Singularitäten des Complexes n^{ten} Grades.

Von

H. Schubert in Hamburg.

In einer Abhandlung über Tangentensingularitäten der allgemeinen Punktfläche F_n (Math. Ann. Bd. XI, pag. 323) habe ich gezeigt, dass *allein* aus der Definition der F_n als einer Gesammtheit von ∞^2 Punkten, die auf jeder Geraden n Punkte besitzt, mit Hilfe des *Chasles'schen Correspondenzprincips oder seiner Umformungen*)* alle Zahlen abgeleitet werden können, welche sich auf die an einer oder mehr Stellen in zwei oder mehr Punkten berührenden Tangenten der F_n beziehen.**) *Hier soll nun das Analoge für den Strahlencomplex n^{ten} Grades C_n gezeigt werden.*

Der Complex C_n besitzt nämlich, seiner Definition gemäss, auf jedem der ∞^5 Strahlbüschel des Raumes n Strahlen, ist also, wie schon in der „Abh. über Gruppen" (§ 4.) hervorgehoben ist, als ein specielles fünfstufiges System von Strahlengruppen anzusehen, wenn man unter Strahlengruppe ein Gebilde versteht, das aus n einem Strahlbüschel angehörigen Strahlen besteht. Wir sagen nun, dass ein Strahlbüschel den Complex in dem Coincidenzstrahle h_i *i-strahlig berührt*, wenn von den n dem Strahlbüschel und dem Complexe gemeinsamen Strahlen i Strahlen in h_i *vereinigt* liegen. Demgemäss lassen sich die hier gelösten Probleme aussprechen, wie folgt:

Es werden alle Zahlen bestimmt, welche sich beziehen auf die den Complex in einem oder mehr Berührungsstrahlen zwei- oder mehrstrahlig

---

*) Wegen der Umformungen des Correspondenzprincips vergleiche man den III$^{\text{ten}}$ Abschnitt meiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie" (Math. Ann. Bd. X), einer Abhandlung, welche kurz „Beitr." genannt werden soll.

**) Diejenigen unter diesen Zahlen, welche bis dahin unbekannt waren (Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, II Th. II A. Art. 462), hatte ich schon früher durch die Gött. Nachr. (Februar 1876) und in § 27. der eben citirten Beitr. mitgetheilt. Als Beispiele sind diese Zahlen auch in der voranstehenden Abhandlung „über das Correspondenzprincip für Gruppen von n Punkten und von n Strahlen" erwähnt.

Diese oft citirte Abhandlung soll kurz „Abh. üb. Gruppen" genannt werden.

berührenden Strahlbüschel, auf deren Berührungsstrahlen, und auf deren sonstige Complexstrahlen.

Zur Ableitung dieser Zahlen aus der Definition des Complexes können *zwei Methoden* angewandt werden, welche wir als die *indirecte* und *directe* unterscheiden wollen.

Die indirecte Methode verfährt ebenso, wie die citirte Abhandlung über Tangententensingularitäten. Sie geht also von der Definition des Complexes C_n aus, findet daraus zunächst nur die Zahlen für die ∞^4 an einer Stelle zweistrahlig berührenden Strahlbüschel, bestimmt dann *aus diesen Zahlen* diejenigen, welche sich auf die in dreistufiger Mannigfaltigkeit vorhandenen, berührenden Strahlbüschel beziehen, u. s. w., und *steigt* so *allmählich auf* bis zu den in endlicher Anzahl vorhandenen, z. B. den sechsstrahlig berührenden Strahlbüscheln. Als Hilfsformeln werden dabei nur angewandt die Chasles'sche Correspondenzformel für den Strahlbüschel oder vielleicht Formeln, welche aus ihr durch symbolische Multiplication unmittelbar hervorgehen, namentlich Formel (59) in § 20. meiner Beitr. (Math. Ann. Bd. X, pag. 74).

Die directe Methode fasst den Complex C_n als speciellen Fall eines allgemeineren Gebildes, nämlich des fünfstufigen Systems von Strahlengruppen, und findet daher jede der gesuchten Zahlen aus einer der Strahlengruppen-Formeln, welche am Schluss der „Abh. üb. Gruppen" zwar nicht ausführlich aufgestellt, aber doch besprochen sind. Sie hat daher nur die für jene Formeln erforderlichen *Stammzahlen* als Functionen von n zu berechnen, und die erhaltenen Werthe in die Formeln einzusetzen. Bei dieser Methode ist also der bei der Besprechung der indirecten Methode erwähnte Process des allmählichen Aufsteigens zu höheren Singularitäten von vornherein den angewandten Formeln eingefügt.

Der Verfasser hat, der numerischen Controle wegen, die gesuchten Zahlen nach *beiden* Methoden bestimmt. Die in § 1. eingeführten Bezeichnungen sind dem Charakter dieser Methoden angepasst. § 2. entwickelt aus der Definition des Complexes die Zahlen, welche sich auf die ∞^5 im allgemeinen nicht berührenden Strahlbüschel beziehen, und findet damit auch die für die Anwendung der directen Methoden erforderlichen Stammzahlen. Die dort bestimmte Stammzahl γ_5 giebt für $n = 4$ das *liniengeometrische Analogon der* 27 *in einer cubischen Punktfläche liegenden Geraden.* In § 3. ist die Ableitung der gesuchten Zahlen nach beiden Methoden durch Beispiele erläutert. Endlich stellt § 4. die Werthe der gefundenen 82 Singularitäten-Zahlen zusammen. Von diesen ist ein Theil schon durch die vom algebraischen Standpunkte ausgehenden Arbeiten von Plücker, Clebsch, Klein und Voss*)

*) Voss' eingehende Abhandlung „Ueber Complexe und Congruenzen" (Math. Ann. Bd. IX, pag. 55 bis 162) enthält wohl alle im Folgenden bestimmten und *nicht* neuen Zahlen. Desshalb ist in § 4. nur Voss citirt.

bekannt, z. B. die Singularitäten-Zahlen der Plücker'schen Complexfläche. Die auf höhere Singularitäten bezüglichen Zahlen aber waren bisher noch nicht bestimmt.

§ 1.

Bezeichnungen.

Der feste Complex n^{ten} Grades C_n besitzt auf jedem der ∞^5 Strahlbüschel des Raums n Strahlen, erzeugt also ein *fünfstufiges System* Σ von Strahlengruppen. Für eine solche Strahlengruppe bezeichnet immer μ ihre Ebene, c ihren Scheitel, g irgend einen ihrer n Strahlen. Gemäss der Symbolik des Verfassers (Beitr. Abschn. I) bedeutet dann z. B. $\mu^2 cg$ die vierfache *Bedingung*, dass eine Strahlengruppe ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schickt, ihren Scheitel auf einer gegebenen Ebene besitzt, und einen ihrer n Strahlen durch eine gegebene Gerade schickt; dasselbe Symbol bezeichnet dann aber auch die *Zahl* derjenigen Strahlengruppen eines Σ angehörigen vierstufigen Systems, welche jene vierfache Bedingung erfüllen.

Ferner bezeichnet für die Strahlengruppe das Symbol

$$g^{i,\,k,\,l,\,m\,q},$$

wo i, k, l, m, q nur geschrieben wird, wenn es grösser als null ist, die Bedingung, dass einer der n Strahlen die i-fache Grundbedingung, ein zweiter die k-fache, ein dritter die l-fache, ein vierter die m-fache, ein fünfter die q-fache Grundbedingung erfüllt. Dabei ist bekanntlich (Beitr. § 5.) unter *einfacher* Grundbedingung für einen Strahl zu verstehen, dass derselbe eine gegebene Gerade schneide, unter *dreifacher*, dass er einem gegebenen Strahlbüschel angehöre, unter *vierfacher*, dass er gegeben sei. Da der Strahl *zwei zweifache* Grundbedingungen besitzt, nämlich erstens die, dass er in einer gegebenen Ebene liegen soll, und zweitens die, dass er durch einen gegebenen Punkt gehen soll, so haben wir diese beiden Grundbedingungen von einander zu unterscheiden. Wir thun dies dadurch, dass wir die erstgenannte Grundbedingung durch eine arabische 2, die zweite durch eine römische II andeuten.

Beispiele für die bisher eingeführten Bezeichnungen:

1) $g^{2,\,\mathrm{II},\,1,}$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen von Σ, welche einen ihrer n Strahlen in einer gegebenen Ebene besitzen, einen zweiten durch einen gegebenen Punkt schicken, und einen dritten eine gegebene Gerade schneiden lassen;
2) $\mu g^{3,\,1,}$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen von Σ, welche einen ihrer n Strahlen einem gegebenen Strahlbüschel zuschicken, einen zweiten Strahl eine gegebene Gerade schneiden lassen, und ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken;

3) $g^{1,1,1,1,1}$, bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen von Σ, welche von ihren n Strahlen fünf verschiedene fünf gegebene Gerade schneiden lassen.

Hiernach kann man für den Complex n^{ten} Grades nach folgenden Zahlen fragen, die auf *nicht-berührende* Strahlbüschel Bezug nehmen:

(1) $$\mu^3 c^2,\ \mu^2 c g^{2},\ \mu^2 c g^{\mathrm{II}},\ \mu c g^{3},$$
$$\mu g^{2,2},\ \mu g^{2,\mathrm{II}},\ \mu g^{\mathrm{II},\mathrm{II}},\ g^{3,2};$$

(2) $$\mu^3 c g^{1},\ \mu^2 c^2 g^{1},\ \mu^3 g^{1,1},\ \mu^2 c g^{1,1},$$
$$\mu^2 g^{2,1},\ \mu^2 g^{\mathrm{II},1},\ \mu c g^{2,1},\ \mu g^{3,1},$$
$$\mu^2 g^{1,1,1},\ \mu c g^{1,1,1},\ \mu g^{2,1,1},\ \mu g^{\mathrm{II},1,1},$$
$$g^{2,2,1},\ g^{2,\mathrm{II},1},\ g^{3,1,1},$$
$$\mu g^{1,1,1,1},\ g^{2,1,1,1},\ g^{1,1,1,1,1};$$

ferner nach den hierzu reciproken Zahlen. Ausgelassen sind dann nur diejenigen Zahlen, welche selbstverständlich null sind, wie z. B. $g^{4,1}$, $\mu^3 g^{\mathrm{II}}$ etc.

Für die Symbole

$$g^{1},\ g^{1,1},\ g^{1,1,1},\ g^{1,1,1,1},\ g^{1,1,1,1,1}$$

schreiben wir im Anschluss an die Bezeichnung γ_i in Formel (64) u. f. der „Abh. üb. Gruppen" bezüglich:

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5.$$

Die eben zusammengestellten Zahlen sind in § 2. *sämmtlich berechnet.*

Wir gehen zu den Bezeichnungen über, welche sich auf die den Complex C_n *berührenden* Strahlbüschel beziehen. Wieder im Anschluss an die Bezeichnung in § 4. der „Abh. üb. Gruppen" soll bedeuten:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_m},\ \text{wo } i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots i_m \text{ grösser als 1 ist,}$$

jede solche Strahlengruppe in Σ, auf welcher in m Strahlen *Coincidenzen* stattfinden, und zwar dergestalt, dass von den n Strahlen der Gruppe im ersten Strahle i_1, im zweiten Strahle i_2, $\cdots\cdot$, im m^{ten} Strahle i_m Strahlen coincidiren. Z. B. ε_{43} bedeutet eine Strahlengruppe, auf welcher von den n Strahlen in einem Strahle 4 Strahlen, in einem zweiten 3 Strahlen coincidiren. Demgemäss besitzt unser fünfstufiges System Σ die folgenden 18 Arten von Coincidenz-Strahlengruppen:

1) ∞^4 Gruppen ε_2,
2) ∞^3 Gruppen ε_3, ε_{22},
3) ∞^2 Gruppen ε_4, ε_{32}, ε_{222},
4) ∞^1 Gruppen ε_5, ε_{42}, ε_{33}, ε_{322}, ε_{2222},
5) eine endliche Anzahl von Gruppen:

$$\varepsilon_6,\ \varepsilon_{52},\ \varepsilon_{43},\ \varepsilon_{422},\ \varepsilon_{332},\ \varepsilon_{3222},\ \varepsilon_{22222}.$$

Jeden Coincidenzstrahl eines ε, in welchem i Strahlen coincidiren, bezeichnen wir mit h_i, mit h_1 dagegen jeden der Strahlen eines ε, in dem *keine* Coincidenz stattfindet.

Nach des Verfassers Symbolik bezeichnet jedes Symbol $z\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m}$ zugleich die *Anzahl* derjenigen durch das nämliche Symbol dargestellten Coincidenz-Gruppen, welche einem in Σ liegenden, $(i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_m - m)$-stufigen Systeme angehören, und zugleich die Bedingung z erfüllen. In unseren Fällen kann sich z zusammensetzen aus den Bedingungen μ und c des Strahlbüschels, der ε trägt, und aus den auf h_i bezüglichen Grundbedingungen. Diese sind h_i, h_{ip}, h_{ie}, h_{is}, H_i und bedeuten also bei einem ε, dass sein Strahl h_i bezüglich eine gegebene Gerade schneiden, durch einen gegebenen Punkt gehen, in einer gegebenen Ebene liegen, einem gegebenen Strahl angehören, gegeben sein soll. Ferner sollen a identische Factoren h_i bei einem ε andeuten, dass dieses ε von seinen Strahlen h_i a verschiedene durch a gegebene Gerade schickt.

Beispiele für die Bezeichnungen, welche sich auf die Coincidenz-Strahlengruppen beziehen.

1) $\mu^3 \varepsilon_3$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen in Σ, welche in einer gegebenen Ebene liegen, und dabei einen Strahl besitzen, in welchem von den n Strahlen 3 coincidiren, m. a. W., die Zahl der Wendetangenten einer dem Complexe C_n angehörigen Complexcurve;

2) $\mu^2 \varepsilon_{222}$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen in Σ, welche ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, und dabei 3 Strahlen besitzen, deren jeder von den n Strahlen zwei in sich vereinigt, m. a. W. die Zahl der dreifachen Punkte der Doppelcurve einer dem Complexe C_n angehörigen Complexfläche;

3) $\varepsilon_4 h_{4p}$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen in Σ, welche einen Strahl enthalten, der von den n Strahlen vier in sich vereinigt, und welche dabei diesen Coincidenzstrahl durch einen gegebenen Punkt schicken; m. a. W. die Ordnung der Congruenz der Undulationskanten, welche den Complexkegeln von C_n angehören;

4) $\varepsilon_{22} h_2 h_1 h_1$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen, welche zwei verschiedene Strahlen besitzen, in denen von den n Strahlen zwei coincidiren, welche ferner irgend einen dieser Coincidenzstrahlen durch zwei gegebene Gerade schicken, und von den übrigen $n - 4$ Strahlen zwei verschiedene durch zwei gegebene Gerade schicken;

5) $\varepsilon_{22} c h_2 h_2$ bedeutet die Zahl derjenigen Strahlengruppen, welche zwei verschiedene Strahlen besitzen, in denen von den n Strahlen zwei coincidiren, welche ferner jeden dieser beiden Coincidenzstrahlen durch je eine gegebene Gerade schicken, und dabei ihren Scheitel auf einer gegebenen Ebene haben.

Von den Zahlen ε hat man nur diejenigen zu berechnen, welche die einfachen Grundbedingungen ihrer Strahlen h enthalten, da aus diesen alle andern durch die fundamentalen Formeln gewonnen werden können, welche *die Grundbedingungen incidenter Hauptelemente mit einander verbinden* (Beitr. § 9, I u. II, Abh. üb. Gruppen (50) bis (53)). Liegen nämlich a Strahlen f in der Ebene μ und gehen sie zugleich durch den Punkt c, so erhält man durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl die folgenden Gleichungen zwischen den Grundbedingungen der Strahlen f, der Ebene μ und des Punktes c:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f_e &= cf - a\cdot c^2, \\ f_p &= \mu f - a\cdot \mu^2, \end{aligned}$$

und aus ihnen durch symbolische Multiplication:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f_s &= \mu c f - a\cdot(\mu^3 + \mu c^2) = \mu c f - a\cdot(c^3 + \mu^2 c), \\ F &= (\mu^2 c - \mu^3) f - a\cdot \mu^2 c^2 = (\mu c^2 - c^3) f - a\cdot \mu^2 c^2. \end{aligned}$$

Hiernach ist z. B.

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 h_{3s} &= \varepsilon_3 \mu c h_3 - \varepsilon_3 \mu^3 - \varepsilon_3 \mu c^2, \\ \varepsilon_{23} h_{1e} &= \varepsilon_{23} c h_1 - (n-5)\,\varepsilon_{23} c^2. \end{aligned}$$

In der folgenden *Tabelle* der zu berechnenden Zahlen ε sind daher alle Zahlen fortgelassen, welche durch die Formeln (1) aus angegebenen Zahlen hervorgehen. Ferner ist von zwei sich dualistisch entsprechenden Zahlen immer nur die eine angeführt.

Tabelle der zu berechnenden Zahlen ε.

I 1) $\varepsilon_2\mu^3 c$, 2) $\varepsilon_2\mu^2 c^2$, 3) $\varepsilon_2\mu^3 h_2$, 4) $\varepsilon_2\mu^2 c h_2$,
5) $\varepsilon_2\mu^3 h_1$, 6) $\varepsilon_2\mu^2 c h_1$, 7) $\varepsilon_2\mu^2 h_2 h_1$, 8) $\varepsilon_2\mu c h_2 h_1$,
9) $\varepsilon_2\mu^2 h_1 h_1$, 10) $\varepsilon_2\mu c h_1 h_1$, 11) $\varepsilon_2\mu h_2 h_1 h_1$,
12) $\varepsilon_2\mu h_1 h_1 h_1$, 13) $\varepsilon_2 h_2 h_1 h_1 h_1$, 14) $\varepsilon_2 h_1 h_1 h_1 h_1$;

II 1) $\varepsilon_3\mu^3$, 2) $\varepsilon_3\mu^2 c$, 3) $\varepsilon_3\mu^2 h_3$, 4) $\varepsilon_3\mu c h_3$,
5) $\varepsilon_3\mu^2 h_1$, 6) $\varepsilon_3\mu c h_1$, 7) $\varepsilon_3\mu h_3 h_1$, 8) $\varepsilon_3\mu h_1 h_1$,
9) $\varepsilon_3 h_3 h_1 h_1$, 10) $\varepsilon_3 h_1 h_1 h_1$;

III 1) $\varepsilon_{22}\mu^3$, 2) $\varepsilon_{22}\mu^2 c$, 3) $\varepsilon_{22}\mu^2 h_2$, 4) $\varepsilon_{22}\mu c h_2$,
5) $\varepsilon_{22}\mu^2 h_1$, 6) $\varepsilon_{22}\mu c h_1$, 7) $\varepsilon_{22}\mu h_2 h_2$, 8) $\varepsilon_{22}\mu h_2 h_1$,
9) $\varepsilon_{22}\mu h_1 h_1$, 10) $\varepsilon_{22} h_2 h_2 h_1$, 11) $\varepsilon_{22} h_2 h_1 h_1$,
12) $\varepsilon_{22} h_1 h_1 h_1$;

IV 1) $\varepsilon_4\mu^2$, 2) $\varepsilon_4\mu c$, 3) $\varepsilon_4\mu h_4$, 4) $\varepsilon_4\mu h_1$,
5) $\varepsilon_4 h_4 h_1$, 6) $\varepsilon_4 h_1 h_1$;

V 1) $\varepsilon_{32}\mu^2$, 2) $\varepsilon_{32}\mu c$, 3) $\varepsilon_{32}\mu h_3$, 4) $\varepsilon_{32}\mu h_2$,
5) $\varepsilon_{32}\mu h_1$, 6) $\varepsilon_{32}h_3 h_2$, 7) $\varepsilon_{32}h_3 h_1$,
8) $\varepsilon_{32}h_2 h_1$, 9) $\varepsilon_{32}h_1 h_1$;

VI 1) $\varepsilon_{222}\mu^2$, 2) $\varepsilon_{222}\mu c$, 3) $\varepsilon_{222}\mu h_2$, 4) $\varepsilon_{222}\mu h_1$,
5) $\varepsilon_{222}h_2 h_2$, 6) $\varepsilon_{222}h_2 h_1$, 7) $\varepsilon_{222}h_1 h_1$;

VII 1) $\varepsilon_5\mu$, 2) $\varepsilon_5 h_3$, 3) $\varepsilon_5 h_1$;
VIII 1) $\varepsilon_{42}\mu$, 2) $\varepsilon_{42}h_4$, 3) $\varepsilon_{42}h_2$, 4) $\varepsilon_{42}h_1$;
IX 1) $\varepsilon_{33}\mu$, 2) $\varepsilon_{33}h_3$, 3) $\varepsilon_{33}h_1$;
X 1) $\varepsilon_{322}\mu$, 2) $\varepsilon_{322}h_3$, 3) $\varepsilon_{322}h_2$, 4) $\varepsilon_{322}h_1$;
XI 1) $\varepsilon_{2222}\mu$, 2) $\varepsilon_{2222}h_2$, 3) $\varepsilon_{2222}h_1$;
XII ε_6; XIII ε_{52}; XIV ε_{43}; XV ε_{422};
XVI ε_{332}; XVII ε_{3222}; XVIII ε_{22222}.

Die hier zusammengestellten 82 Zahlen für die den Complex C_n berührenden Strahlbüschel sind in § 4. durch n ausgedrückt.

§ 2.

Die Zahlen für die ∞^5 den Complex nicht berührenden Strahlbüschel.

Aus der in § 1. angegebenen Bezeichnung

$$g^{i,\,k,\,l,\,m,\,q,}$$

ergiebt sich unmittelbar:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&g g^{1,} = g^{2,} + g^{\mathrm{II},} + g^{1,\,1,},\\
&g g^{2,} = g^{3,} + g^{2,\,1}, \; g g^{\mathrm{II},} = g^{3,} + g^{\mathrm{II},\,1,},\\
&g g^{3,} = g^{4,} + g^{3,\,1,},\\
&g g^{\mathrm{II},\,1,\,1,} = g^{3,\,1,\,1,} + 2g^{\mathrm{II},\,2,\,1,} + 2g^{\mathrm{II},\,\mathrm{II},\,1,} + g^{\mathrm{II},\,1,\,1,\,1,},\\
&g g^{1,\,1,\,1,\,1,} = 4g^{2,\,1,\,1,\,1,} + 4g^{\mathrm{II},\,1,\,1,\,1,} + g^{1,\,1,\,1,\,1,\,1,};\text{*)}
\end{aligned}
$$

und so fort.

Diese Identitäten verbinden wir mit der Anwendung einer gewissen *Stammformel*, welche der Formel 33) in der „Abh. üb. Gruppen" analog ist, und auf den Productensätzen des Strahls (Beitr. § 26.) beruht. Die Stammformel gewinnen wir durch folgende Ueberlegung. Wenn eine Gesammtheit von ∞^1 Strahlbüschel von ihren ∞^1 Scheiteln c in einer gegebenen Ebene besitzt, und von ihren ∞^1 Ebenen μ durch einen gegebenen Punkt schickt, so hat die von ihren ∞^2 Strahlen ge-

*) Analog in den Beitr. pag. 38 und in Formel (34) der „Abh. üb. Gruppen".

bildete Congruenz die Gradzahlen c und μ_* hat also mit dem Complex b_n ∞^1 Strahlen gemein, von denen:

$$\mu \cdot n + c \cdot n$$

eine gegebene Gerade schneiden. Desshalb ist für jedes einstufige System von Strahlengruppen, welches dem fünfstufigen Systeme Σ angehört:

(3) $$n(\mu + c) = g.$$

Hieraus folgt z. B.

$$n(\mu + c)\,\mu^2 c g^{1,} = \mu^2 c g g^{1,}.$$

Für $\mu^2 c g g^{1,}$ kann man aber wegen der Identitäten (2) setzen:

$$\mu^2 c g^{2,} + \mu^2 c g^{\mathrm{II},} + \mu^2 c g^{1,1,};$$

also lässt sich $\mu^2 c g^{1,1,}$ aus $\mu^3 c g^{1,}$, $\mu^2 c^2 g^{1,}$, $\mu^2 c g^{2,}$, $\mu^2 c g^{\mathrm{II},}$ berechnen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\mu^2 c g^{1,1,} &= n(\mu^3 c g^{1,} + \mu^2 c^2 g^{1,}) - \mu^2 c g^{2,} - \mu^2 c g^{\mathrm{II},}\\ &= n(n + 2n) - n - n = n(3n - 2).\end{aligned}$$

So ergeben sich durch die Stammformel (3) allmählich *alle* Zahlen, die hier bestimmt werden sollen, *aus einigen wenigen* Zahlen, welche die aus der Definition des Complexes unmittelbar ersichtlichen Werthe 0, 1, n oder n^2 haben. Es sind dies:

$\mu^3 c^2 = 1$; $\mu^3 g^{2,} = 0$; $\mu^3 g^{\mathrm{II},} = 0$; $\mu^2 c g^{2,} = n$; $\mu^2 c g^{\mathrm{II},} = n$;
$\mu^2 g^{3,} = 0$; $\mu c g^{3,} = n$; $\mu g^{4,} = 0$; $\mu g^{2,2,} = n^2$; $\mu g^{2,\mathrm{II}} = n^2$;
$\mu g^{\mathrm{II},\mathrm{II},} = n^2$; $g^{3,2,} = n^2$; und die hierzu reciproken.

Hieraus folgt durch 2) und 3) nach und nach:

$\mu^3 c g^{1,} = n$; $\mu^2 c^2 g^{1,} = 2n$; $\mu^3 g^{1,1,} = n^2$; $\mu^2 c g^{1,1,} = 3n^2 - 2n$;
$\mu^2 g^{2,1,} = n^2$; $\mu^2 g^{\mathrm{II},1,} = n^2$; $\mu c g^{2,1,} = 2n^2 - n$; $\mu g^{3,1,} = n^2$;
$\mu^2 g^{1,1,1,} = 4n^3 - 6n^2$; $\mu c g^{1,1,1,} = 6n^3 - 12n^2 + 4n$;
$\mu g^{2,1,1,} = 3n^3 - 4n^2$; $\mu g^{\mathrm{II},1,1,} = 3n^3 - 4n^2$;
$g^{2,2,1,} = 2n^3 - 2n^2$; $g^{2,\mathrm{II},1,} = 2n^3 - 2n^2$; $g^{3,1,1,} = 2n^3 - 2n^2$;
$\mu g^{1,1,1,1,} = 10n^4 - 36n^3 + 28n^2$; $g^{2,1,1,1,} = 6n^4 - 18n^3 + 10n^2$;
$g^{1,1,1,1,1,} = 20n^5 - 120n^4 + 200n^3 - 80n^2$.

Für die Symbole:

$$g^{1,}\ \ g^{1,1,}\ \ g^{1,1,1,}\ \ g^{1,1,1,1,}\ \ g^{1,1,1,1,1,}$$

wollten wir wegen der Bezeichnung in § 4. der „Abh. üb. Gruppen" bezüglich die Zeichen:

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5$$

benutzen. Diese geben, mit den Grundbedingungen des Strahlbüschels zusammengesetzt, die für die Ableitung der Zahlen ε wichtigen *Stammzahlen*. Die Werthe derselben entnehmen wir den obigen Formeln, und stellen sie hier zusammen.

Tabelle der Stammzahlen.

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&\mu^3 c^2 = 1;\\
&\mu^3 c\gamma_1 = n,\ \mu^2 c^2\gamma_1 = 2n;\\
&\mu^3\gamma_2 = n^2,\ \mu^2 c\gamma_2 = n\,(3n-2);\\
&\mu^2\gamma_3 = 2n^2\,(2n-3),\ \mu c\gamma_3 = 2n\,(3n^2-6n+2);\\
&\mu\gamma_4 = 2n^2\,(5n^2-18n+14);\\
&\gamma_5 = 20n^2\,(n-2)\,(n^2-4n+2).
\end{aligned}
$$

und die hierzu reciproken.

Beachtenswerth ist, dass diese Ausdrücke der γ_i enthaltenden Symbole für $i = n-1$ *nicht null* werden. Z. B. γ_4 giebt für $n = 3$ den Werth 90; d. h. es giebt Strahlbüschel, welche *vier* verschiedene Strahlen aus einem Complexe *dritten* Grades enthalten, von denen jeder durch je eine willkürlich gegebene Gerade geht. Folglich muss *jeder* Strahl eines solchen Strahlbüschels dem Complexe angehören. Unser Resultat $\mu\gamma_4 = 90$ für $n = 3$ sagt uns also, dass der Complex dritten Grades ∞^1 Strahlbüschel besitzt, deren sämmtliche Strahlen dem Complexe angehören, dass die Ebenen dieser Strahlbüschel eine Torse 90ter Klasse einhüllen, und reciprok, dass die Scheitel dieser Strahlbüschel eine Raumcurve 90ter Ordnung bilden. Analoges kann man auch aus den andern Stammzahlen schliessen. Um diese Schlüsse bequem aussprechen zu können, sagen wir von einem solchen Strahlbüschel, dessen sämmtliche Strahlen dem Complexe angehören, dass er in dem Complexe *liege*.

1) Aus $\mu^3\gamma_2 = c^3\gamma_2 = 1$ und $\mu^2 c\gamma_2 = \mu c^2\gamma_2 = 1$ für $n = 1$ folgt das selbstverständliche Resultat:
   In dem Complex *ersten* Grades liegen ∞^3 Strahlbüschel so, dass in jeder gegebenen Ebene *einer* liegt; die Scheitel derjenigen unter diesen Strahlbüscheln, welche ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, bilden eine Curve *ersten* Grades; und reciprok.
2) Aus $\mu^2\gamma_3 = c^2\gamma_3 = 8$ und $\mu c\gamma_3 = 8$ für $n = 2$ folgt:
   In dem Complex *zweiten* Grades liegen ∞^2 Strahlbüschel. Ihre Scheitel bilden eine Fläche 8ter Ordnung;*) die Scheitel derjenigen unter ihnen, welche ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken, bilden eine Raumcurve 8ter Ordnung; und reciprok.
3) Aus $\mu\gamma_4 = c\gamma_4 = 90$ für $n = 3$ folgt:

---

*) Die doppelt gezählte Kummersche Fläche, *doppelt* gezählt, weil jeder ihrer Punkte Scheitel *zweier* in dem Complexe zweiten Grades liegender Strahlbüschel ist.

In dem Complex *dritten* Grades liegen ∞^1 Strahlbüschel. Ihre Scheitel bilden eine Curve 90^{ter} Ordnung;*) und reciprok.

4) Aus $\gamma_5 = 20 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 2 = 1280$ für $n = 4$ folgt:
In dem Complex *vierten* Grades liegen 1280 Strahlbüschel.**)

§ 3.

Ableitung der 82 Zahlen ε.

In der Einleitung ist hervorgehoben, dass wir die in § 1. definirten 82 Zahlen ε durch *zwei* Methoden gewinnen können, welche wir die directe und die indirecte Methode genannt haben.

Directe Methode.

Indem man die allgemeinen Formeln benutzt, welche der Verfasser in § 4. der „Abh. üb. Gruppen" für Systeme von Strahlengruppen aufgestellt hat, gelangt man zu Ausdrücken, welche *jede* der gesuchten 82 Zahlen ε als Function der in § 2. berechneten *Stammzahlen:*

$$\gamma_5,\ \gamma_4\mu,\ \gamma_4 c,\ \gamma_3\mu^2,\ \gamma_3\mu c,\ \gamma_3 c^2,\ \gamma_2\mu^3,\ \gamma_2\mu^2 c,\ \gamma_2\mu c^2,\ \gamma_2 c^3,$$
$$\gamma_1\mu^3 c,\ \gamma_1\mu^2 c^2,\ \gamma_1\mu c^3,\ \mu^3 c^2,$$

darstellen. Einige beliebig ausgewählte Beispiele werden genügen, um diese Methode der Ableitung aus den Stammzahlen klar zu legen.

Erstes Beispiel.

Um die in § 1. unter IV, 6) genannte Zahl $\varepsilon_4 h_1 h_1$ zu berechnen, gehen wir von der für $k = 4$ specialisirten Formel 65) in der „Abh. üb. Gruppen" aus, und beachten, dass die Hinzufügung des Factors $h_1 h_1$ γ_3 in γ_5, γ_2 in γ_4, γ_1 in γ_3, γ_0 in γ_2 und jeden Coefficienten $n-i$ in $n-i-2$ verwandelt. So erhalten wir:

$$\varepsilon_4 h_1 h_1 = 4\gamma_5(n-5) - 6(\mu+c)\gamma_4(n-5)(n-4)$$
$$+8\mu c\gamma_3(n-5)(n-4)(n-3) - 2(\mu^2 c - \mu^3)\gamma_2(n-5)(n-4)(n-3)(n-2),$$

und hieraus durch Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen (§ 2., Formeln 4):

$$\varepsilon_4 h_1 h_1 = 4n(n-5)(n^4 + 10n^3 - 31n^2 - 38n + 72).$$

Zweites Beispiel.

Um die in § 1. unter XII genannte Zahl ε_6 zu berechnen, wenden wir die Formel 67) der „Abh. üb. Gruppen" an, und erhalten unmittelbar:

$$\varepsilon_6 = 6\gamma_5(n-5) - 15(\mu+c)\gamma_4(n-5)(n-4)$$
$$+40\mu c\gamma_3(n-5)(n-4)(n-3) - 30(\mu^2 c - \mu^3)\gamma_2(n-5)(n-4)(n-3)(n-2),$$

*) Voss (Math. Ann. Bd. IX), pag. 158.

**) Dieses liniengeometrische Analogon der 27 auf einer Punktfläche dritter Ordnung liegenden Geraden ist wohl noch nicht bemerkt.

und hieraus durch Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen:

$$\varepsilon_6 = 20n\,(n-5)\,(17n^2-50n+24).$$

Drittes Beispiel.

Um die in § 1. unter V 1) genannte Zahl $\mu^2\varepsilon_{32}$ zu berechnen, hat man die Formel 65) „der Abh. üb. Gruppen" für $k=3$ und für $k=2$ zu specialisiren, die erhaltenen specielleren Formeln mit einander symbolisch zu multipliciren, dann jedem Bedingungssymbole μ^2 als Factor hinzusetzen, und namentlich zu beachten, dass nun als Coefficient von γ_i

$$(n-i)\,(n-i-1)\cdots\cdots(n-4)$$

auftreten muss, analog wie bei Formel 27) in der „Abh. üb. Gruppen". Man erhält so:

$$\mu^2\varepsilon_{32} = (n-4)(n-3)\,[6\gamma_3\mu^2 - 9\gamma_2(\mu^3+\mu^2c)(n-2) + 10\gamma_1\mu^3c(n-2)(n-1) + 3\gamma_1\mu^2c^2(n-2)(n-1) - 2\mu^3c^2(n-2)(n-1)\cdot n],$$

und hieraus durch Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen:

$$\mu^2\varepsilon_{32} = 2n\,(n-3)\,(n-4)\,(n^2+6n-4).$$

Viertes Beispiel.

Um die in § 1. unter VII 2) genannte Zahl ε_5h_5 zu berechnen, hat man aus der „Abh. üb. Gruppen" die Formel 68) anzuwenden. Diese heisst:

$$\begin{aligned}\varepsilon_5h_5 = \gamma_5 &- 10\,(n-3)\,(n-4)\,(\mu^2+c^2)\,\gamma_3\\ &+ 20\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(\mu^3+\mu c^2)\,\gamma_2\\ &- 10\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,\mu^2c^2\gamma_1,\end{aligned}$$

und giebt nach Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen:

$$\varepsilon_5h_5 = 20n\,(7n^2-30n+24).$$

Fünftes Beispiel.

Um die in § 1. unter XVIII genannte Zahl ε_{22222} zu berechnen, hat man die gewöhnliche Strahlenpaarformel

$$\varepsilon = 2g-\mu-c$$

mit 5 zu *potenziren*, und dabei zu beachten, dass jedes g^i zu γ_i wird, und dass als Coefficient bei γ_i zu setzen ist:

$$(n-i)\,(n-i-1)\cdots\cdots(n-9),$$

weil nach Aussonderung von i Strahlen durch γ_i als $(i+1)^{\text{ter}}$ jeder der $n-i$ übrigen Strahlen zu betrachten ist, und so fort bis zum 10^{ten} Strahle. So erhält man das liniengeometrische Analogon der Formel 32) in der „Abh. üb. Gruppen":

$$5!\,\varepsilon_{22222} = (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)[5_0 \cdot 2^5 \cdot \gamma_5 - 5_1 \cdot 2^4 \cdot (n-4)(\mu+c)\gamma_4 + 5_2 \cdot 2^3 (n-4)(n-3)(\mu+c)^2 \gamma_3 - 5_3 \cdot 2^2 (n-4)(n-3)(n-2)(\mu+c)^3 \gamma_2 + 5_4 \cdot 2^1 (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)(\mu+c)^4 \gamma_1 - 5_5 \cdot 2^0 \cdot (n-4)(n-3)(n-2)(n-1) \cdot n (\mu+c)^5].$$

Hieraus erhält man nach Ausrechnung der Potenzen von $\mu + c$, und Einsetzung der Werthe für die Stammzahlen:

$$\varepsilon_{22222} = \tfrac{1}{6}\, n\, (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-2)(n^3+8n^2+19n-12).$$

Wir bemerken noch einmal, dass die in den obigen 5 Beispielen angegebenen Formeln für ε, bei denen die Werthe der Stammzahlen *noch nicht* eingesetzt sind, Singularitäten-Zahlen für das *allgemeine* fünfstufige System von Zahlengruppen, d. h. für ein Gebilde ausdrücken, welches den Complex n^{ten} Grades als *speciellen* Fall enthält.

Indirecte Methode.

Hier wenden wir keine andern Correspondenzformeln an, als zwei von denjenigen Formeln, welche auf *Paare* sich schneidender Strahlen Bezug nehmen. Es ist nämlich immer für zwei in einem Strahlbüschel (μ, c) liegende Strahlen g_i und g_m die Zahl ε solcher Paare eines einstufigen Systems, bei denen g_i und g_m im Strahle h coincidiren:

(5) $\qquad \varepsilon = g_i + g_m - \mu - c$, (Beitr. § 20, F. 56)

und

(6) $\qquad \varepsilon h = g_i g_m - \mu^2 - c^2$ (Beitr. § 20, F. 59).

Mit Hilfe dieser Formeln kann man aus den Zahlen des § 2., welche sich auf nicht berührende Strahlbüschel beziehen, leicht die Zahlen ε_2 finden, welche auf Strahlbüschel Bezug nehmen, die den Complex an einer Stelle zweistrahlig berühren. Man wende z. B. die Correspondenzformel (5) auf das einstufige System derjenigen Strahlenpaare an, welche von je zwei der $n-2$ Strahlen gebildet werden, die einer die Bedingung $\mu^2\gamma_2$ erfüllenden Strahlengruppe auf Σ angehören, und von den durch γ_2 ausgesonderten Strahlen verschieden sind. Dann hat man für g_i und für g_m

$$\mu^2\gamma_3\,(n-3),$$

und für das $\mu + c$ der Formel (5)

$$\mu^2\,(\mu + c)\,\gamma_2\,(n-2)\,(n-3)$$

zu setzen, und erhält so:

$$\varepsilon_2 \mu^2 h_1 h_1 = 2\mu^2\gamma_3\,(n-3) - (\mu^3 + \mu^2 c)\,\gamma_2\,(n-2)\,(n-3),$$

und nach Einsetzung der aus § 2. bekannten Werthe für die Symbole der rechten Seite:

$$\varepsilon_2 \mu^2 h_1 h_1 = 2n\,(n-3)\,(2n^2 - n - 2).$$

In derselben Weise kann man aus den Stammzahlen des § 2. jede der

14 in § 1. angeführten Zahlen ε_2 erhalten. Schliesslich erhält man noch Controlen der Berechnung durch die Stammformel (3). Nach dieser Formel ist z. B.

$$n \cdot \varepsilon_2 \mu h_1 h_1 (\mu + c) = 2\varepsilon_2 \mu h_2 h_1 h_1 + \varepsilon_2 \mu h_{2e} h_1$$
$$+ \varepsilon_2 \mu h_{2p} h_1 + \varepsilon_2 \mu h_1 h_{2e} + \varepsilon_2 \mu h_1 h_{2p} + \varepsilon_2 \mu h_1 h_1 h_1,$$

woraus man nach Benutzung der Formeln (1) eine Identität erhält.

Hat man die 14 Zahlen ε_2 berechnet, so gewinnt man aus diesen in ähnlicher Weise jede der 10 Zahlen ε_3. Wir wählen als Beispiel eine auf einer Anwendung der Formel (6) beruhende Ableitung, nämlich die von $\varepsilon_3 \mu c h_3$. Hierfür müssen wir das zweistufige System von Strahlenpaaren zu Grunde legen, welche von dem Coincidenzstrahle und einem der $n-2$ andern Strahlen auf jeder Strahlengruppe ε_2 gebildet werden, die die Bedingung μc erfüllt. Dann ist das Symbol $g_i g_m$ der Formel (6) gleich $\varepsilon_2 \mu c h_2 h_1$, und das $\mu^2 + c^2$ der Formel (6) gleich $\varepsilon_2 \mu c (\mu^2 + c^2)(n-2)$ zu setzen. So erhält man:

$$\varepsilon_3 \mu c h_3 = \varepsilon_2 \mu c h_2 h_1 - \varepsilon_2 \mu c (\mu^2 + c^2)(n-2)$$
$$= 2n^2(2n-3) - 2n(n-1)(n-2) = 2n(n^2-2).$$

Aus den 14 Zahlen ε_2 folgt auch jede der 12 Zahlen ε_{22}.

Aus den letzteren kann man dann sowohl jede der 6 Zahlen ε_4, wie auch jede der 9 Zahlen ε_{32}, wie auch jede der 7 Zahlen ε_{222} berechnen, indem man immer nur die obigen Correspondenzformeln (5) und (6) anwendet. So erhält man überhaupt aus den Zahlen der in der folgenden Uebersicht links stehenden Symbole die sämmtlichen Zahlen jedes der rechts stehenden Symbole.

Uebersicht der allmählichen Ableitung.

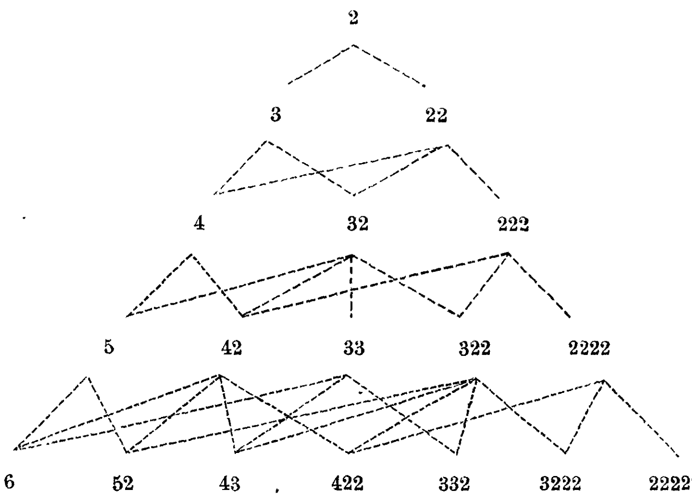
Aus	folgen
den Stammzahlen	ε_2;
ε_2	ε_3, ε_{22};
ε_3	ε_4, ε_{32},
ε_{22}	ε_1, ε_{32}, ε_{222};
ε_4	ε_5, ε_{42},
ε_{32}	ε_5, ε_{42}, ε_{33}, ε_{322},
ε_{222}	ε_{42}, ε_{322}, ε_{2222};
ε_5	ε_6, ε_{52},
ε_{42}	ε_6, ε_{52}, ε_{13}, ε_{422},
ε_{33}	ε_6, ε_{43}, ε_{332},
ε_{322}	ε_{52}, ε_{43}, ε_{422}, ε_{332}, ε_{3222},
ε_{2222}	ε_{422}, ε_{3222}, ε_{22222}.

Also umgekehrt:

Es folgen	aus	Es folgen	aus
ε_2	den Stammzahlen;	ε_{322}	ε_{32} u. ε_{222}
ε_3	ε_2,	ε_{2222}	ε_{222};
ε_{22}	ε_2;	ε_6	ε_{52} u. ε_{42} u. ε_{33},
ε_4	ε_3 u. ε_{22},	ε_{52}	ε_5 u. ε_{42} u. ε_{322},
ε_{32}	ε_3 u. ε_{22},	ε_{43}	ε_{42} u. ε_{33} u. ε_{322},
ε_{222}	ε_{22};	ε_{422}	ε_{42} u. ε_{322} u. ε_{2222},
ε_5	ε_4 u. ε_{32},	ε_{332}	ε_{33} u. ε_{322},
ε_{42}	ε_4 u. ε_{32} u. ε_{222},	ε_{3222}	ε_{322} u. ε_{2222},
ε_{33}	ε_{32},	ε_{22222}	ε_{2222}.

Dies giebt folgenden *Stammbaum*, in welchem nur die Indices der ε geschrieben sind.

Stammzahlen



Man sieht, dass die manchen Symbolen ε angehörigen Zahlen auf *zweifache* oder *dreifache* Weise gewonnen werden können, was für die Controle der Berechnung sehr nützlich ist.

Zur Erläuterung mögen hier noch einige beliebig ausgewählte Formeln für die Berechnung folgen:

1) $\varepsilon_{32}\mu h_2$ aus ε_{22} durch:

$$\varepsilon_{22}\left[\mu h_2 h_2 (n-4) + \mu h_2 h_1 - (\mu^2 h_2 + \mu c h_2)(n-4)\right] = \varepsilon_{32}\mu h_2\,;$$

2) $\varepsilon_{32}\,\mu h_2$ aus ε_3 durch:

$$\varepsilon_3\left[\mu h_1 h_1 - (\mu^3 + \mu c^2)(n-3)(n-4)\right] = \varepsilon_{32}\mu h_2;$$

3) $\varepsilon_5 h_1$ aus ε_4 durch:

$$\varepsilon_4\,[h_4 h_1 (n-5) + h_1 h_1 - (\mu + c)\, h_1 (n-5)] = \varepsilon_5 h_1;$$

4) $\varepsilon_5 h_1$ aus ε_{32} durch:

$$\varepsilon_{32}\,[h_3 h_1 + h_2 h_1 - (\mu + c)\, h_1] = \varepsilon_5 h_1;$$

5) $\varepsilon_{33}\mu$ aus ε_{32} durch:

$$\varepsilon_{32}\,[\mu h_2 (n-5) + \mu h_1 - (\mu^2 + \mu c)(n-5)] = 2\varepsilon_{33};$$

6) ε_{43} aus ε_{42} durch:

$$\varepsilon_{42}\,[h_2 (n-6) + h_1 - (\mu + c)(n-6)] = \varepsilon_{43};$$

7) ε_{43} aus ε_{33} durch:

$$\varepsilon_{33}\,[h_3 (n-6) + 2h_1 - (\mu + c)\cdot 2\,(n-6)] = \varepsilon_{43};$$

8) ε_{43} aus ε_{322} durch:

$$\varepsilon_{322}\,[h_2 + h_2 - 2\,(\mu + c)] = \varepsilon_{43};$$

9) ε_{22222} aus ε_{2222} durch:

$$\varepsilon_{2222}\,[h_1 (n-8) + h_1 (n-9) - (\mu + c)(n-8)(n-9)] = 5\varepsilon_{22222}.$$

So hat der Verfasser die sämmtlichen 82 Zahlen ε mit vielen Bestätigungen gefunden, und in § 4. *tabellarisch zusammengestellt.* Weitere Bestätigungen kann man, wie schon erwähnt ist, durch die Formel (3) erhalten, gerade so wie solche in den „Tangentensingularitäten der Punktfläche" durch das Hilfsmittel II (Math. Ann. Bd. XI, pag. 349 oben) gewonnen werden. Z. B.

$$n(\mu + c)\,\varepsilon_{42} = 4\cdot\varepsilon_{42} h_4 + 2\cdot\varepsilon_{42} h_2 + \varepsilon_{42} h_1,$$
$$n(\mu + c)\, h_2 \varepsilon_{222} = 2\cdot h_{2p}\varepsilon_{222} + 2\cdot h_{2e}\varepsilon_{222} + 2\cdot 2\cdot h_2 h_2 \varepsilon_{222} + h_2 h_1 \varepsilon_{222}.$$

Die Werthe der Symbole, welche h_{ip}, h_{ie}, h_{is} enthalten, gewinnt man aus den übrigen durch die Formeln (1). Z. B.

$$\varepsilon_4 h_{1p} = \mu\varepsilon_4 h_1 - \mu^2\varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_{222} h_{2e} = c\,\varepsilon_{222} h_2 - 3c^2\varepsilon_{222},$$
$$\varepsilon_3 h_{1s} = \mu c\,\varepsilon_3 h_1 - (n-3)(\mu c^2 + \mu^3)\,\varepsilon_3.$$

§ 4.

Zusammenstellung der Werthe für die 82 Zahlen ε.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen die Ableitung aller 82 Zahlen ε durch verschiedene Methoden gezeigt haben, stellen wir hier ihre Werthe mit den Nummern und Bezeichnungen des § 1. zusammen:

I) ε_2.

1) $\mu^3 c = n\,(n-1),$

2) $\mu^2 c^2 = 2n\,(n-1),$

3) $\mu^3 h_2 = n,$

4) $\mu^2 c h_2 = n(2n-1)$,
5) $\mu^3 h_1 = n(n-2)(n+1)$,
6) $\mu^2 c h_1 = n(n-2)(3n-1)$,
7) $\mu^2 h_1 h_2 = 2n(n^2-2)$,
8) $\mu c h_1 h_2 = 2n^2(2n-3)$,
9) $\mu^2 h_1 h_1 = 2n(n-3)(2n^2-n-2)$,
10) $\mu c h_1 h_1 = 2n^2(n-3)(3n-4)$,
11) $\mu h_2 h_1 h_1 = 2n(3n^3-7n^2-3n+6)$,
12) $\mu h_1 h_1 h_1 = 2n(n-4)(5n^3-12n^2-n+6)$,
13) $h_2 h_1 h_1 h_1 = 4n^2(3n^3-13n^2+5n+16)$,
14) $h_1 h_1 h_1 h_1 = 4n^2(n-5)(5n^3-22n^2+14n+16)$.

II) ε_3.

1) $\mu^3 = 3n(n-2)$
2) $\mu^2 c = n(n-2)(2n+1)$,
3) $\mu^2 h_3 = 2n(3n-4)$,
4) $\mu c h_3 = 2n(n^2-2)$,
5) $\mu^2 h_1 = 2n(n-3)(n-1)(n+4)$,
6) $\mu c h_1 = 4n(n-3)(n-1)(n+1)$,
7) $\mu h_1 h_3 = 2n(n^3+3n^2-15n+6)$,
8) $\mu h_1 h_1 = 2n(n-4)(3n^3+n^2-17n+6)$,
9) $h_3 h_1 h_1 = 4n(n^4+2n^3-24n^2+14n+24)$,
10) $h_1 h_1 h_1 = 4n(n-5)(3n^4-3n^3-28n^2+22n+24)$.

III) ε_{22}.

1) $\mu^3 = \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$,
2) $\mu^2 c = \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(3n+1)$,
3) $\mu^2 h_2 = 2n(n-3)(n^2+2n-4)$,
4) $\mu c h_2 = 2n(n-3)(2n^2-n-2)$,
5) $\mu^2 h_1 = 2n(n-1)(n-3)(n-4)(n+2)$,
6) $\mu c h_1 = n(n-1)(n-3)(n-4)(3n+2)$,
7) $\mu h_2 h_2 = 2n(2n^3-2n^2-9n+6)$,
8) $\mu h_1 h_2 = 2n(n-4)(3n^3-2n^2-13n+6)$,
9) $\mu h_1 h_1 = n(n-4)(n-5)(5n^3-4n^2-15n+6)$,
10) $h_2 h_2 h_1 = 4n(2n^4-6n^3-5n^2+2n+24)$,
11) $h_2 h_1 h_1 = 4n(n-5)(3n^4-7n^3-15n^2+14n+24)$,
12) $h_1 h_1 h_1 = 2n(n-5)(n-6)(5n^1-12n^3-19n^2+22n+24)$.

IV) ε_4.

1) $\mu^2 = 4n(n-3)(3n-2)$,
2) $\mu c = 2n(n-3)(n^2+3n-2)$,
3) $\mu h_4 = 2n(6n^2-11n-6)$,
4) $\mu h_1 = 2n(n-4)(n^3+10n^2-17n-6)$,
5) $h_1 h_4 = 4n(6n^3-11n^2-50n+72)$,
6) $h_1 h_1 = 4n(n-5)(n^4+10n^3-31n^2-38n+72)$.

V) ε_{32}.

1) $\mu^2 = 2n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$,
2) $\mu c = 2n(n-3)(n-4)(2n^2+3n-2)$,
3) $\mu h_3 = 2n(n-4)(n^3+6n^2-15n-6)$,
4) $\mu h_2 = 2n(n-4)(2n^3+4n^2-13n-6)$,
5) $\mu h_1 = 2n(n-4)(n-5)(3n^3+8n^2-19n-6)$,
6) $h_3 h_2 = 4n(n^4-n^3+n^2-50n+72)$,
7) $h_3 h_1 = 4n(n-5)(n^4+5n^3-21n^2-38n+72)$,
8) $h_2 h_1 = 4n(n-5)(2n^4+n^3-15n^2-42n+72)$,
9) $h_1 h_1 = 4n(n-5)(n-6)(3n^4+5n^3-35n^2-30n+72)$.

VI) ε_{222}.

1) $\mu^2 = \frac{2}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)$,
2) $\mu c = \frac{1}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(3n^2+3n-2)$,
3) $\mu h_2 = n(n-4)(n-5)(3n^3+4n^2-17n-6)$,
4) $\mu h_1 = \frac{1}{3}n(n-4)(n-5)(n-6)(5n^3+6n^2-21n-6)$,
5) $h_2 h_2 = 4n(n-5)(2n^4-2n^3-9n^2-38n+72)$,
6) $h_1 h_2 = 2n(n-5)(n-6)(3n^4-25n^2-30n+72)$,
7) $h_1 h_1 = \frac{2}{3}n(n-5)(n-6)(n-7)(5n^4-39n^2-22n+72)$.

VII) ε_5.

1) $\mu = 10n(n-4)(n+2)(2n-3)$,
2) $h_5 = 20n(7n^2-30n+24)$,
3) $h_1 = 20n(n-5)(2n^3+3n^2-30n+24)$.

VIII) ε_{42}.

1) $\mu = 2n(n-4)(n-5)(n^3+14n^2-n-30)$,
2) $h_4 = 4n(n-5)(6n^3+13n^2-138n+120)$,
3) $h_2 = 4n(n-5)(n^4+4n^3+15n^2-138n+120)$,
4) $h_1 = 4n(n-5)(n-6)(n^4+14n^3-5n^2-138n+120)$.

IX) ε_{33}.

1) $\mu = n(n-4)(n-5)(2n^3 + 12n^2 + n - 30)$,
2) $h_3 = 4n(n-5)(n^4 + 2n^3 + 19n^2 - 142n + 120)$,
3) $h_1 = 2n(n-5)(n-6)(2n^4 + 10n^3 + n^2 - 142n + 120)$.

X) ε_{322}.

1) $\mu = n(n-4)(n-5)(n-6)(3n^3 + 16n^2 - 5n - 30)$,
2) $h_3 = 2n(n-5)(n-6)(n^4 + 8n^3 - 3n^2 - 130n + 120)$,
3) $h_2 = 4n(n-5)(n-6)(2n^4 + 6n^3 - n^2 - 130n + 120)$,
4) $h_1 = 2n(n-5)(n-6)(n-7)(3n^4 + 14n^3 - 19n^2 - 130n + 120)$.

XI) ε_{2222}.

1) $\mu = \frac{1}{12} n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(5n^3 + 18n^2 - 9n - 30)$,
2) $h_2 = \frac{2}{3} n(n-5)(n-6)(n-7)(3n^4 + 8n^3 - 17n^2 - 122n + 120)$,
3) $h_1 = \frac{1}{6} n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(5n^4 + 14n^3 - 33n^2 - 122n + 120)$.

XII) ε_6.

$$\varepsilon_6 = 20n(n-5)(17n^2 - 50n + 24).$$

XIII) ε_{52}.

$$\varepsilon_{52} = 20n(n-5)(n-6)(2n^3 + 13n^2 - 50n + 24).$$

XIV) ε_{43}.

$$\varepsilon_{43} = 4n(n-5)(n-6)(n^4 + 8n^3 + 67n^2 - 250n + 120).$$

XV) ε_{422}.

$$\varepsilon_{422} = 2n(n-5)(n-6)(n-7)(n^4 + 18n^3 + 47n^2 - 250n + 120).$$

XVI) ε_{332}.

$$\varepsilon_{332} = 2n(n-5)(n-6)(n-7)(2n^4 + 16n^3 + 49n^2 - 250n + 120).$$

XVII) ε_{3222}.

$$\varepsilon_{3222} = \frac{2}{3} n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(3n^4 + 24n^3 + 31n^2 - 250n + 120).$$

XVIII) ε_{22222}.

$$\varepsilon_{22222} = \frac{1}{6} n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-2)(n^3 + 8n^2 + 19n - 12).$$

Die hier nicht angegebenen Zahlen der h_{ip}, h_{ic}, h_{is} enthaltenden Symbole können aus den angegebenen 82 Zahlen durch die Formeln (1) leicht bestimmt werden. Von diesen abgeleiteten Zahlen fügen wir noch einige beispielsweise hinzu:

II) 11) $\varepsilon_3 h_{3s} = \varepsilon_3(\mu c h_3 - \mu^3 - \mu c^2) = 4n$,

III) 13) $\varepsilon_{22} h_{2s} = \varepsilon_{22}(\mu c h_2 - 2\mu^3 - 2\mu c^2) = 2n(n-3)(n+2)$,
IV) 7) $\varepsilon_4 h_{4p} = \varepsilon_4(\mu h_4 - \mu^2) = 2n(11n-18)$,
V) 10) $\varepsilon_{32} h_{3p} = \varepsilon_{32}(\mu h_3 - \mu^2) = 2n(n-4)(3n^2+7n-18)$,
V) 11) $\varepsilon_{32} h_{2p} = \varepsilon_{32}(\mu h_2 - \mu^2) = 2n(n-4)(n^3+n^2+9n-18)$,
VI) 8) $\varepsilon_{222} h_{2p} = \varepsilon_{222}(\mu h_2 - 3\mu^2) = n(n-4)(n-5)(n^3+4n^2+5n-18)$.

Gewisse Zahlen ε geben für $n=2$, $n=3$, $n=4$ *Bestätigungen* der in § 2. erhaltenen Resultate über die *in einem Complexe liegenden Strahlbüschel.* Z. B. erhält man die Zahl 1280 der in einem Complexe vierten Grades liegenden Strahlbüschel durch Einsetzung von $n=4$ in die Formeln für $\varepsilon_2 h_2 h_1 h_1 h_1$, für $\varepsilon_3 h_3 h_1 h_1$, für $\varepsilon_{22} h_2 h_2 h_1$, für $\varepsilon_4 h_4 h_1$, für $\varepsilon_{32} h_3 h_2$, und für $\varepsilon_5 h_5$.

Die wichtigsten der Zahlen, welche durch unsere Symbole ε_2, ε_3, ε_{22}, ε_4, ε_{32}, ε_{222} dargestellt werden, sind bekannt. Sie finden sich in Voss' Abhandlung „Ueber Complexe und Congruenzen" (Math. Ann. Bd. IX, pag. 55 bis 162) berechnet. Wir stellen hier diese Zahlen mit Angabe der Seiten zusammen, auf denen sie dort zu finden sind.

1) $\varepsilon_3 h_{3s} = 4n$, (p. 63); d. h. durch jeden Complexstrahl gehen 4 Wendeebenen. (Analogon der 2 Haupttangenten in jedem Punkt einer Punktfläche).

2) $\varepsilon_3(\mu^2 c - \mu^3) = 2n(n-1)(n-2)$, (p. 72), $\mu^2 c - \mu^3$ drückt nämlich für einen Strahlbüschel mit dem Scheitel μ und der Ebene c die Bedingung aus, dass der Scheitel auf einer Geraden liege, durch welche zugleich die Ebene des Strahlbüschels geht.

3) $\varepsilon_3 \mu h_e = n(3n-2)$, (p. 72).

4) $\varepsilon_3 \mu h_p = n(3n-2)$, (p. 73).

5) $\varepsilon_4 c^2 = 4n(n-3)(3n-2)$, (p. 74); dies ist die Ordnung der Fläche, welche von den Scheiteln derjenigen Complexkegel gebildet wird, die Undulationskanten besitzen.

6) $\varepsilon_4 h_{4p} = 2n(11n-18)$. (p 74).

7) $\varepsilon_{22} h_{2s} = 2n(n+2)(n-3)$. (p. 75).

8) $\varepsilon_{22}(\mu^2 c - \mu^3) = n(n-1)(n-2)(n-3)$. (p. 75).

Die Singularitäten der *Plückerschen Complexfläche* sind durch diejenigen unserer Symbole ε ausgedrückt, welche die Bedingung μ^2 enthalten. Wir lassen die wichtigsten hier folgen.

9) $\varepsilon_2 \mu^2 c^2 = 2n(n-1)$, (Voss, p. 139).

10) $\varepsilon_3 \mu^2 c = n(n-2)(2n+1)$, (p. 139).

11) $\varepsilon_{22} \mu^2 c = \frac{1}{2} n(n-2)(n-3)(3n+1)$, (p. 139).

12) $\varepsilon_4 \mu^2 = 4n(n-3)(3n-2)$, (p. 141). (Zahl der stationären Punkte der Rückkehrcurve.)

13) $\varepsilon_{32}\mu^2 = 2n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$, (p. 76 u. 141).

14) $\varepsilon_{222}\mu^2 = \frac{2}{3}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)$, (p. 76 u. 141).

Auch die Berechnung der Singularitäten der sogenannten *singulären Fläche* des Complexes, d. h. der Fläche der Scheitel aller mit *Doppelkanten* behafteten Complexkegel ist nach des Verfassers Methoden leicht zu bewerkstelligen; sie gehört aber nicht in den Rahmen der hier gelösten Probleme, ebensowenig, wie in den Rahmen der in § 27. der Beitr. gelösten Probleme die Berechnung der Singularitäten gehörte, welche auf die ∞^2 Tangentialebenen der Punktfläche F_n Bezug nehmen, d. h. der Ebenen der auf F_n liegenden und mit *Doppelpunkten* behafteten Plancurven.

Hamburg, Februar 1877.