten *Symbolik* (Beitr. Abschnitt I). Die Grundregeln dieser Symbolik sind auch in einer Abhandlung über die Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung (Math. Ann. Bd. X, pag. 322) und in einem Referate über die Beitr. (Königsb. Repert. Bd. I, pag. 349) auseinandergesetzt. Man erinnere sich namentlich an Folgendes.

1) Das Symbol einer einem Gebilde Γ auferlegten α-fachen Bedingung bedeutet zugleich auch die endliche *Anzahl* derjenigen Ge-

---

*) Man vergleiche § 27 der Beitr. oder des Verfassers Mittheilung in den Gött. Nachr. Februar 1876 oder Math. Ann. Bd. XI, (pag. 370) Formel (73) bis (77).

**) Sie folgt der vorliegenden unmittelbar.

***) Der Terminologie von Sturm, Hirst und Anderen gemäss heisse *incident:*
1) ein Punkt und ein Strahl, wenn der Punkt im Strahle liegt,
2) eine Ebene und ein Strahl, wenn der Strahl in der Ebene liegt,
3) ein Punkt und eine Ebene, wenn der Punkt in der Ebene liegt,
4) ein Strahl und ein Strahl, wenn beide sich schneiden,

und überhaupt:
5) ein Gebilde Γ und ein System von Gebilden Γ, wenn das Gebilde dem Systeme angehört.

bilde Γ, welche, einem hinzuzudenkenden, a-stufigen Systeme angehörig, diese Bedingung erfüllen.

2) Die aus den einzelnen Bedingungen $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ zusammengesetzte Bedingung wird wie das *Product* $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_n$ bezeichnet.

3) Desshalb darf jedem Gliede einer für *alle* a-stufigen Systeme gültigen Formel zwischen a-fachen Bedingungssymbolen ein und dasselbe, etwa b-fache, Bedingungssymbol als Factor hinzugesetzt werden, oder, wie wir sagen wollen, die Formel darf mit jeder b-fachen Bedingung *multiplicirt* werden. Dadurch wird die Dimension der Formel um b erhöht, die Stufe des hinzuzudenkenden Systems um b erniedrigt.

§ 1.

Coincidenz von k Punkten verschiedener Definition.

Das Gebilde, welches wir zu behandeln haben, besteht aus n Punkten, welche ein und dieselbe Gerade als *Träger* haben. Die Gerade heisse g, und die n auf ihr liegenden Punkte heissen:

$$c_1, c_2, c_3, \cdots c_n.$$

Demgemäss bezeichnen (Beitr. pag. 19 oben):

1) g zugleich die Bedingung, dass die Punktgruppe ihren Träger eine gegebene Gerade schneiden lässt;

2) c_i zugleich die Bedingung, dass die Punktgruppe ihren Punkt c_i auf einer gegebenen Ebene besitzt;

3) g_p, g_e, g_s, G bezüglich die Bedingungen, dass die Punktgruppe ihren Träger durch einen gegebenen Punkt schickt, in eine gegebene Ebene wirft, einem gegebenen Strahlbüschel zusendet, als gegeben besitzt;

4) das *Product* mehrerer dieser Bedingungssymbole, dass die Punktgruppe die von diesen Symbolen dargestellten Bedingungen *zugleich* erfüllt; z. B. $c_i^2 g_e$ bedeutet die vierfache, zusammengesetzte Bedingung, dass der Träger in einer gegebenen Ebene liegen soll, während der Punkt c_i auf zwei gegebenen Ebenen, d. h. auf einer gegebenen Geraden liegen soll.

Aus diesen Definitionen folgt unmittelbar:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &g^2 = g_p + g_e;\ gg_p = gg_e = \tfrac{1}{2}g^3 = g_s;\\ &g_e^2 = g_p^2 = g^2 g_p = g^2 g_e = \tfrac{1}{2}g^4 = G,\ g_p g_e = 0. \end{aligned}$$

Da ferner g und jeder Punkt c_i *incident* sind, so besteht zwischen den Grundbedingungen von c_i und von g die Gleichung (Beitr. § 9., I):

$$(3)\qquad c_i g = c_i^2 + g_e,$$

welche man erhält, wenn man die durch die Bedingung g gegebene

Gerade in die durch die Bedingung c_i gegebene Ebene legt, und das Princip von der Erhaltung der Anzahl beachtet. Aus dieser Formel ergeben sich durch symbolische Multiplication bei Benutzung von 2):

(4) $$c_i^2 g = c_i^3 + c_i g_e,$$

(5) $$c_i g_p = c_i^3 + g_s,$$

(6) $$c_i^2 g_p = c_i g_s = c_i^3 g + G.$$

Wir bezeichnen nun mit ε_i diejenige speciellere Punktgruppe, bei welcher die i Punkte

$$c_1, c_2, c_3, \cdots c_i$$

auf dem Strahle g unendlich nahe liegen, und den *Coincidenzpunkt* jedes ε_i mit b. Unserer Symbolik gemäss bezeichnet dann $\varepsilon_i b^m z_a$, wo z_a eine der Punktgruppe auferlegte a-fache Bedingung bedeutet, die Zahl derjenigen speciellen Punktgruppen eines $(m + a + i - 1)$-stufigen Systems von Punktgruppen, welche die Punkte $c_1, c_2, c_3, \cdots c_i$ in einem und demselben Punkte b vereinigen, welche ferner diesen Coincidenzpunkt b auf $m(m < 4)$ gegebenen Ebenen besitzen, und dabei die Bedingung z_a erfüllen.

Da im Punkte b eines ε_i die i Punkte $c_1, c_2, c_3, \cdots c_i$ vereinigt liegen, so ist selbstverständlich:

(7) $$c_1 \varepsilon_i = c_2 \varepsilon_i = c_3 \varepsilon_i = \cdots = c_i \varepsilon_i = b \varepsilon_i.$$

Nach der in der Einleitung erwähnten, unmittelbar aus dem Chasles'schen Correspondenzprincipe fliessenden Punktepaar-Formel erster Dimension erhält man nun bei einem zu Grunde gelegten, einstufigen Systeme von Punktgruppen für die Zahl solcher Punktgruppen, auf denen die Punkte c_i und c_m coincidiren, die Formel:

$$c_i + c_m - g.$$

Speciell ist:

(8) $$c_1 + c_2 - g = \varepsilon_2.$$

Demnach bedeutet bei einem zu Grunde gelegten zweistufigen Systeme $\varepsilon_2 (c_1 + c_3 - g)$ die Zahl solcher Punktgruppen, bei denen ausser c_1 und c_2 auch c_1 und c_3 coincidiren, d. h. bei denen c_1, c_2, c_3 in einem und demselben Punkte coincidiren. Folglich ist:

(9) $$\varepsilon_2 (c_1 + c_3 - g) = \varepsilon_3.$$

Multipliciren wir also (8) mit $c_1 + c_3 - g$ und beachten Formel (9), so erhalten wir:

$$(c_1 + c_2 - g)(c_1 + c_3 - g) = \varepsilon_3.$$

Mit demselben Rechte ist natürlich auch:

$$(c_2 + c_1 - g)(c_2 + c_3 - g) = \varepsilon_3$$

und

$$(c_3 + c_1 - g)(c_3 + c_2 - g) = \varepsilon_3.$$

Aus allen 3 Formeln erhält man in der That ein und dieselbe, in den

c symmetrische Formel, sobald man nach Ausführung der Multiplication Formel (3) anwendet, nämlich:

(10) $$c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 - g(c_1 + c_2 + c_3) + g_p = \varepsilon_3.$$

Indem man den eben gemachten Schluss hinreichend oft wiederholt, gelangt man zu einem Ausdruck für die Zahl ε_k solcher Punktgruppen eines beliebigen $(k-1)$-stufigen Systems, bei denen die Punkte $c_1, c_2, \cdots c_k$ coincidiren, nämlich zu:

(11) $$(c_1 + c_2 - g)(c_1 + c_3 - g)(c_1 + c_4 - g) \cdots (c_1 + c_k - g) = \varepsilon_k.$$

Um hieraus eine in den c symmetrische Formel zu erhalten, führen wir die Multiplication der $k-1$ Factoren aus, und ordnen nach steigenden Potenzen von $c_1 - g$. Dann erhalten wir:

(12) $$\varepsilon_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}(c_1 - g) + \alpha_{k-3}(c_1 - g)^2 + \cdots \alpha_0 (c_1 - g)^{k-1},$$

wo zur Abkürzung:

$$\alpha_0 = 1, \ \alpha_1 = c_2 + c_3 + c_4 + \cdots c_k,$$

und überhaupt α_i gleich der Summe der sämmtlichen $(k-1)_i$ Producte von je i verschiedenen der $k-1$ Symbole $c_2, c_3, c_4, \cdots c_i$ gesetzt ist. Wir beachten nun, dass wegen der Formeln (3), (4), (5), (6)

$$\begin{aligned}(c_1 - g)^2 &= -c_1 g + g_p,\\ (c_1 - g)^3 &= \quad c_1 g_p,\\ (c_1 - g)^m &= \quad 0 \text{ für } m > 3\end{aligned}$$

gesetzt werden darf. Dadurch wird aus (12):

(13) $$\varepsilon_k = (\alpha_{k-1} + c_1 \alpha_{k-2}) - g(\alpha_{k-2} + c_1 \alpha_{k-3}) + g_p(\alpha_{k-3} + c_1 \alpha_{k-4}).$$

Jetzt sind aber die drei in Klammern eingeschlossenen Functionen in den c symmetrisch, da immer

$$\alpha_i + c_1 \alpha_{i-1}$$

gleich der Summe der sämmtlichen k_i Producte von je i verschiedenen der k Symbole $c_1, c_2, c_3 \ldots c_k$ ist. *Setzen wir daher für diese Summe* β_i, so wird aus Formel (13) die *gesuchte Hauptformel:*

(14) $$\varepsilon_k = \beta_{k-1} - g\beta_{k-2} + g_p \beta_{k-3}.$$

Der Deutlichkeit halber specialisiren wir dieses Resultat, indem wir $k = 4$ setzen. Dann kommt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 = {} & c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 c_4 + c_1 c_3 c_4 + c_2 c_3 c_4\\ & - g c_1 c_2 - g c_1 c_3 - g c_1 c_4 - g c_2 c_3 - g c_2 c_4 - g c_3 c_4\\ & + g_p c_1 + g_p c_2 + g_p c_3 + g_p c_4.\end{aligned}$$

Durch Multiplication der Hauptformel (14) mit den Grundbedingungen g, g_p, g_e, g_s, G des Trägers g erhält man:

(15) $$g\beta_{k-1} - (g_e + g_p)\beta_{k-2} + g_s \beta_{k-3} = g\varepsilon_k,$$

(16) $$g_p \beta_{k-1} - g_s \beta_{k-2} + G\beta_{k-3} = g_p \varepsilon_k,$$

(17) $$g_e\beta_{k-1} - g_s\beta_{k-2} = g_e\varepsilon_k,$$

(18) $$g_s\beta_{k-1} - G\beta_{k-2} = g_s\varepsilon_k,$$

und endlich:

(19) $$G\beta_{k-1} = G\varepsilon_k.\text{*)}$$

Um eine Formel für $b\varepsilon_k$ zu erhalten, haben wir die Formel (14) mit irgend einer der k Bedingungen $c_1, c_2, \cdots c_k$ zu multipliciren. Es ergiebt sich nach Benutzung von (3), (4), (5), (6) bei allen k Multiplicationen ein und dieselbe *symmetrische* Formel, nämlich:

(20) $$\beta_k - g_e\beta_{k-2} + g_s\beta_{k-3} = b\varepsilon_k,$$

wo β_k natürlich das Product

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \cdots \cdot c_k$$

bedeutet. Die Specialisirung von (20) für $k = 4$ giebt:

$$c_1c_2c_3c_4 - g_ec_1c_2 - g_ec_1c_3 - g_ec_1c_4 - g_ec_2c_3 - g_ec_2c_4 - g_ec_3c_4$$
$$+ g_sc_1 + g_sc_2 + g_sc_3 + g_sc_4 = b\varepsilon_4.$$

Um $b^2\varepsilon_k$ zu berechnen, verfahren wir am kürzesten, wenn wir beachten, dass nach (3)

$$b^2\varepsilon_k = bg\varepsilon_k - g_e\varepsilon_k$$

ist. Wir haben also die Gleichung (17) von der mit g multiplicirten Gleichung (20) zu subtrahiren, und erhalten:

(21) $$g\beta_k - g_e\beta_{k-1} + G\beta_{k-3} = b^2\varepsilon_k.$$

Aehnlich verfahren wir, um $b^3\varepsilon_k$ zu bestimmen. Wir beachten, dass nach Formel (5)

$$b^3\varepsilon_k = bg_p\varepsilon_k - g_s\varepsilon_k,$$

und erhalten aus (18) und (20):

(22) $$g_p\beta_k - g_s\beta_{k-1} + G\beta_{k-2} = b^3\varepsilon_k.$$

Beispielsweise ergiebt (22) für $k = 3$ das Resultat, dass die Zahl $b^3\varepsilon_3$ derjenigen Punktgruppen eines fünfstufigen Systems, auf denen die Punkte, c_1, c_2, c_3 in einem *gegebenen* Punkte coincidiren, sich bestimmt durch:

$$b^3\varepsilon_3 = g_pc_1c_2c_3 - g_sc_1c_2 - g_sc_1c_3 - g_sc_2c_3 + Gc_1 + Gc_2 + Gc_3.$$

Hinsichtlich der *Deutung* der Coincidenzsymbole ist dasselbe zu bemerken, was in § 17. der Beitr. über die Eintheilung der Coincidenzen in *Gattungen* ausgesprochen ist. Danach wird z. B. das Symbol $\varepsilon_k g_p$ durch eine Punktgruppe erfüllt, wenn sie ihre k Punkte $c_1, c_2, c_3, \cdots c_k$ im Punkte b dergestalt vereinigt hält, dass *jede* durch b gelegte Gerade als Träger der Punktgruppe gelten darf.

Die oben gewonnenen Correspondenzformeln können noch auf

---

*) Die Formel (19) lässt den Träger g *gegeben* sein. Für diesen speciellen Fall des festliegenden Trägers hat schon Herr Saltel das Correspondenzprincip für Punktgruppen ausgesprochen (Nouv. Ann. (2), XII 565—570 und Mém. de Belg. 1875).

mannigfache Weise umgestaltet werden, namentlich dadurch, dass die auf den Träger bezüglichen Bedingungen, also g, g_p, g_e, g_s, G möglichst aus den Formeln entfernt, und durch die $2k$ Bedingungen c_i^2 und c_i^3 ersetzt werden, welche aussagen, dass die Punkte der Gruppe auf einer gegebenen Geraden liegen sollen resp. gegeben sein sollen. Beispielsweise formen wir so die Formel (16) für $k=3$ um. Sie giebt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 g_p &= g_p\,(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3) - g_s\,(c_1 + c_2 + c_3) + G\\ &= \tfrac{1}{2} g_p\,[c_1\,(c_2 + c_3) + c_2\,(c_3 + c_1) + c_3\,(c_1 + c_2)]\\ &\quad - \tfrac{1}{2} g_s\,[(c_2 + c_3) + (c_3 + c_1) + (c_1 + c_2)] + G\end{aligned}$$

für jedes $c_i g_p - g_s$ setzen wir nach (5) c_i^3 und erhalten:

$$(23)\quad \varepsilon_3 g_p = \tfrac{1}{2}\,(c_1^3c_2 + c_1^3c_3 + c_2^3c_3 + c_2^3c_1 + c_3^3c_1 + c_3^3c_2) + G.$$

Aus dieser Formel fliesst unmittelbar die Zahl

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$$

der *gemeinsamen Punkte dreier Flächen* F_1, F_2, F_3 von den Ordnungen f_1, f_2, f_3. Man fasse nämlich auf jeder der ∞^4 Geraden des Raums jeden der f_1 Schnittpunkte auf der Fläche F_1 mit jedem der f_2 Schnittpunkte auf F_2 und mit jedem der f_3 Schnittpunkte auf F_3 zu einem Punkttripel zusammen, und wende auf das erhaltene vierstufige System von Punkttripeln die Formel (23) an. Dann ist

$$G = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$$

zu setzen, weil auf einer gegebenen Geraden $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ Punkttripel liegen, und jedes der 6 Symbole von der Form $c_i^3 c_m$ gleich null zu setzen, da eine gegebene Fläche nicht einen *gegebenen* Punkt enthalten kann. Ferner wird das Coincidenzsymbol $\varepsilon_3 g_p$ durch jeden *Schnittpunkt* der drei Flächen erfüllt, weil die Verbindungslinie eines Schnittpunkts mit dem durch die Bedingung g_p beliebig gegebenen Punkte Träger eines Punkttripels mit coincidirenden Punkten ist. Damit ist der bekannte Bezout'sche Satz*) bewiesen. Man beachte dabei, dass dieser Satz specieller ist, als die Formel (23). Eine Fläche F von der Ordnung f ist nämlich ein vierstufiges System von Punktgruppen mit f Punkten, welches die besondere Specialität besitzt, dass seine ∞^4 Punkte ∞^2 Punkte werden, deren jeder ∞^2 mal zu rechnen ist. Diese Specialität ist der Grund, warum von den 7 Symbolen der rechten Seite der Formel (23) hier alle bis auf G verschwinden, und warum also die Zahl der gemeinsamen Punkte dreier Flächen gleich der Zahl ist, welche angiebt, wie oft man auf einer Geraden drei den drei Flächen angehörige Punkte combiniren kann.

---

*) Inzwischen hat der Verfasser die Sätze aufgestellt, welche den Bezout'schen Satz vertreten, wenn man statt des Punktes den Strahlbüschel und andere aus Punkten, Ebenen und Strahlen bestehende Gebilde als Raumelemente auffasst.

§ 2.

Coincidenz von k Punkten gleicher Definition an einer und an mehr Stellen.

Indem wir bei der Ableitung der Formeln (14) bis (23) die k Punkte, welche coincidiren sollten, mit *verschiedenen* Symbolen behafteten, berücksichtigten wir, dass diese k Punkte möglicher Weise *verschiedenen* Definitionen entspringen konnten. In diesem Paragraphen wollen wir jedoch die n Punkte der Gruppe als *gleichwerthig* voraussetzen, und irgend welche k von den n Punkten coincidiren lassen. Ferner wollen wir auch die Fälle betrachten, wo *nicht an einer Stelle*, sondern *an m Stellen* des Trägers Coincidenzen stattfinden, und zwar so, dass von den n Punkten an der ersten Stelle i_1, an der zweiten Stelle $i_2, \cdots$, an der m^{ten} Stelle i_m Punkte coincidiren.

Wir bestimmen zunächst in einem $(k-1)$-stufigen Systeme von Punktgruppen die Zahl ε_k derjenigen Punktgruppen, welche von ihren n Punkten k in einem und demselben Punkte b vereinigen.

Um die gesuchte Zahl ε_k zu finden, wenden wir die Hauptformel (14) an. Das erste Symbol ihrer rechten Seite, β_{k-1}, enthält k Summanden, welche in unserem Falle einander *gleich* werden, und von denen jeder die Bedingung giebt, *dass von den n Punkten $k-1$ verschiedene auf $k-1$ gegebenen Ebenen liegen.* Dieser Bedingung geben wir das Symbol γ_{k-1}. Der k^{te} Punkt kann nun jeder von den $n-k+1$ übrigen Punkten sein. Daher wird aus β_{k-1} in unserem Falle

$$k \cdot (n-k+1) \cdot \gamma_{k-1}.$$

Analoges gilt von den übrigen Symbolen β. Bezeichnet nämlich überhaupt γ_i *die Bedingung, dass von den n Punkten i verschiedene auf i gegebenen Ebenen liegen*, so wird immer:

$$\beta_i = k_i \cdot (n-i)(n-i-1)(n-i-2) \cdots (n-k+1) \cdot \gamma_i, \tag{24}$$

weil nach Aussonderung von i Punkten durch γ_i als $(i+1)$-ter jeder der $(n-i)$ sonstigen Punkte, als $(i+2)$-ter jeder der $n-i-1$ dann noch übrig gelassenen Punkte, u. s. w. gelten kann. Folglich bestimmt sich die gesuchte Zahl ε_k durch die Formel:

$$\begin{aligned}\varepsilon_k = {} & k_1 \cdot (n-k+1) \cdot \gamma_{k-1} - k_2 \cdot (n-k+2)(n-k+1) \cdot \gamma_{k-2} g \\ & + k_3 \cdot (n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) \cdot \gamma_{k-3} g_p.\end{aligned} \tag{25}$$

Speciell ist für $k = 4$:

$$\varepsilon_4 = 4\,(n-3)\,\gamma_3 - 6\,(n-2)(n-3)\,\gamma_2 g + 4\,(n-1)(n-2)(n-3)\,\gamma_1 g_p.$$

Ebenso ergeben sich die Formeln für $g\varepsilon_k$, $g_p \varepsilon_k$, $g_e \varepsilon_k$, $g_s \varepsilon_k$, $G\varepsilon_k$, $b\,\varepsilon_k$, $b^2 \varepsilon_k$, $b^3 \varepsilon_k$ aus den Formeln (15) bis (22).

Es wird hinreichen, beispielsweise die Formel für $b\,\varepsilon_k$ hier anzuführen:

$$b\,\varepsilon_k = \gamma_k - k_2 \cdot (n - k + 2)(n - k + 1)\,\gamma_{k-2} g_e + k_3 \cdot (n - k + 3)(n - k + 2)(n - k + 1)\,\gamma_{k-3} g_s. \tag{26}$$

Wir gehen zu den Fällen über, wo an *mehr als einer* Stelle des Trägers der Punktgruppe Coincidenzen stattfinden sollen.

Der Einfachheit wegen nehmen wir zunächst an, dass die Punkte der Gruppe verschiedene Symbole haben, und dass c_1, c_2, c_3 an einer Stelle, c_4 und c_5 an einer andern Stelle des Trägers coincidiren sollen. Dann hat man, ähnlich wie bei (9), für die Zahl der Punktgruppen, bei denen ausser c_1, c_2, c_3 auch noch c_4 und c_5 coincidiren sollen, die Formel:

$$\varepsilon_3 c_4 + \varepsilon_3 c_5 - \varepsilon_3 g.$$

Nun ist aber:

$$\varepsilon_3 = c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 - g c_1 - g c_2 - g c_3 + g_p.$$

Folglich ist die gesuchte Zahl gleich dem symbolischen Producte:

$$(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 - g c_1 - g c_2 - g c_3 + g_p)(c_4 + c_5 - g)$$

oder gleich:

$$\begin{aligned} & c_1 c_2 c_4 + c_1 c_3 c_4 + c_2 c_3 c_4 + c_1 c_2 c_5 + c_1 c_3 c_5 + c_2 c_3 c_5 \\ & - g(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_1 c_4 + c_1 c_5 + c_2 c_3 + c_2 c_4 + c_2 c_5 + c_3 c_4 + c_3 c_5) \\ & + g_p(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) + g_e(c_1 + c_2 + c_3) - g_s. \end{aligned}$$

Also allgemein:

Um eine Formel für die Zahl $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_m}$ *derjenigen Punktgruppen eines* $(i_1 + i_2 + i_3 + \cdots i_m - m)$*-stufigen Systems zu finden, bei denen sowohl gewisse* i_1 *Punkte, wie auch gewisse andere* i_2 *Punkte,* $\cdots$, *wie auch gewisse* i_m *Punkte coincidiren, stelle man nach Formel* (14) *die Ausdrücke für die* m *einzelnen Coincidenzen auf, und multiplicire die so erhaltenen* m *Ausdrücke mit einander.*

Sind die n Punkte der Gruppe von *gleicher* Definition, so hat man Formel (25) anzuwenden, und die Coefficienten von γ richtig zu bestimmen. Ist z. B. die Zahl ε_{kl} derjenigen Punktgruppen eines $(k+l-2)$-stufigen Systems zu bestimmen, bei denen von den n Punkten der Gruppe k Punkte an irgend einer Stelle coincidiren, während zugleich l Punkte an einer andern Stelle coincidiren, so hat man zu beachten, dass als Factor von γ_{k+l-2} jetzt

$$(n - k - l + 2) \cdot (n - k - l + 1)$$

erscheint, weil als $(k + l - 1)^{\text{ter}}$ Punkt jeder der $n - k - l + 2$ übrigen Punkte, und als $(k + l)^{\text{ter}}$ Punkt jeder der dann noch vorhandenen $n - k - l + 1$ Punkte erscheint. Analoges gilt für die Factoren von γ_{k+l-3}, γ_{k+l-4}, γ_{k+l-5}, γ_{k+l-6}. So resultirt schliesslich folgende Formel für ε_{kl}:

$$(27)\quad \varepsilon_{kl} = (n-k-l+1)(n-k-l+2)\cdot[k_1\cdot l_1\cdot\gamma_{k+l-2}$$
$$-(k_2\cdot l_1+k_1\cdot l_2)(n-k-l+3)\gamma_{k+l-3}\,g$$
$$+(k_3\cdot l_1+k_2\cdot l_2+k_1\cdot l_3)(n-k-l+3)(n-k-l+4)\gamma_{k+l-4}\,g_p$$
$$+k_2\cdot l_2\cdot(n-k-l+3)(n-k-l+4)\gamma_{k+l-4}\,g_e$$
$$-(k_3\cdot l_2+k_2\cdot l_3)(n-k-l+3)(n-k-l+4)\cdot(n-k-l+5)\gamma_{k+l-5}\,g_s$$
$$+k_3\cdot l_3(n-k-l+3)(n-k-l+4)(n-k-l+5)(n-k-l+6)\gamma_{k+l-6}\,G].$$

Hieraus wird ersichtlich sein, wie sich die Formeln für Punktgruppen mit mehr als 2 Coincidenzstellen gestalten.

Mit Rücksicht auf die in § 4. folgende Anwendung zur *directen* Berechnung gewisser Singularitäten-Zahlen der Fläche n^{ter} Ordnung, geben wir hier alle Formeln an, welche für ein *vierstufiges* System von Punktgruppen die Zahl derjenigen *singulären* Punktgruppen bestimmen, bei denen an einer oder mehr Stellen zwei oder mehr Punkte coincidiren.

$$(28)\quad \varepsilon_5 = (n-4)[5_1\cdot\gamma_4 - 5_2(n-3)\gamma_3 g + 5_3\cdot(n-3)(n-2)\gamma_2 g_p],$$

$$(29)\quad \varepsilon_{12} = (n-5)(n-4)[4_1\cdot 2_1\cdot\gamma_4 - (4_2\cdot 2_1+4_1\cdot 2_2)(n-3)\gamma_3 g$$
$$+(4_3\cdot 2_1+4_2\cdot 2_2)(n-3)(n-2)\gamma_2 g_p + 4_2\cdot 2_2(n-3)(n-2)\gamma_2 g_e$$
$$-4_3\cdot 2_2(n-3)(n-2)(n-1)\gamma_1\cdot g_s],$$

$$(30)\quad 2!\,\varepsilon_{33} = (n-5)(n-4)[3_1\cdot 3_1\cdot\gamma_4 - (3_2\cdot 3_1+3_1\cdot 3_2)(n-3)\gamma_3 g$$
$$+(3_3\cdot 3_1+3_2\cdot 3_2+3_1\cdot 3_3)(n-3)(n-2)\gamma_2 g_p + 3_2\cdot 3_2(n-3)(n-2)\gamma_2 g_e$$
$$-(3_3\cdot 3_2+3_2\cdot 3_3)(n-3)(n-2)(n-1)\gamma_1 g_s$$
$$+3_3\cdot 3_3\cdot(n-3)(n-2)(n-1)\cdot n\cdot G],$$

$$(31)\quad 2!\,\varepsilon_{322} = (n-6)(n-5)(n-4)\cdot[3_1\cdot 2_1\cdot 2_1\gamma_4 - (3_2\cdot 2_1\cdot 2_1+3_1\cdot 2_2\cdot 2_1$$
$$+3_1\cdot 2_1\cdot 2_2)(n-3)\gamma_3 g$$
$$+(3_3\cdot 2_1\cdot 2_1+3_2\cdot 2_1\cdot 2_2+3_2\cdot 2_2\cdot 2_1+3_1\cdot 2_2\cdot 2_2)(n-3)(n-2)\gamma_2 g_p$$
$$+(3_2\cdot 2_1\cdot 2_2+3_2\cdot 2_2\cdot 2_1+3_1\cdot 2_2\cdot 2_2)(n-3)(n-2)\gamma_2 g_e$$
$$-(3_3\cdot 2_2\cdot 2_1+3_3\cdot 2_1\cdot 2_2+2\cdot 3_2\cdot 2_2\cdot 2_2)(n-3)(n-2)(n-1)\gamma_1 g_s$$
$$+3_3\cdot 2_2\cdot 2_2\cdot(n-3)(n-2)(n-1)\cdot nG].$$

Bei der Formel für ε_{2222}, welche aus der Multiplication von *vier* Correspondenzformeln hervorgeht, fassen wir die Summen der Producte der Binomialcoefficienten in geeigneter Weise zusammen, und erhalten:

$$(32)\quad 4!\,\varepsilon_{2222} = (n-7)(n-6)(n-5)(n-4)[2^4\cdot\gamma_4 - 4_1\cdot 2^3(n-3)\gamma_3 g$$
$$+4_2\cdot 2^2(n-3)(n-2)\gamma_2(g_p+g_e)$$
$$-4_3\cdot 2^1(n-3)(n-2)(n-1)\gamma_1\cdot(2g_s)$$
$$+4_4\cdot 2^0(n-3)(n-2)(n-1)\cdot n\cdot(2G)].$$

Der Factor 4! vor ε_{2222} in (32) erklärt sich dadurch, dass *jede* der *vier* Coincidenzstellen zwei Punkte der Punktgruppe vereinigt. Analoges gilt von dem Factor 2! bei (30) und (31).

Die Formeln (28) bis (32) liefern die Zahlen für die singulären

Punktgruppen eines vierstufigen Systems als Functionen von *nur sechs* auf die allgemeine Punktgruppe bezüglichen Zahlen, nämlich von:

$$\gamma_4, \gamma_3 g, \gamma_2 g_p, \gamma_2 g_e, \gamma_1 g_s, G,$$

welche wir als die *Stammzahlen* des vierstufigen Systems bezeichnen wollen.

Analog der eben gegebenen Ableitung für *vierstufige* Systeme ist die Ableitung der Coincidenzzahlen für Systeme von niederer und von höherer Stufe, sowie die Ableitung der Zahlen für singuläre Punktgruppen, die noch Grundbedingungen des Trägers oder der Coincidenzstelle erfüllen. Immer erhält man die gesuchten Zahlen schliesslich als Functionen von nur 6 *Stammzahlen.* Diese sind bei einem $i$stufigen Systeme:

$$\gamma_i, \gamma_{i-1} g, \gamma_{i-2} g_p, \gamma_{i-2} g_e, \gamma_{i-3} g_s, g_{i-4} G.$$

Es liegt nahe, die Probleme, welche oben für Gruppen von *n in gerader Linie* befindlichen Punkten gelöst sind, auf Gruppen von Punkten zu übertragen, welche *beliebige Lage* zu einander in einer Ebene oder im Raume haben. Setzen wir ein System von Gruppen voraus, deren jede n in beliebiger Lage befindliche Punkte c enthält, und betrachten wir solche Punktgruppen des Systems, bei denen von den n Punkten *k coincidiren.* Dann bemerken wir, dass eine solche Coincidenz jetzt in *mannigfacher Weise* stattfinden kann, je nachdem nämlich auch *Verbindungsgeraden* zweier Punkte oder *Verbindungsebenen* dreier Punkte coincidiren sollen oder nicht. Z. B. sind Coincidenzen denkbar, bei denen die $\frac{k(k-1)}{2}$ Verbindungsgeraden der k coincidirenden Punkte *möglichst* freie Lage zu einander haben, und auch solche, bei denen *eine einzige Gerade* als Verbindungsgerade je zweier der k coincidirenden Punkte aufzufassen ist. Damit ein System Punktgruppen der letzterwähnten Art enthalte, ist nöthig, dass die Stufe des Systems $< 3k - 5$ sei. Es lässt sich aber dann ε allein durch Grundbedingungen der allgemeinen Punktgruppe *nicht* ausdrücken. Dasselbe gilt von den singulären Punktgruppen mit andersgearteten Coincidenzen. Betrachten wir, der Einfachheit wegen, ein einstufiges System von Dreiecken, d. h. von Punktgruppen mit je 3 Punkten c. c bezeichne zugleich, dass eine Ecke des Dreiecks auf einer gegebenen Ebene liege, g, dass eine Seite eine gegebene Gerade schneide, μ, dass die Ebene des Dreiecks durch einen gegebenen Punkt gehe. Dann drückt nach der Punktepaar-Formel erster Dimension

$$4c - 2g$$

die Zahl aller hinlänglich oft gerechneten Punktgruppen aus, bei denen zwei der drei Ecken des Dreiecks coincidiren. Von derartigen singulären Punktgruppen giebt es aber schon *zwei verschiedene* Arten, nämlich:

1) solche, bei denen zwei Ecken coincidiren, die dritte Ecke von der Coincidenzstelle verschieden ist, und zwar so, dass sie *nicht* auf der Verbindungsgeraden der coincidirenden Ecken liegt;
2) solche, bei denen alle drei Ecken coincidiren, die drei Seiten aber drei *verschiedene*, von der Coincidenzstelle ausgehende Strahlen sind.

Die erstgenannte Ausartung des Dreiecks entspricht sich selbst dualistisch, der zweitgenannten entspricht dualistisch eine dritte Ausartung des Dreiecks.

Geht man nun weiter zu zwei- und dreistufigen Systemen, so sieht man, dass es nie gelingt, durch die aus c, g, μ zusammengesetzten Bedingungen eine Zahl auszudrücken, welche sich auf nur *eine* Sorte von Ausartungen bezieht.

Analog ist es bei ebenen und räumlichen nEcken.

§ 3.

Anwendungen der Formeln für Punktgruppen.

Durch die Formeln (28) bis (32) habe ich die Anzahlen gewisser singulärer Punktgruppen eines *allgemeinen* vierstufigen Systems von Punktgruppen als Functionen der 6 *Stammzahlen*

$$\gamma_4,\ \gamma_3 g,\ \gamma_2 g_e,\ \gamma_2 g_p,\ \gamma_1 g_s,\ G$$

dieses Systems dargestellt. Damit sind gewissermassen Singularitäten eines Gebildes behandelt, von welchem die allgemeine Punktfläche F_n ein sehr *specieller* Fall ist. Eine solche erzeugt nämlich durch ihre n Schnittpunkte auf jeder der ∞^4 Geraden des Raumes eine Punktgruppe von n Punkten, und das so gebildete vierstufige System von Punktgruppen hat die schon oben erwähnte *besondere Eigenschaft*, dass seine ∞^4 Punkte nur ∞^2 Punkte sind, von denen jeder ∞^2 mal einer Punktgruppe angehört. Bei dem Interesse, welches die Algebraiker der allgemeinen Punktfläche zuwenden, wird es wünschenswerth erscheinen, die Formeln (28) bis (32) für dieses speciellere System zu particularisiren. Man erhält dann die vom Verfasser in den Beitr. § 27 und in den Gött. Nachr. (Februar 1876) berechneten Zahlen für die von Salmon in seiner Raumgeometrie (Salmon-Fiedler, II. Th. II. Aufl. Artikel 462) mit den Zeichen

$$\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta$$

eingeführten 5 Singularitäten der F_n.

Wir haben daher die 6 Stammzahlen für das speciellere System zu berechnen, und die erhaltenen Werthe in die Formeln (28) bis (32) einzusetzen. Ist die Fläche F_n, wie wir hier voraussetzen, *punkt-allgemein*, so sind die 6 Stammzahlen Functionen von n allein, und leicht mit Hilfe einer allgemeinen *Stammformel* durch n auszudrücken. Bezeichnet für ein einstufiges System, welches dem durch die F_n erzeugten vierstufigen Systeme von Punktgruppen angehört,

c die Bedingung, dass einer der n Punkte einer Gruppe auf einer gegebenen Ebene liegt,

g, wie immer, die Bedingung, dass der Träger eine gegebene Gerade schneidet,

so ist immer:

$$(33) \qquad n \cdot g = c,$$

weil die Regelfläche der Träger der ∞^1 Punktgruppen die F_n in einer Curve von der Ordnung $n \cdot g$ schneidet. Wir bezeichnen nun mit

$$c^{i,\,k,\,l,\,m,}$$

die Bedingung, dass von den n Punkten der Punktgruppe einer auf i gegebenen Ebene, ein zweiter auf k, ein dritter auf l, ein vierter auf m gegebenen Ebenen liegt. Dann ist selbstverständlich:

$$(34) \qquad c\,c^{i,k,l,} = c^{i+1,k,l,} + c^{i,k+1,l,} + c^{i,k,l+1,} + c^{i,k,l,1,}\text{*)}$$

Ferner folgt aus der Definition der F_n als eines zweistufigen Punktsystems, das auf jeder Geraden n Punkte besitzt:

$$(35) \qquad G = 1; \quad c^{2,}g_e = 0; \quad c^{2,}g_p = n;$$
$$c^{3,}g = 0; \quad c^{4,} = 0; \quad c^{2,2,} = n^2.$$

Desshalb ergiebt sich bei Benutzung der Stammformel (33) nach und nach:

$$(36) \qquad c^{1,}g_s = n \cdot g g_s = nG = n;$$

$$(37) \qquad c^{1,1,}g_e = n \cdot c^{1,}g_s - c^{2,}g_e = n^2 - 0 = n^2;$$

$$(38) \qquad c^{1,1,}g_p = n \cdot c^{1,}g_s - c^{2,}g_p = n^2 - n;\text{**)}$$
$$c^{2,1,}g = n \cdot c^{2,}(g_e + g_p) - c^{3,}g = n^2 - 0 = n^2;$$
$$c^{3,1,} = n \cdot c^{3,}g - c^{4,} = 0;$$

$$(39) \qquad c^{1,1,1,}g = n \cdot c^{1,1,}g^2 - 2 \cdot c^{2,1,}g = 2n^3 - n^2 - 2n^2 = 2n^3 - 3n^2\text{**)};$$
$$c^{2,1,1,} = n \cdot c^{2,1,}g - c^{3,1,} - c^{2,2,} = n^3 - n^2;$$

$$(40) \qquad c^{1,1,1,1,} = n \cdot c^{1,1,1,}g - 3 \cdot c^{2,1,1,} = 2n^4 - 3n^3 - 3(n^3 - n^2)$$
$$= 2n^4 - 6n^3 + 3n^2.\text{**)}$$

Die in den Formeln (36), (37), (38), (39), (40) berechneten Zahlen G, $c^{1,}g_s$, $c^{1,1,}g_p$, $c^{1,1,}g_e$, $c^{1,1,1,}g$, $c^{1,1,1,1,}$ sind bezüglich die gesuchten 6 Stammzahlen G, $\gamma_1 g_s$, $\gamma_2 g_p$, $\gamma_2 g_e$, $\gamma_3 g$, γ_4. Man erhält daher:

---

*) Man vergleiche das analoge Verfahren in § 11. meiner Beitr., pag. 38.

**) Diese Formeln habe ich auch in meinen „Tangentensingularitäten der F_n“ (Math. Ann. Bd. XI, pag. 323) angeführt, und zwar in den Nr. 5, 6, 7.

$$\begin{aligned}
\gamma_4 &= 2n^4 - 6n^3 + 3n^2,\\
(n-3)\,\gamma_3 g &= 2n^4 - 9n^3 + 9n^2,\\
(n-2)(n-3)\,\gamma_2 g_p &= n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n,\\
(n-2)(n-3)\,\gamma_2 g_e &= n^4 - 5n^3 + 6n^2,\\
(n-1)(n-2)(n-3)\,\gamma_1 g_s &= n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n,\\
n(n-1)(n-2)(n-3)\,G &= n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Formeln (28) bis (32) erhält man die schon früher von mir abgeleiteten Salmon'schen Singularitäten-Zahlen *direct*, nämlich:

Eine Fläche n^{ter} Ordnung besitzt:

(41) $$5n(n-4)(7n-12)$$

fünfpunktig berührende Tangenten,

(42) $$2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5)$$

vier-zweipunktig berührende Tangenten,

(43) $$\tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n^3+3n^2+29n-60)$$

drei-dreipunktig berührende Tangenten,

(44) $$\tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+9n^2+20n-60)$$

drei-zwei-zweipunktig berührende Tangenten,

(45) $$\tfrac{1}{12}n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3+6n^2+7n-30)$$

an vier Stellen zweipunktig berührende Tangenten.*)

In ähnlicher Weise ergeben sich direct aus den 6 Stammzahlen, und damit aus der Definition der F_n, die schon länger bekannten Zahlen für die in mehrstufiger Mannigfaltigkeit auf der F_n vorhandenen Singularitäten, z. B. die Ordnung der Curve der Berührungspunkte der dreifachen Tangenten.

Es liegt nahe, die eben gelösten Probleme dahin auszudehnen, dass man statt der F_n ein $a$stufiges *System* von Flächen n^{ter} Ordnung behandelt, indem man dieses als ein specielles $(4+a)$stufiges System von Punktgruppen auffasst. Die 6 Stammzahlen desselben:

$$\gamma_{4+a},\ \gamma_{3+a}g,\ \gamma_{2+a}g_p,\ \gamma_{2+a}g_e,\ \gamma_{1+a}g_s,\ \gamma_a G$$

hängen dann von gewissen Charakteristiken des Flächensystems ab. Unsere Formeln liefern dann z. B. die Zahl der Flächen mit $(5+a)$-punktig berührenden Tangenten, die Zahl der Flächen mit $(4+a)$-fachen Tangenten, die Ordnung der Curve der Berührungspunkte aller möglichen $(3+a)$-fachen Tangenten, etc. Diese Zahlen werden Reductionen erfahren, sobald das vorausgesetzte a stufige Flächen-

*) In der Liniengeometrie entsprechen diesen Zahlen gewisse auf den Complex n^{ten} Grades bezügliche, welche in der folgenden Abhandlung (pag. 202) abgeleitet sind.

system gewisse Ausartungen enthält, gerade so wie die oben in (41) bis (45) mitgetheilten Zahlen Reductionen erleiden, sobald die F_n eine Doppelcurve, Rückkehrcurve etc. besitzt. Abgesehen von der durch die Berücksichtigung der Ausartungen etwa entstehenden Schwierigkeit, handelt es sich also bei der Lösung dieser auf *Systeme* von Flächen bezüglichen Probleme wesentlich um die Bestimmung der 6 Stammzahlen. Mit solchen Problemen hat sich der Verfasser bis jetzt noch nicht beschäftigt, wohl aber mit den einfachsten von den auf *Curvensysteme* bezüglichen, *analogen* Problemen. Auf diese gehen wir jetzt ein.

Zunächst finden wir aus Formel (25) für $k = 3$ die Zahl der Stellen einer Plancurve n^{ter} Ordnung, in denen eine Gerade in drei coincidirenden Punkten schneiden kann, gleich

$$3n^2(n-2) - 3n(n-1)(n-2) = 3n(n-2),$$

da $\gamma_1 = n$, $\gamma_2 = n^2$ wird. Diese Stellen sind bei der punkt-allgemeinen Curve nur die $\varkappa'$ Wendepunkte. Bei der beliebigen Curve treten noch die δ Doppelpunkte und die $\varkappa$ Spitzen hinzu. Wir entnehmen den Plückerschen Formeln, dass jede Doppelpunktstangente *dreimal*, jede Rückkehrtangente *achtmal* als Gerade zählt, die in drei coincidirenden Punkten schneidet, indem ja:

$$3n(n-2) = \varkappa' + 2 \cdot 3 \cdot \delta + 8 \cdot \varkappa \tag{46}$$

ist. Wir gehen weiter zu einstufigen und zweistufigen Systemen von Plancurven. Es bezeichne:

- μ die Bedingung, dass eine Plancurve ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicke;
- ν, dass sie eine gegebene Gerade schneide;
- ϱ, dass sie eine gegebene Ebene berühre;
- P die zweifache Bedingung, dass sie durch einen gegebenen Punkt gehe;
- w, p, q, dass sie bezüglich eine ihrer Wendetangenten, Doppelpunktstangenten, Rückkehrtangenten durch eine gegebene Gerade schicke;
- v, b, c, dass sie bezüglich einen ihrer Wendepunkte, Doppelpunkte, Rückkehrpunkte in eine gegebene Ebene werfe;
- w_e, p_e, q_e die zweifachen Bedingungen, dass sie bezüglich eine ihrer Wendetangenten, Doppelpunktstangenten, Rückkehrtangenten in eine gegebene Ebene werfe.

Jede Plancurve n^{ter} Ordnung erzeugt durch ihre n Schnittpunkte mit jeder in ihrer Ebene gelegenen Geraden eine Punktgruppe. Also erzeugt ein einstufiges System von Plancurven ein dreistufiges System von Punktgruppen; und auf dieses wollen wir die mit g multiplicirte Formel

(25) und die Formel (26) anwenden. Dann haben wir 5 Stammzahlen zu berechnen, nämlich:

$$\gamma_3, \ \gamma_2 g, \ \gamma_1 g_e, \ \gamma_1 g_p, \ g_s.$$

Für g_s haben wir μ zu setzen, weil durch den Scheitel des Strahlbüschels von g_s μ Curven des Systems gehen, deren jede auf der Ebene des Strahlbüschels eine Punktgruppe liefert. Ebenso ergiebt sich leicht

$$\gamma_1 g_p = n \cdot \mu; \quad \gamma_1 g_e = \nu.$$

Um $\gamma_2 g$ zu finden, legen wir die Gerade der Bedingung g in die erste der beiden durch γ_2 gegebenen Ebenen, und finden so durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl:

$$\gamma_2 g = \nu \cdot n + \nu (n - 1) = \nu (2n - 1).$$

Um γ_3 zu bestimmen, zeichnen wir eine der drei durch γ_3 gegebenen Ebenen vor den beiden andern aus. Auf ihr liefert jede Curve des Systems n Schnittpunkte und n^2 andere Punkte, deren jeder Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von zwei Curvenpunkten ist, die auf den beiden anderen Ebenen liegen. So entsteht auf der ausgezeichneten Ebene ein einstufiges System von Punktepaaren, auf welches wir die Formel 1) anwenden. Dann kommt für die Zahl der Coincidenzen:

$$\nu \cdot n^2 + (g\gamma_2) \cdot n - \mu \cdot n^3.$$

Die Coincidenzen werden aber nicht bloss von den γ_3 gesuchten Punktgruppen, sondern auch von den $2 \cdot \nu \cdot n$ Punktgruppen gebildet, die von den Schnittgeraden der ausgezeichneten Ebene mit den beiden andern Ebenen herrühren. Also ist:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \nu \cdot (2n - 1) \cdot n + \nu \cdot n^2 - \mu \cdot n^3 - 2\nu \cdot n \\ &= 3\nu \cdot (n^2 - n) - \mu \cdot n^3. \end{aligned}$$

Die Werthe der nunmehr bestimmten 5 Stammzahlen setzen wir in die mit g multiplicirte Formel (25) und in die Formel (26) ein. Dann kommt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 g &= 3\nu (2n - 1)(n - 2) - 3\nu (n - 1)(n - 2) \\ &\quad - 3\mu \cdot n (n - 1)(n - 2) + \mu \cdot n (n - 1)(n - 2) \\ &= 3\nu \cdot n (n - 2) - 2\mu \cdot n (n - 1)(n - 2) \\ \varepsilon_3 b &= 6\nu (n - 1) - \mu \cdot n (3n - 2). \end{aligned}$$

Die Coefficienten 1, 3, 8 in Formel (46) lehren, dass das Symbol $\varepsilon_3 g$ einmal durch jede Curve erfüllt wird, die eine Wendetangente, dreimal durch jede, welche eine Doppelpunktstangente, achtmal durch jede, welche eine Rückkehrtangente durch eine gegebene Gerade schickt. Analoges findet für $\varepsilon_3 b$ statt. Ausserdem aber können diese Symbole auch durch gewisse ausgeartete Curven des Systems erfüllt werden. Die unbekannte Zahl solcher hinlänglich oft gerechneten Ausartungen sei X resp. X'. Dann geben die obigen Formeln für $\varepsilon_3 g$ und $\varepsilon_3 b$ die Gleichungen:

(47) $3\nu \cdot n(n-2) - 2\mu \cdot n(n-1)(n-2) = w + 3p + 8q + X$,

(48) $6\nu(n-1) - \mu \cdot n(3n-2) = v + 2 \cdot 3 \cdot b + 8c + X'$.

Der Verfasser hat die Formeln (47) und (48) namentlich auf die von ihm eingehend studirten*) Systeme von cubischen Plancurven mit Spitze angewandt. Die *elementaren* Systeme solcher Curven können nur *eine* Ausartung σ besitzen, deren Punkte einen Kegelschnitt und eine ihn berührende Gerade bilden. Für solche Systeme kann man leicht die Formeln (47) und (48) verificiren, da für sie:

$$w = \tfrac{1}{3}(4\varrho - \nu); \qquad q = \tfrac{1}{6}(7\nu - \varrho - 9\mu);$$
$$v = \tfrac{1}{6}(7\varrho - \nu - 3\mu); \quad c = \tfrac{1}{3}(4\nu - \varrho - 6\mu);^{**)}$$

und die Anzahl der Ausartungen σ gleich

$$\tfrac{1}{2}(\nu + \varrho - 3\mu)^{**)}$$

ist. Man findet dabei, dass jede Curve σ das Symbol $\varepsilon_3 b$ *dreimal*, das Symbol $\varepsilon_3 g$ gar nicht erfüllt.

Um für ein *zweistufiges* System von Plancurven $\varepsilon_3 g_e$ zu berechnen, hat man die Stammzahlen $\gamma_2 g_e$ und $\gamma_1 g_s$ zu bestimmen. Man findet

$$\gamma_2 g_e = \nu^2 - P; \quad \gamma_1 g_s = \mu\nu.$$

Setzt man noch

$$P = \mu\nu - n \cdot \mu^2 \quad \text{(Beitr. pag. 33, letzte Zeile)},$$

so erhält man:

$$(49)\ \varepsilon_3 g_e = 3(n-2)(\nu^2 - \mu\nu + n \cdot \mu^2) - 3\mu\nu(n-1)(n-2)$$
$$= 3(n-2)\nu^2 - 3n(n-2)\mu\nu + 3n(n-2)\mu^2$$
$$= w_e + 3p_e + 8q_e + X'',$$

wo w_e, p_e, q_e oben definirt sind, und X'' wieder von den im Systeme vorhandenen Ausartungen abhängt.

§ 4.

Coincidenz von k Strahlen eines Strahlbüschels.

Wir behandeln jetzt die *Strahlengruppe* analog wie in § 1. und § 2. die Punktgruppe. Die Strahlengruppe ist ein Gebilde, welches aus n einem und demselben Strahlbüschel angehörigen Strahlen besteht. Der Scheitel des Strahlbüschels heisse c, seine Ebene μ, und die n ihm incidenten Strahlen

$$g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n.$$

Demgemäss (Beitr. pag. 19 oben) bezeichnet auch:

*) Man vergleiche des Verfassers Mittheilung in den Gött. Nachr. Mai 1875.

**) Ebenda, pag. 380 u. 381.

1) $\mu^\alpha c^\beta$ die Bedingung, dass die Strahlengruppe ihre Ebene durch α gegebene Punkte schickt, und zugleich ihren Scheitel auf β gegebenen Ebenen hat;

2) g_i, g_{ie}, g_{ip}, g_{is} und G_i bezüglich die Bedingungen, dass die Strahlengruppe ihren Strahl g_i bezüglich durch eine gegebene Gerade, in eine gegebene Ebene, durch einen gegebenen Punkt, in einen gegebenen Strahlbüschel schickt, und als gegeben besitzt;

3) das Product mehrerer dieser Bedingungssymbole, dass die Strahlengruppe die von diesen Symbolen dargestellten Bedingungen *zugleich* erfüllt; z. B. $\mu^2 c g_{ie}$ bedeutet die fünffache zusammengesetzte Bedingung, dass die Ebene der Strahlengruppe durch eine gegebene Gerade gehen soll, der Scheitel in einer gegebenen Ebene, und auch der Strahl g_i in einer gegebenen Ebene liegen soll.

Da jeder Strahl g_i sowohl dem Scheitel c, wie auch der Ebene μ *incident* ist, so bestehen zwischen den Grundbedingungen von g_i und von c, resp. von g_i und von μ die auf dem Princip von der Erhaltung der Anzahl beruhenden Gleichungen (Beitr. § 9, I u. II):

(50) $$c g_i = g_{ie} + c^2,$$

(51) $$\mu g_i = g_{ip} + \mu^2.$$

Aus ihnen folgt, wie dort, durch symbolische Multiplication:

(52) $$\begin{aligned} \mu c g_i &= g_{is} + \mu^3 + \mu c^2 \\ &= g_{is} + c^3 + \mu^2 c, \end{aligned}$$

(53) $$\begin{aligned} (\mu^2 c - \mu^3)\, g_i &= (\mu c^2 - c^3)\, g_i \\ &= G_i + \mu^3 c + \mu c^3 = G_i + \mu^2 c^2. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen nun, analog wie in § 1., mit ε_i diejenige speciellere Strahlengruppe, bei welcher die i Strahlen:

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \cdots,\ g_i$$

des Strahlbüschels (μ, c) in dem Coincidenzstrahle h_i unendlich nahe liegen. Dann bezeichnet, nach den Grundregeln meiner Symbolik, z. B. $\varepsilon_i h_s z_a$, wo z_a eine der Strahlengruppe auferlegte a-fache Bedingung bedeutet, die *Zahl* derjenigen speciellen Strahlengruppen eines $(i-1+3+a)$-stufigen Systems, welche ihre Strahlen $g_1, g_2, \cdots g_i$ in einem und demselben Strahle h vereinigen, diesen Coincidenzstrahl einem gegebenen Strahlbüschel zuschicken, und dabei die Bedingung z_a erfüllen. Jede solche Strahlengruppe ε_i nennen wir *singulär*. Da im Strahle h eines ε_i die i Strahlen $g_1, g_2, \cdots g_i$ vereinigt liegen, so ist selbstverständlich:

(54) $$h\varepsilon_i = g_1\varepsilon_i = g_2\varepsilon_i = g_3\varepsilon_i = \cdots = g_i\varepsilon_i.$$

Nach der unmittelbar aus dem Chasles'schen Correspondenzprincipe fliessenden Formel erster Dimension für *Paare sich schneiden-*

der Strahlen, erhält man für die Zahl solcher singulärer Strahlengruppen, bei denen die Strahlen g_i und g_m coincidiren, den Ausdruck:

$$g_i + g_m - \mu - c.$$

Speciell ist:

$$g_1 + g_2 - \mu - c = \varepsilon_2.$$

Wiederholen wir nun die Ueberlegung, welche uns in § 1. durch Formel (9) und (10) zu Formel (11) führte, so bekommen wir:

$$(55)\quad \varepsilon_k = (g_1+g_2-\mu-c)(g_1+g_3-\mu-c)(g_1+g_4-\mu-c)\cdots(g_1+g_k-\mu-c).$$

Um aus dieser Formel, in welcher noch g_1 als bevorzugt erscheint, eine in den g symmetrische Formel zu erhalten, entwickeln wir die rechte Seite nach steigenden Potenzen von

$$g_1 - \mu - c,$$

und erhalten:

$$(56)\quad \varepsilon_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}\cdot(g_1-\mu-c) + \alpha_{k-3}\cdot(g_1-\mu-c)^2 + \cdots + \alpha_0\,(g_1-\mu-c)^{k-1},$$

wo jetzt:

$$\alpha_0 = 1;\quad \alpha_1 = g_2 + g_3 + g_4 + \cdots g_k;$$

und überhaupt α_i gleich der Summe der sämmtlichen $(k-1)_i$ Producte von je i verschiedenen der $k-1$ Symbole $g_2, g_3, g_4, \cdots g_i$ bedeutet. Wir beachten nun, dass wegen der Formeln (50), (51), (52), (53) für die Potenzen von $g_1 - \mu - c$ Folgendes gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned}
(g_1-\mu-c)^2 &= -g_1(\mu+c) - 2\mu c,\\
(g_1-\mu-c)^3 &= 2g_1\mu c - 2(\mu^2 c - \mu^3),\\
(g_1-\mu-c)^4 &= -2g_1(\mu^2 c - \mu^3),\\
(g_1-\mu-c)^m &= 0 \text{ für } m > 4.
\end{aligned}$$

Dadurch wird aus Formel (56):

$$(57)\quad \varepsilon_k = (\alpha_{k-1} + g_1\cdot\alpha_{k-2}) - (\mu+c)(\alpha_{k-2} + g_1\alpha_{k-3}) + 2\mu c(\alpha_{k-3} + g_1\alpha_{k-4}) - 2(\mu^2 c - \mu^3)(\alpha_{k-4} + g_1\alpha_{k-5}).$$

Nun ist aber jeder der 4 Ausdrücke

$$\alpha_i + g_1\alpha_{i-1}$$

die Summe aller möglichen Producte von je i verschiedenen der k Symbole $g_1, g_2, g_3, \cdots g_k$. *Schreiben wir für diese Summe* β_i, *so erhalten wir die gesuchte Hauptformel:*

$$(58)\quad \varepsilon_k = \beta_{k-1} - (\mu+c)\,\beta_{k-2} + 2\mu c\beta_{k-3} - 2(\mu^2 c - \mu^3)\,\beta_{k-4}.$$

Speciell ergiebt sich für die Zahl ε_4 derjenigen singulären Strahlengruppen eines dreistufigen Systems, auf denen die 4 Strahlen g_1, g_2, g_3, g_4 coincidiren:

$$(59)\quad \varepsilon_1 = (g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_2 g_3 g_4) \\ - (\mu + c)(g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_1 g_4 + g_2 g_3 + g_2 g_4 + g_3 g_4) \\ + 2\mu c (g_1 + g_2 + g_3 + g_4) - 2(\mu^2 c - \mu^3).$$

Durch die Multiplication der Formel (58) mit den Grundbedingungen

$$\mu,\ c;\ \mu^2,\ \mu c,\ c^2;\ \mu^3,\ \mu^2 c,\ \mu c^2,\ c^3;\ \mu^3 c,\ \mu^2 c^2,\ \mu c^3;\ \mu^3 c^2$$

des die Strahlengruppe tragenden Strahlbüschels erhalten wir die den Formeln (15) bis (19) analogen Formeln. Von diesen erwähnen wir beispielsweise:

$$(60)\quad \varepsilon_k \mu c = \mu c \beta_{k-1} - (\mu^2 c + \mu c^2)\beta_{k-2} + 2\mu^2 c^2 \beta_{k-3} - 2\mu^3 c^2 \beta_{k-4}.$$

Wir suchen jetzt eine Formel für $h\varepsilon_k$, d. h. für den Grad der Regelfläche der Coincidenzstrahlen aller derjenigen singulären Gruppen eines k-stufigen Systems von Strahlengruppen, auf welchen die k Strahlen $g_1, g_2, \cdots g_k$ coincidiren. Um eine solche Formel zu finden, können wir die Formel (58) mit jeder der k Bedingungen $g_1, g_2, \cdots g_k$ multipliciren, und erhalten bei hinreichender Benutzung der fundamentalen Formeln zwischen den Grundbedingungen incidenter Hauptelemente (50) bis (53), jedesmal ein und dieselbe *symmetrische* Formel, nämlich:

$$(61)\quad \varepsilon_k h = \beta_k - (\mu^2 + c^2)\beta_{k-2} + 2(\mu^3 + \mu c^2)\beta_{k-3} - 2\mu^2 c^2 \beta_{k-4},$$

wo wieder β_i die Summe aller möglichen k_i Producte von je i verschiedenen der k Symbole $g_1, g_2, \cdots g_k$ bedeutet. Speciell ist für $k=4$:

$$(62)\quad \varepsilon_4 h = g_1 g_2 g_3 g_4 - (\mu^2 + c^2)(g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_1 g_4 + g_2 g_3 + g_2 g_4 + g_3 g_4) \\ + 2(\mu^3 + \mu c^2)(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) - 2\mu^2 c^2.$$

Aus den Formeln (58) und (62) kann man wegen der auf h angewandten Formeln (50) bis (53), die Ausdrücke für

$$\varepsilon_k h_p,\ \varepsilon_k h_e,\ \varepsilon_k h_s,\ \varepsilon_k H$$

durch blosse symbolische Multiplicationen mit den Grundbedingungen des Strahlbüschels erhalten. So bekommt man z. B. für $\varepsilon_k h_s$ wegen

$$\varepsilon_k h_s = \varepsilon_k \mu c h - \varepsilon_k \mu^3 - \varepsilon_k \mu c^2$$

die folgende Formel:

$$(63)\quad \varepsilon_k h_s = \mu c \beta_k - (\mu^3 + \mu c^2)\beta_{k-1} + \mu^2 c^2 \beta_{k-2}.$$

Die Formeln (58) und (62) entsprechen dualistisch *sich selbst.* Der in (58) vorkommende, scheinbar undualistische Ausdruck

$$\mu^2 c - \mu^3$$

ist nämlich *gleich* dem ihm dualistisch entsprechenden

$$\mu c^2 - c^3,$$

indem jeder dieser beiden Ausdrücke die Bedingung ausdrückt, dass die Ebene des Strahlbüschels durch eine gegebene Gerade geht, auf welcher zugleich sein Scheitel liegt. (Beitr. pag. 35, erste Zeile).

Ebenso ist der in (62) vorkommende Ausdruck $\mu^3 + \mu c^2$ gleich dem ihm dualistisch entsprechenden.

Wir gehen nun zu den strahlgeometrischen Problemen über, welche den in § 2. gelösten analog sind. Wir haben also eine Gruppe von n in einem Strahlbüschel (μ, c) liegenden Strahlen g *mit gemeinsamer Definition* vorauszusetzen. Ein von einer solchen Gruppe erzeugtes $(k-1)$-stufiges System enthält eine endliche Anzahl ε_k von singulären Gruppen, deren jede von ihren n Strahlen k in ein und demselben Strahle h vereinigt. Um diese Zahl ε_k zu finden, wenden wir die allgemeine Formel (58) an. Wir haben dann zu untersuchen, was in unserem Falle aus den Gliedern von der Form β_i wird. Jedes β_i enthält jetzt k_i *gleiche* Summanden, deren jeder die *Bedingung* γ_i *bezeichnet, dass von den n Strahlen i verschiedene i gegebene Gerade schneiden.* γ_i sondert aber dann von den n Strahlen i heraus, so dass nun als $(i+1)^{\text{ter}}$ Strahl jeder der sonstigen $n-i$ Strahlen aufgefasst werden kann, u. s. w. Endlich kann dann als k^{ter} Strahl jeder der zuletzt noch vorhandenen $n-k+1$ Strahlen aufgefasst werden. Desshalb wird hier, wie in (24):

(64) $\beta_i = k_i \cdot (n-i)(n-i-1)(n-i-2) \cdots (n-k+1) \cdot \gamma_i.$

Setzt man nun die durch (64) gegebenen Werthe für β_{k-1}, β_{k-2}, β_{k-3}, β_{k-4} in Formel (58) ein, so erhält man:

(65) $$\begin{aligned}\varepsilon_k = {} & k_1 \cdot (n-k+1)\gamma_{k-1} - k_2 \cdot (n-k+2)(n-k+1)(\mu+c)\gamma_{k-2} \\ & + k_3 \cdot (n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) \cdot 2\mu c \gamma_{k-3} \\ & - k_4 \cdot (n-k+4)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) \cdot 2(\mu^2 c - \mu^3)\gamma_{k-4}.\end{aligned}$$

Analog ergiebt sich aus Formel (61):

(66) $$\begin{aligned}\varepsilon_k h = {} & \gamma_k - k_2 \cdot (n-k+2)(n-k+1)(\mu^2+c^2)\gamma_{k-2} \\ & + k_3 \cdot (n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) \cdot 2 \cdot (\mu^3 + \mu c^2)\gamma_{k-3} \\ & - k_4 \cdot (n-k+4)(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1) 2\mu^2 c^2 \gamma_{k-4}.\end{aligned}$$

Speciell giebt Formel (65) für $k=6$, und Formel (66) für $k=5$:

(67) $$\begin{aligned}\varepsilon_6 = {} & 6(n-5)\gamma_5 - 15(n-4)(n-5)(\mu+c)\gamma_4 + 40(n-3)(n-4)(n-5)\mu c \gamma_3 \\ & - 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(\mu^2 c - \mu^3)\gamma_2,\end{aligned}$$

(68) $$\begin{aligned}\varepsilon_5 h = {} & \gamma_5 - 10(n-3)(n-4)(\mu^2+c^2)\gamma_3 + 20(n-2)(n-3)(n-4)(\mu^3+\mu c^2)\gamma_2 \\ & - 10(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mu^2 c^2 \gamma_1.\end{aligned}$$

Von den Formeln für $\varepsilon_k h_p$, $\varepsilon_k h_e$, $\varepsilon_k h_s$, $\varepsilon_k H$ erwähnen wir die für $\varepsilon_k h_s$, welche aus (63) hervorgeht:

(69) $$\begin{aligned}\varepsilon_k h_s = {} & \mu c \gamma_k - k_1 \cdot (n-k+1)(\mu^3 + \mu c^2)\gamma_{k-1} \\ & + k_2 \cdot (n-k+2)(n-k+1)\mu^2 c^2 \gamma_{k-2}.\end{aligned}$$

Um endlich die Analoga der Formeln (27) bis (32) zu finden, müsste man die gewonnenen Formeln durch geeignete Multiplicationen mit einander verbinden. Man erhielte dann die Erledigung der Fälle, wo bei einer Strahlengruppe an *mehreren* Stellen Coincidenzen stattfinden. Die *Coefficienten* der Bedingungssymbole würden sich genau so wie bei den Punktgruppen (man vergleiche die Formeln (27), (29), (30), (31), (32)) aus den Binomialcoefficienten zusammensetzen. Die *Bedingungssymbole selbst* können für die sämmtlichen auf ein i-stufiges System bezüglichen Anzahlen derartig singulärer Strahlgruppen, keine andern sein, als:

$$\gamma_i;\ \gamma_{i-1}\mu,\ \gamma_{i-1}c;\ \gamma_{i-1}\mu^2,\ \gamma_{i-1}\mu c,\ \gamma_{i-1}c^2;$$
$$\gamma_{i-2}\mu^3,\ \gamma_{i-2}\mu^2 c,\ \gamma_{i-2}\mu c^2,\ \gamma_{i-2}c^3;$$
$$\gamma_{i-3}\mu^3 c,\ \gamma_{i-3}\mu^2 c^2,\ \gamma_{i-3}\mu c^3;\ \gamma_{i-1}\mu^3 c^2;$$

wo wieder jedes γ_m die Bedingung bezeichnet, dass die Strahlengruppe von ihren n Strahlen *m verschiedene* durch m gegebene Gerade schickt. Die diesen Bedingungssymbolen zugehörigen 14 Zahlen sollen wieder die *Stammzahlen* des i-stufigen Systems von Strahlengruppen heissen. Sie repräsentiren übrigens immer höchstens 12 von einander unabhängige. Ist das zu Grunde gelegte i-stufige System das durch einen *Strahlencomplex* n^{ten} Grades auf den ∞^5 Strahlbüscheln des Raums erzeugte, specielle fünfstufige System, so lassen sich die 14 Stammzahlen leicht durch n ausdrücken, und liefern, in die eben besprochenen Formeln eingesetzt, *Zahlen-Resultate* für gewisse noch nicht studirte *Singularitäten des allgemeinen Complexes n^{ten} Grades.*

Diese Resultate entwickelt die folgende Abhandlung.

Hamburg, Februar 1877.