SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1877
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0012
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0012

LOG Id: LOG_0020
LOG Titel: Ueber correlative oder reciproke Bündel.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber correlative oder reciproke Bündel.

Von Rud. Sturm in Darmstadt.

In den Bänden I, VI, X dieser Annalen habe ich nach einander die Probleme der ebenen, der räumlichen Projectivität und der Collineation behandelt. Es waren dies folgende Probleme:

1) In einer Ebene (oder in zwei verschiedenen) sind zwei Gruppen von entsprechenden (homologen) Punkten gegeben; solche Paare von entsprechenden (correspondirenden, associirten) Punkten zu finden, aus denen die beiden Gruppen durch projective Strahlbüschel projicirt werden.
2) Die beiden Gruppen von Punkten befinden sich im Raume (oder, wenn man lieber will, in zwei Räumen); solche Paare von correspondirenden Axen zu finden, aus denen die beiden Gruppen durch projective Ebenenbüschel*) projicirt werden.
3) Für die beiden Punktgruppen im Raume solche Paare von associirten Punkten zu finden, aus welchen sie durch collineare Strahlenbündel projicirt werden.

Herr Hirst hat in den letzten Jahren sich mit verwandten Untersuchungen beschäftigt. In seiner Abhandlung on Correlation of two Planes**) stellt er zunächst fest, dass die Correlation (reciproke Beziehung) zweier ebenen Systeme durch 8 einfache Bedingungen bestimmt sei. Er nimmt nun die sogenannten elementaren Bedingungen an; und zwar 1) einfache: zwei gegebene Punkte in den beiden Systemen sind conjugirt d. h. jeder liegt auf der entsprechenden Geraden (Polare) des andern; oder zwei gegebene Geraden sind conjugirt, d. h. jede geht durch den entsprechenden Punkt (Pol) der andern; und 2) dop-

*) Die Anwendung des Wortes „Ebenenwurf" in der betreffenden Abhandlung erscheint mir heute nicht mehr ganz berechtigt. — In Bezug auf meinen Vorschlag, „projectiv" statt „projectivisch" zu sagen, erlaube ich mir die weitere Bemerkung, dass Plücker's Autorität für das erstere angeführt werden kann (z. B. System der anal. Geom. Berlin 1835, S. 67).

**) Proceed. London Math. Soc. Bd. V, S. 40; Annali di Matematica Ser. II Bd. VI S. 260. (1874.)

pelte: ein gegebener Punkt des ersten oder zweiten Systems entspricht einer gegebenen Geraden des andern.

Sind blos 7 Bedingungen gegeben, so erhält man ein System von Correlationen*) (Reciprocitäten, reciproken Beziehungen); in diesem befinden sich eine endliche Zahl von exceptionellen Correlationen (Ausartungen), deren es zwei Arten giebt, — die eine mit einem Paar von singulären Punkten, die andere mit einem Paare von singulären Geraden —, ferner eine endliche Zahl von Correlationen, für die noch ein gegebenes Paar von Punkten, oder ein gegebenes Paar von Geraden conjugirt ist. Zwischen diesen vier Zahlen π, λ, μ, ν, von denen — nach Analogie der Theorie von Kegelschnitt-Systemen — die letzteren die Charakteristiken des Correlations-Systemes heissen, findet nun Herr Hirst zwei Relationen, welche genau dieselbe Gestalt haben, wie bei Kegelschnitt-Systemen.

In den 13 Paaren zu einander dualer „fundamentaler" Systeme, welche durch ε doppelte und $7-2\varepsilon$ einfache elementare Bedingungen bestimmt sind, ermittelt er darauf je die Zahlen π, λ der Ausartungen direct, berechnet daraus die Charakteristiken μ, ν und findet damit die Zahlen der Correlationen, welche ε doppelten und $8-2\varepsilon$ einfachen Elementarbedingungen genügen, in den Fällen, wo $\varepsilon < 4$; indem sie für die 3 andern Fälle bekannt oder leicht zu erhalten sind**).

Herr Hirst hat dann weiter die Untersuchung auf den Raum ausgedehnt und einstweilen in einer kurzen Note on Correlation in Space***) die Hauptgesichtspunkte mitgetheilt. 15 einfache Bedingungen bestimmen eine endliche Zahl von Correlationen zwischen zwei Räumen, 14 demnach ein System; in diesem giebt es drei Ausartungen†), von denen eine in jedem Raume einen singulären Punkt, die zweite eine singuläre Ebene, die dritte eine singuläre Gerade hat, und eine endliche Zahl von Correlationen, bei denen noch zwei gegebene Punkte oder zwei gegebene Ebenen oder zwei gegebene Geraden conjugirt sind.

---

*) Wegen des Anschlusses an Herrn Hirst's Untersuchungen ziehe ich dieses Wort vor; auch scheint es mir bequemer und leichter auszusprechen als die beiden andern.

**) Die vier Fälle, wo in dem einen Systeme nur Punkte gegeben sind, denen in dem andern 3, 2, 1, 0 Gerade entsprechen und 2, 4, 6, 8 Punkte conjugirt sind, also — nach Hirst's bald zu erläuternder Bezeichnung — die vier Signaturen [3020], [2040], [1060], [0080] hat Herr Schröter 1862 in seiner Habilitationsschrift über die Construction einer Fläche 2. Grades durch gegebene Punkte (Borchardt's J. Bd. 62, S. 215), besonders in constructiver Beziehung, eingehend behandelt. Ich komme in einem Anhange auf dieselbe zurück.

***) Proc. London Math. Soc. Bd. VI S. 7. (1875).

†) Ueber die Ausartungen sehe man auch Herrn Fiedler's darstellende Geometrie 2. Aufl (1875) Art. 22, 23, 163, 167, sowie eine Stelle der Vorrede, in welcher Herr Fiedler mittheilt, dass sie ihm schon länger bekannt sind.

Zwischen den Zahlen π, ω, χ der Ausartungen und den Zahlen μ, ϱ, ν, der letzteren Correlationen — den Charakteristiken des Systems — ergeben sich genau dieselben Gleichungen wie zwischen den Ausartungen und Charakteristiken eines Systems von Flächen 2. Grades.

Es kommt also hier wiederum auf die Ermittelung der Zahlen π, ω, χ an, wobei ebenfalls für das System nur elementare (einfache bis vierfache) Bedingungen angenommen werden.

Bei den Ausartungen der dritten Art kommt die Correlation auf die Projectivität der Ebenenbüschel um die beiden singulären Axen hinaus, die Zahlen χ können also aus meinen Resultaten im Probleme der räumlichen Projectivität direct oder indirect entnommen werden. Bei den Ausartungen der ersten und zweiten Art — die zu einander dual sind — geht die Correlation der Räume über in diejenige von zwei Bündeln, deren Scheitel die singulären Punkte sind, bez. in die von zwei ebenen Systemen in den singulären Ebenen.

Herr Hirst schlug mir nun vor, das Problem der Bündel-Collineation, wie ich es in dem letzten der drei oben erwähnten Aufsätze behandelt habe, durch das der Bündel-*Correlation* zu ersetzen und zu erweitern, d. h. folgendes Problem zu behandeln:

Gegeben sind in dem einen von zwei Räumen A, B *k Punkte A_i, l Gerade a_i, m Punkte $\mathfrak{A}_i$, n Gerade $\mathfrak{a}_i$; in dem andern, ihnen entsprechend (homolog), k Gerade b_i, l Punkte B_i, m Punkte $\mathfrak{B}_i$, n Gerade* $\mathfrak{b}_i$. Wie Herr Hirst nenne ich $[klmn]$ die *Signatur* des so bestimmten Systems der fundamentalen oder Grundelemente.*)

Zwei Punkte A, B in den beiden Räumen A, B *sollen nun correspondirend oder associirt heissen, wenn zwischen den Bündeln, deren Scheitel sie sind, eine derartige Correlation statt hat, dass* (1) *den k Strahlen AA_i die k Ebenen Bb_i;* (2) *den l Ebenen Aa_i die l Strahlen BB_i entsprechen;* (3) *jeder der beiden Strahlen $A\mathfrak{A}_i$, $B\mathfrak{B}_i$ in der dem andern entsprechenden Ebene liegt;* (4) *jede der beiden Ebenen $A\mathfrak{a}_i$, $B\mathfrak{b}_i$ durch den der andern entsprechenden Strahl geht; oder mit andern Worten, dass die m Strahlenpaare $A\mathfrak{A}_i$, $B\mathfrak{B}_i$ und die n Ebenenpaare $A\mathfrak{a}_i$, $B\mathfrak{b}_i$ conjugirt sind.*

Die Bedingungen (1) und (2) sind doppelte, (3) und (4) hingegen einfache Bedingungen; man ersieht bald, dass, wenn zwei Punkte $\mathfrak{A}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$ sich vereinigen, an Stelle von 2 einfachen Bedingungen (3) eine Doppelbedingung (1) oder (2) tritt. Die Identität zweier Geraden $\mathfrak{a}_i$ oder $\mathfrak{b}_i$ führt, vorausgesetzt, dass nicht beide Scheitel A, B fest sind, nicht zu einem analogen Resultate.

---

*) Jedoch sowohl in der Bezeichnung der Grundelemente, als in der ihrer Zahlen bin ich in der obigen Weise von Herrn Hirst abgewichen; sie befindet sich mehr in Uebereinstimmung mit meinen früheren Arbeiten.

Als ich die Untersuchung zuerst in Angriff nahm, schienen mir durch die Annahme, dass unter den Grundelementen sich auch conjugirte Geraden $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ befinden, also $n > 0$, wesentliche Schwierigkeiten zu entstehen; auch ergaben sich bei einigen Proben die verschiedenartigsten Zahlen, während die Signaturen, bei denen $n = 0$, im Allgemeinen zu homogenen Resultaten führten. Ich schloss daher die conjugirten Geraden bei meinen ersten Untersuchungen aus; was ich für dieses enger begrenzte Problem gefunden, habe ich in einem Auszuge in den Proceedings der London Mathematical Society Bd. VII S. 175 „On correlative pencils" — welcher künftig mit C. P. citirt werden wird — veröffentlicht.

Eine erneute Inangriffnahme der Untersuchung zeigte jedoch, dass, wenn auf dieses Problem ebenfalls die Charakteristikentheorie angewandt wird, indem für die vorkommenden Correlationssysteme, wie von Hirst, Gleichungen zwischen den Ausartungszahlen und gewissen als Charakteristiken zu benennenden Correlationszahlen aufgestellt werden, die Annahme conjugirter Geraden $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ keine Schwierigkeit mehr hat; die Zahlen haben sich freilich, wie schon oben bemerkt, im Allgemeinen viel grösser und unhomogener ergeben; die einfacheren Resultate bei den Signaturen $n = 0$ gestatteten es deshalb auch, die Untersuchung noch etwas weiter zu führen. Diese Resultate sind nun auf anderem Wege erhalten als früher, so dass dadurch eine wünschenswerthe Controlle erzielt ist.

Im Laufe der Untersuchungen hat natürlich eine häufige Correspondenz zwischen meinem Freunde Hirst und mir stattgefunden, so dass mehrere Resultate früher von Hirst gefunden und dann durch mich bestätigt wurden, ja die später (Nr. 16.) zu besprechende Idee der Zurückführung der Ausartungen vom ersten Typus auf die des zweiten Typus ganz demselben zu verdanken ist.

I.

Allgemeine Eigenschaften.

1. *Wenn $\sigma = 2k + 2l + m + n = 8$, so ist im Allgemeinen zu jedem Punkte A des einen Raums* A *jeder beliebige Punkt B des andern* B *associirt,* wie sich aus Herrn Hirst's Abhandlung (Proceed. Bd. V) über die Correlation zweier Ebenen durch Dualisirung ergiebt. *Wie viele Correlationen möglich sind*, ergiebt die Tabelle in Nr. 42. dieser Abhandlung*); es ist bemerkenswerth, dass *wenn $n = 0$ ist, diese Zahl durchweg* 1 *ist, mit einziger Ausnahme der Signatur*

*) Es sind die Zahlen ξ_8 in der Tabelle 1) von Nr. 40. meines vorliegenden Aufsatzes. — Auf die genannte Abhandlung beziehen sich alle meine Citate von Hirst.

$$[2200] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 a_2 \\ b_1 b_2 B_1 B_2, \end{matrix}$$

wo sie 0 *ist.* Diese Ausnahme hat überhaupt einen auch die Homogeneität der Resultate für $n = 0$ störenden Einfluss. In diesem Falle ist deshalb im Allgemeinen keine Correlation möglich, weil, wenn α', β' die Ebene AA_1A_2, BB_1B_2, a' und b' die Geraden $\overline{Aa_1a_2}$, $\overline{Bb_1b_2}$ sind, im Allgemeinen der Strahlbüschel $(A\alpha')$ (A_1, A_2, a_1, a_2) d. h. welcher A zum Scheitel, α' zur Trägerebene hat und dessen 4 Strahlen durch A_1, A_2 gehen und a_1, a_2 treffen*), oder, was dasselbe, der Ebenenbüschel a' (A_1, A_2, a_1, a_2) nicht mit dem Ebenenbüschel b' (b_1, b_2, B_1, B_2) oder, was dasselbe, dem Strahlbüschel $(B\beta')$ (b_1, b_2, B_1, B_2) projectiv ist. (Hirst, Nr. 43.)

Jedem Punkte B jedoch ist jeder beliebige Punkt A einer Fläche 2. Gr. α^2 associirt, welche durch $A_1 A_2 a_1 a_2$ geht und deren Punkte A so sind, dass $a'(A_1 A_2 a_1 a_2) \barwedge b'(b_1 b_2 B_1 B_2)$. Zwischen dem Bündel B und dem, dessen Scheitel irgend ein Punkt A auf α^2 ist, finden nun aber einfach unendlich viele Correlationen statt; denn wenn wir z. B. in die Ebene Aa_2 oder Bb_2 einen Strahl legen, den wir zu BB_2, bez. AA_2 conjugirt, oder wenn wir durch AA_2 oder durch BB_2 eine Ebene legen, die wir zu Bb_2 oder Aa_2 conjugirt sein lassen; so entsprechen wegen der Projectivität auch Aa_2, BB_2, bez. AA_2, Bb_2. Die Signatur geht dann über in [2110], [1210], [1201], [2101] und alle unendlich vielen Lösungen sind auch Correlationen für [2200]. Wir können also noch eine einfache Bedingung, also ein Paar conjugirter Punkte oder Geraden hinzufügen: $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, so dass sich [2210], bez. [2201], wo $\sigma = 9$, ergiebt.

Man ersieht, dass *jedem Punkte B für* [2210], [2201] *dieselbe Fläche 2. Grades α^2 associirt ist, wie für* [2200], und zwar einfach, da die Signaturen, die durch Hinzufügung von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ aus [2110] u. s. f. entstehen, nämlich [2120], [2111] u. s. f. nur eine Correlation zulassen (Hirst, Nr. 42.). (C. P. Nr. 2.)

2. Wie hier ergiebt sich offenbar *für alle Signaturen, bei denen $\sigma = 9$,* dass *einem Punkte B sämmtliche Punkte einer Fläche associirt sind, also bei $\sigma = 10$ eine Curve, bei $\sigma = 11$ eine endliche Zahl von Punkten. Für $\sigma > 11$ correspondirt im Allgemeinen kein Punkt mehr einem beliebig gegebenen Punkte.* Wir werden aber *bei $\sigma = 12, 13, 14$ bez. eine Fläche, eine Curve, eine endliche Zahl von Punkten haben,*

*) Ich werde künftighin häufig das nach meiner Erfahrung für die Abkürzung sehr bequeme, von mir auch schon anderweitig benutzte, von H. Grassmann eingeführte Wort „incident" gebrauchen für zwei Elemente, von denen eins in das andere fällt, sowie für 2 Gerade in derselben Ebene. Mit Anwendung dieses Worts konnte oben gesagt werden: „dessen 4 Strahlen mit A_1, A_2, a_1, a_2 incident sind".

welche correspondirende besitzen. Ferner wird mit einer Geraden bei $\sigma = 10$, 11, *mit einer Ebene bei* $\sigma = 11$, 12 *eine Fläche, bez. eine Curve associirt sein* (C. P. Nr. 3.).

Vertauscht man die beiden Räume, so werden im Allgemeinen die Zahlen sich ändern; ausser, wenn $k = l$ ist. Wir entnehmen aber Hirst (Nr. 33.), dass für $\sigma = 8$ die Zahl der Correlationen zwischen festen Bündeln A und B durch Vertauschung nicht geändert wird. Ebenso wird bei $\sigma = 10$ die Fläche, welche einer Geraden associirt ist, dieselbe Ordnung haben, ob diese Gerade in A oder in B liegt; denn diese Ordnung ist nichts anders als die Zahl der Paare associirter Punkte, von denen der eine auf einer Geraden a in A, der andere auf einer Geraden b in B liegt. Ferner ist die Ordnung der Curve der Punkte, die bei $\sigma = 12$ associirte in einer gegebenen Ebene haben, dieselbe, gleichviel, in welchem der beiden Räume diese Ebene liegt; und die Zahl der Punkte, welche für $\sigma = 14$ associirte besitzen, ist auch in beiden Räumen dieselbe.

Es wird sich zeigen, dass bei den Signaturen, für welche $n = 0$, mit wenigen Ausnahmen die Vertauschung der Räume keine Aenderung hervorbringt.

3. *Die Vielfachheit der Punkte* $\mathfrak{A}_i$ *und der Geraden* a_i *und* $\mathfrak{a}_i$ *auf jeder der vier Flächen, welche, bei* $\sigma = 9$, 10, 11, 12, *beziehlich einem Punkte* B, *einer Geraden* b, *einer Ebene* β, *dem ganzen Raume* B *correspondiren*, ist leicht zu finden.

Lassen wir A in $\mathfrak{A}_1$ fallen, so wird die Bedingung, dass $A\mathfrak{A}_1$, $B\mathfrak{B}_1$ conjugirt seien, von selbst erfüllt; bei $\sigma = 9$ ist also die Vielfachheit eines Punktes $\mathfrak{A}_1$ gleich der Zahl der Correlationen zwischen den festen Bündeln $\mathfrak{A}_1$, B für $[k, l, m-1, n]_8$, wo eben $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ entfernt ist, oder, wie man auch schreiben kann, für $\left[9, -\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}\right]_8$ (Hirst, Nr. 42.). Hingegen bei $\sigma = 10$, 11, 12 ist sie gleich der Zahl der Punkte B, die dem $\mathfrak{A}_1$ für $[k, l, m-1, n]$ auf b, β, in B associirt sind, also, wenn wir, um zugleich uns der gewöhnlichen Betrachtungsweise anzuschliessen, die Räume vertauschen, gleich der Ordnung der Fläche oder der Curve, oder der Zahl der Punkte, die mit B für $[l, k, m-1, n]$ associirt sind.*)

Sei zweitens a_1 eine der Geraden a_i, $\mathfrak{A}_1'$ ein beliebiger, aber fester Punkt auf derselben; die Punkte B, welche einem A auf a_1 — der von $\mathfrak{A}_1'$ verschieden ist — für $[klmn]$ associirt sind, sind dieselben als diejenigen, welche ihm für $[k, l-1, m+1, n]$ associirt sind, wo $a_1 B_1$ ersetzt ist durch $\mathfrak{A}_1' B_1$; weil die dem BB_1 entsprechende Ebene in

*) Oder, um Herrn Schubert's Ausdrucksweise (Math. Annalen Bd. X S. 14) anzuwenden, gleich dem Grad des Punktorts 2., 1., 0. Stufe, der dem Punkte B für $[l, k, m-1, n]$ associirt ist.

A, wenn sie durch $\mathfrak{A}_1'$ geht, die ganze a_1 enthält. Also ist die Vielfachheit von a_1 auf unsern Flächen beziehlich gleich der Zahl der Correlationen für $[k, l-1, m+1, n]$ oder $[l-1, k, m+1, n]$ mit festen Scheiteln, und, nachdem wieder die Räume vertauscht sind, gleich dem Grade des Punktorts 2., 1., 0. Stufe, welcher dem B für $[l-1, k, m+1, n]$ associirt ist.

Wird drittens A auf $\mathfrak{a}_1$ gelegt, so wird die Bedingung, dass $A\mathfrak{a}_1$, $B\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind, ebenfalls von selbst erfüllt; die Vielfachheit einer $\mathfrak{a}_i$ auf unsern Flächen ist also bez. gleich der Zahl der Correlationen für $[k, l, m, n-1]$ oder $[l, k, m, n-1]$ bei festen Scheiteln, ferner gleich dem Grade des einem B für $[l, k, m, n-1]$ associirten Punktorts 2., 1., 0. Stufe.

4. In gleicher Weise kann man *den Grad der Vielfachheit eines Punktes A_i auf und die Zahl der Schnittpunkte einer Graden a_i oder $\mathfrak{a}_i$ mit der Curve* ermitteln, *welche für* $\sigma = 10, 11, 12, 13$ *mit B, b, β,* B *associirt ist.*

Der Grad der Vielfachheit von A_i ist, weil, wenn A nach A_i fällt, die Bedingung des Entsprechens von AA_i und Bb_i von selbst erfüllt wird, resp. gleich der Zahl der Correlationen für $[k-1, l, m, n]$ oder $[l, k-1, m, n]$ bei festen Scheiteln, ferner gleich dem Grade des Punktorts 2., 1., 0. Stufe, der für $[l, k-1, m, n]$ einem B associirt ist.

Unsere Curven haben so viele Schnittpunkte mit einer Geraden a_i, als die ebenfalls zu B, b, β, B, jedoch für $[k, l-1, m+1, n]$ associirten Flächen mit einer durch einen $\mathfrak{A}_i$ gehenden Geraden ausserdem noch Schnittpunkte besitzen.

Endlich ist die Zahl der Schnittpunkte unserer Curven mit einer Geraden $\mathfrak{a}_i$ gleich derjenigen der ebenfalls mit B, b, β, B, jedoch für $[k, l, m, n-1]$ associirten Flächen mit einer beliebigen Geraden.

Die Punkte $\mathfrak{A}_i$ liegen im Allgemeinen nicht auf diesen Curven; während anderseits die Vielfachheit der A_i auf den vorigen Flächen auf diesem Wege nicht zu ermitteln ist.

Man sieht leicht, dass man auf ähnliche Weise den Grad der Vielfachheit der Grundelemente auf Gebilden ermitteln kann, die durch *exceptionelle* Correlationen correspondiren. (C. P. Nr. 4.)

5. Aus der eben gemachten Betrachtung geht auch hervor, dass die Punkte $\mathfrak{A}_i$, diejenigen einer Geraden a_i oder $\mathfrak{a}_i$ für $\sigma = 8$ mit B durch einfach unendlich viele Correlationen, bei $\sigma = 9$ mit allen Punkten des Raums, bei $\sigma = 10, 11, 12$ mit allen Punkten eines Punktorts 2., 1., 0. Stufe associirt sind, dessen Grad leicht zu ermitteln ist. Ebenso sind die Punkte A_i bei $\sigma = 8, 9, 10$ mit jedem Punkte durch ein Correlationssystem 2., 1., 0. Stufe, bei $\sigma = 11, 12, 13$ je mit einem Punktorte 2., 1., 0. Stufe associirt, dessen Grad derjenige des Punktorts ist,

welcher einem beliebigen A für $[k-1, l, m, n]$ oder B für $[l, k-1, m, n]$ correspondirt.

II.

Beschreibung der exceptionellen Correlationen vom 1. Typus und Zurückführung der allgemeinen Correlationen auf dieselben.

6. Bevor wir weiter gehen, scheint eine Beschreibung *der beiden exceptionellen Bündel-Correlationen* nothwendig. Sie ergiebt sich durch Dualisirung oder Projection derjenigen von Hirst (Nr. 17.).

a) *Die Correlation mit zwei singulären Axen* (oder Strahlen), in jedem Bündel eine, kurzweg Axen-Correlation genannt, durch Dualisirung aus der Correlation zweier Ebenen mit zwei singulären Geraden, durch Projection aber aus der mit zwei singulären Punkten entstehend, hat folgende Eigenschaften:

Jeder Ebene des einen Bündels, die nicht durch dessen singuläre Axe geht, entspricht die singuläre Axe des andern.

Jeder Ebene aber des einen Bündels, welche durch dessen singuläre Axe geht, entsprechen alle Strahlen des andern Bündels in einer gewissen durch dessen Axe gehenden Ebene.

Dadurch sind die Ebenen des Büschels um die eine Axe auf die Ebenen des Büschels um die andere bezogen und zwar projectiv.

Jedem vom singulären Strahle verschiedenen Strahle des einen Bündels entspricht diejenige Ebene durch die singuläre Axe des andern, welche in der eben erwähnten Ebenenbüschel-Projectivität der den Strahl mit der Axe seines Bündels verbindenden Ebene homolog ist.

Dem singulären Strahle selbst eines jeden Bündels entspricht jede nicht mit dem singulären Strahle des andern incidente Ebene desselben.

Die Axen-Correlation ist also eine Ebenenbüschel-Projectivität.

Eine Verschiebung der Scheitel zweier axen-correlativer Bündel auf den Axen hebt die Correlation nicht auf.

Es kann demnach einem Punkte B niemals eine endliche Zahl von Punkten A durch Axen-Correlation associirt sein.

b) Für *die exceptionelle Correlation zweier Bündel, bei der in jedem eine singuläre Ebene ist,* gilt Folgendes:

Jedem Strahle des einen Bündels, der nicht in dessen singulärer Ebene liegt, entspricht die singuläre Ebene des andern.

Jedem Strahle des einen Bündels in dessen singulärer Ebene entsprechen alle Ebenen des andern um einen gewissen Strahl desselben in der singulären Ebene.

Dadurch sind die Strahlen der Büschel, welche durch die singulären Ebenen aus den Bündeln herausgeschnitten werden, auf einander und zwar projectiv bezogen.

Jeder nicht mit der singulären Ebene eines Bündels identischen

Ebene desselben entspricht derjenige Strahl der singulären Ebene des andern, der dem Schnittstrahle jener Ebene mit der singulären ihres Bündels in der eben erwähnten Strahlbüschel-Projectivität homolog ist.

Der singulären Ebene selbst eines jeden Bündels entspricht jeder nicht mit der des andern incidente Strahl desselben.

Die Correlation mit singulären Ebenen ist demnach eine Strahlbüschel-Projectivität.

7. Wir stellen uns jetzt irgend eine Signatur vor, für welche $\sigma = 8$. B sei ein fester Punkt, A ein beliebiger Punkt; ζ_8 die Zahl der Correlationen, die für die Signatur zwischen den Bündeln A, B möglich sind: die Zahlen von Hirst Nr. 42. Wir bewegen A auf einer Geraden a und fügen noch das eine Mal das Paar $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1$, das andere Mal das Paar $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1$ zu. Es ergiebt sich ein System (1. Stufe) von Correlationen. Seien π_{8B}, λ_{8B} die Zahlen der exceptionellen unter ihnen mit singulären Axen, bez. Ebenen, μ_8, ν_8 (genauer μ_{8B}, ν_{8B}, doch wohl wegen der vorübergehenden Benutzung der Bezeichnung unnöthig) die Zahl derjenigen, bei denen auch die Strahlen nach $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, bez. die Ebenen nach $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind (oder kurz, bei denen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, bez. $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind); letztere Zahlen sind die Charakteristiken*) des Systems.

a) Also zunächst sei $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1$ zugefügt; seien $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ zwei beliebige durch $\mathfrak{B}_1$ gezogene (oder was hier, wo B fest ist, genügt, den Strahl $B\mathfrak{B}_1$ treffende) Geraden, so dass $B\mathfrak{B}_1$ der Schnitt der Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ ist.

Für jede Lage von A auf a und jede der dann möglichen ζ_8 Correlationen construiren wir den Strahl, der der Ebene $B\mathfrak{b}'$ entspricht. Es sei $\mathfrak{a}'$ eine beliebige Gerade, so leuchtet ein, dass dieser Strahl die $\mathfrak{a}'$ ν_8 mal trifft, weil es ν_8 Correlationen giebt, für welche auch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ conjugirt sind. Also beschreibt der Strahl eine Regelfläche vom Grade ν_8; desgleichen der Strahl, der der Ebene $B\mathfrak{b}''$ entspricht. Diese beiden Regelflächen sind also hinsichtlich ihrer Erzeugenden eindeutig auf einander bezogen und zwei entsprechende schneiden sich je auf a; um die Klasse des durch ihre Verbindungsebenen entstehenden Torsus zu ermitteln, schneiden wir beide Flächen durch dieselbe Ebene und erhalten so zwei eindeutig auf einander bezogene Curven; die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen den Schnitt des Torsus. Gäbe es nun nicht sich selbst entsprechende Punkte auf den beiden Curven, so würde die Klasse dieses Schnitts und also auch des Torsus

*) Es ist dies Wort von Hirst und mir nach Analogie der Charakteristikentheorie für Kegelschnittsysteme gebraucht worden; ob es der scharfen Definition entspricht, welche Schubert a. a. O. S. 10 giebt, wonach die Charakteristiken diejenigen Bedingungszahlen sind, durch welche alle übrigen Bedingungszahlen auszudrücken sind, muss dahingestellt bleiben; die Untersuchung wäre auch unserm Zwecke fremd.

$2\nu_8$ sein. In jeder der π_{8B} Axen-Correlationen des Systems aber entspricht, da die Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ bei der Beliebigkeit von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ nicht gerade mit der Axe des B-Bündels incident sind, beiden die Axe des A-Bündels, und deren Spur giebt uns in der Schnittebene zwei vereinigte entsprechende Punkte. Ferner schneiden sich ersichtlich in der Spur von a selbst ζ_8 Paare entsprechender Geraden, also repräsentirt sie ζ_8 vereinigte Punkte, und der erzeugte Torsus ist demnach nur von der Klasse $2\nu_8 - \pi_{8B} - \zeta_8$. Anderseits ist aber, da seine einhüllenden Ebenen in den verschiedenen Correlationen dem Schnitt-Strahle $B\mathfrak{B}_1$ entsprechen und es μ_8 Correlationen giebt, in denen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ conjugirt sind, also diese Ebene durch $\mathfrak{A}_1$ geht, diese Klasse μ_8. Wir haben demnach:

$$2\nu_8 - \pi_{8B} - \zeta_8 = \mu_8$$

oder

(1a) $$2\nu_8 = \mu_8 + \pi_{8B} + \zeta_8.$$

b) Wir fügen nun $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ hinzu; auf $\mathfrak{b}_1$ legen wir $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ und construiren in den verschiedenen Correlationen die Ebenen, welche dem Strahle $B\mathfrak{B}'$ entsprechen; da es μ_8 Correlationen giebt, für welche auch $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ conjugirt sind, wenn $\mathfrak{A}'$ ein beliebiger Punkt ist, so umhüllen die Ebenen einen Torsus von der Klasse μ_8 und desgleichen die dem Strahle $B\mathfrak{B}''$ entsprechenden. In den λ_{8B} Correlationen mit singulären Ebenen befinden sich die Strahlen $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$ nicht gerade in der singulären Ebene des B-Bündels, also vereinigen sich die entsprechenden Ebenen in die singuläre Ebene des A-Bündels. Das Erzeugniss der Schnittlinien der entsprechenden Ebenen der beiden Torsen ist demnach von dem Grade $2\mu_8 - \lambda_{8B}$, diese Schnittlinien entsprechen aber der Ebene $B\mathfrak{b}_1$, folglich werden ν_8 die Gerade $\mathfrak{a}_1$ treffen. Mithin ist

$$2\mu_8 - \lambda_{8B} = \nu_8$$

oder

(1b) $$2\mu_8 = \nu_8 + \lambda_{8B}.$$

Durch diese beiden Formeln gewinnen wir, da ζ_8 bekannt ist, wenn wir noch zwei der vier Zahlen π_{8B}, λ_{8B}, μ_8, ν_8 ermitteln, die beiden andern durch Rechnung. Wir werden die Ausartungzahlen π_{8B}, λ_{B8} zu ermitteln suchen.

Die Formeln sind auch für die Signatur [2200] richtig; denn auch dort giebt es unendlich viele Correlationen, die zwar nicht durch die unendlich vielen Lagen von A auf a, sondern durch zwei bestimmte Lagen entstehen, deren jede aber statt einer endlichen Zahl unendlich viele Correlationen [2200] oder [2110] u. s. f. liefert, auf welche letzteren die Formeln von Hirst (Nr. 20.) anzuwenden sind. Da aber in diesem Falle $\zeta_8 = 0$ ist, so führen unsere Formeln zu den (wegen der 2 Lagen) mit 2 multiplicirten Hirst'schen.

Die μ_8, ν_8 geben uns die Ordnung der Fläche der Punkte A, die dem B für alle Signaturen associirt sind, bei denen $\sigma = 9$ ist. War die ursprüngliche Signatur für $\sigma = 8$ $[klmn]$, so giebt μ_8 die Ordnung für die Signatur $[k, l, m+1, n]$, ν_8 für die Signatur $[k, l, m, n+1]$. Für die Signatur $[k, l, m-1, n+1]$ ist dann das eben gefundene ν_8 zum μ_8 geworden, so dass sich auf diese Weise eine Reihe von Zahlen doppelt ergeben. Aehnliches wird für die höheren Werthe von σ gelten und also da nicht wiederholt werden.

Auch die Zahlen π_{8B}, λ_{8B} sind Flächenordnungen; erstere ist offenbar der Grad der Regelfläche, welche durch die singulären Axen (in A*) der Axen-Correlationen, in welchen sich der feste Bündel B für die Signatur $[k\,l\,m\,n]_{\sigma=8}$ mit A-Bündeln befinden kann, erzeugt wird.* Dieselbe zerfällt in den meisten Fällen, wie an einigen Beispielen gezeigt werden wird. Man kann π_{8B} auch so definiren: *sie ist die Zahl der Axen-Correlationen zwischen A- und B-Bündeln, bei denen die eine Axe mit einer Geraden a, die andere mit B incident ist.* Hingegen *λ_{8B} ist die Ordnung der Fläche der Punkte A, zwischen deren Bündel und dem festen Bündel B für dieselbe Signatur Correlation mit singulären Ebenen statt hat.* Auch diese zerfällt meistens, wie ebenfalls einige Beispiele zeigen werden.

8. In dem Vorhergehenden ist also die Ordnung der Fläche gefunden, die einem festen B bezüglich einer Signatur $[k\,l\,m\,n]_{\sigma=9}$ associirt ist; wir wollen sie ζ_{9B} nennen, hingegen ζ_{9A}, wenn der Punkt im Raume A liegt. Wir gehen zur Ermittelung der Ordnung der Curve, welche dem B bezüglich einer Signatur, bei der $\sigma = 10$ ist, associirt ist. Wir stellen uns wieder eine Signatur $[k\,l\,m\,n]_{\sigma=9}$ vor, und durchschneiden die Fläche ζ_{9B}^{ter} Ordnung, die dem B associirt ist, mit der Ebene α, in der wir die Zahl der dem B für $\sigma = 10$ associirten Punkte suchen wollen. A lassen wir sich auf der entstehenden ebenen Curve von der Ordnung ζ_{9B} bewegen; jeder Lage von A entspricht eine Correlation der Bündel A, B.

In dem entstehenden Correlationssysteme seien π_{9B}, λ_{9B} die Zahl der Correlationen mit singulären Axen, bez. singulären Ebenen, μ_9, ν_9 die Zahl der Correlationen, in welchen noch ein gegebenes Paar von Punkten, bez. von Geraden conjugirt sind.

a) Wir fügen wieder $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ zu und legen $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ so, dass sie $B\mathfrak{B}_1$ treffen; die Strahlen in den Bündeln A, welche der Ebene $B\mathfrak{b}'$ entsprechen, erzeugen wiederum eine Regelfläche vom Grade ν_9, desgl. die der Ebene $B\mathfrak{b}''$ entsprechenden. Machen wir wieder einen beliebigen ebenen Schnitt, so dass wir zwei eindeutig bezogene Curven erhalten; so finden wir als vereinigte entsprechende Punkte die Spuren der Axen der π_{9B} Axen-Correlationen und die ζ_{9B} Schnitte der ebenen Curve in α, auf der sich A bewegt, mit der Schnittebene. Demnach

(2a) $$2\nu_9 = \mu_9 + \pi_{9B} + \zeta_{9B}.$$

b) Auf ganz analoge Weise wie oben ergiebt sich

(2b) $$2\mu_9 = \nu_9 + \lambda_{9B}.$$

Die μ_9, ν_9 geben also die Ordnung der Curve, welche für die Signaturen, bei denen $\sigma = 10$ und m, n nicht beide 0 sind, dem festen B associirt ist; nennen wir sie ζ_{10B}.

π_{9B} ist die Zahl der Axen-Correlationen, in welchen Bündel in A für die Signatur $[k\,l\,m\,n]_9$ zum festen Bündel B sich befinden können, oder die Zahl der Axen-Correlationen zwischen A- und B-Bündeln, bei denen die Axe im zweiten Raume durch B geht.

Es erhellt hieraus, dass *es bei den Signaturen $[k\,l\,m\,n]_{10}$ im Allgemeinen nicht möglich ist, dass der beliebige feste Punkt B mit Punkten A durch Axen-Correlation associirt ist*; also $\pi_{10B} = 0$.

λ_{9B} ist die Ordnung der Curve der Punkte A, welche dem festen B für $[k\,l\,m\,n]_9$ durch exceptionelle Correlation mit singulären Ebenen correspondirt.

Jene Axen zerfallen im Allgemeinen in mehrere Gruppen, diese Curve in mehrere Curven.

9. Wir nehmen jetzt zwei Gerade a, b an; jedem Punkte B auf b sind für $[k\,l\,m\,n]_9$ ζ_{9B} Punkte auf a, jedem A auf a ζ_{9A} Punkte auf b je durch eine Correlation associirt. Freie Beweglichkeit von beiden Punkten A, B auf a, b führt also zu einem System 1. Stufe von Correlationen; π_9', λ_9' seien die Zahlen der exceptionellen unter ihnen mit singulären Axen, bez. Ebenen; μ_9', ν_9' die derjenigen, für welche noch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, bez. $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind.

Wegen der Beweglichkeit von B auf b müssen jetzt $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen werden, damit $B\mathfrak{B}_1$ für alle Lagen von B Schnitt der Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ sei. Durch die Strahlen in den zu B-Bündeln correlativen A-Bündeln, welche den Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ homolog sind, werden wieder zwei Flächen vom Grade ν_9' erzeugt; die Schnittcurven derselben mit einer beliebigen Ebene entsprechen sich Punkt für Punkt und haben vereinigte Punkte 1) in den π_9' Spuren der Axen der Axen-Correlationen in den A-Bündeln, 2) ζ_{9A} vereinigte Punkte in der Spur der Geraden a in der Schnittebene, weil derselben so viel Punkte B auf b correspondiren, also so viele Paare entsprechender Geraden der beiden Flächen ν_9^{ten} Grades sich in der genannten Spur treffen; 3) aber noch vereinigen sich für denjenigen Punkt B auf b, der in der Ebene $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$ liegt, die beiden Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$, also auch ihre entsprechenden Strahlen in den ζ_{9B} zugehörigen Correlationen, folglich auch deren Spuren in der Schnittebene. Wir haben deshalb:

(3a) $$2\nu_9' = \mu_9' + \pi_9' + \zeta_{9A} + \zeta_{9B}.$$

Die andere Betrachtung giebt wieder ohne Schwierigkeit:

(3b) $$2\mu_9' = \nu_9' + \lambda_9'.$$

Formel (3a) giebt deutlich zu erkennen, dass eine Vertauschung von A und B ohne Einfluss ist.

Die Zahlen μ_9', ν_9' geben die Ordnung der Fläche, welche einer Geraden b oder a für eine Signatur $[k\,l\,m\,n]_{10}$, bei der m, n nicht beide 0 sind, correspondirt; nennen wir diese Ordnung ζ_{10}'.

π_9' ist der Grad der Regelfläche der Axen von Axen-Correlationen, in denen A-Bündel (B-Bündel) für $[k\,l\,m\,n]_9$ zu Bündeln, deren Scheitel auf b (a) liegt, sich befinden; oder die Zahl derjenigen Axen-Correlationen zwischen A- und B-Bündeln, bei denen die eine Axe mit a, die andere mit b incident ist.

λ_9' ist die Ordnung der Fläche der Punkte A oder B, die für $[k\,l\,m\,n]_9$ mit Punkten B (oder A) auf b (oder a) durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind.

10. Wir stellen uns jetzt eine Signatur $[k\,l\,m\,n]_{10}$ vor. Einem festen B ist, wie in Nr. 8. gefunden wurde, eine Curve von der Ordnung $\zeta_{10\,B}$ associirt; auf dieser wird A bewegt, wodurch sich wieder ein System von Correlationen ergiebt. Sei $\lambda_{10\,B}$ die Zahl der exceptionellen Correlationen desselben mit singulären Ebenen; $\pi_{10\,B} = 0$ wie in Nr. 8. gefunden; μ_{10}, ν_{10} seien die Charakteristiken.

Wir erhalten hier die beiden Formeln

(4a) $$2\nu_{10} = \mu_{10} + \zeta_{10\,B},$$

(4b) $$2\mu_{10} = \nu_{10} + \lambda_{10\,B}.$$

Die μ_{10}, ν_{10} geben uns die Zahl der Punkte A, welche bei den Signaturen $[k\,l\,m\,n]_{11}$ einem festen B associirt sind; wir nennen diese Zahl $\zeta_{11\,B}$.

$\lambda_{10\,B}$ ist die Zahl der — im Allgemeinen mehrere Gruppen bildenden — *Punkte A, die für $[k\,l\,m\,n]_{10}$ dem festen B durch Correlation mit singulären Ebenen correspondiren.*

11. Wir nehmen jetzt wieder unter Voraussetzung einer Signatur $[k\,l\,m\,n]_{10}$ eine Gerade b in B, eine Ebene α in A an; letztere durchschneidet die Fläche ζ_{10}'ter Ordnung, die der b associirt ist, in einer Curve derselben Ordnung. Auf dieser bewegen wir A. Seien in dem entstehenden Correlationssysteme $\pi_{10\,B}'$, $\lambda_{10\,B}'$, μ_{10}', ν_{10}' bez. die Zahlen der Correlationen mit singulären Axen, singulären Ebenen, bei denen noch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ conjugirt sind.

Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ müssen hier wie in Nr. 9. durch $\mathfrak{B}_1$ geführt werden; wir erhalten wieder zwei Flächen vom Grade ν_{10}', erzeugt durch die den Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ entsprechenden Strahlen, und durch Schnitt mit einer Ebene zwei Curven, deren Punkte sich eindeutig entsprechen. Vereinigte entsprechende Punkte ergeben sich: 1) $\pi_{10\,B}'$ in den Spuren der Axen der A-Bündel in den Axen-Correlationen;

2) in den ζ_{10}' Schnitten der Curve, auf welcher sich A bewegt, mit der Schnittebene, 3) ζ_{10B}, herrührend von den Punkten in α, welche dem Schnitte $(b, \mathfrak{b}'\mathfrak{b}'')$ associirt sind, für welchen sich die Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ vereinigen, also auch deren entsprechende Strahlen und die Spuren derselben in der Schnittebene. Wir haben:

$$2\nu_{10}' = \mu_{10}' + \pi_{10A}' + \zeta_{10}' + \zeta_{10B}. \tag{5a}$$

Und durch die andere Betrachtung:

$$2\mu_{10}' = \nu_{10}' + \lambda_{10B}'. \tag{5b}$$

Die μ_{10}', ν_{10}' geben die Ordnung der Curve, welche für die Signaturen $[k\,l\,m\,n]_{11}$ einer Geraden b associirt ist; nennen wir diese Zahl ζ_{11B}', hingegen die Ordnung der Fläche, die einer Ebene β associirt ist, ζ_{11B}'', woraus sich die Bedeutung von ζ_{11A}' und ζ_{11A}'' ergiebt, so leuchtet unmittelbar ein, dass

$$\zeta_{11A}'' = \zeta_{11B}', \; \zeta_{11B}'' = \zeta_{11A}';$$

denn z. B. die Zahlen der ersten Gleichung sind eben die Zahl der Paare von $[k\,l\,m\,n]_{11}$ associirten Punkte A, B, von denen A in α, B auf b liegt.

π_{10B}' *ist die Zahl der Axen-Correlationen für $[k\,l\,m\,n]_{10}$ zwischen A- und B-Bündeln, bei denen die Axe im zweiten Bündel die Gerade b trifft.*

$\lambda_{10B}' = \lambda_{10A}''$ *ist die Ordnung der Curve von Punkten A, welche für $[k\,l\,m\,n]_{10}$ mit Punkten B auf b, oder die Ordnung der Fläche der Punkte B, die mit Punkten A auf α, oder kurz die Zahl der Punkte A auf α, B auf b, welche durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind.*

Wird noch eine Bedingung hinzugefügt, so dass sich $[k\,l\,m\,n]_{11}$ ergiebt; so erhellt wiederum, dass *es keine Axen-Correlation zwischen A- und B-Bündeln giebt, bei denen die Axe im letzteren die b trifft.*

12. Wir stellen uns jetzt eine Signatur $[k\,l\,m\,n]_{11}$ vor und in B eine Gerade b. Ihr correspondirt in A eine Curve von der Ordnung ζ_{11B}'. Auf dieser bewegt sich nun A, während B die b durchläuft; so dass wir wieder ein Correlationssystem haben. Die Zahl der Axen-Correlationen in demselben ist 0, wie oben gesagt; sei λ_{11B} die der Correlationen mit singulären Ebenen, μ_{11}, ν_{11} die Charakteristiken.

Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ sind wieder durch $\mathfrak{B}_1$ zu ziehen. Wir erhalten zwei Regelflächen vom Grade ν_{11}; ihre Schnitte mit einer Ebene sind eindeutig bezogen und vereinigte entsprechende Punkte sind die Spuren der Curve von der Ordnung ζ_{11B}' in der Schnittebene und die Spuren der ζ_{11B} Strahlen, welche den identischen Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ entsprechen, die zum Punkt $(b, \mathfrak{b}'\mathfrak{b}'') = B$ gehören, der ja ζ_{11B} — natürlich auf unserer Curve von der Ordnung ζ_{11B}' gelegene — associirte Punkte hat. Wir erhalten daher:

$$2\nu_{11} = \mu_{11} + \zeta_{11B}' + \zeta_{11B}; \tag{6a}$$

und durch die andere Betrachtung:

(6 b) $$2\mu_{11} = \nu_{11} + \lambda_{11B}.$$

Die Zahlen μ_{11}, ν_{11} geben uns die Ordnung der Fläche der Punkte B, welche für die Signaturen $[klmn]_{12}$, bei denen m, n nicht beide 0 sind, associirte Punkte A besitzen; nennen wir diese Ordnung ζ_{12B}.

Es hat ersichtlich jeder dieser Punkte im Allgemeinen nur einen correspondirenden; denn es wird nur für einen von den ζ_{11B}, die ihm für $[klmn]_{11}$ associirt sind, auch noch das zugefügte Paar $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ conjugirt sein.

λ_{11B} ist die Ordnung der Fläche der Punkte B, denen für $[klmn]_{11}$ Punkte A durch Correlation mit singulären Ebenen entsprechen.

13. Wir bleiben noch bei der Signatur $[klmn]_{11}$ und nehmen zwei Ebenen α, β an; der ersteren entspricht eine Fläche von der Ordnung $\zeta''_{11A} = \zeta'_{11B}$, aus der die Ebene β eine Curve von derselben Ordnung ζ'_{11B} ausschneidet. Ebenso findet sich in α eine Curve von Ordnung ζ'_{11A}. Auf diesen beiden Curven bewegen sich also associirte Punkte A, B und sind dies die einzigen associirten Punkte, welche bez. in α, β liegen; wir erhalten ein Correlationssystem. Es seien π'_{11}, λ'_{11} die Zahlen der exceptionellen Correlationen, μ'_{11}, ν'_{11} die Charakteristiken desselben; die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ werden wieder durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen, und auf den beiden eindeutig bezogenen Curven von der Ordnung ν'_{11}, welche durch eine beliebige Ebene aus den beiden Regelflächen gleicher Ordnung ausgeschnitten werden, erhalten wir als vereinigte entsprechende Punkte: 1) die Spuren der Axen der A-Bündel in den π'_{11} Axen-Correlationen, 2) die ζ'_{11A} Spuren der ebenen Curve von α, 3) die Spuren der Strahlen, welche von den ζ'_{11B} Schnitten der ebenen Curve von β mit der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$) herrühren und der Ebene $B\mathfrak{b}' = B\mathfrak{b}''$ homolog sind: an und für sich hat jeder dieser Punkte (oder der unter 2) vorkommenden) wohl ζ_{11B} (oder ζ_{11A}) associirte, aber in der Ebene α (oder β) im Allgemeinen nur einen. Es ergiebt sich also:

(7 a) $$2\nu'_{11} = \mu'_{11} + \pi'_{11} + \zeta'_{11A} + \zeta'_{11B}$$

und durch die andere Betrachtung:

(7 b) $$2\mu'_{11} = \nu'_{11} + \lambda'_{11}.$$

Die μ'_{11}, ν'_{11} liefern die Ordnung ζ'_{12} der Curve der Punkte B oder A, welche in Bezug auf $[klmn]_{12}$, wo m, n nicht beide 0 sind, associirte Punkte in einer Ebene α oder β haben, also auf deren Schnitt mit der Fläche von der Ordnung ζ_{12A} oder ζ_{12B}.

π'_{11} ist die Zahl der Axen-Correlationen zwischen A- und B-Bündeln für $[klmn]_{11}$, wo den Axen gar keine Bedingung auferlegt ist.

Es erhellt daraus, dass in Signaturen mit höheren Werthen von σ keine Axen-Correlationen mehr möglich sind.

λ'_{11} ist die Ordnung der Curve der Punkte A oder B, welche für

$[klmn]_{11}$ *durch eine Correlation mit singulären Ebenen Punkten einer Ebene* β *oder* α *correspondiren.*

14. Wir betrachten nun eine Signatur $[klmn]_{12}$. Eine beliebige Ebene β schneidet die in Nr. 12. gefundene Fläche von der Ordnung ζ_{12B} in einer Curve derselben Ordnung. Auf dieser bewegen wir B, sein associirter A durchläuft dann, wie eben erhalten, eine Curve von der Ordnung ζ'_{12} auf der Fläche von der Ordnung ζ_{12A}. In dem entstehenden Correlationssysteme gebe es λ_{12B} Correlationen mit singulären Ebenen, μ_{12}, ν_{12} seien die Charakteristiken. Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ werden wieder durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen, und wir erhalten als vereinigte Punkte 1) die Spuren der Curve ζ'_{12}ter Ordnung in der beliebigen Schnittebene und 2) die Spuren der Strahlen, welche in den Bündeln der den Schnittpunkten B der ebenen Curve ζ_{12B}ter Ordnung mit der Ebene ($\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$) associirten Punkte den identischen Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ homolog sind. Also:

$$(8\text{a})\qquad 2\nu_{12} = \mu_{12} + \zeta_{12B} + \zeta'_{12},$$

und durch die andere Betrachtung:

$$(8\text{b})\qquad 2\mu_{12} = \nu_{12} + \lambda_{12B}.$$

Die Zahlen μ_{12}, ν_{12} *geben die Ordnung der Curve der Punkte* B, *welche für* $[klmn]_{13}$ *associirte Punkte besitzen*; wir nennen diese Zahl ζ_{13B}.

λ_{12B} *ist die Ordnung der Curve der Punkte* B, *denen für* $[klmn]_{12}$ *durch Correlation mit singulären Ebenen Punkte* A *correspondiren.*

15. Wir nehmen endlich eine Signatur $[klmn]_{13}$ an; die Punkte A und B, welche sich associirt sind, bewegen sich auf zwei Curven von den Ordnungen ζ_{13A}, ζ_{13B}; seien die Charakteristiken des entstehenden Correlationssystems μ_{13}, ν_{13}, die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen λ_{13}. Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ werden ebenfalls durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen und auf den beiden eindeutig bezogenen Curven erhalten wir vereinigte entsprechende Punkte 1) durch die Schnitte der Curve ζ_{13A}ter Ordnung mit der Ebene dieser beiden Curven, 2) durch Veranlassung der Schnitte der Curve ζ_{13B}ter Ordnung mit der Ebene ($\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$). Wir haben:

$$(9\text{a})\qquad 2\nu_{13} = \mu_{13} + \zeta_{13A} + \zeta_{13B},$$

und durch die andere Betrachtung:

$$(9\text{b})\qquad 2\mu_{13} = \nu_{13} + \lambda_{13}.$$

Die μ_{13}, ν_{13} *ergeben die Zahl der Paare von Punkten* A, B, *welche für* $[klmn]_{14}$, *wenn* m, n *nicht beide* 0 *sind, zu einander associirt sind*; wir nennen diese Zahl ζ_{14}.

λ_{13} *ist ähnlich die Zahl der Paare von Punkten* A, B, *die sich für* $[klmn]_{13}$ *durch exceptionelle Correlation mit singulären Ebenen correspondiren.*

III.
Beschreibung der exceptionellen Correlation vom 2. Typus und Zurückführung der beiden vom 1. Typus auf dieselbe.

16. Diese 9 Paare von Formeln habe ich zuerst in folgender Weise benutzt: ich kannte durch die früheren Untersuchungen (C. P.) die Werthe der Zahlen ζ, ζ' für die Signaturen, wo $n = 0$ ist; ich ermittelte nun direct mit Hilfe meiner Sätze über „räumliche Projectivität", wie ich später an einigen Beispielen zeigen werde, sämmtliche Zahlen π, π'. Die Abhängigkeit von diesem Probleme lässt ebenfalls erkennen, warum bei $\sigma > 11$ keine Axen-Correlationen mehr möglich sind.

Die Formeln gaben nun zunächst, indem die bekannten Zahlen ζ, ζ' als μ, μ' für Signaturen: $n = 0$ angenommen wurden, die zugehörigen Zahlen ν, ν', welche für Signaturen: $n = 1$ wieder μ, μ' wurden u. s. f. Ausserdem wurden die Zahlen λ, λ' berechnet. Mehrere der letzteren, insbesondere alle für die Signaturen $n = 0$, ferner alle für $\sigma = 8$, fast alle λ für $\sigma = 9$ habe ich meistens mit Hilfe von Sätzen meiner „ebenen Projectivität" direct ermittelt und werde ich auch davon einige Beispiele geben. Doch stellten sich die Berechnungen der π, π' schon sehr mühsam dar, die der λ, λ', die freilich nur zur Controle dienten, als nicht durchweg ausführbar; so dass ich einen im October 1876 mir von Hirst gegebenen Gedanken sehr begrüsste, nämlich *ebenso wie die Zahlen der allgemeinen Correlationen vermittelst der obigen Formelpaare* (1) *bis* (9) *durch die der Ausartungen vom* 1. *Typus* — wie Hirst*) sagt — *ausgedrückt werden, so nach Relationen zu suchen, durch welche die Zahlen der Ausartungen vom* 1. *Typus auf die der Ausartung vom* 2. *Typus zurückgeführt werden.*

17. Auf *die Ausartung vom* 2. *Typus* kommt Hirst schon bei der Correlation zweier (festen) Ebenen zu sprechen (Nr. 16.): sie hat in jeder Ebene eine singuläre Gerade und einen mit ihr incidenten singulären Punkt und führt zu dem Linien-Punkt-Paar, wenn die Correlation involutorisch wird. Für die Correlation zweier Bündel ergiebt sie sich durch Dualisirung oder Projection; sie hat in jedem Bündel einen singulären Strahl, durch den eine singuläre Ebene geht.

Beide Ausartungen vom 1. *Typus haben sie zu ihrer Ausartung,* d. h. in jedem Systeme 1. Stufe von Ausartungen jeder der beiden Arten vom 1. Typus wird sich im Allgemeinen eine endliche Zahl von Ausartungen des 2. Typus befinden, und der 2. Typus bildet den Uebergang zwischen den beiden Arten des 1. Typus.

---

*) Für Hirst sind die allgemeinen Correlationen selbst schon Ausartungen vom 1. Typus (vgl. die Einleitung), also unsere vom 1. Typus schon vom 2. Typus u. s. w. Hirst hat unterdessen auch bei der Correlation zweier Ebenen die Ausartungen des 1. Typus auf die vom 2. zurückgeführt und schneller ermittelt. Cf. Transunti dell' Accademia dei Lincei Ser. III F. I (4. März 1877).

Lassen wir die Projectivität der (singulären) Ebenenbüschel zweier Axen-Correlationen entarten*): so entsprechen alle Ebenen jedes der beiden Büschel, die von einer gewissen, der singulären, Ebene verschieden sind, einer und derselben festen Ebene des andern Büschels, der singulären desselben, und der singulären Ebene des ersten entspricht jede beliebige des andern.

Lassen wir ebenso die Projectivität der (singulären) ebenen Strahlbüschel zweier Correlationen mit singulären Ebenen entarten: allen Strahlen des einen Büschels, die von einem gewissen, dem singulären, Strahle verschieden sind, entspricht derselbe feste Strahl im andern, der singuläre Strahl desselben, und dem singulären Strahle des ersten entspricht jeder beliebige im zweiten.

Das Entsprechen der übrigen Elemente folgt hieraus nach den allgemeinen Gesetzen der beiden Ausartungen vom 1. Typus und alles in allem erhält man *folgende Correspondenzen* in beiden Fällen *als Eigenschaften der Ausartung des 2. Typus*:

1) Jeder Ebene jedes der beiden Bündel, die nicht durch die singuläre Axe desselben geht, entspricht die singuläre Axe des andern Bündels (allg. Corr. mit sing. Axen).
2) Jeder Ebene durch die singuläre Axe des einen Bündels entsprechen alle Strahlen des andern in der singulären Ebene (Ausartung der Corr. mit sing. Axen).
3) Der singulären Ebene des einen Bündels entspricht jeder beliebige Strahl des andern, der nicht in dessen singulärer Ebene liegt (allg. Corr. mit sing. Eb.).
4) Jedem Strahl des einen Bündels, der nicht in dessen singulärer Ebene liegt, entspricht die andere singuläre Ebene (allg. Corr. mit sing. Eb.).
5) Jedem Strahl in der singulären Ebene des einen Bündels entsprechen alle Ebenen durch die singuläre Axe des andern (Ausartung der Corr. mit sing. Eb.).
6) Der singulären Axe des einen Büschels entspricht jede beliebige nicht mit der des andern incidente Ebene desselben (allg. Corr. mit sing. Axen).

Wie bei der allgemeinen Correlation mit singulären Axen, *so hebt auch hier die Verschiebung des Scheitels auf der singulären Axe die Correlation nicht auf.*

Aus der Beschreibung geht hervor, dass in dieser Ausartung des 2. Typus — Axen-Ebenen-Correlation — nur *Lagen*-Bedingungen zu erfüllen sind, nicht mehr Projectivitäts-Bedingungen; was die Ermittelung der Zahlen solcher Ausartungen ganz bedeutend erleichtert.

---

*) Vgl. Steiner-Schröter's Vorlesungen § 19. Anfang.

18. Die am Ende von Nr. 16. erwähnten Relationen werden im Allgemeinen auf ähnliche Weise gefunden, wie die 9 früheren Formelpaare. Die Ausartungszahlen π, λ; π', λ' für eine Signatur $[klmn]_\sigma$ werden als Charakteristiken von Systemen von Ausartungen 1. Gattung von der einen oder der andern Art für eine Signatur $[k, l, m-1, n]_{\sigma-1}$, oder $[k, l, m, n-1]_{\sigma-1}$ aufgefasst.

Wir werden im Folgenden bei der Ableitung der neuen Relationen nur das vom Früheren Abweichende besonders hervorheben.

Um π_{8B}, λ_{8B} (Nr. 7.) zu finden, müssen wir demnach zu Signaturen zurückgehen, bei denen $\sigma = 7$ ist.

19. Es sei also $[klmn]_7$ eine solche Signatur: B wieder ein fester Punkt; a eine Gerade. Jeder Punkt A derselben ist dem B durch ein System von Correlationen associirt, in dem sich π_7 Correlationen mit singulären Axen, λ_7 mit singulären Ebenen befinden; es sind dies die Zahlen π, λ bei Hirst, Nr. 41.*) Wir fassen zuerst nur die Correlationen mit singulären Axen ins Auge, und bewegen A auf a; so erhalten wir ein System von solchen Correlationen. In demselben seien Θ_{7B} vom 2. Typus, ferner $\dot{\pi}_7$, $\bar{\pi}_7$ solche, bei denen noch ein gegebenes Paar von Punkten, bez. von Geraden conjugirt sind; $\dot{\pi}_7$, $\bar{\pi}_7$ also die Charakteristiken des Systems. **) Wir fügen $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ zu; und nehmen auf $\mathfrak{b}_1$ die Punkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ an. Die Ebenen, welche in den verschiedenen Correlationen dem Strahle $B\mathfrak{B}'$ entsprechen, umhüllen einen Torsus von der Klasse $\dot{\pi}_7$; ebenso die dem Strahle $B\mathfrak{B}''$ entsprechenden. Beide sind eindeutig auf einander bezogen, und die entsprechenden Ebenen schneiden sich in den verschiedenen Axen der A-Bündel, denn da $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$ im Allgemeinen nicht mit der Axe der B-Bündel identisch sind, so müssen beide entsprechende Ebenen durch die des A-Bündels gehen; oder die Schnittlinie der beiden Ebenen entspricht je der Verbindungsebene der beiden Strahlen $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$, d. i. der Ebene $B\mathfrak{b}_1$; dieser aber muss, da sie im Allgemeinen nicht die Axe des B-Bündels enthält, die Axe des A-Bündels entsprechen.

In den $\bar{\pi}_7$ Fällen, wo $\mathfrak{a}_1$ zu $\mathfrak{b}_1$ conjugirt ist, muss die Axe des A-Bündels als entsprechend der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ in der Ebene $A\mathfrak{a}_1$ liegen, also $\mathfrak{a}_1$ treffen; d. h. $\bar{\pi}_7$ ist der Grad des Erzeugnisses der Axen der A-Bündel. Die entsprechenden Ebenen der beiden obigen Torsen $\dot{\pi}_7^{\text{ter}}$ Klasse vereinigen sich aber für die Θ_{7B} Correlationen des 2. Typus, weil da den beiden nicht in der singulären Ebene des B-Bündels liegenden Strahlen $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$ die singuläre Ebene des A-Bündels entspricht,

---

*) Die π_7 werden hier nicht gebraucht, die λ_7 stehen in der Tabelle I. Nr. 33.

**) Diese Bezeichnungen rühren von Herrn Hirst her.

und nur für diese. Folglich ist das Erzeugniss der beiden Torsen vom Grade $2\dot{\pi}_7 - \Theta_{7B}$. Wir haben also

(I a) $$2\dot{\pi}_7 = \bar{\pi}_7 + \Theta_{7B}\ ^{*)}.$$

Fügen wir $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zu und ziehen wieder 2 Gerade $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$, welche $B\mathfrak{B}_1$ treffen; so vereinigen sich, da die beiden Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ nicht durch die singuläre Axe des B-Bündels gehen, die entsprechenden Strahlen in der singulären Axe des andern, und wir bekommen nicht wie früher zwei verschiedene Regelflächen vom Grade $\bar{\pi}_7$, sondern nur eine: die eben betrachtete Axenfläche. Also wird die der früheren derartigen Betrachtung analoge hier illusorisch.

20. Wir fassen jetzt die Correlationen mit singulären Ebenen zwischen den Bündeln, deren einer Scheitel B fest ist, während der andere A auf a sich bewegt, ins Auge. Die Zahl der Ausartungen des 2. Typus ist, wie oben, Θ_{7B}; $\dot{\lambda}_7$, $\bar{\lambda}_7$ seien die Zahlen derjenigen, wo noch ein gegebenes Paar von Punkten, bez. von Geraden conjugirt ist.

Fügen wir wiederum zunächst $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ zu und legen auf $\mathfrak{b}_1$ die Punkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$; so vereinigen sich, da die Strahlen $B\mathfrak{B}'$, $B\mathfrak{B}''$ im Allgemeinen nicht mit der singulären Ebene des B-Bündels incident sind, ihre entsprechenden Ebenen im A-Bündel für jede Correlation in der singulären Ebene desselben; also die beiden Torsen — offenbar $\dot{\lambda}_7^{\text{ter}}$ Klasse — fallen in den von den singulären Ebenen der A-Bündel eingehüllten Torsus zusammen; die oben an diese Torsen geknüpfte Betrachtung wird illusorisch. Hingegen führt nun die andere zum Ziel, bei der $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ hinzugefügt und $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$ durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen werden (oder so lange B fest ist, allgemeiner so, dass sie $B\mathfrak{B}_1$ treffen). Den Ebenen $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ entsprechen in den verschiedenen Correlationen Strahlen, welche je eine Regelfläche vom Grade $\bar{\lambda}_7$ erzeugen, die Verbindungsebene zweier entsprechender Strahlen dieser beiden Flächen, die sich ja stets in A auf a schneiden, ist die betreffende singuläre Ebene, da ja beide Strahlen in ihr liegen müssen, weil $B\mathfrak{b}'$, $B\mathfrak{b}''$ im Allgemeinen nicht mit der des Bündels B identisch sind, oder da der Schnittstrahl $B\mathfrak{B}_1$ dieser beiden Ebenen, der ja zur Verbindungsebene homolog ist, im Allgemeinen nicht in der singulären Ebene von B liegt, und erzeugt, wie eben gesagt, einen Torsus von der Klasse $\dot{\lambda}_7$. Diese Klasse muss sich aber auch aus dem Umstande ableiten lassen, dass die einhüllende Ebene eben Verbindungsebene entsprechender Erzeugenden zweier eindeutig bezogener Regelflächen vom Grade $\bar{\lambda}_7$ ist. Wir machen wieder einen Schnitt, wodurch wir eindeutig bezogene Curven von der Ordnung

*) Die Relationen I bis IX hat Hirst gleichzeitig mit mir gefunden.

$\overline{\lambda}_7$ erhalten. Dieselben haben vereinigte entsprechende Punkte, nämlich 1) die Spuren der Axen der Θ_{7B} Axen-Ebenen-Correlationen, denn diese Axen sind sowohl zu $B\mathfrak{b}'$ wie zu $B\mathfrak{b}''$ homolog, und 2) die Spur von α in der Schnittebene, welche aber λ_7 vereinigte Punkte repräsentirt, weil es λ_7 Correlationen mit singulären Ebenen giebt, wenn die Scheitel fest sind. Wir erhalten mithin für die Klasse des Torsus auch $2\overline{\lambda}_7 - \Theta_{7B} - \lambda_7$, also ist

(1b) $$2\overline{\lambda}_7 = \dot{\lambda}_7 + \Theta_{7B} + \lambda_7.$$

Wir erhalten also für jedes System von Ausartungen des 1. Typus nur eine Gleichung: (Ia) für die Correlationen mit singulären Axen, (Ib) für die mit singulären Ebenen. *Wir bedürfen mithin ausser der Kenntniss der* Θ_{7B}, die direct zu ermitteln nicht schwer ist, *noch je die Kenntniss der* $\dot{\pi}_7$, $\dot{\lambda}_7$ *d. i. der* π_{8B}, λ_{8B} *für* $[k, l, m+1, n]_8$; *also müssen die* π_{8B}, λ_{8B} *für diejenigen Signaturen, wo* $\sigma = 8$ *und* $n = 0$ *ist, (und unter ihnen auch die, bei denen* $m = n = 0$ *ist) direct ermittelt werden;* für die übrigen ergeben sie sich durch die eben gewonnenen Formeln, da $\overline{\pi}_7$, $\overline{\lambda}_7$ für $[klmn]_7$ wieder für $[k, l, m-1, n+1]_7$ $\dot{\pi}_7$, $\dot{\lambda}_7$ sind. Analoges wird bei den Signaturen mit grösserem σ gelten.

Θ_{7B} *ist wieder der Grad der singulären Axen von A-Bündeln, die mit dem festen B-Bündel in Axen-Ebenen-Correlation für* $[klmn]_7$ *sich befinden, oder die Zahl der Axen-Ebenen-Correlationen für* $[klmn]_7$, *bei denen die eine Axe mit a, die andere mit B incident ist.*

21. Wir nehmen nun eine Signatur $[klmn]_8$ an, ferner wieder den festen Punkt B und die Ebene α an. Die Fläche der Punkte A, welche dem B durch Axen-Correlationen associirt sind, hat die Ordnung π_{8B} (Nr. 7.), und auf der Curve, in der sie durch α geschnitten wird, lassen wir A sich bewegen. Die Zahl der Ausartungen des 2. Typus in dem entstehenden System von Axen-Correlationen sei Θ_{8B}; $\dot{\pi}_8$, $\overline{\pi}_8$ seien wieder die Charakteristiken. Durch ähnliche Betrachtungen, wie in Nr. 19., erhalten wir:

(IIa) $$2\dot{\pi}_8 = \overline{\pi}_8 + \Theta_{8B}.$$

Die Fläche der Punkte A, die dem B durch Correlationen mit singulären Ebenen entsprechen, ist von der Ordnung λ_{8B} (Nr. 7.). A bewege sich nun auf der Curve, in der sie von α geschnitten wird.

Θ_{8B} ist die Anzahl der Axen-Ebenen-Correlationen für $[klmn]_8$, bei denen die Axe im zweiten Raume durch B geht, wobei die Bedingung, dass irgend ein Scheitel A in α liege, jedesmal von selbst erfüllt wird; demnach ist die Zahl der Ausartungen vom 2. Typus in dem oben entstehenden Systeme von Correlationen mit singulären Ebenen ebenfalls Θ_{8B}. Die Charakteristiken seien $\dot{\lambda}_8$, λ_8. Man erhält hier:

(IIb) $$2\bar{\lambda}_8 = \dot{\lambda}_8 + \Theta_{8B} + \lambda_{8B},$$

indem die vereinigten entsprechenden Punkte wieder 1) die Spuren der Axen der Axen-Ebenen-Correlationen und 2) die der in α befindlichen Curve λ_{8B}ter Ordnung in der Ebene der betrachteten eindeutig bezogenen Curven sind.

Unter Voraussetzung, dass π_{9B}, λ_{9B} (Nr. 8.) für die Signaturen $n=0$ direct ermittelt werden, geben uns die $\bar{\pi}_8$, $\bar{\lambda}_8$ die übrigen.

22. Zu der Signatur $[klmn]_8$ werden a, b gefügt. Jedem Punkt B auf b sind π_{8B}, λ_{8B} Punkte A auf a, jedem dieser π_{8A}, λ_{8A} Punkte B auf b durch Correlation mit singulären Axen, bez. Ebenen associirt. Wir erhalten ein System von jeder Art; in jedem befinden sich Θ_8' Axen-Ebenen-Correlationen, wenn *dies die Zahl dieser Correlationen ist für* $[klmn]_8$, *bei denen die eine Axe mit* a, *die andere mit* b *incident ist, oder der Grad der Fläche der Axen von A-Bündeln (B-Bündeln), die mit B-Bündeln (A-Bündeln), deren Scheitel auf* b (a) *liegt, axen-ebenen-correlativ sind.*

Seien wieder $\dot{\pi}_8'$, $\bar{\pi}_8'$; $\dot{\lambda}_8'$, $\bar{\lambda}_8'$ die Charakteristiken der beiden Systeme, *welche zu den Zahlen* π_9', λ_9' (Nr. 9.) *führen, wenn diejenigen für* $n=0$ *bekannt sind.* Die Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ werden durch $\mathfrak{B}_1$ gezogen, und wir erhalten

(IIIa) $$2\dot{\pi}_8' = \bar{\pi}_8' + \Theta_8',$$

(IIIb) $$2\bar{\lambda}_8' = \dot{\lambda}_8' + \Theta_8' + \lambda_{8B} + \lambda_{8A},$$

wobei die beiden letzten Summanden auf der rechten Seite herrühren von der Spur der Geraden a in der Ebene der eindeutig bezogenen Curven und der Spur der Geraden b in der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$.

23. Wir nehmen eine Signatur $[klmn]_9$ an und einen festen Punkt B. Es ist oben gefunden, dass $\pi_{10B}=0$ ist, also gilt dies auch für $\dot{\pi}_{9B}$, $\bar{\pi}_{9B}$ und für die Ausartungszahl Θ_{9B}. In der That giebt es einerseits nur eine endliche Zahl (π_{9B}) von Axen-Correlationen, bei denen die eine Axe durch B geht, also erhalten wir kein System mehr und also auch keine Charakteristiken, anderseits haben wir für $[klmn]_8$ eben (Nr. 21.) für einen festen Punkt B nur noch eine endliche Zahl von Ebenen-Axen-Correlationen gefunden, also führt die Hinzufügung einer neuen Bedingung zur Unmöglichkeit. Die Formel (IVa) fällt deshalb aus. Dem festen Punkte B entspricht aber eine Curve der Ordnung λ_{9B}, deren Punkte A ihm durch Correlationen mit singulären Ebenen correspondiren. Wir erhalten also durch Bewegung von A auf derselben das Correlationssystem; Ausartungen vom 2. Typus enthält es, wie eben gefunden, nicht. $\dot{\lambda}_9$, $\bar{\lambda}_9$ seien seine Charakteristiken, welche uns die Zahlen λ_{10B} (Nr. 10.) geben, wenn die für $n=0$ bekannt sind. Es ergiebt sich:

(IV b) $$2\overline{\lambda}_9 = \dot{\lambda}_9 + \lambda_{9B},$$

wo der letzte Summand von der Spur der Curve λ_{9B} ter Ordnung in der Ebene der eindeutig bezogenen Curven herrührt.

24. Zu derselben Signatur $[klmn]_9$ fügen wir die Gerade b und die Ebene α. Der Geraden b ist eine Fläche von der Ordnung π_9', λ_9' associirt, deren Punkte Punkten auf b durch Correlation mit singulären Axen, bez. Ebenen correspondiren. Beide schneiden wir mit α und indem wir A auf dieser Schnittcurve bewegen, erhalten wir die beiden Systeme von Ausartungen der einen und der andern Art. In jedem giebt es Θ_{9B}' Ausartungen des 2. Typus, wenn *das die Anzahl der Axen-Ebenen-Correlationen ist, bei denen die eine Axe die b zu treffen hat*; denn ein Punkt der andern Axe und somit der Scheitel eines axen-ebenen-correlativen Bündels fällt von selbst in α. Wir sehen wieder voraus, dass *diese Anzahl null wird, wenn σ wächst.* Die Charakteristiken unserer beiden Systeme seien $\dot{\pi}_9'$, $\overline{\pi}_9'$; $\dot{\lambda}_9'$, $\overline{\lambda}_9'$, welche unter der mehrfach genannten Voraussetzung die π_{10B}', λ_{10B}' (Nr. 11.) geben. Man bekommt:

(V a) $$2\overline{\pi}_9' = \dot{\pi}_9' + \Theta_{9B}';$$

(V b) $$2\overline{\lambda}_9' = \dot{\lambda}_9' + \Theta_{9B}' + \lambda_{9B} + \lambda_9',$$

worin die beiden letzten Summanden rechts herrühren 1) von der Spur der Geraden b in der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$, welcher λ_{9B} Punkte auf α associirt sind; 2) von den Schnittpunkten der ebenen Curve λ_9' ter Ordnung, auf der sich A bewegt, mit der Ebene der beiden eindeutig bezogenen Curven.

25. Es werde nun eine Signatur $[klmn]_{10}$ vorausgesetzt; wir fügen wieder die Gerade b zu. Axen-Correlationen, bei denen die eine Axe die b trifft, sind nur in endlicher Zahl (π_{10B}') vorhanden; also giebt es kein System, mithin auch keine Charakteristiken und auch keine Ausartungen vom 2. Typus; in der That ist einerseits früher erkannt, dass $\pi_{11B} = 0$ ist, andererseits das letztere schon in der vorigen Nr. erwähnt. Die Formel (VIa) fällt demnach wieder aus. Dagegen erhalten wir eine Curve der Ordnung λ_{10B}' von Punkten A, die den Punkten B auf b durch Correlation mit singulären Ebenen correspondiren.

In dem entstehenden Systeme solcher Correlationen giebt es also keine Ausartung vom 2. Typus; die Charakteristiken seien $\dot{\lambda}_{10}$, $\overline{\lambda}_{10}$ und geben λ_{11B} (Nr. 12). Es ergiebt sich

(VI b) $$2\overline{\lambda}_{10} = \dot{\lambda}_{10} + \lambda_{10B} + \lambda_{10B}',$$

worin die beiden letzten Summanden herkommen 1) von der Spur der Geraden b in der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$, welcher λ_{10B} Punkte auf der Curve

λ'_{10B} ter Ordnung entsprechen, 2) von den Spuren dieser Curve in der Ebene der beiden eindeutig bezogenen Curven.

26. Zu der Signatur $[klmn]_{10}$ werden jetzt die Ebenen α, β gefügt. Es giebt π'_{10B} Axen-Correlationen, bei denen die eine Axe eine Gerade b trifft; mithin auch in der Ebene α so viele Scheitel A von Bündeln, welche zu Bündeln B, deren Scheitel auf b liegen, axen-correlativ sind. Demnach erzeugen die Punkte B, welche zu Punkten A durch Axen-Correlation associirt sind, oder, was dasselbe, die Axen in ihren Bündeln eine Fläche vom Grade π'_{10B}, die von β in einer Curve von dieser Ordnung geschnitten wird. Die in α befindlichen associirten Punkte der Punkte dieser Curve erzeugen eine Curve π'_{10A} ter Ordnung aus analogen Gründen. Weil ferner die Curve von Punkten A, welche den Punkten einer Geraden b durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind, die Ordnung λ'_{10B} hat, so bilden die Punkte B, welche den Punkten auf α auf diese Weise entsprechen, eine Fläche von der Ordnung λ'_{10B}, welche also von β in einer Curve derselben Ordnung geschnitten wird. Die in α befindlichen associirten Punkte A der Punkte B dieser Curve erzeugen eine Curve von der Ordnung λ'_{10A}.

Durch diese Punktepaare erhalten wir unsere Correlationssysteme von beiden Arten. Ist Θ'_{10} *die Zahl der Axen-Ebenen-Correlationen für* $[klmn]_{10}$ (ohne weitere Bedingung; das Liegen von Scheiteln in α, β wird von selbst erfüllt), so ist dies die gemeinsame Zahl der Ausartungen vom 2. Typus in beiden Systemen. Die Charakteristiken seien wiederum $\dot{\pi}'_{10}$, $\overline{\pi}'_{10}$; $\dot{\lambda}'_{10}$, $\overline{\lambda}'_{10}$ und führen zu π'_{11}, λ'_{11} (Nr. 13.). Die Relationen sind:

(VIIa) $$2\dot{\pi}'_{10} = \overline{\pi}'_{10} + \Theta'_{10},$$

(VIIb) $$\overline{\lambda}'_{10} = \dot{\lambda}'_{10} + \Theta'_{10} + \lambda'_{10B} + \lambda'_{10A},$$

wobei die letzten beiden Summanden sich herschreiben 1) von den Schnittpunkten der Curven λ'_{10B} ter Ordnung in β mit der Ebene ($\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$), 2) von denen der Curve λ'_{10A} ter Ordnung in α mit der Ebene der eindeutig bezogenen Curven.

Aus der Definition von Θ'_{10} ergiebt sich, dass für *höhere σ keine Axen-Ebenen-Correlationen mehr möglich sind;* anderseits ist von früher schon bekannt, dass die Zahlen π bei $\sigma = 12$ und 13 null geworden sind. Also fallen die auf Axen-Correlationen bezüglichen Relationen von nun an aus.

27. Es werde nun eine Signatur $[klmn]_{11}$ vorausgesetzt. In der vorletzten Nr. ist die Zahl λ_{11B} gewonnen, d. i. die Ordnung der Fläche der Punkte B, welchen Punkte A durch Correlation mit singulären Ebenen entsprechen. Wir schneiden diese Fläche mit einer Ebene β; so entspricht der ausgeschnittenen Curve λ_{11B} ter Ordnung eine Curve λ'_{11} ter Ordnung, wie sie die vorige Nr. ergeben hat.

Durch die Association der Punkte dieser beiden Curven erhalten wir das Correlationssystem; die Charakteristiken desselben, welche die λ_{12B} liefern (Nr. 14.), seien $\dot{\lambda}_{11}$, $\overline{\lambda}_{11}$. Es ergiebt sich die Relation:

(VIII b) $$2\overline{\lambda}_{11} = \dot{\lambda}_{11} + \lambda_{11B} + \lambda'_{11},$$

wo die beiden letzten Summanden resultiren 1) aus den Spuren der Curve $\lambda_{11B}^{\text{ter}}$ Ordnung in der Ebene $(\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'')$, 2) aus denen der Curve $\lambda_{11}'^{\text{ter}}$ Ordnung in der Ebene der eindeutig bezogenen Curven.

28. Endlich sei $[klmn]_{12}$ angenommen. Da haben wir zwei Curven $\lambda_{12A}^{\text{ter}}$ Ordnung und $\lambda_{12B}^{\text{ter}}$ Ordnung, welche bez. die durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte A, B enthalten. Das System, zu dem sie führen, habe die Charakteristiken $\dot{\lambda}_{12}$, λ_{12}, welche uns λ_{13} (Nr. 15.) geben; die Relation ist:

(IX b) $$2\overline{\lambda}_{12} = \dot{\lambda}_{12} + \lambda_{12A} + \lambda_{12B},$$

worin die beiden letzten Summanden rechts von den Spuren der Curven dieser Ordnungen in den mehrfach genannten Ebenen herrühren.

29. Es hat sich gezeigt, dass die directe Ermittelung der Zahlen $\dot{\pi}$, $\dot{\pi}'$, $\dot{\lambda}$, $\dot{\lambda}'$ oder, was dasselbe, der Zahlen π, π', λ, λ' für die Signaturen $n = 0$ nothwendig ist. Einige allgemeine Sätze, durch welche man das Nullsein mehrerer dieser Zahlen gleich von vornherein erkennen kann, mögen deshalb angegeben werden.

Bei den *Correlationen mit singulären Axen,* die wir stets mit a', b' bezeichnen wollen, haben diese in den 9 verschiedenen Fällen, die uns vorliegen, zunächst folgende Bedingung zu erfüllen, wo der Doppelpunkt das Zeichen der Incidenz sein soll:

1) $\sigma = 8$; $a' : a$, $b' : B$;	4) $\sigma = 10$; $b' : B$;	7) $\sigma = 11$;
2) $\sigma = 9$; $b' : B$;	5) $\sigma = 10$; $b' : b$;	8) $\sigma = 12$;
3) $\sigma = 9$; $a' : a$, $b' : b$;	6) $\sigma = 11$; $b' : b$;	9) $\sigma = 13$;

also zusammen bez. 3, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0 Bedingungen, wobei die Bedingung der Incidenz mit einem Punkte eben doppelt gerechnet ist.

Nehmen wir weiter an, dass a' mit k' Punkten A_i, l' Geraden a_i, n' Geraden $\mathfrak{a}_i$ incident sei; die Ebene, welche dem singulären Strahle a' von A, einem beliebigen Punkte auf a', nach einem dieser A_i homolog ist, ist jede beliebige im zweiten Bündel, also giebt es auch eine solche, welche durch die homologe b_i geht. Zweitens jeder der l' durch a' gehenden Ebenen Aa_i entspricht ein ganzer Büschel von Strahlen in der Ebene durch b', die jener in der Projectivität der Ebenenbüschel um a', b' homolog ist; es ist also dafür zu sorgen, dass die Ebenen $a'a_i$ und $b'B_i$ homolog sind. Drittens jeder der n' Ebenen $A\mathfrak{a}_i$, welche durch a' gehen, entspricht ebenfalls ein ganzer Strahlbüschel, von welcher also einer die $\mathfrak{b}_i$ trifft, womit der Bedingung genügt ist. Dem Strahle von A nach einem der $k - k'$ nicht mit a' incidenten A_i muss eine mit b' incidente Ebene entsprechen; es muss also b' die $k - k'$ Geraden b_i treffen und die $k - k'$ Ebenen $b'b_i$ müssen den $k - k'$ Ebenen $a'A_i$ homolog sein. Den Ebenen von A nach den $l - l'$ nicht mit a' incidenten a_i muss der singuläre Strahl b' entsprechen, also muss derselbe durch $l - l'$ Punkte B_i geben. Der Ebene von A nach einer der $n - n'$ nicht mit a' incidenten $\mathfrak{a}_i$ entspricht der Strahl b', anderseits soll dieser Strahl in einer Ebene durch die conjugirte $\mathfrak{b}_i$ liegen, also muss b' dieselbe treffen. Ferner muss dem Strahl, der nach einem der m Punkte $\mathfrak{A}_i$ geht, eine durch b' und $\mathfrak{B}_i$ gehende Ebene entsprechen, die der Ebene $a'\mathfrak{A}_i$ in der Projectivität der Ebenenbüschel homolog ist.

Wir gewinnen also zunächst die Sätze:

Je nachdem bei einer Axen-Correlation die eine Axe a' mit einem Elemente A_i, a_i, $\mathfrak{a}_i$ incident oder nicht incident ist, ist b' mit dem homologen b_i, B_i, $\mathfrak{b}_i$ nicht incident oder incident.

Und der Ebenenbüschel von a' nach den nicht incidenten A_i, den incidenten a_i und den $\mathfrak{A}_i$ ist dem Ebenenbüschel von b' nach den homologen Elementen projectiv.

Ferner ersieht man, dass den beiden Geraden a', b' ausser den obigen Bedingungen noch $2k' + l' + n' + k - k' + 2(l - l') + n - n'$ Lagen- oder Incidenz-Bedingungen, und, da jeder der eben genannten Ebenenbüschel $k - k' + l' + m$ Ebenen hat, noch $k - k' + l' + m - 3$ Projectivitäts-Bedingungen, wenn diese Zahl nicht < 0 ist, oder, wenn dies der Fall ist, keine Projectivitäts-Bedingungen auferlegt sind. Im ersten Falle ergiebt sich, indem für $\sigma = 2k + 2l + m + n$ der Werth eingesetzt wird, als Gesammtzahl der von a', b' zu erfüllenden Bedingungen in den 9 Fällen 8, 8, 8, 9, 8, 9, 8, 9, 10, so dass die schon früher (Nr. 8., 10., 11., 13.) erkannte Unmöglichkeit in 4 Fällen sich nochmals zeigt.

Ist aber $k - k' + l' + m < 3$, dann ist in die eben erhaltene Summe der negative Summand $k - k' + l' + m - 3$ aufgenommen, welcher nicht aufzunehmen ist; also wächst die Zahl um $-(k - k' + l' + m - 3)$; mithin über 8 durchweg.

Der günstigste Fall ist noch, wenn $k' = 0$, $l' = l$ ist; wenn aber auch $k + l + m < 3$, so ist bei dieser Signatur durchweg Unmöglichkeit.

Wir erhalten also folgendes Resultat:

Bei allen Signaturen, wo $k + l + m < 3$, sind die π bez. π' gleich 0.

Am meisten wird dies bei hohen Werthen von n eintreten.

30. Bei den *Correlationen mit singulären Ebenen*, die wir durchweg α', β' nennen wollen, muss β' in den beiden ersten und im vierten Falle durch B gehen.

Nehmen wir wiederum an, dass α' mit k' Punkten A_i, l' Geraden a_i, m' Punkten $\mathfrak{A}_i$ incident sei. Jedem der k' Strahlen AA_i entsprechen die unendlich vielen Ebenen um den Strahl des Büschels (B, β'), der dem AA_i in der Projectivität der Büschel (A, α'), (B, β') homolog ist. Soll also eine Ebene durch die homologe b_i gehen, so muss b_i diese treffen; also muss dafür gesorgt werden, dass die mit A_i und b_i incidenten Strahlen der beiden Strahlbüschel homolog seien. Die Ebene von A nach einer in α' liegenden a_i ist α' selbst, also entspricht ihr jeder beliebige, mithin auch ein durch den homologen B_i gehender Strahl. Dem Strahle von A nach einem in α' liegenden $\mathfrak{A}_i$ entspricht, wie eben gesagt, ein ganzer Büschel von Ebenen, so dass eine durch den conjugirten $\mathfrak{B}_i$ geht.

Dem Strahle von A nach den $k - k'$ nicht in α' liegenden A_i entspricht β' und muss also die $k - k'$ homologen b_i enthalten. Der Ebene von A nach einer der $l - l'$ nicht in α' befindlichen Geraden a_i entspricht der anderseits durch den homologen B_i gehende Strahl in β', der in der Projectivität der beiden Strahlbüschel dem mit der a_i incidenten homolog ist; folglich muss erstens β' durch diese $l - l'$ Punkte B_i gehen und für diese Projectivität gesorgt werden. Dem Strahle von A nach einem nicht in α' befindlichen $\mathfrak{A}_i$ ist β' homolog, die also durch den conjugirten $\mathfrak{B}_i$ gehen muss.

Die Strahlen der beiden projectiven Büschel, die mit conjugirten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ incident sind, müssen ebenfalls homolog sein; damit der Strahl, der der Ebene $A\mathfrak{a}_i$ (oder $B\mathfrak{b}_i$) entspricht und in β' (oder α') liegt, die $\mathfrak{b}_i$ (oder $\mathfrak{a}_i$) treffen kann.

Wir haben also die zwei Sätze:

Je nachdem α' mit einem Elemente A_i, a_i, $\mathfrak{A}_i$ incident oder nicht incident ist, ist β' mit dem homologen b_i, B_i, $\mathfrak{B}_i$ nicht incident oder incident. Und:

In den beiden projectiven Strahlbüscheln $(A\alpha')$, $(B\beta')$ entsprechen die Strahlen, welche mit den in α' befindlichen Punkten A_i, mit den nicht in α' liegenden Geraden a_i und mit den Geraden $\mathfrak{a}_i$ incident sind, den mit den homologen Elementen incidenten Strahlen.

Ferner werden den beiden Ebenen α', β' ausser den obigen $1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0$ noch $k' + 2l' + m' + 2(k - k') + l - l' + m - m'$ weitere Incidenz-Bedingungen auferlegt. Die Zahl der Elemente jedes der projectiven Strahlbüschel ist $k' + l - l' + n$.

Hier muss aber noch auf die Beweglichkeit der Scheitel A und B in den Ebenen α', β' Rücksicht genommen werden, und damit verhält es sich so:

1) $\sigma = 8$; B gegeben; $A = \alpha' a$;
2) $\sigma = 9$; B gegeben; A beweglich auf $\alpha' \alpha$;
3) $\sigma = 9$; $B = \beta' b$; $A = \alpha' a$;

4) $\sigma = 10$; B gegeben; A beweglich in α'.
5) $\sigma = 10$; $B = \beta' b$; A beweglich auf $\alpha'\alpha$.
6) $\sigma = 11$; $B = \beta' b$; A beweglich in α'.
7) $\sigma = 11$; B beweglich auf $\beta'\beta$, A auf $\alpha'\alpha$.
8) $\sigma = 12$; B beweglich auf $\beta'\beta$, A in α'.
9) $\sigma = 13$; B beweglich in β', A in α'.

Der Grad der Beweglichkeit ist demnach bez. 0, 1, 0, 2, 1, 2, 2, 3, 4. Durch die Strahlbüschel-Projectivität werden mithin den Ebenen α', β' $k' + l - l' + n - 3 - 0, 1, 0, 2, 1, 2, 2, 3, 4$ Bedingungen auferlegt, wofern diese Zahl nicht unter 0 kommt, sonst keine. Im ersteren Falle ergiebt sich als die Gesammtzahl der Bedingungen durchweg 6, also gleich der doppelten Zahl der Bedingungen, die eine Ebene erfüllen kann. Tritt aber der andere Fall ein, so steigt die Zahl über 6. Der günstigste Fall ist $k' = k$, $l' = 0$.

Wenn demnach $k + l + n < 3, 4, 3, 5, 4, 5, 5, 6, 7$ *ist, so sind die Zahlen* λ, λ' *gleich* 0; z. B. wenn $\sigma = 13$, so ist $k + l < 7$; ist nun noch $n = 0$, so ist $\lambda_{13} = 0$; ebenso $\lambda_{12} = 0$, wenn $n = 0$, $m > 0$.

31. Es ist in beiden Fällen nicht gesagt, dass das Nullwerden nicht auch ausserdem noch eintreten kann; z. B. die 8 den a', b' zusammen auferlegten Bedingungen können ja so sein, dass eine der beiden Geraden allein schon mehr als 4 zu erfüllen hat.

Hätten wir a' mit einem $\mathfrak{A}_i$, bez. α' mit einer $\mathfrak{a}_i$ incident sein lassen, wodurch dann die auf dieses Grundelement bezügliche Bedingung auf unendlich viele Weisen erfüllbar wäre, so würde die Gesammtzahl der Bedingungen für a', b', bez. α', β' über 8, bez. 6 gestiegen sein.

32. *Die in Nr.* 29. *und* 30. *gefundenen Sätze über Incidenzen und Nichtincidenzen von* a', b', *bez.* α', β' *bestehen zugleich bei den Axen-Ebenen-Correlationen.*

Zu einer ausgearteten Projectivität kann man nur 2 Paare entsprechender Elemente geben; also eine ausgeartete Projectivität bei z Paaren aufstellen, hat den Werth von $z - 2$ Bedingungen. Fassen wir mithin die Axen-Ebenen-Correlation als ausgeartete Axen-Correlation auf, so unterwerfen wir die Axen a', b' wie oben zuerst 3, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, dann $2k' + l' + n' + k - k' + 2(l - l') + n - n'$ Incidenz-Bedingungen und zuletzt noch $k - k' + l' + m - 2$ Projectivitätsbedingungen — die freilich hier auch Incidenzbedingungen werden —, wofern die letztere Zahl nicht < 0 ist, andernfalls keiner Projectivitätsbedingung. Da aber hier in den 9 verschiedenen Fällen, σ je um 1 kleiner ist, als in Nr. 29., 30., so ergeben sich dieselben Zahlen wie in Nr. 29., wenn $k - k' + l' + m$ nicht < 2 ist. Ist dies aber der Fall, so tritt Unmöglichkeit ein; indem wir wieder den günstigsten Fall annehmen, erhalten wir:

Wenn $k + l + m < 2$, so ist Θ, *bez.* Θ' *gleich* 0.

In ähnlicher Weise führt die Betrachtung der Axen-Ebenen-Correlation als ausgeartete Correlation mit singulären Ebenen zu dem Satze:

Wenn in den 9 verschiedenen Fällen (I bis IX) $k + l + n < 2, 3, 2, 4, 3, 4, 4, 5, 6$ *ist, so ist* Θ, *bez.* Θ' *gleich* 0.

Specielle Untersuchungen.

IV. $\sigma = 9$.

33. Wir gehen nun an die Ermittelung der Zahlen selbst und wenden zuerst die beiden Formeln

(Ia und b) $\quad 2\dot{\pi}_7 = \bar{\pi}_7 + \Theta_{7B}$; $2\bar{\lambda}_7 = \dot{\lambda}_7 + \Theta_{7B} + \lambda_7$

(Nr. 19., 20.) auf alle Signaturen $[klmn]_7$ an. Alle Θ_{7B} sind direct ermittelt, so wie die $\dot{\pi}_7$, $\dot{\lambda}_7$ für die Signaturen $[klm0]_7$, d. i. π_{8B}, λ_{8B} für $k, l, m+1, 0]_8$. Einige Beispiele der directen Berechnung folgen der Tabelle. Die π_{8B} und λ_{8B} und zwar alle, also auch die aus der folgenden Tabelle nicht zu entnehmenden für die Signaturen $[kl00]_8$ finden sich in Tab. 1) in Nr. 40.

Tab. I: $\sigma = 7$.

Sign.	Θ_{7B}	$\dot{\pi}_7$	$\bar{\pi}_7$	λ_7	$\dot{\lambda}_7$	$\bar{\lambda}_7$
3010	9	6	3	0	1	5
3001	6	3	0	3	5	7
0310	6	8	10	0	0	3
0301	18	10	2	3	3	12
2110	3	4	5	1	2	3
2101	8	5	2	1	3	6
1210	8	6	4	1	1	5
1201	4	4	4	1	5	5
2030	6	8	10	0	0	3
2021	12	10	8	1	3	8
2012	14	8	2	4	8	13
2003	4	2	0	3	13	10
0230	2	8	14	0	0	1
0221	14	14	14	1	1	8
0212	22	14	6	4	8	17
0203	12	6	0	3	17	16
1130	6	8	10	0	0	3
1121	11	10	9	2	3	8
1112	12	9	6	2	8	11
1103	12	6	0	3	11	13
1050, 0150	0	8	16	0	0	0
1041	12	16	20	0	0	6
1032	23	20	17	3	6	16
1023	26	17	8	6	16	24
1014	16	8	0	6	24	23
1005	0	0	0	3	23	13
0141	8	16	24	0	0	4
0132	25	24	23	3	4	16
0123	34	23	12	6	16	28
0114	24	12	0	6	28	29
0105	0	0	0	3	29	16
0070	0	8	16	0	0	0
0061	0	16	32	0	0	0
0052	20	32	44	0	0	10
0043	48	44	40	6	10	32
0034	60	40	20	12	32	52
0025	40	20	0	12	52	52
0016	0	0	0	6	52	29
0007	0	0	0	3	29	16.

Ich wiederhole, dass die λ_7 aus Hirst's Tabelle in Nr. 41. entnommen sind.

34. Was nun die Ermittelung der Zahlen Θ_{7B} angeht, also der Axen-Ebenen-Correlationen für die betreffende Signatur, bei denen die eine singuläre Axe mit der Geraden a, die andere und also auch die zugehörige singuläre Ebene mit dem Punkte B incident ist, so wollen wir die Signatur [1121] betrachten:

$$\begin{array}{l} A_1 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{a}_1 \\ b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{b}_1 . \end{array}$$

I. α' sei $A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$; dann geht β' durch B und B_1; a' soll also mit α' und a incident sein, so kann es nur noch durch einen Punkt von α' gehen, oder eine Gerade treffen: 1) a' treffe a_1, so muss b', ausser dass sie durch B geht, noch b_1 und $\mathfrak{b}_1$ treffen, was auf eine Weise möglich ist; die Ebene β' ist dann durch BB_1 und b' bestimmt; 2) a' treffe $\mathfrak{a}_1$; so muss b' dann mit $b_1 BB_1$ incident sein, was nicht möglich ist; 3) a' gehe durch A_1, so müsste b' mit $B_1 B b_1$ incident sein, was ebenfalls nicht geht. Also 1 Lösung.

II. α' sei $A_1 a_1$; dann ist β' die $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 B$; 1) a' — mit a und α' (und dadurch auch mit a_1) incident — treffe $\mathfrak{a}_1$, so trifft b' — mit B und β' incident oder dem Büschel (B, β') angehörig — die b_1; 2) a' gehe durch A_1, so muss b' die $\mathfrak{b}_1$ treffen. 2 Lösungen.

III. α' gehe durch $A_1 \mathfrak{A}_1$; β' ist $B_1 \mathfrak{B}_2 B$; was durch die Vertauschung von $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}_2$ zwei Combinationen giebt; 1) a' sei mit $A_1 \mathfrak{a}_1 a$ incident; b' muss dann, befindlich im Büschel (B, β'), durch B_1 geben; 2) a' treffe $a_1, \mathfrak{a}_1$, a und, weil in α' gelegen, auch $A_1 \mathfrak{A}_1$, was 2 Lösungen hat, so wird b' die b_1 treffen; 3) a' sei mit $A_1 a_1 a$ incident, so hat b' die $\mathfrak{b}_1$ zu treffen. In allen 3 Fällen ist α' durch a' und $A_1 \mathfrak{A}_1$ fixirt. Hierdurch ergeben sich $2(1 + 2 + 1) = 8$ Lösungen.

Andere Fälle als diese $1 + 2 + 3$ sind nicht möglich.

Mithin giebt es $1 + 2 + 8 = 11$ Lösungen; $\Theta_{7B} = 11$.

Ein Hauptaugenmerk hat man darauf zu richten, dass jedes der 4 Elemente $\alpha' \beta' a' b'$ so viel Bedingungen erhält, als zu seiner Bestimmung nothwendig sind; bei dem obigen Arrangement ist es bei a', b' gleich nothwendig, α', β' können noch durch das schon fixirte a', b' endgiltig bestimmt werden.

Wir nehmen als zweites Beispiel

$$[0123] \qquad \begin{array}{l} a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \\ B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3 . \end{array}$$

I $\alpha' : a_1, \mathfrak{A}_1$*); $\beta' : \mathfrak{B}_2, B$ (2 Comb.); $a' : \alpha', a, \mathfrak{a}_1$; $b' : B, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); also 6 Lösungen.

*) Der Doppelpunkt ist wie oben das Zeichen der Incidenz.

II $\alpha' : \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$; $\beta' : B_1, B$; $a' : a_1, a, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ (2 Lagen); $b' : B, b_2, b_3$ (3 Comb.); also ebenfalls 6 Lösungen.

III $\alpha' : a_1$; $\beta' : \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, B$; $a' : a_1, a, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ (2 Lagen); $b' : B, \beta', \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); wiederum 6 Lösungen.

IV $\alpha' : \mathfrak{A}_1$; $\beta' : B_1, \mathfrak{B}_2, B$ (2 Comb.); 1) $a' : a, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ (2 Lagen); $b' : B, B_1$; 2) $a' : a, a_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ (2 Lagen); $\mathfrak{b}' : B, \beta', \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); also im Ganzen $2\,(2 + 2 \cdot 3) = 16$ Lösungen.

$$\theta_{7B} = 6 + 6 + 6 + 16 = 34.$$

Fassen wir θ_{7B} als Grad einer Fläche und zwar der der Axen a' von Axen-Ebenen-Correlationen für $[0123]$, für welche die Axe b' durch B geht, so besteht diese Fläche 34. Grades aus 6 ebenen Strahlbüscheln (I), und aus 14 Regelschaaren (2. Grades) (II, III, IV).

35. Was die Berechnung der $\dot{\pi}_7$ für $[klm0]_7$, d. i. der π_{8B} für $[k, l, m+1, 0]_8$ anbetrifft, so nehmen wir als Beispiel die Signatur

$$[2120]_8 \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2, \end{matrix}$$

welche $\dot{\pi}_7$ für $[2110]_7$ giebt; die Axe a' soll mit a, die Axe b' mit B incident sein.

I a' sei mit a, A_1 incident; b' ist dann mit $b_2 B_1 B$ incident, was nicht möglich.

II a' treffe a, a_1; b' ist dann mit b_1, b_2, B incident, hat also eine bestimmte Lage; ferner muss sein

$$a'\,(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \;\overline{\wedge}\; b'\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2).$$

Wir ersetzen für einen Augenblick a_1, b_1, b_2 durch beliebige auf ihnen gelegene Punkte A_1', B_1', B_2'; wodurch die Ebenen, welche b', a', die ja b_1, b_2; a_1 treffen, mit B_1', B_2'; A_1' bilden, dieselben sind wie die, welche sie mit b_1, b_2; a_1 bilden, wofern nur die b' nicht gerade durch B_1' oder B_2' oder die a' durch A_1' geht. Der *einen* Geraden b' correspondirt nun für die beiden Gruppen von 5 Punkten

$$A_1 A_2 A_1' \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2, \quad B_1' B_2' B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$$

eine Strahlencongruenz 1. Ordnung 3. Klasse*) (Sehnensystem einer cubischen Raumcurve), welche aus dem Punkte A_1' einen Kegel 2. Grades erhält (Räuml. Project. Nr. 8.); diese hat mit der linearen Congruenz $[a a_1]$ $1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4$ Strahlen gemein; darunter befinden sich aber auch die beiden Strahlen des eben genannten Kegels, welche a treffen und die, weil durch A_1' gehend, nicht als a' zu gebrauchen sind. Es bleiben mithin nur 2 Lösungen für a'.

---

*) Oder wie Schubert in prägnanterer Weise sagt: vom Bündelgrad 1, vom Feldgrad 3.

III a' ist mit A_1, a_1, a incident, und also bestimmt; b' dann mit mit B, b_2; ferner $a'\,(A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'\,(b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$. Indem wieder auf a_1, b_2 Punkte A_1', B_2' angenommen werden, ergiebt sich, dass dem *einen* a' ein Strahlencomplex 2. Grades correspondirt, zu dem jeder Strahl durch B_2' gehört (Räuml. Proj. Nr. 2.); so dass derselbe mit dem Büschel Bb_2 ausser dem durch B_2' gehenden Strahle noch einen gemein hat. Wir haben also, weil hier 2 Combinationen möglich sind, $2 \cdot 1 = 2$ Lösungen.

Andere Fälle sind nicht möglich; also ist π_{8B} für [2120] oder π_7 für [2110] gleich 4.

Ein zweites Beispiel sei

$$[0320] \qquad \begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ B_1 B_2 B_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 . \end{array}$$

I a' trifft a, a_1, a_2; b' geht durch BB_3, ist also bestimmt; ferner $a'\,(a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'\,(B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$. Dem einen b' entspricht ein Complex 2. Grades, dem die beiden Bündel A_1', A_2' ganz angehören, so dass er mit der Regelschaar $[a a_1 a_2]$ ausser den beiden durch A_1', A_2' gehenden Geraden derselben noch $2 \cdot 2 - 2 = 2$ Gerade gemein hat. Wegen der 3 Combinationen erhalten wir 6 Lösungen.

II a' trifft a, a_1, a_2, a_3, hat also 2 Lagen; b' geht durch B; wir haben $a'\,(a_1 a_2 a_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'\,(B_1 B_2 B_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$; jeder der beiden a' entspricht eine Congruenz (1, 3), von welcher also ein Strahl durch B geht; mithin 2 Lösungen. Also ist $\pi_{8B} = 8$, d. i. π_7 für [0310].

Ferner

$$[3100] \qquad \begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 a_1 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 . \end{array}$$

a' ist mit A_1, a_1, a, b' mit b_2, b_3, B incident; also beide dadurch eindeutig bestimmt; die Bedingung: $a'\,(A_2 A_3 a_1) \barwedge b'\,(b_2 b_3 B_1)$ erfüllt sich von selbst. Wegen der drei Combinationen giebt es 3 Lösungen. Also $\pi_{8B} = 3$; da auch $m = 0$, so kommt es in Tabelle 1 nicht vor.

Endlich

$$[0080] \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_8 \\ \mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_8 . \end{array}$$

a' mit a, b' mit B incident; $a'\,(\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_8) \barwedge b'\,(\mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_8)$. Dem Bündel B correspondirt eine Regelfläche 8. Grades (Räuml. Proj. Nr. 43.), von welcher 8 Gerade die a treffen, also $\pi_{8B} = 8$ oder π_7 für [0070].

Nothwendig ist es nur, die π_{8B} für die Signaturen $[klm0]_8$ zu ermitteln. Ich habe aber *alle* auf die vorhergehende Weise gefunden und wähle noch als Beispiel

$$[1122] \qquad \begin{array}{l} A_1 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \\ b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 , \end{array}$$

weil in den vorhergehenden keine conjugirten Geraden vorkommen.

I a' ist mit a, A_1, a_1, b' mit $B, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ incident, also beide bestimmt; $a'(a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'(B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$ erfüllt sich selbst. 1 Lösung.

II a' ist mit a, a_1, $\mathfrak{a}_1$, b' mit B, b_1, b_2 incident (2 Comb.); $a'(A_1 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'(b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$; dem b' entspricht ein Complex 2. Gr., der mit der Regelschäar $[a a_1 \mathfrak{a}_1]$ ausser der durch A_1' gehenden, noch 3 Gerade gemein hat. $2 \cdot 3 = 6$ Lösungen.

III a' ist mit $a, a_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, b'$ mit B, b_1 incident; $a'(A a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b'(b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$; jeder der beiden Lagen von a' entspricht ein Complex 2. Grades, der mit dem Büschel Bb_1 ausser dem durch B_1' gehenden noch einen Strahl gemein hat; also 2 Lösungen.

Also im Ganzen $\pi_{8B} = 1 + 6 + 2 = 9$, welchen Werth mithin auch $\bar{\pi}_7$ für [1121] oder $\dot{\pi}_7$ für [1112] hat, wie die Tabelle I zeigt.

Die Fläche 9. Grades der Axen von a' Axen-Correlationen für [1122], bei denen die Axe b' durch B geht, besteht demnach 1) aus einem Strahlbüschel, 2) aus 2 Regelflächen 3. Grades, 3) aus einer Regelschaar.

36. Gehen wir nun zur Berechnung der λ_7 für $[klmn]_7$ oder der λ_{8B} für $[k, l, m+1, n]_8$, von denen wiederum nur die für $n = 0$ nothwendig, aber alle ermittelt sind.

Die in der Tabelle I vorkommenden $\dot{\lambda}_7$ oder λ_{8B} für $n = 0$ sind meistens 0, ausser denen, für welche es der Satz von Nr. 30. sagt, auch $\dot{\lambda}_7$ für [0310] oder λ_{8B} für [0320], wie man leicht einsieht.

Fasst man λ_{8B} als Ort der Punkte A auf, welche für $[klmn]_8$ dem festen B durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind, so besteht bei [2120] dieser Ort aus den beiden Ebenen $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$, $A_1 A_2 \mathfrak{A}_2$, bei [1220] aus der einen Ebene $A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$, bei [3020] aus der einen Ebene $A_1 A_2 A_3$; endlich noch bei den Signaturen $[kl00]$, die nicht zu $\dot{\lambda}_7$ in der Tabelle I führen, besteht sie bei [3100] aus der einen Ebene $A_1 A_2 A_3$, bei [1300] aus den drei Ebenen $A_1 a_1$, $A_1 a_2$, $A_1 a_3$ und bei [4000] aus den 4 Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2 A_4$ u. s. f. Bei [0400] existirt sie nicht.

Z. B. bei [2120] sei A irgend ein Punkt in $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; so wird dies für ihn die singuläre Ebene α', die β' ist $B_1 \mathfrak{B}_2 B$. Die Projectivität ist: $(A\alpha')(A_1 A_2 a_1) \barwedge (B\beta')(b_1 b_2 B_1)$, welche von selbst erfüllt wird*).

Bei [2200] ist die Fläche diejenige Fläche α^2, die überhaupt dem Punkte B associirt ist (Nr. 1.). Jeder ihrer Punkte ist dem Punkte B durch ein System von Correlationen [2200] oder, wie dort gezeigt, [2110] u. s. f. associirt, in welchem es von jeder Ausartung eine giebt und dessen Charakteristiken beide 1 sind (Hirst, Nr. 41.); so dass es auf jeder Geraden a zwei Punkte giebt, welche dem B für [2200]

*) Ueber die Schreibweise sehe man Nr. 1.

durch Correlation mit singulären Ebenen oder durch allgemeine Correlation für [2210], oder für [2201] associirt sind, und zwar immer dieselben 2 Punkte.

37. Ich habe aber, wie schon oben gesagt, auch die λ_{8B} für alle Signaturen direct ermittelt. Doch gestattet es der Raum nicht entfernt, auf diese bisweilen sehr umständlichen Untersuchungen einzugehen. Die Fläche von der Ordnung λ_{8B} zerfällt im Allgemeinen.

Als Beispiel betrachten wir

$$[1113]_8 \qquad \begin{matrix} A_1 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \\ b_1 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3. \end{matrix}$$

I. α' ist $a_1 \mathfrak{A}_1$, β' ist $b_1 B$; A beliebig in α'; $(A\alpha')(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$ erfüllt sich von selbst.

II α' ist $A_1 a_1$, β' geht durch $\mathfrak{B}_1$, B; A beliebig in α', $(A\alpha')(A_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')(b_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$. Für jede Lage von A in α' giebt es zwei Ebenen β' durch $\mathfrak{B}_1 B$; denn alle Ebenen durch B, welche die 4 Ebenen $B\,(b_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$ in einem zu $(A\alpha')\,(A_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3)$ projectiven Büschel schneiden, umhüllen einen Kegel 2. Gr., an den von $B\mathfrak{B}_1$ zwei Ebenen gehen.

III α' geht durch $A_1 \mathfrak{A}_1$, β' durch BB_1 und in jener ist A so zu suchen, dass $(A\alpha')\,(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')\,(b_1 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$.

Wir betrachten eine feste Ebene durch $A_1 \mathfrak{A}_1$, so haben wir in derselben 5 Punkte: A_1 und die Spuren von a_1, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$; wir dualisiren die Figur im Raume B, die aus 4 Ebenen und einer Geraden (mit beweglicher Ebene um letztere) in einem Bündel besteht, und erhalten 4 Punkte und eine Gerade (mit beweglichem Punkte auf letzterer) in einer Ebene; auf die Gerade legen wir einen Punkt, so dass wir in jeder Ebene 5 Punkte haben; und unsere Frage ist nun die nach der Curve der Punkte in der A-Ebene, welche der Geraden in der B-Ebene, um mich kurz so auszudrücken, in Bezug auf die beiden Punktgruppen correspondirt. Da die Gerade durch einen Punkt der B-Gruppe geht, so ist die gesuchte Curve 3. Ordnung (Ebene Project. Nr. 8.; Math. Ann. I).

Wir legen zweitens A fest auf die Gerade $A_1 \mathfrak{A}_1$ und lassen α' sich wieder bewegen; jetzt wird auch die A-Figur, bestehend aus vier festen Ebenen und einer festen Geraden durch A und beweglicher Ebene durch letztere, dualisirt; wir erhalten 4 feste Punkte und eine feste Gerade, auf der sich ein Punkt bewegt, in einer Ebene. Wir legen wiederum einen festen Punkt auf die Gerade, der aber nicht homolog zu dem auf die Gerade in der B-Ebene gelegten wird. Es fragt sich nun, wie viele correspondirende Punktepaare giebt es, bez. auf den beiden Geraden gelegen, in Bezug auf die beiden Punktgruppen. Da die mit den Geraden incidenten Grundpunkte nicht homolog sind, so ergeben sich 2 Punktepaare, wie leicht aus dem eben benutzten Satze der „ebenen Projectivität" hervorgeht. Es folgt hieraus, dass auf der Fläche der Punkte A die Gerade $A_1\mathfrak{A}_1$ doppelt und demnach diese Fläche 5. Ordnung ist.

IV Die Ebene α' geht durch A_1 und β' ist $B_1\mathfrak{B}_1B$. A ist in α' so zu suchen, dass $(A\alpha')\,(A_1a_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')\,(b_1B_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3)$, welcher letztere Büschel fest ist.

Die Punkte A erzeugen, wie gleich bewiesen wird, eine Fläche 3. Ordnung, und nun haben wir die sämmtlichen Flächen zusammen, deren Punkte A dem B für [1113] durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind: eine einfache, eine doppelte Ebene, eine Fläche 5. und eine 3. Ordnung, zusammen 11. Ordnung, wie in der Tab. I. λ_7 für [1103], $\bar{\lambda}_7$ für [1112].

38. Um die Ordnung 3 der Fläche in IV zu ermitteln, beweisen wir erst einen andern bei diesen Untersuchungen häufig vorkommenden Satz:

Sind sechs Gerade $a_1, a_2, a_3, a_4, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ *gegeben, so giebt es vier einem gegebenen projective (vierstrahlige) Strahlbüschel, deren Scheitel mit* $\mathfrak{a}$, *deren Ebene mit* $\mathfrak{a}'$ *und deren Strahlen mit* a_1, a_2, a_3, a_4 *incident sind* (eine bestimmte Zuordnung vorausgesetzt). Oder mit andern Worten:

In den Ebenen α *durch* $\mathfrak{a}'$ *beschreiben die Punkte* A, *für welche der Büschel* $(A\alpha)\,(a_1a_2a_3a_4)$ *dem gegebenen projectiv ist, eine Fläche* 4. *Ordnung*, oder, und dual hierzu: *Die Ebenen* α *durch die Punkte* A *auf* $\mathfrak{a}$, *für welche* $(A\alpha)\,(a_1 \cdots a_4)$ *dem gegebenen Büschel projectiv ist, umhüllen eine Fläche* 4. *Klasse.*

In der That, wenn wir die zweite Ausspruchsweise annehmen, so erzeugen ersichtlich die Punkte A in jeder Ebene durch $\mathfrak{a}'$ einen Kegelschnitt. Hingegen (dual) umhüllen die Ebenen α durch jeden Punkt A von $\mathfrak{a}'$ (oder $\mathfrak{a}$) einen Kegel 2. Grades, so dass 2 durch $\mathfrak{a}'$ selbst gehen; daraus geht hervor, dass $\mathfrak{a}'$ der Fläche doppelt angehört, womit die vierte Ordnung bewiesen ist.

Lassen wir aber a_4 die $\mathfrak{a}'$ treffen, so genügt die ganze Ebene $a_4\mathfrak{a}'$, weil in dieser die Spur von a_4 unbestimmt wird; für die übrigen Ebenen α ist dann nur der Schnittpunkt $A_4 = a_4\mathfrak{a}'$ wichtig, und wir haben also den Satz:

Wenn a_1, a_2, a_3, A_4 *und eine durch* A_4 *gehende Gerade* $\mathfrak{a}'$ *gegeben sind, so erzeugen die Punkte* A *in den Ebenen* α *durch* $\mathfrak{a}'$, *für welche* $(A\alpha)\,(a_1a_2a_3A_4)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, eine Fläche* 3. *Ordnung, auf der* $\mathfrak{a}'$ *einfach ist,* und durch die weitere Annahme, dass auch a_3 die $\mathfrak{a}'$ in A_3 treffe, den Satz:

Wenn a_1, a_2, A_3, A_4 *gegeben sind, so erzeugen die Punkte* A *in den Ebenen* α *durch* A_3A_4, *für welche* $(A\alpha)\,(a_1a_2A_3A_4)$ *einem gegebenen*

Büschel projectiv ist, eine Fläche 2. Grades; welcher übrigens schon in Nr. 1. vorkommend auch einfacher bewiesen werden kann.

Wir gehen nun zu unserm Falle IV zurück und verlangen zunächst blos, dass $(A\alpha')(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$ dem festen Büschel $(B\beta')(b_1 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)$ projectiv sei; legen wir durch A_1 eine Gerade $\mathfrak{a}$, durch welche α' gehen soll, so beschreibt A eine Fläche 3. Ordnung, so dass A dreimal auf eine Gerade a fällt; wird demnach A auf a bewegt, jedoch die Bedingung der Incidenz von α' mit $\mathfrak{a}$ fallen gelassen, so umhüllt α' einen Kegel 3. Klasse. Derselbe hat die Ebene $A_1 a$ zur doppelten, die Ebenen $A_1(a_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ zu einfachen Berührungsebenen; denn wenn α' die erst genannte Ebene ist, so bilden die Punkte A, für welche $(A\alpha')(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \barwedge$ dem festen Büschel $(B\beta')$, einen Kegelschnitt, von dem 2 Punkte auf a liegen; in der Ebene $A_1 a_1$ aber befriedigt die Spur von a, weil der mit a_1 incidente Strahl unbestimmt ist, also der Projectivität gemäss gewählt werden kann.

Verlangen wir nun, dass während A die a durchläuft, α' so sei, dass $(A\alpha')(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')(b_1 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_3)$, so ergiebt sich ein zweiter Kegel 3. Klasse, der ebenfalls $A_1 a$ doppelt, $A_1(a_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3)$ einfach berührt und mit dem ersteren ausser $A_1(a, a_1, \mathfrak{a}_1)$ noch 3 Berührungsebenen gemein hat. Für die Schnitte A von a mit jeder derselben ist dann $(A\alpha')(A_1 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3) \barwedge (B\beta')(b_1 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3)$. Folglich giebt es auf der Geraden a 3 Punkte, die der in IV gestellten Bedingung genügen. Die Punkte A erzeugen mithin eine Fläche 3. Ordnung.

Also, wenn gegeben sind $A_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ (da die Verschiedenartigkeit der Bezeichnung im Allgemeinen nicht nothwendig ist), *so liegen die Punkte A von Ebenen α durch A_1, für welche* $(A\alpha)(A_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, auf einer cubischen Fläche.*

Betrachten wir diese Fläche noch etwas genauer. Sie enthält den Punkt A_1 nur einfach. Denn es giebt durch A_1 einfach unendlich viele Ebenen α, in denen A_1 selbst A ist; der Strahl in jeder dieser Ebenen, der in der Projectivität dem ersten Strahle des festen Büschels entspricht, ist Tangente der Fläche in A_1, wie man durch eine unendlich kleine Verrückung erkennt.

Nun giebt es, wenn $\mathfrak{a}$ eine beliebige Gerade ist, nur eine Ebene α durch A_1, für die $(A_1\alpha)(\mathfrak{a} a_2 a_3 a_4 a_5)$ dem gegebenen Büschel projectiv ist, wie die Dualisirung der A-Figur zeigt (Ebene Project. Nr. 2.); also trifft nur eine der Tangenten der Fläche in A_1 eine beliebige Gerade.

Dass die Geraden a_2, a_3, a_4, a_5 einfach auf der Fläche liegen, ist leicht einzusehen, indem A z. B. auf a_2 gelegt wird, mit Hilfe des eben citirten Satzes und des Umstandes, dass der Strahl, der mit a_2 incident ist, unbestimmt wird. Gleichfalls wegen der Unbestimmtheit dieses Strahls ist der Kegelschnitt in der Ebene $A_1 a_2$ leicht nachzuweisen.

Unter den Geraden, welche a_2, a_3, a_4 treffen, giebt es eine a^0, bei der $a^0(A_1 a_2 a_3 a_4)$ dem Büschel der 4 ersten Strahlen im festen projectiv ist. Für jeden Punkt A auf a^0 und jede Ebene α durch AA_1 ist also $(A\alpha)$ $(A_1 a_2 a_3 a_4)$ dem genannten vierstrahligen Büschel projectiv, und die dem fünften Strahle entsprechenden Strahlen erfüllen eine gewisse Ebene α^* durch a^0, nämlich die, für welche $a^0(A a_2 a_3 a_4 \alpha^*)$ dem gegebenen Büschel projectiv ist; dieser Strahl wird also für jede Lage von A auf a^0 einmal a_5 treffen. Folglich liegt die ganze Gerade a^0 auf der cubischen Fläche und ähnlich drei andere.

Auf der Fläche 3. Ordnung giebt es ferner drei Gerade, welche gegen alle vier Geraden a_2, a_3, a_4, a_5 windschief sind. Der Kegelschnitt auf der Fläche in der Ebene durch A_1 und eine dieser Geraden enthält A_1 und die 4 Spuren; der Büschel, durch welchen aus einem beweglichen Punkte dieser Curve die 5 Punkte projicirt werden, bleibt sich und dem gegebenen projectiv. Mithin haben alle Punkte A eines dieser 3 Kegelschnitte dessen Ebene zur Ebene α.

39. Von den weiteren Sätzen, die sich bei Gelegenheit dieser Untersuchungen ergeben haben, will ich noch folgende hervorheben.

1) *Wenn ein Punkt* $\mathfrak{A}$ *und fünf Gerade* $a_1, \cdots, a_5$ *gegeben sind, so ist der Ort der Punkte* A *in den Ebenen* α *durch* $\mathfrak{A}$, *für welche* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_5)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, eine Fläche 7. Ordnung, auf welcher* $\mathfrak{A}$ *einfach, die Geraden* $a_1, \cdots, a_5$ *doppelt sind.*

2) *Wenn sechs Gerade* $a_1, \ldots, a_6$ *gegeben, so sollen solche Büschel* (A, α) *gesucht werden, dass* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist; die* A *erzeugen eine Fläche 4. Ordnung, auf der die* $a_1, \cdots, a_6$ *einfach sind; die Ebenen* α *umhüllen das duale Gebilde.*

3) *Gegeben* $a_1, \cdots, a_8$; $b_1, \cdots, b_8$; *es sollen solche Büschel* (A, α), (B, β) *gesucht werden, dass* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_8) \barwedge (B\beta)(b_1 \cdots b_8)$. *Wenn* B *oder* β *eine feste Lage hat, so ist das Erzeugniss der* A *eine Fläche 16. Ordnung, auf welcher die Geraden* $a_1, \cdots, a_8$ *dreifach sind; die von den* α *umhüllte Fläche ist die duale.*

Diese Fläche 16. Ordnung ist die der Punkte A, die für [0008] dem festen B durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind.

40. Wir geben nun die Tabelle für $\sigma = 8$, in welcher aus ζ_8, π_{8B}, λ_{8B} mit Hilfe der Formeln

(1 a u. b): $$2\nu_8 = \mu_8 + \zeta_8 + \pi_{8B}, \quad 2\mu_8 = \nu_8 + \lambda_{8B}$$

(Nr. 7.) die Werthe von μ_8 und ν_8 berechnet sind.

Die Werthe ζ_8 sind aus Hirst's Tabelle Nr. 42. entnommen.

Tab. 1. $\sigma = 8$.

Signatur	ζ_8	π_{8B}	λ_{8B}	μ_8	ν_8
4000	1	0	4	3	2
0400	1	8	0	3	6
3100	1	3	1	2	3
1300	1	2	3	3	3
2200	0	2	2	2	2
3020	1	6	1	3	5
3011	2	3	5	5	5
3002	1	0	7	5	3
0320	1	8	0	3	6
0311	2	10	3	6	9
0302	1	2	12	9	6
2120	1	4	2	3	4
2111	1	5	3	4	5
2102	1	2	6	5	4
1220	1	6	1	3	5
1211	1	4	5	5	5
1202	1	4	5	5	5
2040, 0240	1	8	0	3	6
2031	2	10	3	6	9
2022	3	8	8	9	10
2013	2	2	13	10	7
2004	1	0	10	7	4
0231	2	14	1	6	11
0222	3	14	8	11	14
0213	2	6	17	14	11
0204	1	0	16	11	6

Signatur	ζ_8	π_{8B}	λ_{8B}	μ_8	ν_8
1140	1	8	0	3	6
1131	2	10	3	6	9
1122	2	9	8	9	10
1113	2	6	11	10	9
1104	1	0	13	9	5
1060, 0160	1	8	0	3	6
1051, 0151	2	16	0	6	12
1042	4	20	6	12	18
1033	5	17	16	18	20
1024	4	8	24	20	16
1015	2	0	23	16	9
1006	1	0	13	9	5
0142	4	24	4	12	20
0133	5	23	16	20	24
0124	4	12	28	24	20
0115	2	0	29	20	11
0106	1	0	16	11	6
0080	1	8	0	3	6
0071	2	16	0	6	12
0062	4	32	0	12	24
0053	8	44	10	24	38
0044	10	40	32	38	44
0035	8	20	52	44	36
0026	4	0	52	36	20
0017	2	0	29	20	11
0008	1	0	16	11	6.

41. Das μ_8, ν_8 für eine Signatur $[klmn]_8$ ist ζ_{9B} *für die Signatur* $[k, l, m+1, n]_9$, *bez.* $[k, l, m, n+1]_9$, *also die Ordnung der Fläche der Punkte* A, *welche dem festen* B *für diese Signatur associirt sind.* Als ζ_{9B} finden wir sie in der Tab. 2 Nr. 55. Aus der Tabelle ergiebt sich demnach, dass *für alle Signaturen* $\sigma = 9$, $n = 0$ *diese Fläche dritter Ordnung ist, mit Ausnahme der beiden Signaturen* [3110] *und* [2210], *wo sie zweiter Ordnung ist*; was wir für die letztere Signatur schon wissen, da ja diese Fläche dieselbe ist, welche auch schon für [2200] associirt war (Nr. 1).

Diese dritte Ordnung lässt sich auf sehr einfache Weise direct erkennen, und zugleich damit schon zwei analoge Sätze für die Signaturen von $\sigma = 10$, $\sigma = 11$, bei denen $n = 0$ ist. (C. P. Nr. 5.)

Wenn zwei verschiedene Punkte A', A'' demselben Punkte B associirt sind, so sind die beiden Bündel A', A'' zum Bündel B correlativ, also unter einander collinear; sie erzeugen demnach eine cubische Raumcurve, welche durch jeden der k Punkte A_i geht und jede der l Geraden a_i zur Sehne hat.

Jeder der m Punkte $\mathfrak{A}_i$ ferner liegt in den Ebenen beider Bündel A', A'', die dem Strahle $B\mathfrak{B}_i$ homolog sind, also auch in der Collineation einander entsprechen; so dass ihre Schnittlinie, die durch den Punkt $\mathfrak{A}_i$ gehen muss, ebenfalls eine Sehne der Curve ist. Bewegt man nun A auf der Curve, so bleibt die Collineation bestehen: die Strahlen nach den Punkten A_i, die Ebenen nach den Geraden a_i und nach den durch die Punkte $\mathfrak{A}_i$ gehenden Sehnen bleiben homologe Elemente, also auch in der Correlation zum Bündel B bleiben sie den Ebenen Bb_i, den Strahlen BB_i und $B\mathfrak{B}_i$ entsprechend. Das heisst nichts anderes als: sämmtliche Punkte A der cubischen Curve sind in Bezug auf die vorliegende Signatur dem B associirt.

Wenn also für eine Signatur $[k, l, m, 0]$ zwei Punkte A einem und demselben Punkte B associirt sind, so induciren sie eine ganze cubische Raumcurve von diesem Punkte B associirten Punkten A.

Wir fanden nun, dass bei $\sigma = 11$ einem Punkte B nur eine endliche Zahl von Punkten A correspondirt; folglich kann diese Zahl bei den Signaturen $[k\,l\,m\,0]$ nur 1 sein.

Also für eine Signatur $[k\,l\,m\,0]_{11}$ entspricht jedem Punkte B ein und nur ein Punkt A, und umgekehrt; so dass die beiden Räume A *und* B *eindeutig auf einander bezogen werden.*

42. Nehmen wir nun weiter an, ausserhalb der durch A', A'' inducirten cubischen Raumcurve gebe es noch einen dritten dem B associirten Punkt A'''. Die drei collinearen Bündel A', A'', A''' erzeugen durch die Schnitte ihrer entsprechenden Ebenen eine cubische Fläche (Grassmann's Erzeugungsart). Die Geraden a_i als Schnittlinien dreier entsprechenden Ebenen (derer, die je dem Strahle BB_i homolog sind), die Punkte $\mathfrak{A}_i$, als Schnittpunkte dreier solchen Ebenen (derer, die je dem Strahle $B\mathfrak{B}_i$ homolog sind), gehören der Fläche an.

Die Punkte A_i als Schnittpunkte von 3 entsprechenden Strahlen der 3 Bündel gehören der Fläche als Knotenpunkte an. Die durch je zwei der drei Bündel z. B. durch A', A'' erzeugte cubische Raumcurve gehört bekanntlich der Fläche ganz an, für jede Sehne dieser Curve sind also zwei ihrer 3 Schnittpunkte mit der Fläche die auf der Curve gelegenen Punkte, der dritte ist ihr Begegnungspunkt mit der Ebene des dritten Bündels, die den in ihr sich schneidenden Ebenen von

A', A'' homolog ist. Die Curve geht ersichtlich durch sämmtliche A_i; sei A_1 einer derselben, so ist er für jede von ihm ausgehende Curvensehne der eine Schnittpunkt mit der Fläche, insofern er der eine Curvenpunkt ist; die beiden in der Sehne sich schneidenden homologen Ebenen von A', A'' gehen bez. durch $A'A_1$, $A''A_1$, also die homologe Ebene im dritten Bündel durch $A'''A_1$ und demnach wird A_1 auch noch der oben als dritter bezeichnete Schnittpunkt der Sehne mit der Fläche. Wir haben also durch A_1 einfach unendlich viele Geraden, auf denen von den drei Schnittpunkten zwei sich in A_1 vereinigt haben; und diese Geraden liegen nicht in einer Ebene. Dies genügt schon, um zu erkennen, dass A_1 ein Knotenpunkt ist; die beiden andern Raumcurven liefern ebenfalls solche Geraden und in Folge der gleich noch weiter zu besprechenden Veränderlichkeit der Scheitel der erzeugenden Bündel wird der ganze Bündel A_1 erschöpft werden können.

Diese Veränderlichkeit führt uns gerade zu unserm eigentlichen Ziele. Ersetzt man irgend einen der 3 Punkte A', A'', A''', z. B. den letzten, durch irgend einen beliebigen Punkt A der cubischen Fläche, so kann man diesen Bündel A so collinear auf die beiden collinearen Bündel A', A'' beziehen, dass wiederum die cubische Fläche als Erzeugniss auftritt.

Den Beweis hiervon hat Herr Reye*) gegeben; vielleicht ist es nicht überflüssig, wenn ich ihn hier wiederhole. Wir betrachten die beiden cubischen Raumcurven a^{13} und a^{23}, welche bez. durch die Bündel A', A'' und A'', A''' erzeugt werden und auf der durch alle drei Bündel erzeugten cubischen Fläche liegen; wir bewegen zunächst einen Punkt A^{13} auf a^{13}, so bleibt der Bündel A^{13} mit A', A''' collinear: die Schnittlinie einer Ebene von A' und der homologen von A^{13} ist die von der Bewegung nicht beeinflusste Sehne der Curve a^{13}, in der sich jene Ebene von A' mit der homologen von A''' schneidet. Da nun auch die homologe Ebene in A'' sich nicht geändert hat, so ist der Schnittpunkt der drei homologen Ebenen von A', A'', A''' derselbe wie der der drei homologen von A', A'', A^{13} d. h. die 3 collinearen Bündel A', A'', A^{13} erzeugen dieselbe Fläche 3. Ordnung, wie A', A'', A'''.

Schneiden sich etwa drei homologe Ebenen von A', A'', A''', statt in einem Punkte, in einer Geraden, so gehen auch die von A', A'', A^{13} durch dieselbe. Ferner durch die Bündel um A'' und irgend einen A^{13} wird ebenfalls eine der Fläche angehörige cubische Raumcure, wie a^{23}, erzeugt.

Wir gehen nun zu dem beliebigen Punkt A der Fläche; in ihm schneiden sich also homologe Ebenen α', α'', α''' von A', A'', A''', (oder irgend einem Bündel A^{13}). Der Strahl $A''\,A = a''$, durch den

---

*) Geometrie der Lage II S. 176 — 177.

die Ebene α'' geht, habe zu entsprechenden a', a''', gelegen bez. in α', α'''; die projectiven Ebenenbüschel a', a''', welche in den Bündeln A', A''' entsprechend sind, erzeugen eine Regelschaar von Sehnen der a^{13}, von denen die Gerade $\alpha'\ \alpha'''$ durch A geht. Folglich geht auch eine Gerade der Leitschaar durch A; sei A^{13} der Punkt, wo sie a^{13} trifft, so ist in dessen Bündel diese Gerade der Geraden $A''A$ von A'' in der Collineation der Bündel A^{13}, A'' homolog, denn die durch sie gehenden Ebenen projiciren die Geraden der Regelschaar aus A^{13}, also sind sie im Bündel A^{13} den dieselben Geraden projicirenden von A' oder A'' d. i. den durch a', a''' gehenden Ebenen und mithin auch den durch a'' gehenden im Bündel A'' homolog.

Folglich geht die durch diese beiden Bündel erzeugte cubische Raumcurve durch unsern beliebigen Punkt A, weil er Schnittpunkt zweier entsprechenden Strahlen ist. Der Bündel A ist nun zu A'', A^{13} und deshalb auch zu A' collinear, und je zwei homologe Ebenen von A', A'' schneiden sich mit der von A in demselben Punkte oder eventuell in derselben Geraden wie mit der von A^{13} oder A''', also erzeugen die drei Bündel A', A'', A dieselbe Fläche wie A', A'', A'''.

Der Punkt, durch den alle die homologen Ebenen in den verschiedenen Bündeln, deren Scheitel die cubische Fläche durchläuft, zu zwei homologen Ebenen von A', A'' gehen und in dem sie mit diesen zusammenlaufen, ist der dritte Schnittpunkt der Schnittlinie der beiden letzten Ebenen, einer Sehne der Curve a^{12}, mit der Fläche.

43. Die 3 Ebenen in A', A'', A''', welche einem Strahle $B\mathfrak{B}_i$ homolog sind, begegnen sich gerade in $\mathfrak{A}_i$, also gehen auch die ihnen und dem $B\mathfrak{B}_i$ homologen in den andern collinearen Bündeln A, deren Scheitel irgend ein Punkt der cubischen Fläche ist, durch $\mathfrak{A}_i$. Zweitens die drei Ebenen in A', A'', A''', welche einem Strahle BB_i entsprechen, schneiden sich in der Geraden a_i, also gehen auch die homologen Ebenen in den genannten Bündeln A durch diese Gerade.

Die 3 Strahlen in A', A'', A''', welche einer Ebene Bb_i homolog sind, gehen durch den Punkt A_i; wir legen zweimal drei homologe Ebenen durch diese Strahlen, so ist A_i für beide Ternen der Schnittpunkt, folglich gehen auch die diesen beiden Ternen in jedem der weiteren Bündel A entsprechenden Ebenen durch A_i und mithin auch ihre Schnittlinie, welche den Strahlen $A'A_i$, $A''A_i$, $A'''A_i$ und der Ebene Bb_i homolog ist. Kurz: Jeder Punkt A der cubischen Fläche ist dem B associirt.

Wenn drei Punkte A', A'', A''' in Bezug auf eine Signatur $[klm0]$ *demselben Punkte B associirt sind, und A''' nicht auf der durch A', A'' inducirten cubischen Raumcurve liegt, so induciren sie eine ganze cubische Fläche von dem Punkte B associirten Punkten.*

Gäbe es nun noch einen Punkt A^{IV} ausserhalb dieser Fläche, der ebenfalls zu B associirt ist, so würde die Combination desseben mit irgend zwei Punkten der Fläche zu einer neuen Fläche führen, und der ganze Raum könnte so erschöpft werden. Da nun bei $\sigma = 10$ einem B nur eine Curve, bei $\sigma = 9$ nur eine Fläche associirt sein kann, so schliessen wir:

In Bezug auf die Signaturen $[klm0]_9$, *bez.* $[klm0]_{10}$ *ist jedem Punkte B eine cubische Fläche, bez. eine cubische Raumcurve associirt.*

Im ersteren Falle gehen die einem Strahle von B in den Bündeln der verschiedenen associirten Punkte A homologen Ebenen alle durch einen und denselben Punkt der Fläche, so dass *diese ein zweiter Ort von Punkten wird* und eindeutig auf den Strahlenbündel B abgebildet ist. (C. P. Nr. 7.) Dass diese Ebenen einen Bündel bilden, konnte man schon so erkennen: Sei B' auf den Strahl von B gelegt und a' eine beliebige Gerade; aus $[klm0]_9$ wird durch Zufügung von $a'B'$ $[k, l+1, m, 0]_{11}$; da entspricht B nur *ein* Punkt A (Nr. 41.); also geht von unsern Ebenen nur eine durch jede Gerade. Im zweiten Falle gehen die einem Strahle von B homologen Ebenen alle durch eine und dieselbe Sehne der Raumcurve, so dass deren Sehnensystem zu dem Bündel B in eindeutiger Beziehung steht.

Es leuchtet ein, dass die drei für die Signaturen $[klm0]_{9,\,10,\,11}$ gewonnenen Sätze auch für das „Problem der Collineation" bestehen; man sehe in meinem so benannten Aufsatze, wo freilich nur eine einzige Signatur behandelt wird und conjugirte Elemente nur versteckt auftreten, Nr. 4, 5, 17.

44. Wie verhält es sich aber mit *den beiden Signaturen* $[3110]_9$ *und* $[2210]_9$, bei denen sich oben nur eine Fläche 2. Ordnung ergab? (C. P. Nr. 8.)

$$[3110] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1 \mathfrak{B}_1\,. \end{matrix}$$

Es seien wieder A', A'', A''' drei dem B associirte Punkte. In jedem Punkt $\mathfrak{A}$ der Ebene $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ kommen drei entsprechende Ebenen der 3 Bündel zusammen. Seien nämlich $\mathfrak{a}' \mathfrak{a}'' \mathfrak{a}'''$ die Schnitte der homologen Ebenen $A'a_1$, $A''a_1$, $A'''a_1$ mit α_{123}, welche nach der Spur A_1' von a_1 zusammenlaufen. Wir legen durch A_1, A_2, A_3, A_1', $\mathfrak{A}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^2$, welcher $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{A}'$ treffe. Die Spuren der projectiven Ebenenbüschel um $A'\mathfrak{A}'$ und den entsprechenden Strahl in A'', welcher $\mathfrak{a}''$ trifft, sind projective Strahlbüschel, welche einen Kegelschnitt erzeugen, der durch A_1, A_2, A_3, A_1', $\mathfrak{A}'$ geht, also mit $\mathfrak{A}^2$ identisch ist; dasselbe gilt von dem Kegelschnitte, der von den Ebenenbüscheln um $A'\mathfrak{A}'$ und den homologen Strahl in A''' herrührt. Daraus folgt, dass in jedem Punkte von $\mathfrak{A}^2$, also auch in $\mathfrak{A}$ 3 homologe Ebenen der 3 Bündel sich treffen. Wird $\mathfrak{A}$ bewegt, so wird $A'\mathfrak{A}'$ den ganzen Strahlbüschel in $A'a_1$ durchlaufen, und so jede Ebene des Bündels A'

und deshalb auch jede in A'', A''' an die Reihe kommen. *Folglich ist die Ebene* α_{123} *der Ort der Convergenzpunkte homologer Ebenen der drei Bündel.* Die 3 Ebenen, welche dem Strahle $B\mathfrak{B}_1$ homolog sind und sich in $\mathfrak{A}_1$ schneiden, schneiden sich auch auf α_{123} und haben also eine ganze Gerade a^1 gemein; diese, die a_1 und die 3 Punkte A_1, A_2, A_3 bestimmen nun eine Fläche 2. Grades α^2. Die 3 Curven a^{12}, a^{13}, a^{23} und jede durch irgend zwei associirte Punkte inducirte cubische Raumcurve gehen durch A_1, A_2, A_3, treffen die a_1 und a^1 je zweimal, liegen demnach auf α^2. *Also ist diese Fläche 2. Grades der Ort der associirten Punkte. Die beiden sonst identischen Oerter haben sich also getrennt.*

Die Abbildung des Strahlenbündels B in die Ebene α_{123} ist aber nicht Collineation; sondern jedem Strahlbüschel dort entspricht ein Kegelschnitt hier.

Der gemeinsame Kegelschnitt von α^2 und α_{123} correspondirt dem B durch Correlation mit den singulären Ebenen $\alpha' = \alpha_{123}$ und $\beta' = BB_1\mathfrak{B}_1$, so dass die Punkte A desselben der Bedingung: $(A\alpha')$ $(A_1A_2A_3a_1) \barwedge (B\beta')\ (b_1b_2b_3B_1)$ genügen; die ganze Ebene α_{123} fanden wir früher (Nr. 36.) dem B für [3100] durch Correlation mit (denselben) singulären Ebenen associirt.

45. Bei der andern Signatur

$$[2210] \qquad \begin{matrix} A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1 \\ b_1\,b_2\,B_1B_2\mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

giebt es in der Ebene $\alpha_0 = A_1A_2\mathfrak{A}_1$ einen und nur einen Punkt A^*, für welchen $(A^*\alpha_0)\ (A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1) \barwedge \overline{Bb_1b_2}\ (b_1b_2B_1B_2\mathfrak{B}_1)$ (Eb. Project. Nr. 4.).

Seien A', A'' zwei zu B associirte Punkte, so geht die durch sie inducirte cubische Raumcurve durch A_1, A_2; sie treffe α_0 zum dritten Male in A_0, folglich ist $A_0\ (A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1)$ collinear $A'\ (A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1)$ correlativ $B\ (b_1b_2B_1B_2\mathfrak{B}_1)$, demnach der Schnitt des ersten Bündels mit der Ebene $\alpha_0 = A_0A_1A_2$ d. i. $(A_0\alpha_0)\ (A_1A_2a_1a_2\mathfrak{A}_1)$ projectiv zum Schnitt des letzten Bündels mit dem Strahle $\overline{Bb_1b_2}$ d. i. $\overline{Bb_1b_2}\ (b_1b_2B_1B_2\mathfrak{B}_1)$; also ist A_0 der obige Punkt A^*. Mithin schneiden alle durch zu B associirte Punkte A gebildeten cubischen Raumcurven die Ebene α_0 in drei festen Punkten A_1, A_2, A^*, folglich auch die für $[2220]_{10}$ associirte (Nr. 43.). Auch durch den letzten der drei Punkte, A^*, gehen homologe Strahlen der Bündel der verschiedenen associirten Punkte A, welche einer festen Ebene in B homolog sind.

Wir haben jetzt genau dieselbe Figur wie im vorigen Falle: dort $A_1A_2A_3a_1a^1$; hier $A_1A_2A^*a_1a_2$, also auch dieselben weiteren Schlüsse.

Der Punkt A^* ist der einzige Punkt des Schnitts der Fläche 2. Grades, des Orts der dem B associirten Punkte A, mit der Ebene α_0, dem Orte der Convergenzpunkte der in den verschiedenen Bündeln A

je demselben Strahle von B homologen Ebenen, welcher dem B durch allgemeine Correlation für [2210] correspondirt, und zwar durch ein ganzes System von Correlationen. Denn lässt man die Strahlen $A^*(A_1, A_2)$ den Ebenen $B(b_1, b_2)$, die Ebene $A^* a_1$ dem Strahle BB_1 homolog und irgend einen Strahl der Ebene $A^* a_2$ (der nicht in α_0 liegt) dem Strahle BB_2 conjugirt sein, wodurch erst die Signatur [2110] entsteht; so ist der Ebene α_0 der Strahl $B\overline{b_1 b_2}$ und in Folge der Projectivität, welcher A^* genügt, dem Strahle $A^*\mathfrak{A}_1$ die Ebene durch $Bb_1 b_2$ und $\mathfrak{B}_1$, und aus demselben Grunde der Ebene $(Bb_1 b_2, B_2)$ der Strahl in α_0 nach der Spur von a_2, folglich wegen der beiden gegebenen conjugirten Strahlen auch BB_2 mit $A^* a_2$ homolog. Es ist also A^* dem B auch durch je eine exceptionelle Correlation von jeder Art associirt (Hirst, Nr. 41.). Die andern Punkte des Schnitts entsprechen dem B durch Correlation mit singulären Ebenen.

Die Fläche α^2 ist, wie schon erwähnt, dieselbe, welche dem B schon für [2200] correspondirt, und zwar für allgemeine Correlation, als auch für die beiden exceptionellen; sie correspondirt ihm auch für [2201]. (Nr. 1.) (C. P.)

46. Bei [3110] zerfällt die Fläche α^2 nochmals, wenn B z. B. in die Ebene $b_3 B_1$ fällt, nämlich in die Ebenen $A_3 a_1$ und $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; die Punkte A und B in $A_3 a_1$ und $b_3 B_1$ correspondiren sich, jeder dort mit jedem hier, durch allgemeine Correlation; die von $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ und $b_3 B_1$ durch Correlation mit diesen Ebenen als singulären. Der zweite Bestandtheil der cubischen Fläche, die einem A in $A_3 a_1$ associirt ist, ausser $b_3 B_1$ ist eine mit A veränderliche Fläche 2. Gr., welche durch Correlation mit singulären Axen entspricht, von denen die im Raume B die eine Schaar auf ihr bilden: sie sind diejenigen Geraden b' der Congruenz $[b_1 b_2]$, für welche $b' (b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1) \barwedge AA_3 (A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1)$. Ebenso besteht die cubische Fläche, welche einem A in $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ correspondirt, aus $b_3 B_1$ und einer mit A veränderlichen Fläche 2. Grades, deren Punkte dem A durch allgemeine Correlation entsprechen. Sie wird durch die Punkte B gebildet, für welche $\overline{Bb_1 b_2} (b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1) \barwedge (A, A_1 A_2 \mathfrak{A}_1) (A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1)$; findet diese Bedingung statt, so kann die Bedingung, dass Bb_3 und AA_3 homolog seien, der Correlation noch auferlegt werden.

Die cubische Fläche, welche einem Punkte A in $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ associirt ist, ist nur durch Correlation mit singulären Ebenen associirt; ihre Punkte B sind die Punkte in den Ebenen β durch $B_4 \mathfrak{B}_1$, welche der Bedingung genügen:

$$(B\beta)(b_1 b_2 b_3 B_4) \barwedge (A, \alpha_{123})(A_1 A_2 A_3 a_1),$$

d. h. einem festen Büschel (Nr. 38.). Die Fläche ist also von $\mathfrak{A}_1$ unabhängig.

Bei [4010] correspondiren sich die Ebene $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ und das

Hyperboloid $\beta^2_{123} = [b_1 b_2 b_3]$, jeder Punkt mit jedem, durch allgemeine Correlationen und die Ebenen α_{123} und $b_4 \mathfrak{B}_1$ durch exceptionelle Correlationen mit ihnen als singulären Ebenen. Der zweite Theil der cubischen Fläche, die einem B in $b_4 \mathfrak{B}_1$ associirt ist, ist — mit B veränderlich — der Kegel 2. Grades mit der Spitze in A_4, dessen Punkte A der Bedingung genügen: $A A_4 (A_1 A_2 A_3 \mathfrak{A}_1) \barwedge (B, b_4 \mathfrak{B}_1)(b_1 b_2 b_3 \mathfrak{B}_1)$; hier ist die Correlation allgemein. Ein ebenso definirter Kegel correspondirt auch jedem Punkte B von β^2_{123} — ausser α_{123} — und zwar durch Correlationen mit singulären Axen, welche bez. den Flächen angehören.

Bei [2210] ist die einem B in $\beta_0 = B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ correspondirende Fläche 2. Gr. ganz durch exceptionelle Correlationen mit singulären Ebenen associirt, von denen die eine β_0 ist, die andere durch $A_1 A_2$ geht. Sie wird durch die Punkte A in den Ebenen α durch $A_1 A_2$ erzeugt, für welche

$$(A\alpha)(A_1 A_2 a_1 a_2) \barwedge (B\beta_0)(b_1 b_2 B_1 B_2),$$

d. h. einem festen Büschel ist. (Nr. 38.)

47. Man kann den Satz, dass einem B in Bezug auf $[k, l, m+1, n]_9$ oder $[k, l, m, n+1]_9$ eine Fläche ζ_{9B} ter Ordnung associirt ist, auch so aussprechen:

1) Für $[klmn]_8$ werde A auf einer Geraden a bewegt, und jedesmal die einem festen Strahle $B\mathfrak{B}$ des Bündels B homologe Ebene in den verschiedenen Correlationen construirt; dieselbe umhüllt einen Torsus ζ_{9B} ter Klasse, wenn ζ_{9B} zu $[k, l, m+1, n]_9$ gehört; oder

   zu den Strahlen der variablen Bündel A, die durch einen festen Punkt $\mathfrak{A}$ gehen, werde in dem festen Bündel B je in den verschiedenen Correlationen die homologe Ebene gesucht; diese umhüllt einen Kegel von der Klasse ζ_{9B}.

2) Wird hingegen zu einer festen Ebene $B\mathfrak{b}$ des Bündels B in den verschiedenen Bündeln A der homologe Strahl gesucht, so erzeugt dieser eine Fläche vom Grade ζ_{9B}, wenn diese Zahl der Signatur $[k, l, m, n+1]_9$ angehört; oder

   zu den Ebenen der Bündel A, die durch eine feste Gerade $\mathfrak{a}$ gehen, werden im festen Bündel B in den verschiedenen Correlationen die entsprechenden Strahlen gesucht: sie erzeugen einen Kegel von der Ordnung ζ_{9B} *).

Ist $n = 0$, also das zu $[k, l, m, n]_8$ gehörige $\zeta_8 = 1$, mit der

*) Man vergleiche im Probl. der Collineation die Resultate von Nr. 2., 4. 5., 9., welche für die dort allein betrachtete Signatur auf andere Weise erhalten sind.

einen bekannten Ausnahme, so sind die erzeugenden Elemente dieser Gebilde zur Punktreihe auf a in eindeutiger Beziehung, diese Torsen, Kegel, Regelflächen vom Geschlechte 0.

Wenden wir die zweite Form von 1) auf die Signaturen [4000], [0400], [3100], [1300] an, so ist bei der dritten dieser Signaturen der Kegel von der 2., bei den drei andern von der 3. Klasse; sein Geschlecht 0 weist darauf hin, dass er in jenem Falle keine, in diesen je eine Doppeltangentialebene β^0 hat. In diesen letzteren drei Fällen giebt es also einmal zwei Punkte A auf a, bei denen die Bündel A $(kA_i, la_i, \mathfrak{A})$ mit dem Bündel B (kb_i, lB_i, β^0) correlativ, also unter einander collinear sind; ihr Erzeugniss ist eine cubische Raumcurve, welche durch die $k+1$ Punkte A_i, $\mathfrak{A}$ geht und die $l+1$ Geraden a_i, a zweimal trifft.

Also giebt es jederzeit eine und nur eine cubische Raumcurve, welche durch 5, 1, 2 gegebene Punkte geht und 1, 5, 4 gegebene Gerade zu Sehnen hat, dagegen keine, welche durch 4 Punkte geht und 2 Gerade zweimal trifft.

Wird auf dieselben vier Signaturen die zweite Form von 2) angewandt, so ist der Kegel bez. von der Ordnung 2, 6, 3, 3 und hat also wegen seines Geschlechtes 0 bez. 0, 10, 1, 1 Doppelkanten b^0. Bei der zweiten Signatur

$$[0400] \qquad \begin{matrix} a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix}$$

seien a', a'' die beiden Transversalen von a_1, a_2, a_3, a und A', A'' ihre Schnitte mit a. Kommt A z. B. nach A', so wird die Correlation zwischen A' und B eine exceptionelle mit a' und BB_4 als singulären Axen (cf. π_{8B} für [0400]); so dass für beide Lagen A', A'' von A der Ebene $A\mathfrak{a}$ die singuläre BB_4 homolog ist. Demnach sind $B(B_1, B_2, B_3, B_4)$ vier von den 10 Doppelkanten.

Sehen wir von diesen ab, so erhalten wir für die vier Signaturen 0mal, 6mal, 1mal, 1mal zwei Punkte auf a, aus denen die k Punkte A_i und die $l+1$ Geraden a_i, $\mathfrak{a}$ durch mit B (kb_i, lB_i, b^0) correlative, also unter einander collineare Bündel projicirt werden; die erzeugte Raumcurve geht durch die k Punkte A_i und trifft die $l+2$ Geraden a_i, $\mathfrak{a}$, a zweimal.

Folglich giebt es 0, 6, 1, 1 cubische Raumcurven, welche durch 4, 0, 3, 1 Punkte gehen und 2, 6, 3, 5 Gerade zweimal treffen; wovon das erste und das letzte Resultat schon oben gewonnen wurden.

Vereinigen wir beides, so erhalten wir die bekannten Sätze *): *Es giebt* 1, 0, 1, 1, 1, 6 *cubische Raumcurven, welche durch* 5, 4, 3,

*) Cremona, Borchardt's J. Bd. 60, S. 188; Sturm, ebenda, Bd. 80, S. 128, wo ich auf der letzten Seite des Aufs. schon auf den obigen Beweis hingewiesen habe.

2, 1, 0 *Punkte gehen und bez.* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *gegebene Geraden zu Sehnen haben.*

Die ausgeschlossene Signatur [2200] könnte auch behandelt werden, wenn auch in anderer Weise, doch würde sie nichts Neues bringen.

48. Unter den Flächen von der Ordnung ζ_{9B} giebt es auch für $n > 0$ noch einige einfache Fälle, nämlich bei den Signaturen [4001], [3101], [1301], [2201], [3003], wo ζ_{9B} bez. 2, 3, 3, 2, 3 ist; für die vierte haben wir es schon gefunden (Nr. 1.). Nach Nr. 3. ist der Grad der Vielfachheit einer Geraden a_i auf den Flächen 3., 3., 2. Ordnung bei [3101], [1301], [2201] gleich der Zahl der Correlationen bei festen Scheiteln A, B für [3011], [1211], [2111], also nach Hirst Nr. 42. (oder ζ_ς Tab. 1. Nr. 40.) gleich 2, 1, 1; hingegen derjenige der einen, bez. der drei Geraden $\mathfrak{a}_i$ auf allen fünf Flächen gleich der Zahl der Correlationen bei festen Scheiteln für [4000], [3100], [1300], [2200], [3002], also gleich 1, 1, 1, 0, 1. Auf der Fläche der vorletzten Signatur liegt mithin $\mathfrak{a}_1$ nicht; wir wissen ja aus Nr. 1., dass sie von $\mathfrak{a}_1$ unabhängig ist.

Bei [4001] ist die Ordnung 2 leicht zu finden: In B haben wir den festen Bündel von fünf Ebenen $B\ (4b_i,\ \mathfrak{b}_1)$; wird A auf a bewegt, so erzeugen die Strahlen in den zu B für [4000] correlativen Bündeln A, welche der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ homolog sind, eine Regelschaar, wie sich aus Nr. 2. des „Probl. der Collineation" nach Dualisirung der B-Bündels ergiebt, also liegen 2 Punkte A auf a, bei denen $\mathfrak{a}_1$ zu $\mathfrak{b}_1$ conjugirt wird.

Die Fläche 3. Ordnung bei [3101] ist, weil ihr a_1 doppelt, $\mathfrak{a}_1$ einfach angehört, eine Regelfläche; ist mithin ein Punkt A dem B associirt, so sind es alle Punkte der Geraden $\overline{A a_1 \mathfrak{a}_1}$; in der That, der Schnitt des Bündels $A(3A_i,\ a_1,\ \mathfrak{a}_1)$ mit der Ebene $A_1A_2A_3$ bleibt bei der Bewegung von A auf der genannten Geraden unveränderlich, also der Bündel zu sich collinear; der der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ homologe Strahl wird stets in der sich homolog bleibenden Ebene $A\mathfrak{a}_1$ bleiben.

Dagegen sind die beiden andern cubischen Flächen bei [1301] und [3003], welche die a_i, $\mathfrak{a}_i$ einfach enthalten, allgemeiner Art. Die Punkte A_i können auf ihnen nur einfach liegen; denn ein gegebener Doppelpunkt ist für eine Fläche eine vierfache Bedingung, desgleichen das Enthalten einer Geraden für eine cubische Fläche. Die Grundelemente haben beliebige Lage; der cubischen Fläche würden also im ersten Falle 5.4, im andern sogar 6.4 Bedingungen auferlegt.

V. $\sigma = 10$.

49. Wir gehen nun zur Aufstellung der Tabelle, die sich aus den Formeln

(II a u. b) $\quad 2\dot{\pi}_8 = \bar{\pi}_8 + \Theta_{8B}$; $\quad 2\bar{\lambda}_8 = \dot{\lambda}_8 + \Theta_{8B} + \lambda_{8B}$

(Nr. 21.) ergiebt.

Tab. II; $\sigma = 8$;

Sign.	Θ_{8B}	$\dot{\pi}_8$	π_8	λ_{8B}	$\dot{\lambda}_8$	$\bar{\lambda}_8$
4000	12	6	0	4	0	8
0400	0	6	12	0	0	0
3100	3	3	3	1	2	3
1300	9	6	3	3	0	6
2200	2	3	4	2	2	3
3020	3	6	9	1	0	2
3011	15	9	3	5	2	11
3002	6	3	0	7	11	12
0320	0	6	12	0	0	0
0311	9	12	15	3	0	6
0302	24	15	6	12	6	21
2120	6	6	6	2	0	4
2111	5	6	7	3	4	6
2102	12	7	2	6	6	12
1220	3	6	9	1	0	2
1211	11	9	7	5	2	9
1202	8	7	6	5	9	11
2040, 0240	0	6	12	0	0	0
2031	9	12	15	3	0	6
2022	20	15	10	8	6	17
2013	18	10	2	13	17	24
2004	4	2	0	10	24	19
0231	3	12	21	1	0	2
0222	20	21	22	8	2	15
0213	32	22	12	17	15	32
0204	24	12	0	16	32	36

Sign.	Θ_{8B}	$\dot{\pi}_8$	$\bar{\pi}_8$	λ_{8B}	$\dot{\lambda}_8$	$\bar{\lambda}_8$
1140	0	6	12	0	0	0
1131	9	12	15	3	0	6
1122	16	15	14	8	6	15
1113	20	14	8	11	15	23
1104	16	8	0	13	23	26
1060, 0160	0	6	12	0	0	0
1051, 0151	0	12	24	0	0	0
1042	18	24	30	6	0	12
1033	36	30	24	16	12	32
1024	38	24	10	24	32	47
1015	20	10	0	23	47	45
1006	0	0	0	13	45	29
0142	12	24	36	4	0	8
0133	36	36	36	16	8	30
0124	52	36	20	28	30	55
0115	40	20	0	29	55	62
0106	0	0	0	16	62	39
0080	0	6	12	0	0	0
0071	0	12	24	0	0	0
0062	0	24	48	0	0	0
0053	30	48	66	10	0	20
0044	72	66	60	32	20	62
0035	90	60	30	52	62	102
0026	60	30	0	52	102	107
0017	0	0	0	29	107	68
0008	0	0	0	16	68	42.

50. Θ_{8B} ist die Zahl der Axen-Ebenen-Correlationen für $[klmn]_8$, bei denen die Axe in B der Bedingung, durch B zu gehen, unterworfen ist; die Bedingung, einen Scheitel in α zu liefern, wird von der Axe in A von selbst erfüllt.

Wir nehmen als Beispiel die Signatur

$$[1033] \qquad \begin{matrix} A_1\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3 \\ b_1\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_3 . \end{matrix}$$

I $\alpha' : \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$; $\beta' : Bb_1$; $a' : \alpha', \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$; $b' : B, \beta', \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); 3 Lösungen.

II $\alpha' : A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$; $\beta' : B\mathfrak{B}_3$ (3 Comb.); 1) $a' : \alpha', \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$; $b' : B, b_1, \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); 2) $a' : A_1, \alpha', \mathfrak{a}_1$; $b' : B, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); $\beta' : B\mathfrak{B}_3, b'$ in beiden Fällen. Also $3(3+3) = 18$ Lösungen.

III $\alpha' : A_1 \mathfrak{A}_1$; $\beta' : B\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ (3 Comb.); 1) $a' : A_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$; $b' : B, \beta', \mathfrak{b}_3$ (3 Comb.); 2) $a' : A_1\mathfrak{A}_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ (2 Lagen); $b' : B, \beta', b_1$; in beiden Fällen $\alpha' : A_1\mathfrak{A}_1, a'$. Also $3\ (3+2) = 15$ Lösungen. Folglich $\Theta_{8B} = 3 + 18 + 15 = 36$.

Man sieht, dass diese 36 Lösungen schon in 5 Gruppen zerfallen, deren jede sich durch Combinationen noch wieder zerspaltet.

51. Es sind ferner die $\dot{\pi}_8$ und $\dot{\lambda}_8$ für die Signaturen $[klm0]_8$, d. i. die π_{9B} und λ_{9B} für $[k,\ l,\ m+1,\ 0]_9$ zu ermitteln. Die vorhergehende Tabelle zeigt, dass die Zahlen $\dot{\pi}_8$ oder π_{9B} durchweg 6 sind, mit Ausnahme von $[3100]_8$, $[2200]_8$, bez. $[3110]_9$, $[2210]_9$, also denjenigen beiden Signaturen, bei welchen auch ζ_{9B} von der dritten zur zweiten Ordnung sinkt.

π_{9B} ist die Anzahl der möglichen Axen-Correlationen für Signaturen $\sigma = 9$, bei denen die Axe in B mit B incident sein muss. Man sieht, dass die π_{9B} Axen in A auf der Fläche ζ_{9B}^{ter} Ordnung liegen, welche dem B überhaupt durch Correlation correspondirt. Bei den Flächen 3. Ordnung, die sich im Allgemeinen für $[klm0]_9$ ergeben, sind dies, wie eben gesagt, 6 Gerade, und zu ihnen gehören die etwaigen Verbindungslinien zweier Punkte A_i, Transversalen von 4 Geraden a_i und Geraden, welche mit einem A_i und zwei a_i incident sind; das Liegen solcher Geraden auf der Fläche ist von vornherein zu erkennen. In den beiden Fällen [3110] und [2210], wo $\zeta_{9B} = 2$ ist, ist die Zahl π_{9B} der Geraden 3; sie sind bei [2210] die drei Geraden $\overline{A_1 a_1 a_2}$, $\overline{A_2 a_1 a_2}$, und $\overline{A^* a_1 a_2}$ (Nr. 45.); der Punkt A^* ist der einzige Punkt auf der letzten Geraden, der dem B auch durch allgemeine Correlation und zwar ein ganzes System von solchen Correlationen associirt ist.

Bei der Signatur [3110] befindet sich in jedem der drei Büschel $A_1 a_1$, $A_2 a_1$, $A_3 a_1$ eine der 3 Geraden; die (a') im ersten genügt der Bedingung: $a' (A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1) \,\overline{\wedge}\, \overline{B b_2 b_3}\ (b_2 b_3 B_1 \mathfrak{B}_1)$.

Bei der Signatur [0090] müssen a', b' so sein, dass $a' (\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_9) \,\overline{\wedge}\, \mathfrak{b}' (\mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_9)$ und $\mathfrak{b}'$ durch B gehen, was auf 6 Weisen möglich (Raüml. Project. Nr. 45.). Ferner

$$[2130] \qquad \begin{array}{l} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 . \end{array}$$

I $a' : A_1 A_2$; $b' : BB_1$; $a' (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \,\overline{\wedge}\, b' (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$ wird von selbst erfüllt; 1 Lösung.

II $a' : A_1, a_1$; $b' : B, \mathfrak{b}_2$ (2 Comb.); $a' (A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \,\overline{\wedge}\, b' (b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$.

Auf a_1, b_2 werden A_1', B_2' gelegt, so entspricht dem Büschel Bb_2, der durch B_2' geht, ein Complex 3. Grades, der den Bündel A_1' einfach enthält (Räuml. Project. Nr. 13.), also im Büschel $A_1 a_1$ noch zwei weitere Strahlen hat; $2 . 2 = 4$ Lösungen.

III $a' : a_1$; $b' : B b_1 b_2$; $a' (A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b' (b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$. Dem b' entspricht eine Regelschaar, die durch den auf a_1 gelegten A_1' geht (R. Pr. Nr. 18.), so dass der a_1 noch eine Gerade begegnet; 1 Lösung. Im Ganzen 6 Lösungen.

Aber auch die übrigen π_{9B} sind von mir direct ermittelt worden. Wir wollen noch

$$[0152] \quad \begin{matrix} a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_5 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \\ B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \cdots \mathfrak{B}_5 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \end{matrix}$$

betrachten.

I $a' : a_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$; $b' : B$; $a' (a_1 \mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_5) \barwedge b' (B_1 \mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_5)$. Dem Bündel B entspricht ein Complex 3. Grades, der den Bündel um den auf a_1 gelegten Punkt A_1' ganz enthält (R. Proj. Nr. 22.), also mit der Regelschaar $[a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2]$ ausser der durch A_1' gehenden Geraden noch 5 gemein hat; 5 Lösungen.

II $a' : a_1$, $\mathfrak{a}_1$; $b' : B$, $\mathfrak{b}_2$ (2 Comb.); dieselbe Projectivität; dem Büschel $B \mathfrak{b}_2$ correspondirt eine Congruenz vom Bündelgrad 3 und vom Feldgrad 9, welche aus dem Punkte A_1' einen Kegel 5. Ordnung erhält (R. Proj. Nr. 28.) und demnach mit der linearen Congruenz $[a_1 \mathfrak{a}_1]$ $3 . 1 + 9 . 1 - 5 = 7$ nicht durch A_1' gehende Geraden gemein hat; $2 . 7 = 14$ Lösungen.

III $a' : a_1$; $b' : B \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2$; dieselbe Projectivität; dem b' entspricht eine Regelschaar, von der nur eine nicht durch A_1' gehende Gerade die a_1 trifft; 1 Lösung.

IV $a' : \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$; $b' : B B_1$; $a' (\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_5) \barwedge b' (\mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_5)$; dem b' entspricht eine Congruenz vom Bündelgrad 1 und Feldgrad 3 (R. Proj. Nr. 8.), welche mit der linearen Congruenz $[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2]$ $1.1 + 1.3 = 4$ Gerade gemein hat. 4 Lösungen.

Im Ganzen 24 Lösungen (cf. $\dot{\pi}_8$ bei [0142] oder $\bar{\pi}_8$ bei [0151] in Tab. II.).

52. Was die λ_8 oder λ_{9B} anlangt, so sind diese für die Signaturen, wo $n = 0$ ist, wie die Tabelle II zeigt, fast alle 0; nur $[3100]_8$, $[2200]_8$, bez. $[3110]_9$, $[2210]_9$ machen wieder eine Ausnahme. Aber auch bei [4010], [0410] und [1310] findet man leicht: $\lambda_{9B} = 0$. Bei allen, wo $k + l < 4$ ist, folgt es aus Nr. 30.

Bei [4000] ergab sich jede der 4 Ebenen $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ u. s. f. als mit Punkten A erfüllt, die dem B durch Correlation mit singulären Ebenen correspondiren (Nr. 36.). Der Schnitt von α_{123} mit der cubischen Fläche, welche dem B für [4010] associirt ist, besteht aus den

3 Geraden $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_3$ (Nr. 51.). Jeder Punkt A aber z. B. von $A_1 A_2$ ist für [4000] dem B durch ein ganzes System von Axen-Correlationen associirt, für welche $a' = A_1 A_2$ die eine Axe ist, während $b' = \overline{B b_3 b_4}$ und die Projectivität: $a'(A_3, A_4) \barwedge b'(b_3, b_4)$ noch unbestimmt ist.

Unter diesen Axen-Correlationen befindet sich auch zwei Axen-Ebenen-Correlationen: α' ist $a' A_3$, bez. $a' A_4$; β' ist $b' b_4$, bez. $b' b_3$. Wegen der ersten dieser Ausartungen vom 2. Typus kommt $A_1 A_2$ auf die Ebene α_{123} (wegen der zweiten auf α_{124}) als Ort von Punkten A, die dem B durch Correlation mit singulären Ebenen entsprechen; eine andere aber von den allgemeinen Axen-Correlationen bringt sie auf die cubische Fläche. So zeigt sich, wie aus $\lambda_{8B} > 0$ $\lambda_{9B} = 0$ hervorgeht.

Analoges gilt bei [3030] und dem Schnitt der cubischen Fläche mit α_{123}, wo die dem B für [3020] durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte sich befinden.

Für [1300] besteht der Ort dieser Punkte aus den 3 Ebenen $A_1(a_1, a_2, a_3)$; die erste derselben schneidet aus der cubischen Fläche α^3, die dem B für [1310] associirt ist, a_1 und die beiden Geraden $\overline{A_1 a_1 a_2}$ und $\overline{A_1 a_1 a_3}$ (Nr. 51.). Auch jede dieser ist für [1300] dem B durch ein ganzes System von Correlationen associirt, so dass sie durch verschiedene Correlationen auf $A_1 a_1$ und a^3 gelangt. Was a_1 anlangt, so sei $\mathfrak{A}_1'$ irgend ein Punkt derselben; es ist der Punkt A auf a_1 dem B associirt für [1300], wenn er für

$$[1210]_7 \qquad \begin{matrix} A_1 a_2 a_3 \mathfrak{A}_1' \\ b_1 B_2 B_3 B_1 \end{matrix}$$

associirt ist; was durch einfach unendlich viele allgemeine Correlationen geschieht, unter denen sich auch je eine mit singulären Ebenen und eine, bei der $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ conjugirt sind, befindet (Hirst, Nr. 41.), weshalb a_1 einfach auf dem obigen Orte $A_1 a_1$ liegt, sowie auf der Fläche 3. Ordnung, die dem B für [1310] entspricht. Man erkennt leicht, dass dies bei allen Signaturen $\sigma = 8$ richtig ist, wo $l > 0$ ist.

Sei nun aber A ein Punkt von $\overline{A_1 a_1 a_2}$, so giebt es für [1300] ein System von Axen-Correlationen zwischen A und B, für welche $\overline{A_1 a_1 a_2}$ und BB_3 die Axen a', b' sind, während nur $a'(a_1, a_2) \barwedge b'(B_1, B_2)$ verlangt wird; u. s. f.

Bei $[2120]_8$ besteht der Ort der dem B durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte aus den Ebenen $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$, $A_1 A_2 \mathfrak{A}_2$. Die erstere (α_0) schneidet aus der Fläche α^3 der für $[2130]_9$ associirten Punkte die Gerade $A_1 A_2$, für die Analoges wie oben gilt, und einen Kegelschnitt $\mathfrak{a}^2$ aus, der noch durch A_1, A_2, $\mathfrak{A}_1$ und die Spur von a_1 geht. Er wird durch die Punkte A erzeugt, für welche $(A\alpha_0)$

$(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1) \barwedge \overline{B b_1 b_2}\, (b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1)$. Lassen wir für einen solchen Punkt A die Strahlen AA_1, AA_2 den Ebenen Bb_1, Bb_2 homolog, ferner irgend einen Strahl von A in der Ebene Aa_1 (jedoch nicht in α_0 gelegen) und die Strahlen $A\mathfrak{A}_1$, $A\mathfrak{A}_2$ den Strahlen BB_1, $B\mathfrak{B}_2$, $B\mathfrak{B}_3$ conjugirt sein, wodurch sich $[2030]_7$ ergiebt, so sind in allen den Correlationen in Folge der obigen Projectivität auch Aa_1 und BB_1 homolog d. h. A ist durch sie dem B auch für [2120] associirt. Folglich gelangen die Punkte von $\mathfrak{a}^2$ durch verschiedene Correlationen auf die Oerter $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ und α^3.

Bei [1220] ist der Ort der durch Correlation mit singulären Ebenen dem B associirten Punkte die Ebene $A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \alpha_0$; ihr Schnitt mit der für [1230] associirten α^3 ist eine cubische Curve, welche durch A_1 zweimal, durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ je einmal geht.

Diejenigen Punkte A nämlich in der Ebene α_0, für welche $(A\alpha_0)$ $(A_1 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) \barwedge b_0\, (b_1 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$, wobei b_0 ein mit A beweglicher Strahl durch B in der Ebene Bb_1 ist, erzeugen eine Curve 3. Ordnung, welche durch A_1 doppelt, durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und die Spuren von a_1, a_2 einfach geht; was man mit Hilfe des Satzes Nr. 8. der „Eb. Proj.“ erkennt, wenn man in Bb_1 noch einen beliebigen, aber festen Strahl durch B annimmt und dann den Bündel B mit einer Ebene durchschneidet, so dass sich eine zweite Gruppe von 5 Punkten ergiebt.

Ist nun A irgend ein Punkt der Curve 3. Ordnung und bilden wir die Correlationen der Bündel A, B für

$$[1210] \qquad \begin{matrix} A_1 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1, \end{matrix}$$

so sind auch in allen α_0 und b_0 und wegen der Projectivität auch $A\mathfrak{A}_2$ und $b_0\mathfrak{B}_2$ homolog, oder $A\mathfrak{A}_2$ und $B\mathfrak{B}_2$ conjugirt. Die Punkte der Curve 3. Ordnung sind also dem B auch für [1220] durch ein ganzes System von Correlationen associirt, so dass die Curve durch die in dem Systeme enthaltende eine Correlation mit singulären Ebenen auf die Ebene α_0 als Ort der so dem B für [1220] associirten Punkte, durch eine andere Correlation des Systems, in der auch noch $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3$ conjugirt sind (Hirst Nr. 41.); auf den Ort α^3 der dem B für [1230] associirten Punkte gelangt.

53. Bei beiden am Anfang von Nr. 44. erwähnten Ausnahmen [3110], [2210] ist $\lambda_{9B} = 2$; d. h. die Punkte A, welche dem B durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind, bilden eine Curve 2. Ordnung.

Bei [3110] sind α' und β' für alle Punkte dieser Curve die Ebenen α_{123} und $BB_1\mathfrak{B}_1$ und die Punkte A sind so, dass $(A\alpha')\,(A_1 A_2 A_3 a_1)$ $\barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 b_3 B_1)$; der erzeugte Kegelschnitt ist der Schnitt der dem B durch Correlation mit singulären Ebenen für [3100] associirten

Ebene α_{123} mit der für [3110] associirten Fläche 2. Grades. (Ende von Nr. 44.)

Was nun aber [2210] wieder erlangt, so sind die Flächen der dem B hierfür durch allgemeine Correlation und ihm für [2200] durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte identisch; so dass wir die Curve der für [2210] auf letztere Weise associirten Punkte nicht als Schnitt erhalten. In Nr. 45. wurde jedoch schon die Schnittcurve jener Fläche mit $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ als diese Curve erkannt.

Die λ_{9B} für die Signaturen $n > 0$ habe ich — mit Ausnahme der vier Signaturen [2005], [0107], [0018], [0009] — direct ermittelt. Bei den niedrigeren Werthen von n besteht die Curve $\lambda_{9B}{}^{\text{ter}}$ Ordnung meistens blos aus Kegelschnitten oder enthält Kegelschnitte, welche sich auf ähnliche Weise ergeben, wie in den eben besprochenen 2 Fällen, und in den Ebenen liegen, die dem B für $[k, l, m, 1, n]$ oder $[k, l, m, n-1]$ durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind.

Betrachten wir noch einige andere Fälle:

$$[2112] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \\ b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 . \end{matrix}$$

I $\alpha' : A_1, A_2, \mathfrak{A}_1$; $\beta' : B_1, B$; A in α so, dass $(A\alpha')\,(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)$. Dualisiren wir wieder den zweiten Bündel, so erhalten wir 4 Punkte und eine Gerade, auf der sich der aus der Büschel-Ebene β' entstandene Büschelscheitel bewegt. Legt man auf diese Gerade einen beliebigen, aber festen Punkt als fünften; so erhellt, dass A in $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ eine Curve 3. Ordnung beschreibt, die durch die Spur von a_1 zweimal geht (wegen des mehrfach citirten Satzes: Ebene Proj. Nr. 8.).

II $\alpha' : A_1 A_2$, $\beta' : B_1 \mathfrak{B}_1 B$; A ist in α' so gelegen, dass $(A\alpha')\,(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)$, welcher letztere Strahlbüschel nun aber fest ist. Theilen wir in zwei Bedingungen:

$$(A\alpha')\,(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{a}_1) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{b}_1)$$

und

$$(A\alpha')\,(A_1 A_2 a_1 \mathfrak{a}_2) \barwedge (B\beta')\,(b_1 b_2 B_1 \mathfrak{b}_2),$$

so ist das Erzeugniss von A jedesmal eine Fläche 2. Grades (Nr. 38.); die den beiden Flächen ausser a_1 gemeinsame Raumcurve 3. Ordnung ist der Ort der Punkte A, die den beiden Bedingungen genügen.

Also besteht die Curve 6ter Ordnung der für [2112] dem B durch Correlation mit singulären Ebenen associirten Punkte aus einer ebenen cubischen Curve und einer cubischen Raumcurve.

Eine cubische Raumcurve ergiebt sich (als einziger Ort) auf dieselbe Weise wie bei II auch bei

$$[2201] \qquad \begin{array}{l} A_1 A_2\, a_1\, a_1\, \mathfrak{a}_1 \\ \; b_1 b_2 B_1 B_2 \mathfrak{b}_1 ; \end{array}$$

dagegen auf ähnliche Weise wie bei I eine in $A_1 A_2 A_3$ gelegene ebene cubische Curve für

$$[3101] \qquad \begin{array}{l} A_1 A_2 A_3\, a_1 \mathfrak{a}_1 \\ \; b_1 b_2 b_3 B_1 \mathfrak{b}_1 , \end{array}$$

als einziger Ort.

54. Bei den weiteren Untersuchungen ergeben sich wieder mehrfache Sätze, von denen ich folgende hervorheben will:

1) *Gegeben* A_1, A_2, a_3, a_4, a_5; *der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch* $A_1 A_2$, *für welche* $(A\alpha)$ $(A_1 A_2 a_1 a_2 a_5)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine cubische Raumcurve, welche durch* A_1, A_2 *geht,* a_3, a_4, a_5 *je zweimal schneidet* (eben bewiesen).

2) *Der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch eine Gerade* $\mathfrak{a}$, *auf welcher* A_1 *liegt, so beschaffen, dass* $(A\alpha)$ $(A_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine Raumcurve* 5. *Ordnung, welche durch* A_1 *zweimal geht,* $\mathfrak{a}$ *ausserdem noch zweimal,* a_2, a_3, a_4, a_5 *je dreimal trifft.*

3) *Der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch eine Gerade* $\mathfrak{a}$, *so beschaffen, dass* $(A\alpha)$ $(a_1 a_2 \cdots a_5)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine Raumcurve* 7. *Ordnung, welche* $\mathfrak{a}$ *sechsmal,* $a_1, \cdots, a_5$ *je viermal trifft.*

4) *Der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch* A_1, *so beschaffen, dass* $(A\alpha)$ $(A_1 a_2 a_3 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine Raumcurve* 5. *Ordnung, welche durch* A_1 *einmal geht,* $a_2, \cdots, a_6$ *je dreimal trifft.*

5) *Der Ort der Punkte* A *in Ebenen* α *durch* $\mathfrak{A}$, *so beschaffen, dass* $(A\alpha)$ $(a_1, a_2, \cdots, a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, ist eine Raumcurve* 12. *Ordnung, welche durch* $\mathfrak{A}$ *nicht geht,* $a_1, \cdots, a_6$ *je siebenmal trifft.*

6) *Gesucht die Strahlbüschel* $(A\alpha)$, *für welche* $(A\alpha)$ $(a_1, a_2, \cdots, a_7)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist; die Punkte* A *erzeugen eine Curve* 8. *Ordnung, bez. die Ebenen* α *hüllen einen Torsus* 8. *Klasse ein. Erstere trifft* $a_1, \cdots, a_7$ *je viermal, an letzteren gehen von diesen Geraden je vier Ebenen.*

7) *Der Ort der Punkte* A, *so beschaffen, dass alle Berührungsebenen des durch* $A(a_1, a_2, \cdots, a_5)$ *bestimmten Kegels* 2. *Grades dies fünf Ebenen in einem Büschel schneiden, der einem gegebenen projectiv ist, ist eine cubische Raumcurve, welche* $a_1, \cdots, a_5$ *z[u] Sehnen hat.*

8) *Gesucht Paare von Büscheln* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *so beschaffen, das[s]* $(A\alpha)$ $(a_1 \cdots a_9)$ $\barwedge$ $(B\beta)$ $(b_1 \cdots b_9)$. *Hat* B *oder* β *eine fes[te]*

Lage, so erzeugen die Punkte A eine Curve 42. Ordnung, die Ebenen α einen Torsus 42. Klasse. Jene hat je 16 Punkte auf, dieser je 16 Ebenen durch $a_1, \cdots, a_9$. (Cf. λ_{9B} für [0009].)

Um z. B. den Satz 4) zu beweisen, hat man nur den Büschel A in zwei fünfstrahlige zu zerlegen: $(A\,\alpha)(A_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5)$ und $(A\alpha)(A_1a_2a_3a_4a_6)$ und analog den gegebenen; man erhält dann zwei Flächen 3. Ordnung (Nr. 38.), welche die Geraden $a_2\,a_3\,a_4$ und die Gerade a^0, die dort erhalten wurde, gemein haben, so dass eine Curve 5. Ordnung übrig bleibt, welche der a^0 noch einmal begegnet.

Für den Beweis des Satzes 6) wird eine eben solche Zerlegung vorgenommen: $(A\alpha)(a_1 \cdots a_6)$ und $(A\alpha)(a_1 \cdots a_5\,a_7)$.

Jedem Falle entspricht eine Fläche 4. Ordnung von Punkten A (Nr. 39.); die beiden Flächen haben die Geraden $a_1 \cdots a_5$ und die cubische Raumcurve gemein, von welcher der nicht schwer zu beweisende Satz (7) spricht; der Rest ist die Curve 8. Ordnung des Satzes (6).

Durch die cubische Raumcurve und einen beliebigen Punkt legen wir einen Flächenbüschel 2. Ordnung. Jede Fläche desselben schneidet aus jeder der beiden Flächen 4. Ordnung eine Curve 5. Ordnung, welche den von der Curve 3. Ordnung ein-, zweimal getroffenen Geraden der Fläche 2. Grades je drei-, zweimal begegnet und deshalb die cubische Curve achtmal trifft. Die Berührung mit der einen oder andern der beiden Flächen 4. Ordnung in einem Punkte dieser letzteren Curve bestimmt eine Fläche des Büschels. Es entsteht folglich eine Correspondenz (8,8) von solchen Punkten der cubischen Raumcurve, in denen dieselbe Büschelfläche die eine und die andere Fläche 4. Ordnung tangirt. Es giebt mithin 16 Punkte auf der Curve, wo dieselbe Fläche des Büschels beide, also auch diese einander tangiren; und in jedem Punkte, wo die Flächen 4. Ordnung einander berühren, werden sie auch von derselben Büschelfläche tangirt werden. Demnach begegnet sich die cubische Raumcurve mit dem übrigen Schnitte der beiden Flächen 4. Ordnung in 16 Punkten, folglich mit der Curve 8. Ordnung in 6 Punkten.

55. Wir gehen jetzt zur Aufstellung der Tabelle über, die sich durch die Benutzung der Formeln (Nr. 8.)

(2a u. b) $\quad 2\nu_9 = \mu_9 + \pi_{9B} + \zeta_{9B},\ 2\mu_9 = \nu_9 + \lambda_{9B}.$

ergiebt.

Tab. 2. $\quad \sigma = 9.$

Sign.	ζ_{9B}	π_{9B}	λ_{9B}	μ_9	ν_9	Sign.	ζ_{9B}	π_{9B}	λ_{9B}	μ_9	ν_9
4010	3	6	0	3	6	3110	2	3	2	3	4
4001	2	0	8	6	4	3101	3	3	3	4	5
0410	3	6	0	3	6	1310	3	6	0	3	6
0401	6	12	0	6	12	1301	3	3	6	6	6

Sign.	ζ_{9B}	π_{9B}	λ_{9B}	μ_9	ν_9
2210	2	3	2	3	4
2201	2	4	3	4	5
3030,0330	3	6	0	3	6
3021	5	9	2	6	10
3012	5	3	11	10	9
3003	3	0	12	9	6
0321	6	12	0	6	12
0312	9	15	6	12	18
0303	6	6	21	18	15
2130,1230	3	6	0	3	6
2121	4	6	4	6	8
2112	5	7	6	8	10
2103	4	2	12	10	8
1221	5	9	2	6	10
1212	5	7	9	10	11
1203	5	6	11	11	11
2050,0250	3	6	0	3	6
2041,0241	6	12	0	6	12
2032	9	15	6	12	18
2023	10	10	17	18	19
2014	7	2	24	19	14
2005	4	0	19	14	9
0232	11	21	2	12	22
0223	14	22	15	22	29
0214	11	12	32	29	26
0205	6	0	36	26	16

Sign.	ζ_{9B}	π_{9B}	λ_{9B}	μ_9	ν_9
1150	3	6	0	3	6
1141	6	12	0	6	12
1132	9	15	6	12	18
1123	10	14	15	18	21
1114	9	8	23	21	19
1105	5	0	26	19	12
1070,0170	3	6	0	3	6
1061,0161	6	12	0	6	12
1052,0152	12	24	0	12	24
1043	18	30	12	24	36
1034	20	24	32	36	40
1025	16	10	47	40	33
1016	9	0	45	33	21
1007	5	0	29	21	13
0143	20	36	8	24	40
0134	24	36	30	40	50
0125	20	20	55	50	45
0116	11	0	62	45	28
0107	6	0	39	28	17
0090	3	6	0	3	6
0081	6	12	0	6	12
0072	12	24	0	12	24
0063	24	48	0	24	48
0054	38	66	20	48	76
0045	44	60	62	76	90
0036	36	30	102	90	78
0027	20	0	107	78	49
0018	11	0	68	49	30
0009	6	0	42	30	18.

56. *Die μ_9 bez. ν_9 geben uns also die Ordnung ζ_{10B} der Curve der Punkte A, welche dem B für $[k, l, m+1, n]_{10}$, bez. $[k, l, m, n+1]_{10}$ associirt sind.*

Die ζ_{10B} und zwar auch die für die Signaturen $[kl00]_{10}$, welche aus der vorhergehenden Tabelle nicht zu entnehmen sind, enthält die Tabelle 4 in Nr. 69.

Die μ_9 für $[k, l, m, 0]_9$, also die ζ_{10B} für $[k, l, m+1, 0]$ zeigt die Tabelle sämmtlich gleich 3; also *ist dem B für die Signaturen: $\sigma = 10$, $m > 0$, $n = 0$ eine cubische Raumcurve associirt,* wie wir schon von Nr. 43. her wissen. Doch diese Nr. sagt uns *dasselbe auch* *für diejenigen Signaturen, bei denen auch* $m = 0$; also für [5000], [0500], [4100], [1400], [2300]. Die Auslassung von [3200] wird bald besprochen werden.

Diese cubische Raumcurve geht durch jeden der Punkte A_i *und schneidet jede der Geraden* a_i *zweimal.*

Ist $m > 0$, $n = 0$, *so hat jeder Punkt* B *eine besondere associirte cubische Raumcurve. Wenn aber* $m = n = 0$, *also* $k + l = 5$, *so bestimmt der Punkt* B *mit den* k *Geraden* b_i *und den* l *Punkten* B_i *eine einzige cubische Raumcurve, welche durch* B *und die* B_i *geht, die* b_i *zweimal trifft, ausser wenn* $k = 2$, $l = 3$ (*Nr.* 47.). Wird nun B auf dieser Curve bewegt, so bleibt der Bündel $B\,(k\,b_i,\ l B_i)$ collinear, folglich zu den Bündeln der verschiedenen Punkte der associirten Curve correlativ; also *alle Punkte unserer Curve in* B *haben dieselbe associirte Curve; es giebt nun doppelt unendlich viele Curven* $(k A_i,\ l\,a_i)$ d. h. durch die k Punkte A_i und mit den l Geraden a_i als Sehnen, *und ebenso doppelt unendlich viele Curven* $(k\,b_i,\ l B_i)$.

Wir sehen, dass *jeder Curve des einen Systems eine und nur eine des andern associirt ist, d. h. allen Punkten der einen alle Punkte der andern.* Dasselbe Resultat, sowie auch die gleich zu besprechende Ausnahme ergiebt sich auch bei der Collineation, wie man bei der Signatur, die im „Probl. der Coll.“ behandelt ist: $k = 5$, $l = 0$, sehen kann (Nr. 17.).

57. *Bei der Signatur* [2300] ergab sich zu einem Punkte B, dem eine Curve $(2 A_i,\ 3 a_i)$ associirt ist, nicht eine „adjungirte“ Curve $(2\,b_i,\ 3 B_i)$, deren Punkte sämmtlich ebenfalls die Curve in A zur associirten haben, weil durch einen beliebigen Punkt B im allgemeinen keine Curve $(2\,b_i,\ 3 B_i)$ geht. Es giebt nun zwar auch doppelt unendlich viele Curven $(2\,b_i,\ 3 B_i)$, aber diese befinden sich alle auf der Fläche 2. Grades $\beta_0{}^2$, welche durch die $3 B_i$ und die $2\,b_i$ geht, so dass durch einen Punkt ausserhalb dieser Fläche keine, durch jeden aber auf der Fläche ein einfach unendliches System von solchen Curven geht, welches die Fläche ganz bedeckt.

Aber ein ausserhalb $\beta_0{}^2$ liegender Punkt B hat doch ein adjungirtes Gebilde, dessen Punkte alle dieselbe associirte Curve wie B haben, nämlich die Gerade $B\,b_1\,b_2$. Wird der Scheitel B auf dieser Geraden bewegt, so bleibt der Bündel $B(2\,b_i,\ 3 B_i)$ ebenfalls collinear, weil der Schnitt mit der Ebene $B_1 B_2 B_3$ sich nicht ändert.

Ist aber B ein Punkt von $\beta_0{}^2$ und $a_0{}^3$ seine associirte Curve, so kann man von ihm zu jedem andern Punkt dieser Fläche auf einer cubischen Raumcurve $(2\,b_i,\ 3 B_i)$ gelangen, wobei der Bündel $B(2\,b_i,\ 3 B_i)$ collinear und B zu dem Scheitel der associirten Curve $a_0{}^3$ associirt bleibt; d. h. $a_0{}^3$ ist zu allen Punkten von $\beta_0{}^2$ associirt.

Vertauschen wir die Räume, so dass wir zu *der Signatur* [3200] kommen; so zeigt sich, dass *jedem Punkte* B *und allen ihm adjungirten d. h. auf der cubischen Raumcurve* $(3b_i, 2B_i, B)$ *liegenden Punkten nicht eine cubische Raumcurve, sondern eine Gerade* a^1 *der Congruenz* $[a_1 a_2]$ *associirt ist. Eine Curve* b_0^3 *aber giebt es im System* $(3b_i, 2B_i)$, *welcher eine ganze Fläche 2. Grades* α_0^2, *nämlich die durch* $3A_i$, $2a_i$ *gehende, correspondirt und darauf ein doppelt unendliches System von cubischen Raumcurven.*

Was nun den früheren Beweis (Nr. 41.) anlangt, dass durch zwei dem B associirte Punkte A stets eine ganze cubische Raumcurve inducirt wird, so bleibt derselbe bestehen, wenn beide A der Fläche α_0^2 angehören; im andern Falle müssen sie auf einer Geraden a^1 der Congruenz $[a_1 a_2]$ liegen, dann werden aber die beiden Bündel, wie schon gesagt, mit der Ebene $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ und unter einander perspectiv: jede zwei homologe Strahlen schneiden sich, nämlich auf α_{123}, nicht blos einfach unendlich viele, wie im allgemeinen Falle; Erzeugniss ist also ausser dem sich selbst entsprechenden Verbindungsstrahl der Scheitel die ganze Ebene α_{123}. (C. P. Nr. 12., 13., 14.).

Bewegt man B_2 auf einer Geraden $\mathfrak{b}_2$ entlang, welche dadurch zu $a_2 = \mathfrak{a}_2$ conjugirt wird, so erzeugen die Geraden a_1 die dem B bezüglich [3101] associirte Regelfläche 3. Grades (Nr. 48.).*)

58. Für

$$[3200] \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \end{matrix}$$

sind die Erzeugenden des Hyperboloids β^2_{123}, für welche $b_1 b_2 b_3$ Leitgerade sind, noch erwähnenswerth. Sei b^1 eine solche Erzeugende und B^1 ihre Spur in irgend einer durch B_1, B_2 gelegten Ebene β, so giebt es in der Ebene $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ einen und nur einen Punkt A', so beschaffen, dass

$$(A' \alpha_{123})(A_1 A_2 A_2 a_1 a_2) \barwedge (B^1 \beta)(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2) \barwedge b^1 (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2).$$

Ist B nun ein beliebiger Punkt von b^1, anderseits $\mathfrak{A}''$ auf a_2 gelegen, so sind für

$$[2110] \quad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}'' \\ b_1 b_2 B_1 B_2 \end{matrix}$$

einfach unendlich viele Correlationen zwischen den Bündeln A', B möglich, und in Folge der obigen Projectivität sind in denselben auch je $A'(A_3, a_2)$ mit $B(b_3, B_2)$ homolog, so dass A' und B auch auf unendlich viele Weisen für [3200] associirt sind. Man kann mithin noch $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ hinzufügen und in diesem System wird es je eine Correlation geben, in der $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ noch conjugirt sind (Hirst

---

*) Auf die im Vorhergehenden besprochene Ausnahme des Satzes von Nr. 43. hat mich Hirst schon im April 1875 aufmerksam gemacht.

Nr. 42. Sign. [2111] oder [2102]); so dass also A' und die ganze Gerade b^1 sich auch für [3210] oder [3201] associirt sind.

Wir können gleich die Frage anschliessen: wie bewegt sich A' in α_{123}, wenn b^1 die Regelschaar durchläuft? Wir haben in jeder der beiden Ebenen α_{123} und β eine Gruppe von 5 Punkten, und A' und B^1 correspondiren einander in Bezug auf diese beiden Gruppen.

Einer Geraden in α_{123} entspricht in β eine Curve 5. Ordnung, welche durch die 5 Punkte in β, also auch durch die Spuren der drei b_i zweimal geht (Eb. Proj. Nr. 10.) und demnach dem Hyperboloide β^2_{123} noch viermal begegnet. Daraus folgt, dass die Punkte A' eine Curve 4. Ordnung erzeugen.

Es giebt also in der Ebene $A_1A_2A_3$ eine unicursale Curve 4. *Ordnung a^4 so beschaffen, dass jedem Punkte A' derselben alle Punkte einer Erzeugenden der Regelschaar, zu deren Leitschaar die drei b_i gehören, durch unendlich viele Correlationen für* [3200] *und je eine für* [3210] *oder* [3201] *associirt sind. Diese, also von* $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ *unabhängige, Curve geht durch die drei A_1 zweimal und trifft die a_1, a_2 einmal;* wie man einsieht, wenn man die obige Gerade in α_{123} mit einem dieser Elemente incident sein lässt, wo dann an Stelle der Curve 5. Ordnung eine von der 3. tritt (Eb. Proj. Nr. 8.).

Nehmen wir wieder eine beliebige, aber feste Lage von A' auf a^4 und die associirte Gerade b^1; schneiden wir die verschiedenen zum Bündel A' für [3210] correlativen Bündel, deren Scheitel die b^1 durchläuft, mit der Ebene $B_1B_2\mathfrak{B}_1$, wenn $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zugefügt gedacht wird; so zeigt sich der Schnitt fest; die Correlation zwischen dem Bündel A' und dem ebenen Systeme ist, da [3200] zunächst wie oben auf [2110] zurückgeführt werden kann und dazu noch das conjugirte Paar $A'\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ getreten ist, [2120], welche eine Lösung hat. Wird also nun noch $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ zugefügt, so ist dem Strahle $A'\mathfrak{A}_2$ im ebenen Systeme eine Gerade homolog und um diese dreht sich die dem Strahle $A'\mathfrak{A}_2$ in den verschiedenen Bündeln B homologe Ebene, so dass *es einen Punkt B auf b^1 giebt,* für welchen sie durch $\mathfrak{A}_2$ geht, also *einen Punkt, der dem A' auch für* $[3220]_{12}$ *associirt ist.* Hat man aber $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ hinzugefügt, wodurch $[3300]_{12}$ entsteht (S. 256); so wird die durch die feste Gerade des ebenen Systems und $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$ gehende Ebene gerade die Ebene $B_1B_2\mathfrak{B}_1$ und der von ihr markirte Punkt ist die Spur von b^1 in $B_1B_2\mathfrak{B}_1$, das ebene System in $B_1B_2\mathfrak{B}_1$ hat zwar seine Correlation zum Bündel A' beibehalten, aber der jetzige Punkt B ist kein Punkt, aus dem es durch einen ebenfalls correlativen Bündel projicirt werden kann. *Es giebt also keinen Punkt auf b^1, der dem A' auch noch für* [3300] *associirt wäre.* (C. P. Nr. 32., 37., 38.)

Wird nun $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2$ statt $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ hinzugefügt (ausser $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$), so dass man

$[3211]_{12}$ erhält; so entspricht der Ebene $A'\mathfrak{a}_1$ des Bündels A' im ebenen Systeme von $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ ein Punkt, durch den dann der Strahl der Bündel B, der der Ebene $A'\mathfrak{a}_1$ homolog ist, gehen muss; also giebt es einen Punkt B auf b^1, wo dieser Strahl auch noch $\mathfrak{b}_1$ trifft; so dass $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ conjugirt werden.

Auf b^1 liegt folglich ein Punkt B, der dem A' auch noch für [3211] *associirt ist.*

59. Wir bemerken weiter, dass für alle Signaturen: $\sigma = 10, n = 1$ $\zeta_{10B} = 6$, ausser für [3111] und [2111], wo es 4 ist; ferner bei $\sigma = 10$, $n = 2$ ist es nur 7mal 12, die Werthe 24, 48 kommen bei bez. $n = 3$, $n = 4$ nur dreimal, resp. einmal vor. Eine Curve 4. Ordnung erhalten wir noch bei [4002].

Wir wollen noch untersuchen, von welcher Species diese drei Raumcurven 4. Ordnung sind.

Bei [4002] ist sie die vollständige Schnittcurve der beiden Flächen 2. Grades, welche dem B für $\left[4000, {\mathfrak{a}_1 \atop \mathfrak{b}_1}\right]$ und für $\left[4000, {\mathfrak{a}_2 \atop \mathfrak{b}_2}\right]$ correspondiren; bei [3111] schneiden sich in ihr die beiden Flächen, die für $\left[3100, {\mathfrak{A}_1 \atop \mathfrak{B}_1}\right]$ und $\left[3100, {\mathfrak{a}_1 \atop \mathfrak{b}_1}\right]$ associirt und bez. 2ter, 3ter Ordnung sind, ausser in der auf letzterer doppelten Geraden a_1 (Nr. 48.), folglich ist die Curve von der zweiten Species. Bei [2211] ergiebt sie sich freilich nicht als Schnitt der beiden dem B für $\left[2200, {\mathfrak{A}_1 \atop \mathfrak{B}_1}\right]$ und $\left[2200, {\mathfrak{a}_1 \atop \mathfrak{b}_1}\right]$ associirten Flächen 2. Grades, denn diese fallen in die nämliche Fläche zusammen; sie liegt jedoch auf derselben und begegnet jeder der beiden a_i, z. B. der a_1 in so vielen Punkten, als dieselbe mit der dem B für [2121] associirten Fläche 4. Ordnung ausser dem auf letzteren einfachen*) $\mathfrak{A}_1'$, der auf a_1 gelegt ist, gemein hat, also dreimal; woraus sich ebenfalls die zweite Species ergiebt.

60. Die eben vorgenommenen Schnittbetrachtungen führen zu folgender Untersuchung:

Wir denken uns irgend eine Signatur $[klmn]_8$ und fügen zwei Paare conjugirter Elemente (Punkte oder Geraden) hinzu, wodurch zwei Signaturen, wo $\sigma = 9$ ist, und eine, bei der $\sigma = 10$ ist, entstehen. Zu dem Schnitte der beiden Flächen, welche einem B für die beiden ersteren associirt sind, gehört die demselben B für die letztere associirte Curve. Der Rest des Schnitts wird, wenn die Correlation bei festen Scheiteln für $[klmn]_8$ mehr als eine Lösung hat, aus verschiedenartigen Theilen bestehen: bei den Punkten der einen wird die Correlation immer noch blos eine endliche Zahl von Lösungen haben und wegen einer derselben werden diese Theile auf die eine der

*) Weil eine Correlation mit festen Scheiteln für [2111] nur eine Lösung hat.

beiden Flächen, wegen einer andern auf die andere gelangen (während die Punkte der dem B für die Signatur $\sigma = 10$ associirten Curve wegen *derselben* Lösung auf beide Flächen kommen); die Bündel der Punkte der andern Theile befinden sich mit B in unendlich vielen Correlationen, sind für die Signatur $[k\,l\,m\,n]_S$ *„porismatisch" correlativ*, wie sich Hirst ausdrückt für solche Specialfälle, wo *an Stelle einer endlichen eine unendliche Zahl von Lösungen tritt.*

Die Geraden a_i, $\mathfrak{a}_i$ gehören zu diesen letzteren Theilen, und die Punkte A_i, $\mathfrak{A}_i$ liegen auf ihnen (Nr. 3,52), aber es giebt im allgemeinen noch andere. Bei den Signaturen, wo $n = 0$, ist es nicht schwer, dieselben zu ermitteln. Von der Signatur [2200] sehen wir ab, denn da entspricht eben jeder Punkt der ganzen Fläche α^2, die einem B associirt, und nicht blos einer Curve, diesem B durch unendlich viele Correlationen. Bei der Signatur [3100] besteht die Curve der dem B porismatisch associirten Punkte blos aus a_1; denn die für zwei nur durch das Paar der conjugirten Punkte verschiedene [3110] associirten Flächen 2. Grades durchschneiden sich in a_1 und der für [3120] associirten cubischen Raumcurve; der Schnitt der für [3110] und [3101] associirten Flächen ist oben betrachtet, und die für zwei nur im Paare der conjugirten Geraden verschiedene [3101] associirten Flächen 3. Ordnung haben die auf beiden doppelte a_1 und die für [3102] associirte Curve 5. Ordnung gemein.

Für die übrigen Fälle: $n = 0$ wollen wir blos zwei Paare conjugirter Punkte zufügen, weil sich dann durchweg cubische Flächen ergeben; auf diesen liegen stets die etwa vorhandenen Geraden $\overline{A_i A_k}$, $\overline{A_i a_i a_k}$ und Transversalen von vier Geraden a_i und sind für $\sigma = 8$ dem B porismatisch associirt, und zwar durch unendlich viele Correlationen mit singulären Axen, von denen die betreffende Gerade selbst eine ist. Ausser diesen Geraden, den a_i, und der für $\sigma = 10$ associirten cubischen Raumcurve haben die Flächen bei [4000], [0400], [1300] nichts mehr gemein; bei [3020], [0320], [1220] eine Curve von der 3. Ordnung; bei [2120] und [0240] von der 4. Ordnung; bei [2040], [1140], [0160] von der 5. und bei [1060] und [0080] von der 6. Ordnung. *Die Punkte dieser Curve sind dem B durch unendlich viele im allgemeinen gewöhnliche Correlationen associirt.*

Bei [1220] lässt sich durch den übrigen Schnitt, der aus einer durch A_1 gehenden cubischen Raumcurve, den beiden Sehnen a_1, a_2 derselben und der Geraden $\overline{A_1 a_1 a_2}$ besteht, eine Fläche 2. Gr. legen; also ist die obige Curve 3. Ordnung eben. Wir haben sie schon oben in Nr. 52. gefunden als den von dem hinzugefügten conjugirten Paare unabhängigen Schnitt der Ebene $A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ mit der für [1230] dem B associirten Fläche.

Bei [3020] und [0320] dagegen ist die Curve 3. Ordnung doppelt gekrümmt; aus der Theorie der Schnittcurven zweier cubischen Flächen folgt, dass sie durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ geht und im ersten Falle noch durch A_1, A_2, A_3, im zweiten aber a_1, a_2, a_3 zu Sehnen hat. Wir können diese Curve z. B. bei

$$[3020] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 b_2 b_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \end{matrix}$$

auch so erhalten: Sei A irgend ein Punkt, der dem B porismatisch (und zwar durch allgemeine Correlationen) correspondirt; so heisst dies doch, die verschiedenen Ebenen, welche den Strahlen $A\mathfrak{A}_1$, $A\mathfrak{A}_2$ in den verschiedenen Correlationen homolog sind, gehen durch $B\mathfrak{B}_1$, bez. $B\mathfrak{B}_2$, bilden demnach Büschel um diese beiden Geraden. Nun kann man aber durch A_1, A_2, A_3, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, A eine cubische Raumcurve legen. Wird nun A auf derselben bewegt, so bleibt der Bündel $A(A_1 A_2 A_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2)$ collinear und die Strahlen $A\mathfrak{A}_1$, $A\mathfrak{A}_2$ zu denselben Ebenen in B in den verschiedenen Correlationen homolog, so dass also die Eigenschaft, dass die diesen Strahlen homologen Ebenen durch $B\mathfrak{B}_1$, $B\mathfrak{B}_2$ gehen, bestehen bleibt.

Analoges gilt bei [0320]. Bei [1220] wäre die cubische Curve durch 4 Punkte und zwei Sehnen bestimmt, was zu keiner Lösung führt.

Bei [2120] aber befinden sich die dem B porismatisch associirten Punkte nur in den Ebenen $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ und $A_1 A_2 \mathfrak{A}_2$ und erzeugen dort zwei Kegelschnitte, welche schon je von $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ unabhängig sind (Nr. 52.); die Betrachtung mit der cubischen Raumcurve wird hier illusorisch, weil von den 5 Punkten und der einen Sehne 4 Punkte A, A_1, A_2, $\mathfrak{A}_1$ bez. $\mathfrak{A}_2$ in derselben Ebene liegen. Die beiden Kegelschnitte bilden, weil beide durch A_1, A_2 gehen, eine Raumcurve 4. Ordnung 1. Species.

Gleichfalls von der 1. Species ist die allgemeine Raumcurve 4. Ordnung bei [2040], weil durch den ferneren Schnitt der cubischen Flächen eine Fläche 2. Grades geht. Die Curve 5. Ordnung in den 3 Fällen [2040], [1140], [0160] bildet mit einer Raumcurve 4. Ordnung 1. Species und die Curve 6. Ordnung bei [1060] und [0080] mit einer cubischen Raumcurve den vollen Schnitt zweier cubischen Flächen, folglich haben ihre Tangentenflächen die Ordnung 12, 16. (C. P. Nr. 15—17.)

Auf die Fälle $n > 0$ gehen wir hier nicht ein, weil die Verhältnisse doch wegen der oben geschilderten Verschiedenartigkeit des Schnitts zu complicirt werden. Wir begnügen uns noch mit der Bemerkung, dass dort etwa vorkommende $A_i A_k$, $A_i a_k a_l$, $(4 a_i)$ nicht auf allen einem Punkte associirten Flächen liegen.

61. Wir gehen zur Aufstellung der nächsten Tabelle vermittelst der Formeln aus Nr. 22.:

(III a u. b) $2\dot{\pi}_8' = \bar{\pi}_8' + \Theta_8'$; $2\bar{\lambda}_8' = \dot{\lambda}_8' + \Theta_8' + \lambda_{8B} + \lambda_{8A}$;

λ_{8A} ergiebt sich aus λ_{8B} durch Vertauschung der Räume, also von k und l. Für die andern Zahlen bewirkt die Vertauschung der Räume keine Veränderung (Nr. 2.). λ_{8B} und λ_{8A} beziehen sich in der folgenden Tabelle nur je auf die vordere von zwei nebeneinander geschriebenen Signaturen, für die hintere sind sie zu vertauschen. Aehnliches gilt auch für die Tabellen 3, VII, 7, IX, 9.

Tab. III; $\sigma = 8$.

Sign.	Θ_8'	$\dot{\pi}_8'$	$\bar{\pi}_8'$	λ_{8B}	λ_{8A}	$\dot{\lambda}_8'$	$\bar{\lambda}_8'$
4000,0400	24	16	8	4	0	4	16
3100,1300	8	10	12	1	3	6	9
2200	16	12	8	2	2	4	12
3020,0320	18	22	26	1	0	1	10
3011,0311	32	26	20	5	3	10	25
3002,0302	36	20	4	7	12	25	40
2120,1220	14	18	22	2	1	3	10
2111,1211	24	22	20	3	5	10	21
2102,1202	28	20	12	6	5	21	30
2040,0240	8	24	40	0	0	0	4
2031,0231	32	40	48	3	1	4	20
2022,0222	56	48	40	8	8	20	46
2013,0213	64	40	16	13	17	46	70
2004,0204	32	16	0	10	16	70	64
1140	12	24	36	0	0	0	6
1131	28	36	44	3	3	6	20
1122	48	44	40	8	8	20	42
1113	56	40	24	11	11	42	60
1104	48	24	0	13	13	60	67
1060,0160	0	24	48	0	0	0	0
1051,0151	20	48	76	0	0	0	10
1042,0142	60	76	92	6	4	10	40
1033,0133	104	92	80	16	16	40	88
1024,0124	120	80	40	24	28	88	130
1015,0115	80	40	0	23	29	130	131
1006,0106	0	0	0	13	16	131	80
0080	0	24	48	0	0	0	0
0071	0	48	96	0	0	0	0
0062	40	96	152	0	0	0	20
0053	120	152	184	10	10	20	80

Sign.	Θ_8'	$\dot{\pi}_8'$	$\overline{\pi}_8'$	λ_{8B}	λ_{8A}	$\dot{\lambda}_8'$	$\overline{\lambda}_8'$
0044	208	184	160	32	32	80	176
0035	240	160	80	52	52	176	260
0026	160	80	0	52	52	260	262
0017	0	0	0	29	29	262	160
0008	0	0	0	16	16	160	96.

62. Es sind also wiederum die sämmtlichen Θ_8', ferner die $\dot{\pi}_8'$, $\dot{\lambda}_8'$ für die Signaturen $[k, l, m, 0]_8$, d. i. die π_9', λ_9' für $[k, l, m+1, 0]_9$ direct zu ermitteln.

In Bezug auf Θ_8' wählen wir als Beispiel:

$$\begin{array}{ll} (2022) & A_1 A_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \\ (0222) & b_1 b_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 . \end{array}$$

Die singulären Axen sollen mit a, b incident sein.

I $\alpha' : A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; $\beta' : \mathfrak{B}_2$ (2 Comb.); 1) $a' : \alpha' a A_1$; $b' : b_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 b$ 2 Lagen (2 Comb.); 2) $a' : \alpha' a \mathfrak{a}_1$; $b' : b_1 b_2 \mathfrak{b}_2 b$ 2 Lagen (2 Comb.); in 1) und 2) $\beta' : \mathfrak{B}_2 b'$. $2(2.2 + 2.2) = 16$.

II $\alpha' : A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$; $\beta' : b_2$ (2 Comb.); 1) $a' : \alpha' a A_1$; $b' : b_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 b$ 2 Lagen; 2) $a' : \alpha' a \mathfrak{a}_1$; $b' : b_1 b_2 \mathfrak{b}_2 b$ 2 Lagen (2 Comb.); in 1) und 2) $\beta' : b_2 b'$. $2(2 + 2.2) = 12$.

III $\alpha' : A_1 A_2$; $\beta' : \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$; 1) $a' : A_1 \mathfrak{a}_1 a$; $b' : b b_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ 2 Lagen (4 Comb.); 2) $a' : \overline{A_1 A_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 a}$; $b' : b_1 b_2 b \overline{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2}$ 4 Lagen; in 1) und 2) $\alpha' : \overline{A_1 A_2 a'}$; $\beta' : \overline{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 b'}$; $2.4 + 4 = 12$.

IV $\alpha' : A_1 \mathfrak{A}_1$; $\beta' : b_2 \mathfrak{B}_2$ (4 Comb.); 1) $a' : A_1 a \mathfrak{a}_1$; $b' : \beta' \mathfrak{b}_2 b$. (2 Comb.); 2) $a' : \overline{A_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 a}$; $b' : \beta' b_1 b$ (2 Lagen); in 1) und 2) $\alpha' : \overline{A_1 \mathfrak{A}_1 a'}$. $4(2 + 2) = 16$.

Also

$$\Theta_8' = 16 + 12 + 12 + 16 = 56.$$

Für die Ermittelung der π_9' nehmen wir als Beispiel die Signaturen [0090] und [2130].

a', b' müssen bez. mit a, b incident sein; bei der ersteren Signatur haben wir

$$a' (\mathfrak{A}_1 \cdots \mathfrak{A}_9) \;\overline{\wedge}\; b' (\mathfrak{B}_1 \cdots \mathfrak{B}_9);$$

dem Complexe $[a]$ entspricht eine Linienfläche 24. Grades (R. Proj. Nr. 47., 57.), von welcher 24 Geraden die b treffen; also $\pi_9' = 24$.

$$[2130] \qquad \begin{array}{c} A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \\ b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 \end{array}$$

I $a' : A_1 a_1 a$; $b' : b_2 b$; $a' (A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \;\overline{\wedge}\; b' (b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$; dem a' entspricht eine Congruenz vom Bündelgrad 1 und Feldgrad 3, welche aus dem auf b_2 gelegten Punkt B_2' einen Kegel 2. Grades erhält (R

Proj. Nr. 8.), also mit der linearen Congruenz $[b_2 b]$ $1.1 + 1.3 - 2 = 2$ nicht durch B_2' gehende Gerade gemein hat. (2 Comb.). $2.2 = 4$.

II $a' : a a_1$; $b' : b_1 b_2 b$; $a' (A_1 A_2 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b' (b_1 b_2 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$; einem Büschel in B correspondirt eine Congruenz (3,9), welche aus dem auf a_1 gelegten Punkte A_1' einen Kegel 5. Ordnung erhält (R. Project. Nr. 28.) und folglich mit der Congruenz $[a a_1]$ $3.1 + 9.1 - 5 = 7$ nicht durch A_1' gehende Geraden gemein hat; jedem Strahl, der durch den auf b_1 gelegten Punkt B_1' geht, entspricht eine Congruenz (1,3), welche aus A_1' einen Kegel 2. Grades erhält (R. Proj. Nr. 1, 8.), also mit der Congruenz $[a a_1]$ zwei nicht durch A_1' gehende Geraden gemein hat. Demnach correspondirt der Congruenz $[a a_1]$ ein Complex 7. Grades, für welchen die Bündel um die Punkte B_1', B_2' auf b_1, b_2 doppelt sind, der mithin mit der Regelschaar $[b_1 b_2 b]$ $2.7 - 2.2 = 10$ nicht durch B_1' oder B_2' gehende Strahlen gemein hat. Also giebt es bei II 10 Lösungen.

III $a' : A_1 a$; $b' : b_2 B_1 b$; $a' (A_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b' (b_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$; b' ist bestimmt; ihr ist ein Complex 2. Grades associirt, welcher im Büschel $A_1 a$ 2 Strahlen hat; mithin wegen der 2 Combinationen 4 Lösungen. Also im Ganzen $\pi_9' = 4 + 10 + 4 = 18$.

Durch analoge Betrachtungen sind aber auch die π_9' für $n > 0$ ermittelt worden.

63. Die Werthe λ_9' für $n = 0$ sind überall null, wo $k + l < 3$ (Nr. 30.); nur die für [4010], [3110], [2210], [3030], [2130] (indem von den Doppelsignaturen blos die ersten geschrieben sind) sind von 0 verschieden. Diese 5 Signaturen sind leicht zu behandeln.

Die Scheitel A, B sollen auf a, b liegen.

$$[4010] \qquad \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \mathfrak{A}_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

$\alpha' : A_1 A_2 A_3$; $\beta' : b_4 \mathfrak{B}_1$; $A = \alpha' a$; $B = \beta' b$; $(A\alpha') (A_1 A_2 A_3) \barwedge (B\beta') (b_1 b_2 b_3)$ erfüllt sich von selbst; 4 Comb.; $\lambda_9' = 4$.

Die Fläche der Punkte $A(B)$, welche Punkten B auf b (oder A auf a) durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind, besteht also aus den 4 Ebenen $A_i A_k A_l$ (oder $\mathfrak{B}_1 b_i$).

$$[3110] \qquad \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & a_1 & \mathfrak{A}_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & B_1 & \mathfrak{B}_1. \end{matrix}$$

I $\alpha' : A_1 A_2 A_3$; $\beta' : B_1 \mathfrak{B}_1$; der feste Büschel $(A\alpha') (A_1 A_2 A_3 a_1) \barwedge (B\beta') (b_1 b_2 b_3 B_1)$. Jedem A in α' (wo sie z. B. von a getroffen wird) entspricht eine Fläche 3. Ordnung von Punkten B (Nr. 38.), so dass drei Punkte auf b liegen.

II $\alpha' : A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; $\beta' : b_3 B_1$; die Projectivität erfüllt sich für jede zwei beliebige Punkte A, B in α', β' selbst; 3 Comb. $\lambda_9' = 6$.

Der b sind demnach die dreifache Ebene $A_1 A_2 A_3$ und die 3 Ebenen $A_i A_k \mathfrak{A}_1$, der a eine Fläche 3. Ordnung und die 3 Ebenen $b_i B_1$ associirt.

$$[2210] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1 b_2 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1. \end{matrix}$$

I $\alpha' : A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$; $\beta' : B_1 B_2$; $A = a\alpha'$, B in β'; der feste Büschel $(A\alpha')$ $(A_1 A_2 a_1 a_2) \barwedge (B\beta')$ $(b_1 b_1 B_1 B_2)$; B beschreibt (Nr. 38.) eine Fläche 2. Grades.

II $\alpha' : A_1 A_2$; $\beta' : B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$; $B = b\beta'$; A in α'; A beschreibt eine Fläche 2. Grades. Einer b (oder a) entspricht mithin die doppelte Ebene $A_1 A_2 \mathfrak{A}_1$ (oder $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$) und eine Fläche 2. Grades.

Endlich bei [3030] entspricht einem b die Ebene $A_1 A_2 A_3$, einem a die Ebene $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$; bei [2130] einem b die 3 Ebenen $A_1 A_2 \mathfrak{A}_i$, einem a die 3 Ebenen $B_1 \mathfrak{B}_i \mathfrak{B}_k$.

Die λ_9' für $n > 0$ habe ich nicht mehr direct ermittelt, indem die Controlle der zweifachen Ermittelung der π_9' für genügend erachtet wurde.

Das Resultat $\lambda_9' = 96$ für [0009] giebt folgenden Satz:

Gegeben zwei Gruppen von je 9 Geraden $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_9$; $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_9$; *gesucht solche Strahlbüschel* $(A\alpha)$, $B\beta)$, *dass*

$$(A\alpha)\,(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_9) \barwedge (B\beta)\,(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_9);$$

bewegt sich B *auf einer Geraden, oder dreht sich* β *um eine Gerade, so beschreibt* A *eine Fläche* 96. *Ordnung,* α *eine Fläche* 96. *Klasse.*

64. Wir gehen zur nächsten Tabelle, welche durch die Formeln aus Nr. 9.

(3a u. b) $\quad 2\nu_9' = \mu_9' + \pi_9' + \zeta_{9B} + \zeta_{9A}$, $2\mu_9' = \nu_9' + \lambda_9'$

zu den Werthen von μ_9', ν_9' führt. Die ζ_{9A} ergeben sich aus den ζ_{9B} durch Vertauschung von k und l.

Tab. 3. $\sigma = 9$.

Sign.	ζ_{9B}	ζ_{9A}	π_9'	λ_9'	μ_9'	ν_9'	Sign.	ζ_{9B}	ζ_{9A}	π_9'	λ_9'	μ_9'	ν_9'
4010,0410	3	3	16	4	10	16	2130,1230	3	3	18	3	10	17
4001,0401	2	6	8	16	16	16	2121,1221	4	5	22	10	17	24
3110,1310	2	3	10	6	9	12	2112,1212	5	5	20	21	24	27
3101,1301	3	3	12	9	12	15	2103,1203	4	5	12	30	27	24
2210	2	2	12	4	8	12	2050,0250	3	3	24	0	10	20
2201	2	2	8	12	12	12	2041,0241	6	6	40	4	20	36
3030,0330	3	3	22	1	10	19	2032,0232	9	11	48	20	36	52
3021,0321	5	6	26	10	19	28	2023,0223	10	14	40	46	52	58
3012,0312	5	9	20	25	28	31	2014,0214	7	11	16	70	58	46
3003,0303	3	6	4	40	31	22	2005,0205	4	6	0	64	46	28

Sign.	ζ_{9B}	ζ_{9A}	π_9'	λ_9'	μ_9'	ν_9'
1150	3	3	24	0	10	20
1141	6	6	36	6	20	34
1132	9	9	44	20	34	48
1123	10	10	40	42	48	54
1114	9	9	24	60	54	48
1105	5	5	0	67	48	29
1070,0170	3	3	24	0	10	20
1061,0161	6	6	48	0	20	40
1052,0152	12	12	76	10	40	70
1043,0143	18	20	92	40	70	100
1034,0134	20	24	80	88	100	112
1025,0125	16	20	40	130	112	94

Sign.	ζ_{9B}	ζ_{9A}	π_9'	λ_9'	μ_9'	ν_9'
1016,0116	9	11	0	131	94	57
1007,0107	5	6	0	80	57	34
0090	3	3	24	0	10	20
0081	6	6	48	0	20	40
0072	12	12	96	0	40	80
0063	24	24	152	20	80	140
0054	38	38	184	80	140	200
0045	44	44	160	176	200	224
0036	36	36	80	260	224	188
0027	20	20	0	262	188	114
0018	11	11	0	160	114	68
0009	6	6	0	96	68	40.

65. Die μ_9', ν_9' geben uns nun *die Ordnung* ζ_{10}' *der Fläche, die für* $[kl, m+1, n]_{10}$, $[k, l, m, n+1]_{10}$ *einer Geraden* b *oder* a *associirt ist.* Als ζ_{10}' finden wir sie in Tab. 5 Nr. 80. Diese Ordnung ist zwar dieselbe, ob man a oder b annimmt; aber die weiteren Eigenschaften der Fläche sind doch verschieden, z. B. die Vielfachheit der Grundelemente.

Wir bekommen die einer b oder a associirten Flächen nur für die Signaturen, bei denen m, n nicht beide 0 sind. Es fehlen also die Signaturen [5000], [0500]; [4100], [1400]; [3200], [2300].

Bemerken wir jedoch zuerst noch, dass *für die Signaturen* $n=0$, *die aus der Tabelle zu entnehmen sind,* $\zeta_{10}' = 10$ *ist, mit Ausnahme von* [3120], [1320]; [2220], *wo* $\zeta_{10}' = 9$, *bez.* $= 8$ *ist.* Für die Signaturen $[kl, m, 1]_{10}$ ist $\zeta_{10}' = 20$ mit 5 Ausnahmen; $\zeta_{10}' = 40$ bei $n = 2$ nur zweimal, $\zeta_{10}' = 80$ bei $n = 3$ nur einmal.

66. Wir nehmen die 3 Doppel-Signaturen vor, für welche uns die Tabelle ζ_{10}' nicht giebt.

Diese Signaturen [5000], [0500]; [4100], [1400]; [3200], [2300] können durch Auflösung behandelt werden. Wir nehmen zuerst

$$[4100] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 a_1 \\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 B_1 \end{matrix}$$

vor und indem wir $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2$ mit B_1 identisch, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ mit a_1 incident sein lassen, erhalten wir:

$$[4020] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1. \end{matrix}$$

Es sei $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1$ das zu [4010] hinzugefügte Paar in der Betrachtung der Nr. 9.; in Nr. 46. ist gesagt, dass für [4010] jedem Punkte B der Ebene $b_1 \mathfrak{B}_1$, also auch der Spur von b, jeder Punkt von $A_1 A_2 A_3$

associirt ist, und zwar durch eine Correlation, für welche diese beiden Ebenen singulär sind, also auch der Punkt $A = (a,\ A_1 A_2 A_3)$. In dieser Correlation zwischen den Bündeln der beiden Spuren A, B von a, b ist den beiden Ebenen von B, welche nach den durch $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$ gelegten Geraden $\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''$ gehen, weil sie die singuläre Ebene in demselben Strahle $B\mathfrak{B}_1$ treffen, nach den Eigenschaften dieser exceptionellen Correlation derselbe Strahl des Bündels A homolog. Wir erhalten also in seiner Spur in der Ebene der eindeutig bezogenen Curven einen weiteren vereinigten Punkt, und da 4 Combinationen möglich sind, vier solche. Folglich wird der Werth von μ_9' für den Fall der Identität von $\mathfrak{B}_1$ mit $\mathfrak{B}_2$ um 4 kleiner als wenn sie verschieden sind; ν_9' wird offenbar nicht von dieser Identität beeinflusst, und ebenso die ganze Formel 3b); für beide wird ja ein Paar conjugirter Geraden hinzugefügt; der Werth von μ_9' in 3b) ist derjenige, der dem allgemeinen Fall der Verschiedenheit von $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_1$ entspricht. Ist also $\zeta_{10}' = 10$ für (4020), so ist es 6 für [4100].

$$[1400] \qquad \begin{matrix} A_1\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ b_1 B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix}$$

wird verwandelt in:

$$[1320] \qquad \begin{matrix} A_1\, a_1\, a_2\, a_3\, \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 B_1 B_2 B_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1; \end{matrix}$$

für [1310] sind (Nr. 46.) $A_1 a_1$ und $B_2 B_3 \mathfrak{B}_1$, jeder Punkt mit jedem, durch exceptionelle Correlation mit diesen Ebenen als singulären associirt. Wir haben 3 Combinationen; da nun $\zeta_{10}' = 9$ für [1320], so ist es ebenfalls 6 für [1400].

Drittens

$$[3200] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1 B_2 \end{matrix}$$

wird aufgelöst in:

$$[3120] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\, b_2\, b_3 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1. \end{matrix}$$

Hier sind für [3110] zu den Punkten der Ebene $A_1 A_2 A_3$ durch exceptionelle Correlation mit singulären Ebenen, von denen die eine die $A_1 A_2 A_3$ ist, die andere durch $B_1 \mathfrak{B}_1$ geht, alle Punkte einer cubischen Fläche (Nr. 46., 38.), also dem Punkt $(a,\ A_1 A_2 A_3)$ drei Punkte von b associirt; für [3120] ist $\zeta_{10}' = 9$, also 6 für [3200].

Die einer Geraden b associirte Fläche 6. Ordnung wird durch die den verschiedenen Punkten von b entsprechenden Geraden erzeugt (Nr. 57.), also ist sie eine Regelfläche.

$$[2300] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2\, a_1\, a_2\, a_3 \\ b_1\, b_2 B_1 B_2 B_3 \end{matrix}$$

wird in

$$[2220] \quad \begin{matrix} A_1 A_2\, a_1\, a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\, b_2 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

aufgelöst. Jedem Punkte der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ ist für [2210] eine Fläche 2. Grades durch Correlation mit singulären Ebenen associirt (Nr. 46.), von denen die eine durch $A_1 A_2$ geht, die andere $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ ist, dem Punkte $(b,\ B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)$ also zwei Punkte auf a. Für [2220] ist $\zeta'_{10} = 8$, also 6 für [2300].

Die Fläche 6. Ordnung, die einer Geraden b associirt ist, enthält die Raumcurve $a_0{}^3$, welche der Fläche $\beta_0{}^2$ entspricht (Nr. 57.), doppelt.

Beim Uebergange von [4020] und [0420] zu [5000], [0500] findet keine Verringerung statt; ζ'_{10} ist also bei den letzteren ebenfalls 10.

67. *Die Vielfachheit der Grundelemente* a_i, $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{a}_i$ auf den Flächen ζ'_{10} ter Ordnung, die einer Geraden b associirt sind, ist aus Nr. 3. zu entnehmen. Man kann diese Vielfachheit, sowie auch die nach Angabe der genannten Nr. nicht zu ermittelnde Vielfachheit der Punkte A_i auch dadurch finden, dass man die Gerade a mit einem dieser Grundelemente incident sein lässt und dieselbe Untersuchung wie bei der Frage nach der Ordnung ζ'_{10} vornimmt, dabei aber von allen mit dem betreffenden Grundelemente incidenten Gebilden absieht. Dies könnte auch schon für die Flächen, die bei $\sigma = 9$ einem Punkte B associirt sind, gesagt werden. In einem andern analogen Falle (Nr. 81.) ist ein Beispiel gegeben. Ich habe die Untersuchung nur ausgeführt für die Signaturen, wo $n = 0$; *in den Fällen, wo* $\zeta'_{10} = 10$, *ergab sich der Grad der Vielfachheit von* A_i, a_i, $\mathfrak{A}_i$ *bez.* 6, 3, 3. *Ueber die Ausnahme-Signaturen giebt die folgende Tabelle Auskunft.*

Sign.	ζ'_{10}	A_i	a_i	$\mathfrak{A}_i$	
4100	6	3	3	.	
1400	6	2	2	.	
3200	6	2	3	.	
2300	6	3	2	.	
3120	9	5	3	3	
1320	9	5	3	2	
2220	8	4	3	2	(C. P. Nr. 18., 19.)

In C. P. Nr. 20. ist von einem andern Verfahren für die Signaturen $n = 0$ die Zahl ζ'_{10} und diese Vielfachheiten zu ermitteln die Rede; der Raum gestattet es nicht, auf dasselbe hier einzugehen, zumal es überdies hinter dem gebrauchten wesentlich zurücksteht.

VI $\sigma = 11$.

68. Wir gehen jetzt zur Aufstellung der Tabelle, welche von der Formel (Nr. 23.)

IV b) $$2\bar{\lambda}_9 = \dot{\lambda}_9 + \lambda_{9B}$$

herrührt; wir brauchen hier blos noch $\dot{\lambda}_9$ für $[k, l, m, 0]_9$ oder λ_{10B} für $[k, l, m+1, 0]_{10}$.

Tab. IV; $\sigma = 9$.

Sign.	λ_{9B}	$\dot{\lambda}_9$	$\bar{\lambda}_9$
4010	0	0	0
4001	8	0	4
0410	0	0	0
0401	0	0	0
3110	2	0	1
3101	3	1	2
1310	0	0	0
1301	6	0	3
2210	2	0	1
2201	3	1	2
3030, 0330	0	0	0
3021	2	0	1
3012	11	1	6
3003	12	6	9
0321	0	0	0
0312	6	0	3
0303	21	3	12
2130, 1230	0	0	0
2121	4	0	2
2112	6	2	4
2103	12	4	8
1221	2	0	1
1212	9	1	5
1203	11	5	8
2050, 0250	0	0	0
2041, 0241	0	0	0
2032	6	0	3
2023	17	3	10
2014	24	10	17
2005	19	17	18

Sign.	λ_{9B}	$\dot{\lambda}_9$	$\bar{\lambda}_9$
0232	2	0	1
0223	15	1	8
0214	32	8	20
0205	36	20	28
1150	0	0	0
1141	0	0	0
1132	6	0	3
1123	15	3	9
1114	23	9	16
1105	26	16	21
1070, 0170	0	0	0
1061, 0161	0	0	0
1052, 0152	0	0	0
1043	12	0	6
1034	32	6	19
1025	47	19	33
1016	45	33	39
1007	29	39	34
0143	8	0	4
0134	30	4	17
0125	55	17	36
0116	62	36	49
0107	39	49	44
0090	0	0	0
0081	0	0	0
0072	0	0	0
0063	0	0	0
0054	20	0	10
0045	62	10	36
0036	102	36	69
0027	107	69	88
0018	68	88	78
0009	42	78	60.

Die λ_{10B} für $n = 0$, soweit sie in dieser Tab. als $\dot{\lambda}_9$ nothwendig sind, sind alle null, da $k + l$ für sie < 5 ist (Nr. 30.).

Wir notiren das Resultat $\lambda_{10B} = 60$ für $[000\overline{10}]$ als folgenden Satz: *Es seien 2 Gruppen von je 10 Geraden gegeben:* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{10}$; $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{10}$; *gesucht solche Strahlbüschel* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *bei denen* $(A\alpha)$ $(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{10}) \barwedge (B\beta)(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{10})$; *hat* B *oder* β *eine feste Lage, so giebt es* 60 *solche Paare.*

Bei der directen Berechnung einiger anderen λ_{10B} ergaben sich folgende Sätze.

1) *Wenn* 6 *Gerade* $a_1 \cdots a_6$ *gegeben, so sind mit einer Geraden* $\mathfrak{a}$ *die Ebenen oder die Scheitel von* 4 *Strahlbüscheln incident, so dass* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist* (identisch mit Satz 2) in Nr. 39.).
2) *Wenn* $A_1, a_2 \cdots a_6$ *gegeben ist, so umhüllen die Ebenen der Büschel* $(A\alpha)$, *für welche* $(A\alpha)(A_1 a_2 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist, einen Kegel* 3. *Klasse.*
3) *Sind* $A_1 A_2 a_3 \cdots a_6$ *gegeben, so giebt es zwei Strahlbüschel* $(A\alpha)$, *für welche* $(A\alpha)(A_1 A_2 a_3 \cdots a_6)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist.*
4) *Wenn* $A_1 a_2 a_3 \cdots a_7$ *gegeben sind, so giebt es vier Strahlbüschel* $(A\alpha)$, *so beschaffen, dass* $(A\alpha)(A_1 a_2 \cdots a_7)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist.*
5) *Sind acht Gerade gegeben* $a_1 \cdots a_8$, *so giebt es sechs Strahlbüschel* $(A\alpha)$, *so dass* $(A\alpha)(a_1 \cdots a_8)$ *einem gegebenen Büschel projectiv ist.*

Z. B. den letzten Satz erhält man durch Zerlegung in $a_1 \cdots a_7$ und $a_1 \cdots a_5\, a_8$, wodurch sich eine Curve 8. und eine Fläche 4. Ordnung ergiebt, die ausser in den 6 Punkten und 5.4 Punkten, welche jene Curve mit der in Nr. 54. besprochenen cubischen Raumcurve und mit den 5 Geraden $a_1 \cdots a_5$ gemein hat, noch in 6 Punkten sich schneiden.

69. Wir gehen zur nächsten Tabelle, welche auf den Formeln

$$(4\text{a u. b}) \qquad 2\nu_{10} = \mu_{30} + \zeta_{10B}, \quad 2\mu_{10} = \nu_{10} + \lambda_{10B}$$

der Nr. 10. beruht.

Tab. 4; $\sigma = 10$.

Sign.	ζ_{10B}	λ_{10B}	μ_{10}	ν_{10}
5000, 0500	3	0	1	2
4100, 1400	3	0	1	2
3200	1	1	1	1
2300	3	0	1	2
4020, 0420	3	0	1	2
4011, 0411	6	0	2	4
4002	4	4	4	4
0402	12	0	4	8

Sign.	ζ_{10B}	λ_{10B}	μ_{10}	ν_{10}
3120, 1320	3	0	1	2
3111	4	1	2	3
3102	5	2	3	4
1311	6	0	2	4
1302	6	3	4	5
2220	3	0	1	2
2211	4	1	2	3
2202	5	2	3	4

Sign.	ξ_{10B}	λ_{10B}	μ_{10}	ν_{10}
3040,0340	3	0	1	2
3031,0331	6	0	2	4
3022	10	1	4	7
3013	9	6	7	8
3004	6	9	8	7
0322	12	0	4	8
0313	18	3	8	13
0304	15	12	13	14
2140,1240	3	0	1	2
2131,1231	6	0	2	4
2122	8	2	4	6
2113	10	4	6	8
2104	8	8	8	8
1222	10	1	4	7
1213	11	5	7	9
1204	11	8	9	10
2060,0260	3	0	1	2
2051,0251	6	0	2	4
2042,0242	12	0	4	8
2033	18	3	8	13
2024	19	10	13	16
2015	14	17	16	15
2006	9	18	15	12
0233	22	1	8	15
0224	29	8	15	22
0215	26	20	22	24
0206	16	28	24	20
1160	3	0	1	2
1151	6	0	2	4
1142	12	0	4	8

Sign.	ξ_{10B}	λ_{10B}	μ_{10}	ν_{10}
1133	18	3	8	13
1124	21	9	13	17
1115	19	16	17	18
1106	12	21	18	15
1080,0180	3	0	1	2
1071,0171	6	0	2	4
1062,0162	12	0	4	8
1053,0153	24	0	8	16
1044	36	6	16	26
1035	40	19	26	33
1026	33	33	33	33
1017	21	39	33	27
1008	13	34	27	20
0144	40	4	16	28
0135	50	17	28	39
0126	45	36	39	42
0117	28	49	42	35
0108	17	44	35	26
$00\overline{10}0$	3	0	1	2
0091	6	0	2	4
0082	12	0	4	8
0073	24	0	8	16
0064	48	0	16	32
0055	76	10	32	54
0046	90	36	54	72
0037	78	69	72	75
0028	49	88	75	62
0019	30	78	62	46
$000\overline{10}$	18	60	46	32.

70. Die Tab. IV. giebt nicht die λ_{10B} für die Signaturen $m = n = 0$ dieser Tabelle, für welche auch $k + l$ nicht mehr < 5 ist. Also ist noch darzuthun, dass auch für diese $\lambda_{10B} = 0$, ausser bei [3200], wo es 1 ist. Aber *bei allen Signaturen* $[k, l, m, 0]_{10}$, *wo überhaupt einem* B *eine cubische Raumcurve associirt ist*, *sind sämmtliche Punkte derselben durch allgemeine Correlation associirt*, in Folge der bekannten Eigenschaft dieser Curve.

In dem Falle [3200], wo dem B eine Grade a^1 der Congruenz $[a_1, a_2]$ associirt ist, macht die Spur derselben in der Ebene α_{123} eine

Ausnahme; diese ist dem B durch Correlation mit α_{123} und BB_1B_2 als singulären Ebenen associirt.

Die μ_{10}, ν_{10} geben also *die Zahl* $\zeta_{11\,B}$ *der einem* B *für* $[k, l, m+1, n]_{11}$, *bez.* $[k, l, m, n+1]_{11}$ *associirten Punkte.*

Als $\zeta_{11\,B}$ finden wir diese Zahlen in der Tab. 6 in Nr. 90.

Aus der Tabelle 4. geht hervor, dass *jedem* B *für* $[klm0]_{11}$ *in allen Signaturen ein und nur ein Punkt associirt ist,* wie wir oben in Nr. 41. gefunden haben; ist $n = 1$, so sind 2 Punkte associirt, mit Ausnahme von [3201], wo blos 1 associirt ist; ferner, bei $n = 2$ ist die Zahl der dem B associirten Punkte 4, ausser bei [3112] und [2212], wo sie 3 ist, u. s. w.

71. *Die Resultate für* $n = 0, 1$ *lassen sich sehr einfach noch auf folgende Weise finden.* Wir sehen zunächst von [3210] und [3201] ab. Es sei zuerst $n = 0$, also $m > 0$. Wir scheiden aus $[k, l, m, 0]_{11}$ ein Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ aus, so dass sich $[k, l, m-1, 0]_{10}$ ergiebt. Hierfür ist dem B eine cubische Raumcurve a^3 associirt. Dem Strahle $B\mathfrak{B}_1$ sind in den Bündeln der verschiedenen associirten Punkte A (auf a^3) Ebenen homolog, welche alle durch eine feste Sehne der Curve a^3 gehen. Also wird auch eine und nur eine Ebene dieses Büschels durch $\mathfrak{A}_1$ gehen und auf a^3 die einzige Lage von A markiren, die dem B auch für $[klm0]_{11}$ associirt ist. Sollte die Sehne selbst durch $\mathfrak{A}_1$ gehen, so würde die ganze Curve a^3 dem B auch noch für $[klm0]_{11}$ associirt sein. Wir werden einen Ort 1. Stufe solcher Punkte B finden (Nr. 84.). Wird dann noch $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ hinzugefügt, so findet man für einen solchen Punkt B auf a^3 wieder einen einzigen, der auch noch für $[k, l, m+1, 0]_{12}$ associirt ist. (C. P. Nr. 22, 36.)

Ist aber $n = 1$, so scheiden wir dies eine Paar conjugirter Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ aus. Für $[klm0]_{10}$ ist dem B eine cubische Raumcure a^3 associirt. In die Ebene $B\mathfrak{b}_1$ legen wir 2 Strahlen (durch B); die ihnen in den Bündeln der associirten Punkte A homologen Ebenen bilden um zwei Sehnen der Curve projective Büschel; die Schnittlinie entsprechender Ebenen, welche je der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ homolog ist, erzeugt mithin eine Regelschaar; und da zwei Gerade derselben die $\mathfrak{a}_1$ treffen, so geben uns die beiden Punkte, die sie auf a^3 markiren, die zwei Punkte, welche dem B auch noch für $[k, l, m, 1]_{11}$ associirt sind.

Hieraus ergiebt sich allgemein:

Ist einem Punkte B *für irgend eine Signatur* $[klmn]$ *eine cubische Raumcurve associirt, so hat er für* $[k, l, m+1, n]$ *einen, für* $[k, l, m, n+1]$ *zwei associirte Punkte,* natürlich auf dieser Curve gelegen.

Für [3200] correspondirt einem B eine Gerade a^1 der Congruenz $[a_1a_2]$. Es wurde auch schon bemerkt, dass die Bündel für die verschiedenen Lagen von A auf a^1 denselben Schnitt mit der Ebene α_{123} haben (Nr. 57.). Wird nun zu [3200] $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zugefügt, so entspricht dem

Strahle $B\mathfrak{B}_1$ eine feste Gerade $\mathfrak{a}^1$ in dem ebenen Systeme (Felde) von α_{123}, das ja ebenfalls correlativ zum Bündel B ist; durch diese Gerade und den Punkt $\mathfrak{A}_1$ geht eine Ebene und diese markirt auf a^1 den einen Punkt A, für den die zu $B\mathfrak{B}_1$ homologe Ebene durch $\mathfrak{A}_1$ geht, also den dem B für [3210] associirten. (Vergl. Nr. 58.) (C. P. Nr. 22.) Liegt aber B in der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 = \beta_0$, so dass die 3 Strahlen B (B_1, B_2, $\mathfrak{B}_1$) in dieselbe Ebene fallen, so müssen ihre entsprechenden Geraden im Felde α_{123} durch den nämlichen Punkt gehen; die ersten beiden derselben sind aber die Spuren der Ebenen A (a_1, a_2), welche, da A auf a^1 liegt, sich in der Spur A^1 von a^1 schneiden; durch diese muss auch die dem Strahle $B\mathfrak{B}_1$ entsprechende Gerade $\mathfrak{a}^1$ gehen, so dass sie a^1 schneidet. Aus der Correlation folgt dann, dass (A^1, α_{123}) $(A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{a}^1) \overline{\wedge} (B, \beta_0)$ $(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)$. Dann kann es Punkte B in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ geben, für welche diese Gerade so liegt, dass die durch sie und $\mathfrak{A}_1$ gelegte Ebene die ganze a^1 enthält. Einem solchen Punkte würde auch für [3210] die ganze Gerade a^1 associirt sein.

72. Wo liegen diese Punkte B in der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$, für welche die Ebene $a^1 \mathfrak{a}^1$ durch den Punkt $\mathfrak{A}_1$ geht?

Wir bewegen B auf einer Geraden b in β_0, so beschreibt der Punkt A^1, wenn er der Bedingung genügt, dass

(1) $$(A^1, \alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2) \overline{\wedge} (B, \beta_0)\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2),$$

eine Curve 5. Ordnung, welche durch A_1, A_2, A_3 und die Spuren von a_1, a_2 doppelt geht (Eb. Proj. Nr. 10.). Weiter, wenn $\mathfrak{A}'$ ein beliebiger Punkt in α_{123} ist, so erzeugen die Punkte A^1, B in α_{123}, β_0, so beschaffen, dass

(2) $$(A^1, \alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{A}') \overline{\wedge} (B, \beta_0)\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1),$$

je eine Curve 3. Ordnung (Eb. Proj. Nr. 14.), von denen die in β_0 also die b dreimal trifft; daraus folgt, dass die durch A^1 gehende Gerade $\mathfrak{a}^1$, welche der Projectivität:

(3) $$(A^1, \alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{a}^1) \overline{\wedge} (B, \beta_0)\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)$$

genügt, während B die b durchläuft, dreimal durch $\mathfrak{A}'$ geht, folglich eine Curve 3. Klasse umhüllt.

Die Geraden a^1 selbst stützen sich während dieser Bewegung von B auf die oben beschriebene Curve 5. Ordnung und auf a_1, a_2, welche durch Doppelpunkte dieser Curve gehen; folglich erzeugen sie eine Fläche 6. Grades. Je eine Erzeugende dieser Fläche und eine Tangente der Curve 3. Klasse sind zu derselben Lage von B auf b gehörige Geraden a^1 und $\mathfrak{a}^1$; sie schneiden sich in einem Punkte A^1 der Curve 5. Ordnung, folglich umhüllen ihre Verbindungsebenen einen Torsus von der Klasse $6 + 3 - 5 = 4$, wie man erkennt, wenn man einen Schnitt mit einer Ebene macht: man erhält dann eine Gerade und eine Curve 6. Ordnung so auf einander bezogen, dass jedem Punkte der ersteren 3 Punkte der letzteren, jedem der letzteren 1 der ersteren entspricht, in den 5 Spuren der Curve 5. O. aber entsprechende Punkte sich vereinigen. 4 Ebenen des Torsus gehen durch $\mathfrak{A}_1$, vier Punkte B giebt es also auf b, die der gestellten Forderung genügen.

Demnach giebt es in der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ *eine Curve* 4. *Ordnung* $\overline{b}^4$ *von Punkten* B, *denen auch für* [3210] *dieselbe Gerade* a^1 *associirt ist, wie schon für* [3200] (cf. Nr. 58.). Dass sie durch den Punkt $\mathfrak{B}_1$ einfach geht, ist unmittelbar ersichtlich. Fällt B in einen B_i oder in die Spur einer b_i, so kann sich A^1 auf einem Kegelschnitt bewegen, weil in der Projectivität ein Paar homologer Strahlen wegfällt; $\mathfrak{a}^1$ erzeugt dabei einen Strahlbüschel und a^1 eine Regelfläche 3., bez. 2. Grades; der Torsus ist demnach von der Klasse 2, bez. 1; also die Punkte B_1, B_2 sind doppelt, die Spuren von b_1, b_2, b_3 einfach auf unserer Curve (C. P. Nr. 32.).

Tritt nun noch ein Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$ zu [3210] hinzu, so dass sich $[3220]_{12}$ ergiebt, so kann man nun wieder schliessen, dass *einem Punkte* B *von* $\overline{b}^4$ *für* [3220] *ein Punkt der* a^1 *associirt ist.* Ist aber $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ identisch, so dass sich die Signatur [3300] ergiebt, so ist die dem $B\mathfrak{B}_2 \equiv B\mathfrak{B}_1$ homologe Gerade im Felde der Ebene α_{123} die $\mathfrak{a}^1$, welche mit a^1 eine feste Ebene erzeugt, die zu $B\mathfrak{B}_1$ in den verschiedenen Bündeln der dem B auch noch für [3210] associirten Punkte A auf a^1 homolog ist und wegen ihrer Unveränderlichkeit im Allgemeinen nicht in die Lage kommen kann, durch $\mathfrak{A}_2$ zu gehen. *Für* [3300] *haben also die Punkte der Curve* 4. *Ordnung* b^1 *keine associirten Punkte.* (C. P. Nr. 37. 38.)

73. Wir fügen, indem B wieder ganz freie Lage hat, zu [3200] das Paar conjugirter Geraden $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ zu, so dass wir haben [3201]; der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ ist in dem ebenen Systeme von α_{123} ein Punkt $\mathfrak{A}^1$ homolog, durch den dann der Strahl, der zu $B\mathfrak{b}_1$ in den verschiedenen Bündeln der Punkte A auf a^1 homolog ist, stets gehen muss; *es giebt also einen und nur einen Punkt auf* a^1, für den er auch $\mathfrak{a}^1$ trifft, *der also dem* B *auch noch für* [3201] *associirt ist,* womit die eine Abweichung bei $n = 1$ sich erklärt.

Ebenso ergiebt sich, dass *jedem Punkte* B *der Curve* $\overline{b}^4$ *auch für* [3211] *ein Punkt der Geraden* a^1 *associirt* ist, *welche ihm für* [3210] *correspondirt.*

Jeder Geraden a^1 der Congruenz $[a_1 a_2]$ ist eine cubische Raumcurve b^3 für [3200] associirt. Wir bewegen B auf derselben, wodurch eben der Bündel zu sich collinear und zu dem Bündel jedes Punktes von a^1 correlativ bleibt; für jede Lage von B auf b^3 construiren wir den der Ebene $B\mathfrak{b}_1$ entsprechenden Punkt $\mathfrak{A}^1$ in α_{123}; derselbe erzeugt dort einen Kegelschnitt. Denn es seien A', A'' zwei beliebige Punkte in

α_{123}, so drehen sich die Ebenen, welche den letzteren in den verschiedenen Bündeln B homolog sind, um Sehnen der b^3 und beschreiben projective Ebenenbüschel; der der Geraden $A'A''$ homologe Strahl beschreibt demnach die durch dieselben erzeugte Regelschaar, und die den verschiedenen Punkten von $A'A''$ in den verschiedenen Bündeln entsprechenden Ebenen sind die Tangentialebenen des Trägerhyperboloids; da zwei durch $\mathfrak{b}_1$ gehen, so giebt es zwei Punkte $\mathfrak{A}^1$ auf $A'A''$.

74. Wir haben weiter bei [3200] in B eine cubische Raumcurve b_0^3 gefunden, welcher eine ganze Fläche 2. Grades α_0^2 associirt ist (Nr. 57.). Fügen wir $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zu, so ergiebt sich die cubische Raumcurve, welche diese Fläche mit derjenigen — ebenfalls 2. Gr. —, die einem B von b_0^3 für [3110] associirt ist, ausser a_1 gemeinsam hat, als die dem B für [3210] associirte, weil für [3100] keine dem B porismatisch associirte Curve existirt. (Nr. 60.)

Also *jedem Punkte B von b_0^3 ist auch noch für* [3210] *eine cubische Raumcurve associirt.*

Hieraus folgt wieder, dass *wenn nochmals $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ oder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ hinzugefügt wird, also für* [3220], *bez.* [3211] *einem solchen B nun noch ein Punkt, bezw. zwei Punkte associirt sind.*

75. *Sei B_0 nun der dritte Schnittpunkt von b_0^3 mit* $\beta_0 = B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$. Es giebt ferner in α_{123} einen Punkt A_0, so beschaffen, dass $(A_0 \alpha_{123})$ $(A_1 A_2 A_3 a_1 a_2) \barwedge (B_0 \beta_0)$ $(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2)$ (Ebene Proj. Nr. 4.); lassen wir in den Bündeln A_0, B_0 die Ebenen α_{123} und β_0 — die auch durch $\mathfrak{B}_1$ geht — singuläre Ebenen sein, so sind die Bündel in Folge dieser Projectivität correlativ; folglich liegt A_0 auf der cubischen Raumcurve, welche für [3210] dem B_0 associirt ist, doch wegen dieser Correlation mit singulären Ebenen kann es keine allgemeine cubische Raumcurve sein (Nr. 70.). In der That, wegen der Association von A_0 zu B_0 muss ersterer auf der Fläche α_0^2 liegen, also auf deren Schnitt mit α_{123}, der durch $A_1 A_2 A_3$ und die Spuren von $a_1 a_2$ geht; aber deshalb bleibt die obige Projectivität auch bestehen, wenn A_0 auf diesem Kegelschnitt verschoben wird. Daraus folgt einerseits, dass der Punkt B_0 in Bezug auf die beiden Gruppen von je 5 Punkten in α_{123} und β_0 nicht blos einen, sondern sämmtliche Punkte des Kegelschnitts durch die Gruppe in α_{123} zu seinen correspondirenden hat, dass er also der Punkt ist, den ich in der Eb. Proj. Nr. 6. den der Gruppe in β_0 verbundenen Punkt*) genannt habe.

Anderseits ergiebt sich eben der Kegelschnitt, in dem α_{123} und α_0^2 sich schneiden, als Bestandtheil der dem B_0 für [3210] associirten cubischen Raumcurve, so dass der zweite Bestandtheil, der noch a_1, a_2

---

*) β_0 — hier eine Ebene — war zufällig dort der Name des verbundenen Punktes selbst.

je einmal zu treffen hat, eine Gerade a^1 der Congruenz $[a_1 a_2]$ ist; weshalb B_0 *auf der Curve* $\bar{b}^4$ *liegt.*

Nun sind wir in der Lage, *den Grad der Fläche der* a^1 zu ermitteln, *welche den Punkten von* b^4 *associirt sind*; legen wir nämlich in die Ebene α_{123} eine Gerade, so entspricht derselben für die beiden Gruppen in α_{123} und β_0 eine Curve 5. Ordnung, welche durch die 5 Punkte in β_0 und durch den ihnen verbundenen B_0 doppelt geht (Eb. Proj. 10., wie oben), also die Curve b^1, die von diesen 6 Punkten die B_1, B_2 doppelt, die andern einfach enthält (Nr. 72.), noch in 4 Punkten trifft; woraus hervorgeht, dass die den Punkten von $\bar{b}^4$ entsprechenden Punkte A^1, die Spuren der a^1 in α_{123}, eine Curve 4. Ordnung erzeugen, von der man leicht erkennt, wenn man die obige Gerade durch die Spuren von a_1, a_2 legt, dass sie durch diese einmal geht. Daraus ergiebt sich, dass die fraglichen a^1, weil sie diese Curve a_1, a_2 treffen, *eine Fläche vom* 4. *Grade* erzeugen. Da einer Geraden a für [3200] eine Fläche 6. Ordnung β^6 associirt ist, auf welcher die B_1, B_2 dreifach, die b_1, b_2, b_3 und die Curve $b_0{}^3$ doppelt liegen (Nr. 66., 67.), so hat dieselbe mit $\bar{b}^4$ noch 4 Punkte gemein, was auch zu dem eben gewonnenen Grade führt.

76. Da also ζ_{11B} *für alle Signaturen* $[klm0]_{11}$ den Werth 1 hat, so *sind die beiden Räume* A *und* B *eindeutig bezogen.* Bei [3201] entspricht wohl jedem B ein A, aber jedem A entsprechen zwei B. Im ersteren Falle erhalten wir *zwei homaloidale Systeme* und werden in Folge der genaueren Erforschung solcher Systeme noch etwas tiefer in die Sache eindringen können. Wir gehen aber nun erst zur Aufstellung der beiden nächsten Tabellen, welche uns überhaupt die Ordnungen ζ'_{11B} der einer Geraden b des Raums B associirten Curve, bez. die Ordnung ζ''_{11B} der einer Ebene β associirten Fläche von A geben; wir erinnern daran, dass $\zeta''_{11A} = \zeta'_{11B}$, $\zeta''_{11B} = \zeta'_{11A}$ (Nr. 11.).

77. Wir geben zuerst die Tabelle, welche mit Hilfe der Formeln (Nr. 24.)

$$\text{(V a u. b)} \qquad 2\dot{\pi}_9 = \bar{\pi}_9' + \Theta'_{9B}\,; \quad 2\bar{\lambda}_9' = \dot{\lambda}_9' + \Theta'_{9B} + \lambda_{9B} + \lambda'_{9B}$$

sich ergiebt.

Tab. V; $\sigma = 9$;

Sign.	Θ'_{9B}	$\dot{\pi}_9'$	$\bar{\pi}_9'$	λ_{8B}	λ'_{9B}	$\dot{\lambda}_9'$	$\bar{\lambda}_9'$
4010	12	20	28	0	4	0	8
4001	48	28	8	8	16	8	40
0410	12	20	28	0	4	0	8
0401	32	28	24	0	16	8	28

Sign.	Θ'_{9B}	$\dot{\pi}_9'$	$\bar{\pi}_9'$	λ_{9B}	λ'_{9B}	$\dot{\lambda}_9'$	$\bar{\lambda}_9'$
3110	18	17	16	2	6	2	14
3101	14	16	18	3	9	14	20
1310	14	17	20	0	6	2	11
1301	20	20	20	6	9	11	23
2210	8	14	20	2	4	4	9
2201	24	20	16	3	12	9	24
3030, 0330	3	20	37	0	1	0	2
3021	30	37	44	2	10	2	22
3012	62	44	26	11	25	22	60
3003	48	26	4	12	40	60	80
0321	26	37	48	0	10	2	19
0312	52	48	44	6	25	19	51
0303	72	44	16	21	40	51	92
2130, 1230	9	20	31	0	3	0	6
2121	26	31	36	4	10	6	23
2112	38	36	34	6	21	23	44
2103	52	34	16	12	30	44	69
1221	22	31	40	2	10	6	20
1212	44	40	36	9	21	20	47
1203	48	36	24	11	30	47	68
2050, 0250	0	20	40	0	0	0	0
2041, 0241	12	40	68	0	4	0	8
2032	56	68	80	6	20	8	45
2023	100	80	60	17	46	45	104
2014	100	60	20	24	70	104	149
2005	40	20	0	19	64	149	136
0232	48	68	88	2	20	8	39
0223	96	88	80	15	46	39	98
0214	120	80	40	32	70	98	160
0205	80	40	0	36	64	160	170
1150	0	20	40	0	0	0	0
1141	18	40	62	0	6	0	12
1132	48	62	76	6	20	12	43
1123	82	76	70	15	42	43	91
1114	100	70	40	23	60	91	137
1105	80	40	0	26	67	137	155
1070, 0170	0	20	40	0	0	0	0
1061, 0161	0	40	80	0	0	0	0

Sign.	Θ'_{9B}	$\dot{\pi}_9'$	$\bar{\pi}_9'$	λ_{9B}	λ'_{9B}	$\dot{\lambda}_9'$	$\bar{\lambda}_9'$
1052,0152	30	80	130	0	10	0	20
1043	104	130	156	12	40	20	88
1034	182	156	130	32	88	88	195
1025	200	130	60	47	130	195	286
1016	120	60	0	45	131	286	291
1007	0	0	0	29	80	291	200
0143	96	130	164	8	40	20	82
0134	178	164	150	30	88	82	189
0125	220	150	80	55	130	189	297
0116	160	80	0	62	131	297	325
0107	0	0	0	39	80	325	222
0090	0	20	40	0	0	0	0
0081	0	40	80	0	0	0	0
0072	0	80	160	0	0	0	0
0063	60	160	260	0	20	0	40
0054	200	260	320	20	80	40	170
0045	360	320	280	62	176	170	384
0036	420	280	140	102	260	384	583
0027	280	140	0	107	262	583	616
0018	0	0	0	68	160	616	422
0009	0	0	0	42	96	422	280.

78. Für die Berechnung von Θ'_{9B}, der Zahl der Axen-Ebenen-Correlationen, bei denen die Axe b' mit einer gegebenen Geraden incident ist, während die a' keiner Bedingung unterworfen ist, oder dem Grad der von den Axen b' der bei $\sigma = 9$ möglichen Axen-Ebenen-Correlationen gebildeten Fläche, scheint diesmal kein Beispiel mehr nothwendig.

Es sind ferner die $\dot{\pi}_9'$ und $\dot{\lambda}_9'$ für die Signaturen $[klm0]_9$, also die π'_{10B} und λ'_{10B} für $[k,\ l,\ m+1,\ 0]_{10}$ zu ermitteln, d. i. die Zahl der Axen-Correlationen für diese Signaturen, bei denen a' keiner Bedingung unterworfen ist, b' aber b treffen soll, oder der Grad der Fläche der Axen b' von Axen-Correlationen, welche bei $\sigma = 10$ möglich sind, und die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen, bei denen der eine Scheitel auf b, der andere in α liegt, oder die Ordnung der Curve der durch eine solche Correlation den Punkten auf b associirten Punkte, oder der Fläche der den Punkten von α associirten Punkte.

Für die Berechnung von π'_{10B} geben wir ebenfalls kein Beispiel; für $[00\overline{10}0]$ verweisen wir auf Nr. 59. der „R. Project.“.

Die π'_{10B} Axen a', deren associirte b' die Gerade b treffen, liegen auf der der Geraden b associirten Fläche; für die Signaturen $n = 0$, wo $\zeta'_{10B} = 10$, ist $\pi'_{10B} = 20$ und unter diesen 20 Geraden a' befinden sich die etwa vorkommenden Geraden $(2A_i)$, $(A_i, 2a_i)$, $(4a_i)$ doppelt und gehören also auch der genannten Fläche doppelt an.

Für die 6 Ausnahms-Signaturen $n = 0$ (Nr. 67.) giebt die folgende Tabelle Auskunft über die Zahl π'_{10B} der Axen a' und die Vielfachheit der genannten Geraden unter ihnen:

Sign.	π'_{10B}	$(2A_i)$	$(4a_i)$	$(A_i, 2a_i)$
4100	8	0	.	.
1400	8	.	2	0
3200	8	0	.	2
2300	12	0	.	1
3120	17	1	.	.
1320	17	.	.	2
2220	14	0	.	2

(C. P. Nr. 19.)

79. Was die λ'_{10B} der Signaturen $n = 0$ anlangt, so wissen wir aus Nr. 30., dass sie 0 sind, sobald $k + l < 4$.

λ'_{10B} ist ferner 0 bei [5000], [0500], [4020], [0420]. Bei [4100] werden z. B. $A_1 A_2 A_3$ und $b_4 A_1$ singuläre Ebenen α', β' und wenn A und B in ihnen liegen, so muss sein:

$$(A\alpha')\,(A_1 A_2 A_3 a_1) \;\overline{\wedge}\; (B\beta')\,(b_1 b_2 b_3 B_1).$$

Fällt also B auf b, d. h. in die Spur $b\beta'$, so beschreibt A einen Kegelschnitt, von dem zwei Punkte in α liegen, oder bewegt sich A auf dem Schnitt $\alpha\alpha'$, so durchstreicht B die Ebene β' zweimal. Die vier Combinationen geben $\lambda'_{10B} = 8$.

Bei [1400] ergiebt sich genau dasselbe Resultat.

$$[3200] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_1 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 B_2; \end{matrix}$$

$\alpha' : A_1 A_2 A_3$; $\beta' : B_1 B_2$; $(A\alpha')\,(A_1 A_2 A_3 a_1 a_2) \;\overline{\wedge}\; (B\beta')\,(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2)$. Wird A auf einer Geraden $\alpha\alpha'$ in α' bewegt, so erzeugen in einer festen Ebene durch $B_1 B_2$ die Punkte B eine Curve 5. Ordnung (Eb. Project. Nr. 10.). Legen wir B auf die Gerade $B_1 B_2$, so dass im zweiten Büschel die beiden letzten Strahlen sich vereinigen, so müssen es die im ersten auch thun; d. h. A muss dann auf $\alpha\alpha'$ der Schnitt der Verbindungslinie der Spuren $a_1\alpha'$, $a_2\alpha'$ sein. Nun genügt für diese Punkte A, B die Projectivität:

$$(A\alpha')\,(A_1 A_2 A_3 a_1) \;\overline{\wedge}\; (B\beta')\,(b_1 b_2 b_3 B_1);$$

durch Dualisirung der B-Figur erhält man in einer Ebene 3 feste Punkte und eine feste Gerade, auf der sich ein Punkt bewegt; es giebt nun eine Lage desselben, wo die Strahlen aus ihm nach den festen Punkten und die feste Gerade selbst einen einem gegebenen Büschel projectiven Büschel erzeugen. Also wird der letzten Projectivität nur durch eine Ebene β' genügt. Daraus folgt, dass die Punkte B, während A die $\alpha\alpha'$ durchläuft, eine Fläche 6. Ordnung erzeugen, auf welcher B_1B_2 einfach ist, oder dass, wenn B eine Gerade b durchläuft, A in α_{123} eine Curve 6. Ordnung beschreibt, welche also den vollen Schnitt von α_{123} mit der Fläche 6 Ordnung bildet, die der b für [3200] associirt ist; demnach $\lambda'_{10B} = 6$.

Nehmen wir a und β, statt b und α an, so kann A auf a nur die eine Lage $a\alpha'$ annehmen und der erste Büschel wird fest; wir wissen nun aus Nr. 54., dass dann B eine cubische Raumcurve beschreibt. Mithin ist für [3200] $\lambda'_{10A} = 3$, oder $\lambda'_{10B} = 3$ für [2300].

In [3120], [1320], [2220] werden beide Ebenen α', β' fest und sind leicht zu finden; wir erhalten bez. $\lambda'_{10B} = 2, 2, 4$.

Das Resultat $\lambda'_{10B} = 280$ für $[000\overline{10}]$ kann auch so interpretirt werden:

Es sind zwei Gruppen von je 10 Geraden gegeben: $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{10}$; $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{10}$; *und man sucht Strahlbüschel* $(A\alpha)$, $B\beta)$, *so beschaffen, dass*

$$(A\alpha)\,(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{10}) \barwedge (B\beta)\,(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{10});$$

so erzeugen, wenn B eine Gerade durchläuft oder β um eine Gerade sich dreht, die Punkte A eine Curve 280ter Ordnung und die zugehörigen Ebenen α einen Torsus derselben Klasse; oder wenn B eine Ebene durchläuft, oder β um einen Punkt sich dreht, so erzeugen die A und α eine Fläche 280ter Ordnung, bez. Klasse.

80. Wir gehen jetzt zur Tabelle 5 über, zu welcher die Formeln (5 a u. b) $2\nu_{10}' = \mu_{10}' + \pi'_{10B} + \zeta_{10}' + \zeta_{10B}$; $2\mu_{10}' = \nu_{10}' + \lambda'_{10B}$ (Nr. 11.) führen.

Tab. 5; $\sigma = 10$;

Sign.	ζ_{10B}	ζ'_{10}	π'_{10B}	λ'_{10B}	μ'_{10}	ν'_{10}
5000,0500	3	10	20	0	11	22
4100,1400	3	6	8	8	11	14
3200	1	6	8	6	9	12
2300	3	6	12	3	9	15
4020,0420	3	10	20	0	11	22
4011,0411	6	16	28	8	22	36
4002	4	16	8	40	36	32
0402	12	16	24	28	36	44
3120,1320	3	9	17	2	11	20
3111	4	12	16	14	20	26
3102	5	15	18	20	26	32
1311	6	12	20	11	20	29
1302	6	15	20	23	29	35
2220	3	8	14	4	11	18
2211	4	12	20	9	18	27
2202	5	12	16	24	27	30
3040,0340	3	10	20	0	11	22
3031,0331	6	19	37	2	22	42
3022	10	28	44	22	42	62
3013	9	31	26	60	62	64
3004	6	22	4	80	64	48
0322	12	28	48	19	42	65
0313	18	31	44	51	65	79
0304	15	22	16	92	79	66
2140,1240	3	10	20	0	11	22
2131,1231	6	17	31	6	22	38

Sign.	$\zeta_{10\,B}$	ζ'_{10}	$\pi'_{10\,B}$	$\lambda'_{10\,B}$	μ'_{10}	ν'_{10}
2122	8	24	36	23	38	53
2113	10	27	34	44	53	62
2104	8	24	16	69	62	55
1222	10	24	40	20	38	56
1213	11	27	36	47	56	65
1204	11	24	24	68	65	62
2060,0260	3	10	20	0	11	22
2051,0251	6	20	40	0	22	44
2042,0242	12	36	68	8	44	80
2033	18	52	80	45	80	115
2024	19	58	60	104	115	126
2015	14	46	20	149	126	103
2006	9	28	0	136	103	70
0233	22	52	88	39	80	121
0224	29	58	80	98	121	144
0215	26	46	40	160	144	128
0206	16	28	0	170	128	86
1160	3	10	20	0	11	22
1151	6	20	40	0	22	44
1142	12	34	62	12	44	76
1133	18	48	76	43	76	109
1124	21	54	70	91	109	127
1115	19	48	40	137	127	117
1106	12	29	0	155	117	79

Sign.	$\zeta'_{10\,B}$	ζ'_{10}	$\pi'_{10\,B}$	$\lambda'_{10\,B}$	μ'_{10}	ν'_{10}
1080,0180	3	10	20	0	11	22
1071,0171	6	20	40	0	22	44
1062,0162	12	40	80	0	44	88
1053,0153	24	70	130	20	88	156
1044	36	100	156	88	156	224
1035	40	112	130	195	224	253
1026	33	94	60	286	253	220
1017	21	57	0	291	220	149
1008	13	34	0	200	149	98
0144	40	100	164	82	156	230
0135	50	112	150	189	230	271
0126	45	94	80	297	271	245
0117	28	57	0	325	245	165
0108	17	34	0	222	165	108
$00\overline{10}0$	3	10	20	0	11	22
0091	6	20	40	0	22	44
0082	12	40	80	0	44	88
0073	24	80	160	0	88	176
0064	48	140	260	40	176	312
0055	76	200	320	170	312	454
0046	90	224	280	384	454	524
0037	78	188	140	583	524	465
0028	49	114	0	616	465	314
0019	30	68	0	422	314	206
$000\overline{10}$	18	40	0	280	206	132.

81. Die μ_{10}', ν_{10} geben also *die Ordnung* $\zeta'_{11\,B}$ *der Curve, welche einer Geraden* b *für* $[k, l, m+1, n]_{11}$ *bez.* $[k, l, m, n+1]_{11}$ *associirt ist, oder die Ordnung* $\zeta''_{11\,A}$ *der Fläche, welche dafür einer Ebene* α *correspondirt*; als $\zeta'_{11\,B}$ finden wir sie in Tab. 6 von Nr. 90.

Die Ordnung des Gebildes, welches für die Signatur $[klmn]_{11}$ einer Geraden a oder einer Ebene β associirt ist, ist gleich der Ordnung des zu l oder α associirten Gebildes für $[l, k, m, n]_{11}$ (Nr. 2.).

Aus der Tabelle geht hervor, dass *bei allen Signaturen* $\sigma = 11$, $n = 0$, *wo also eine eindeutige Transformation statt hat, einer Geraden, gleichgültig ob* b *oder* a, *eine Curve* 11. *Ordnung* a^{11}, b^{11}, *und also einer Ebene* α *oder* β *eine Fläche* 11. *Ordnung* β^{11}, α^{11} *correspondirt, mit Ausnahme der zu einander gehörigen Signaturen* [3210] *und* [2310], *wo an die Stelle der* 11. *die* 9. *Ordnung tritt.*

Aus Nr. 3., 4. folgt, dass *auf den Flächen* 11. *Ordnung die Geraden* a_i (b_i) *und die Punkte* $\mathfrak{A}_i$ ($\mathfrak{B}_i$) *dreifach sind und die Curven* 11.

Ordnung durch die A_i (B_i) *dreimal gehen und die Geraden* a_i (b_i) *siebenmal treffen. Die Flächen 9. Ordnung* α^9, β^9 *bei* [3210] *enthalten die Geraden* a_i, b_i *ebenfalls dreifach, während* $\mathfrak{A}_1$ *auf den* α^9 *auch noch dreifach,* $\mathfrak{B}_1$ *hingegen auf den* β^9 *blos einfach ist; die Curven* a^9, b^9 *gehen durch die* A_i (B_i) *je zweimal und treffen die* a_i (b_i) *je sechsmal.*

Die Ermittelungsweise dieser Ordnung 11 (9), auf die ich in C. P. Nr. 23. hingewiesen, habe ich hier, weil sie weniger vortheilhaft ist, unerwähnt gelassen.

Die Vielfachheit der Punkte B_i auf den Flächen kann auf die Weise ermittelt werden, dass man b durch einen B_i legt und die Betrachtung wiederholt, nur dabei stets von mit diesem B_i incidenten oder identischen Gebilden absieht. Wir wollen dies an einem Beispiel zeigen und der Kürze halber eine Signatur $n = 0$ wählen, weil wir da nicht erst zu den Formeln V zurückzugehen brauchen, sondern $\pi'_{10\,B}$ und $\lambda'_{10\,B}$ direct ermitteln. Wir wählen die Signatur [1400], legen b durch B_4. Von den $\pi'_{10\,B} = 8$ Axen-Correlationen bleiben blos 5, bei denen die Axe b' nicht durch B_4 geht; ebenso von den $\lambda'_{10\,B} = 8$ Correlationen mit singulären Ebenen fallen 6 weg, bei denen die Ebene β' durch B_4 geht. Ferner da auf der Fläche 6. Ordnung (Nr. 66.), welche einer Geraden a für [1400] associirt ist, die Punkte B_i dreifach (Nr. 67.) sind, so folgt daraus, dass den von B_4 verschiedenen Punkten der Geraden b, die durch B_4 geht, nur noch eine Fläche 3. Ordnung associirt ist. Dagegen an $\zeta_{10\,B}$ wird nichts geändert. Aus diesen reducirten Werthen ergiebt sich durch die Formeln (5 a u. b) $\mu_{10}' = 5$; d. h. von der der Ebene α für [1410] associirten Fläche 11. Ordnung liegen auf der beliebigen durch B_4 gelegten Geraden ausser B_4 nur noch 5 Punkte; der Punkt B_4 ist folglich sechsfach.

Aehnlich ergeben sich auch auf den übrigen Flächen α^{11}, β^{11} die Punkte A_i, B_i sechsfach, auf den Flächen α^9, β^9 bei [3210] hingegen vierfach (C. P. Nr. 23., 31.). Für $n > 0$ habe ich die Vielfachheit nicht ermittelt.

82. Wir wollen hier gleich für die Signaturen $\sigma = 11, n = 0$ die Werthe von π_{11}' ermitteln; d. h. die Zahlen der Axen-Correlationen, deren Axen a', b' nun keiner weiteren Bedingung unterworfen sind. Wir wählen als Beispiel die Signatur

$$[3130] \qquad \begin{matrix} A_1\, A_2\, A_3\, a_1\, \mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{A}_3 \\ b_1\;\, b_2\;\, b_3\, B_1\, \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\,. \end{matrix}$$

I $a' : A_1 A_2$; $b' : B_1 b_3$; a' $(A_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b'$ $(b_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$. Dem a' entspricht ein Complex 2. Grades, der in dem Büschel $B_1 b_3$ nur einen nicht mit dem Punkte B_3' (auf b_3) incidenten Strahl hat; wegen der drei Combinationen 3 Lösungen.

II $a' : A_1, a_1; b' : b_2, b_3; a' (A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b' (b_2 b_3 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$. Dem Büschel $A_1 a_1$, der durch den auf a_1 gelegten Punkt A_1' geht, entspricht eine Congruenz (2, 6), welche aus den Punkten B_2', B_3' (auf b_2, b_3) je einen Kegel 3. Ordnung erhält, für den $B_2' B_3'$ einfache Kante ist (R. Proj. Nr. 28). Folglich hat diese Congruenz mit der linearen Congruenz $[b_2 b_3]$ die Gerade $B_2' B_3'$, je zwei weitere Kanten der Kegel aus B_2', B_3', die bez. b_3, b_2 treffen, gemein, mithin noch $1.2 + 1.6 - (2.2 + 1) = 3$ andere nicht mit B_2' oder B_3' incidente Strahlen. Die 3 Combinationen führen zu 9 Lösungen.

III $a' : A_1; b' : B_1, b_2, b_3; a' (A_2 A_3 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b' (b_2 b_3 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$; dem b' entspricht eine Congruenz (1, 3), von der also eine Gerade durch A_1 geht; durch 3 Combinationen 3 Lösungen.

IV $a' : a_1; b' : b_1 b_2 b_3; a' (A_1 A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3) \barwedge b' (b_1 b_2 b_3 B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3)$; dem Complexe $[a_1]$ entspricht, weil a_1 duch den Grundpunkt A_1' geht, ein Complex 4. Grades, der die ganzen Bündel um die Punkte B_1', B_2', B_3' (auf b_1, b_2, b_3) einfach enthält (R. Project. Nr. 37.), also mit der Regelschaar $[b_1 b_2 b_3]$ nur $2.4 - 3 = 5$ mit keinem der 3 Punkte B_i' incidente Geraden gemein hat. 5 Lösungen.

Im Ganzen demnach $3 + 3.3 + 3.1 + 5 = 20$ Lösungen.

Und ebenso ergiebt sich bei den andern Signaturen $\sigma = 11$, $n = 0$ $\pi_{11}' = 20$, ausser bei [3210] (oder [2310]), wo $\pi_{11}' = 14$ ist.

Bei [00$\overline{1}$00] kommt der Satz Nr. 61. der R. Proj. — das letzte Resultat der damaligen Untersuchung — zur Verwendung.

83. *Bei* $\sigma = 11$ *giebt es demnach stets* π_{11}' *Paare von Geraden* a', b', *so beschaffen, dass jedem Punkte der einen jeder Punkt der andern durch eine exceptionelle Correlation, von der* a', b' *die singulären Axen sind, associirt ist. Diese* π_{11}' *Geraden* a', b' *liegen auf den Flächen* $\zeta''_{11\,B}{}^{ter}$, *bez.* $\zeta''_{11\,A}{}^{ter}$ *Ordnung, welche den Ebenen* β, α *der beiden Räume im andern associirt sind, je einfach,* weil β, α von b', a' je einmal getroffen wird; *also auch insbesondere, wenn* $n = 0$, *wo sich eine eindeutige Transformation ergiebt, liegen sie beziehlich auf allen Flächen* α^{11}, β^{11}, *oder in dem einen Falle* α^9, β^9. *Ihre Zahl ist dann stets* 20, *ausgenommen in diesem einen Falle, wo sie* 14 *ist.* Unter diesen 20 Geraden a', bez. b' befinden sich die etwaigen Geraden $(2A_i)$, $(4a_i)$, $(A_i, 2a_i)$, bez. $(2B_i)$ u. s. w. je einfach; unter den 14 Geraden a', b' bei [3210] nur die 3 Geraden $(A_i\, a_1 a_2)$, bez. die 6 Geraden $(B_i, 2b_i)$ und nicht die $(2A_i)$, bez. $(2B_i)$. Ferner gehen durch jeden A_i, bez. B_i sechs von den Geraden a', bez. b', in dem Falle [3210] jedoch nur 3; und jede Gerade a_i, bez. b_i wird von 14 a', bez. b' getroffen, bei [3210] aber nur von 10.

Die 20 (bez. 14) Geraden a' (oder b') bilden diejenigen Fundamentalcurven der homaloidischen Flächensysteme in A (oder B), von denen Cremona in Nr. 7. seines Aufsatzes Sulle trasformazioni razionali nello spazio *) spricht.

84. Wir lassen nun 2 Flächen α^{11}, die zwei Ebenen β associirt sind, sich durchschneiden, sehen also zunächst noch von [3210] oder [2310] ab; zum Schnitte gehören die Curve a^{11}, welche dem Schnitt der beiden Ebenen correspondirt, und die 20 Geraden a'; es bleibt also eine Curve 90. Ordnung. Jedem Punkte derselben entspricht ein Punkt jeder der beiden Ebenen, aber nicht auf der Schnittlinie derselben, also zwei in der That verschiedene Punkte, folglich nach Nr. 41. eine ganze cubische Raumcurve; und da diese jede Ebene β dreimal trifft, so ist jeder Punkt unserer Curve ein dreifacher Punkt für alle Flächen α^{11}, die Curve selbst also eine auf allen Flächen α^{11} dreifache Curve 10ter Ordnung a_0^{10}; sie ist die von Cremona Nr. 6. besprochene Fundamentalcurve (Salmon-Fiedler ebenfalls S. 479).

Dass jeder Punkt $\mathfrak{A}_i$ die Eigenschaft hat, einer ganzen cubischen Curve associirt zu sein, leuchtet unmittelbar ein (Nr. 3.); also liegen die Punkte $\mathfrak{A}_i$ auf a_0^{10}. Ebenso folgt aus derselben Nr., dass jedem Punkt A einer Geraden a_i, z. B. a_1, eine cubische Raumcurve für $[klm0]_{11}$ associirt ist, dieselbe nämlich, welche für $[k,\ l-1,\ m+1,\ 0]_{10}$ associirt ist, wobei $a_1 B_1$ ersetzt ist durch das Paar der conjugirten Punkte $\mathfrak{A}'$, B_1, von denen $\mathfrak{A}'$ auf a_1 liegt. Bewegt man A auf a_1, so erzeugt diese associirte Curve eine Fläche 7ter Ordnung, da es auf a_1 7 Punkte giebt, welche mit Punkten einer beliebigen Geraden b associirt sind, die Schnittpunkte der a_1 mit der associirten Curve von b. Bei [3210] oder [2310] wird diese Fläche 6. Ordnung sein (Nr. 81.; C. P. Nr. 27.).

Wir haben also in A *wie* B *einfach unendlich viele Punkte, denen auch für* $[klm0]_{11}$ *nicht blos ein Punkt, sondern eine ganze cubische Raumcurve associirt ist. Diese Punkte bilden eine Curve* 10. *Ordnung* a_0^{10}, b_0^{10}. *Zu ihr gehören die etwa vorhandenen Geraden* a_i, b_i. Für den übrigen Theil der Curve b_0^{10} ist die jedem Punkte B desselben associirte Curve stets dieselbe, wie für $[k,\ l,\ m-1,\ 0]_{10}$, so dass die jetzige Ausnahme-Signatur [3210] auch zu der früheren Ausnahme-Signatur [3200] führt. Um die Fläche der von den associirten Curven der Punkte der von b_0^{10} nach Abzug der b_i verbleibenden Restcurve b_0^{10-k} zu finden, müssen wir die Zahl derjenigen Schnitte von b_0^{10-k} mit der einen Geraden a für $[k,\ l,\ m-1,\ 0]$ associirten Fläche aufsuchen, welchen in Wirklichkeit für letztere Signatur eine cubische Raumcurve und nicht eine Fläche associirt ist. Wir werden dies an einigen Beispielen thun und damit zugleich diejenigen Punkte finden, welchen für $\sigma = 10$ eine ganze Fläche entspricht.

*) Annali di Matematica, ser. II. t. V. S. 131. Cf. auch Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raums 2. Aufl. Bd. II. S. 476, spec. für die obige Stelle S. 479.

Dazu ist aber noch nothwendig, das Verhalten der Curve b_0^{10-k} zu den Grundelementen zu kennen. Durch die $\mathfrak{B}_i$ geht sie einmal, wie oben gezeigt. Auf den Flächen β^{11} liegen die Punkte B_i sechsfach (Nr. 81.); also geht der vollständige Schnitt 36mal durch jeden; da nun jede b^{11} durch einen B_i dreimal geht, von den 20 b' sechs ihn enthalten (Nr. 83.), so bleiben $\frac{27}{3^2} = 3$ Zweige der Curve b_0^{10} oder vielmehr der Restcurve b_0^{10-k}, die ihn passiren.

Um die Begegnungspunkte einer b_i mit der b_0^{10-k} zu ermitteln, bringen wir auf der b_i eine Correspondenz hervor: B' sei ein Punkt der b_i, zu der einen der beiden sich schneidenden Flächen β^{11} gerechnet; b_i ist auf derselben dreifach; die 3 Berührungsebenen von B' schneiden aus der andern Fläche drei Curven 8. O., welche der b_i in 24 Punkten B'' begegnen. Umgekehrt führt jeder Punkt B'' zu 24 Punkten B'; so dass wir 48 Berührungsebenen beider Flächen erhalten, die je in demselben Punkte von b_i tangiren; von diesen Punkten kommen 7 auf die Schnittpunkte der b^{11} mit b_i, 14 auf Schnitte von b' und b_i; die 27 übrigen sind $\frac{27}{3^2} = 3$ Begegnungspunkte der auf beiden Flächen dreifachen Curven b_i und b_0^{10-k}, in denen also beide Flächen je eine neunfache Tangentialebene haben.

Die Curven b_0^{10-k} (a_0^{10-l}) gehen demnach durch jeden B_i (A_i) dreimal, durch jeden $\mathfrak{B}_i$ ($\mathfrak{A}_i$) einmal und treffen jede b_i (a_i) dreimal. (C. P. Nr. 25.)

85. Jedem Punkte B_i z. B. B_1 ist eine ganze Fläche associirt, diejenige nämlich, die ihm für $[k, l-1, m, n]_9$ correspondirt, wobei $a_1 B_1$ weggelassen ist; also, wenn $n = 0$, eine cubische Fläche, ausser bei den Signaturen [3210] und [2310], d. i. bei unsern jetzigen Ausnahme-Signaturen.

86. Die Flächen 3. Ordnung, welche so den Punkten B_i associirt sind, und zwar doppelt gerechnet (Cremona, Nr. 13.; Salmon-Fiedler S. 481), die Flächen ferner 7. Ordnung, welche den Geraden b_i correspondiren, und die der Restcurve b_0^{10-k} associirte setzen *die Jacobi'sche Fläche des homaloidischen Systems in* A zusammen. Nun ist die Ordnung derselben nach Cremona Nr. 6. (Salmon-Fiedler S. 479) $4(11-1) = 40$.

Fassen wir also zuerst die Fälle ins Auge, wo einer Geraden b oder a für $[klm0]_{10}$ eine Fläche 10. Ordnung α^{10}, β^{10} associirt ist, so bleibt, bei $[k, l, m+1, 0]_{11}$, für die der Restcurve b_0^{10-k} associirte Fläche die Ordnung $40 - (2.3.l + 7k)$. Die Restcurve selbst trifft eine Fläche β^{10} in $10(10-k)$ Punkten; darunter befinden sich die Punkte B_i, $\mathfrak{B}_i$ beziehlich 18-, 3fach, weil sie auf b_0^{10-k} dreifach, einfach, auf β^{10} sechsfach, dreifach sind, ferner die 3 Schnittpunkte mit jeder

b_i ebenfalls dreifach, da die b_i auf β^{10} dreifach sind; es bleiben demnach $100 - 10k - 18l - 9k - 3m$ Punkte. Unter diesen müssen sich die $40 - (6l + 7k)$ Punkte befinden, die den Schnitten der a, zu welcher β^{10} associirt ist, mit dem der Restcurve associirten Theile der Jacobi'schen Fläche entsprechen; so dass noch $60 - 3\,(2k + 2l + m) - 6\,(k + l) = 30 - 6\,(k + l)$ weitere Punkte existiren. Jeder dieser Punkte B_0 von b_0^{10-k} hat deshalb für $[klm0]$ noch einen associirten Punkt ausserhalb der cubischen Curve, welche ihm für $[k, l, m+1, 0]$ sowohl als für $[k, l, m, 0]$ associirt ist; folglich ist ihm für $[klm0]$ eine ganze cubische Fläche associirt (Nr. 43.), und da die Gerade a sie dreimal schneidet, so ist dieser Punkt B_0 dreifach auf β^{10}, also die Zahl der Punkte B_0 $\frac{1}{3}\,[30 - 6\,(k + l)] = 10 - 2\,(k + l)$.

Wir betrachten noch einen der drei Fälle $m > 0$, wo einer a für $[klm0]_{10}$ eine Fläche von niedrigerer als 10. Ordnung correspondirt, nämlich

$$[3120]_{10} \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\ b_2\ b_3\ B_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2. \end{matrix}$$

Die Jacobi'sche Fläche in A besteht, für $[3130]_{11}$, aus einer doppelten cubischen Fläche, drei Flächen 7. Ordnung und demnach noch aus einer Fläche 13. Ordnung. Die Restcurve ist 7. Ordnung und trifft die Fläche β^9 *), welche einer a für $[3120]$ correspondirt, ausser in B_1, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, auf b_1, b_2, b_3, was $3.\,5 + 2.\,2 + 3.\,3.\,3 = 46$ Schnittpunkte macht, noch in 17 Punkten, von denen 4 nicht mit Schnittpunkten der Geraden a mit dem Theile 13. Ordnung der Jacobi'schen Fläche associirt sind; diesen entsprechen für $[3120]$ Flächen 2. Grades, dieselben wie für $[3110]$; so dass sie auf den β^9 doppelt liegen und die Zahl dieser Punkte B_0 $2 = 10 - 2\,(k + l)$ ist. Die beiden andern Fälle (Nr. 66.) führen zu demselben Resultat. Ist $m = 0$, so weist die Zahl $10 - 2\,(k + l)$ auf die Nichtexistenz von solchen Punkten B_0 hin; und die Correspondenz (1, 1) zwischen den zweifach unendlichen Systemen von cubischen Raumcurven (kA_i, la_i) und (kb_i, lB_i) lässt von vornherein die Unmöglichkeit solcher Punkte erkennen, so dass wir uns den obigen Beweis für diese Fälle $m = 0$ — $[3200]$ und $[2300]$ mit inbegriffen — ersparen können.

Wenn also die Signatur $[klm0]_{10}$ gegeben ist, so giebt es in jedem der beiden Räume, abgesehen von den $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, den Punkten auf den a_i, b_i, $10 - 2\,(k + l)$ Punkte A_0, B_0, denen nicht blos eine cubische Curve, sondern eine ganze Fläche 3. Ordnung associirt ist; nur bei $[3120]$ correspondirt den B_0, bei $[2220]$ den A_0 und B_0 eine Fläche 2. Ordnung. Diese Punkte befinden sich auf den Flächen, welche den Geraden des andern Raums correspondiren, dreifach (bez. doppelt). (C. P. Nr. 29., 30.)

---

*) In C. P. Nr. 30. steht aus Versehen β^6 statt β^9.

Stellen wir uns $[k, l, m-1, 0]_9$ vor, wo das Paar $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ weggelassen ist; so werden also die B_0 so sein, dass die Ebenen, welche dem Strahle $B_0\mathfrak{B}_2$ in den Bündeln der Punkte der einem B_0 in Bezug auf $[k, l, m-1, 0]$ associirten cubischen Fläche homolog sind, alle nach dem auf dieser Fläche selbst befindlichen Punkte $\mathfrak{A}_2$ convergiren. Bei [3120] und [2220], wo den B_0 je eine Fläche 2. Grades associirt ist, convergiren die Ebenen, die dem Strahle $B\mathfrak{B}_2$ in den Bündeln der Punkte dieser Fläche homolog sind, nach einem Punkte von $A_1A_2A_3$, bez. $A_1A_2\mathfrak{A}_1$, folglich werden sie sich um die Gerade drehen, die diesen Punkt mit $\mathfrak{A}_2$ verbindet.

87. Die *Ausnahme-Signatur* [3210] (oder [2310], wenn die Räume vertauscht werden) ist noch nicht hinreichend erledigt:

$$\begin{matrix} A_1\,A_2A_3\,a_1\,a_2\mathfrak{A}_1 \\ b_1\,b_2\,b_3\,B_1B_2\mathfrak{B}_1\,. \end{matrix}$$

Der Schnitt der Flächen α^9, β^9, welche zwei Ebenen β, α associirt sind, enthält die Curve a^9, b^9, ferner die 14 Geraden a', b' (Nr. 83.); es bleibt also eine Curve 58. Ordnung.

Nun haben wir aber schon in jedem der beiden Räume A, B eine ebene Curve 4. Ordnung $\bar{a}^4$, $\bar{b}^4$ gefunden, gelegen in $A_1A_2A_3$, $B_1B_2\mathfrak{B}_1$, so beschaffen, dass jedem ihrer Punkte eine Gerade b^1, a^1 entspricht (Nr. 58., 72.). Da b^1, a^1 jede Ebene β, α einmal trifft, so liegen die Curven $\bar{a}^4$, $\bar{b}^4$ bez. auf den Flächen α^9, β^9 einfach und gehören also zur Curve 58. Ordnung.

Der Rest stellt sich aus ähnlichen Gründen wie früher als auf allen Flächen α^9, β^9 dreifache Curve 6. Ordnung heraus; im Raume A besteht er aus den beiden Geraden a_i und einer Raumcurve 4. Ordnung $a_0{}^4$, welche noch einmal durch jeden der 3 Punkte A_i geht und jede der beiden b_i noch zweimal trifft, so dass $a_0{}^4$ und $\bar{a}^4$ die volle Restcurve $a_0{}^8$ geben und das allgemeine Verhalten derselben gegen A_i, a_i zeigen. Mit jedem der Punkte der $a_0{}^4$ ist dieselbe cubische Raumcurve associirt, wie für [3200].

In B aber ist die Curve 6. Ordnung zusammengesetzt aus den drei b_i und der cubischen Raumcurve $b_0{}^3$, da jedem Punkte dieser für [3210] eine cubische Raumcurve associirt ist (Nr. 57., 74.)

Die Jacobische Fläche, hier von der Ordnung $4(9-1)=32$, besteht in A 1) aus zwei doppelten Flächen 2. Grades, den beiden B_i associirt, 2) aus drei Flächen 6. Ordnung, den drei b_i entsprechend, (Nr. 84.), 3) aus der Fläche $a_0{}^2$, mit $b_0{}^3$ associirt, 4) der Regelfläche 4. Grades der a^1, die den Punkten von $\bar{b}^4$ correspondiren (Nr. 75.); in B dagegen 1) aus drei doppelten Flächen 2. Grades, 2) aus zwei Flächen 6. Ordnung, 3) aus dem Hyperboloide β^2_{123}, das der

Curve $\overline{a}^4$ associirt ist, 4) einer Fläche 6. Ordnung, durch die cubischen Raumcurven erzeugt, welche den Punkten der $a_0{}^4$ correspondiren. (C. P. Nr. 32—34.)

Jede Sehne der $a_0{}^4$ hat zur associirten Curve ein System von 3 cubischen Raumcurven, von denen zwei den Schnittpunkten mit $a_0{}^4$ entsprechen, die dritte aber, Punkt für Punkt, den übrigen Punkten der Sehne associirt ist; diese trifft zwar auch b_1, b_2, b_3 zweimal, geht aber nicht durch B_1, B_2. Gäbe es nun dreifache Secanten, so würde für die übrigen Punkte nichts bleiben; es zeigt sich so, dass $a_0{}^4$ von der ersten Species ist. Den Sehnen von $b_0{}^3$ entsprechen ebenfalls — abgesehen von den Schnittpunkten mit der Curve — cubische Raumcurven, welche a_1, a_2 je zweimal treffen, durch A_1, A_2, A_3 aber nicht gehen. Von diesen cubischen Raumcurven, welche gewissen Geraden Punkt für Punkt correspondiren, geht in A durch jeden Punkt eine, in B zwei.

VII. $\sigma = 12$.

88. Wir gehen nun zu der Aufstellung der Tabelle VI über mit Hilfe der Formeln (Nr. 25.)

$$\text{(VIb)} \qquad 2\overline{\lambda}_{10} = \dot{\lambda}_{10} + \lambda_{10B} + \lambda'_{10B}.$$

Tab. VI; $\sigma = 10$.

Sign.	λ_{10B}	λ'_{10B}	$\dot{\lambda}_{10}$	$\overline{\lambda}_{10}$
5000, 0500	0	0	0	0
4100, 1400	0	8	0	4
3200	1	6	1	4
2300	0	3	1	2
4020, 0420	0	0	0	0
4011, 0411	0	8	0	4
4002	4	40	4	24
0402	0	28	4	16
3120, 1320	0	2	0	1
3111	1	14	1	8
3102	2	20	8	15
1311	0	11	1	6
1302	3	23	6	16
2220	0	4	0	2
2211	1	9	2	6
2202	2	24	6	16

Sign.	λ_{10B}	λ'_{10B}	$\dot{\lambda}_{10}$	$\overline{\lambda}_{10}$
3040, 0340	0	0	0	0
3031, 0331	0	2	0	1
3022	1	22	1	12
3013	6	60	12	39
3004	9	80	39	64
0322	0	19	1	10
0313	3	51	10	32
0314	12	92	32	68
2140, 1240	0	0	0	0
2131, 1231	0	6	0	3
2122	2	23	3	14
2113	4	44	14	31
2104	8	69	31	54
1222	1	20	3	12
1213	5	47	12	32
1204	8	68	32	54

Sign.	λ_{10B}	λ'_{10B}	$\dot{\lambda}_{10}$	$\bar{\lambda}_{10}$
2060,0260	0	0	0	0
2051,0251	0	0	0	0
2042,0242	0	8	0	4
2033	3	45	4	26
2024	10	104	26	70
2015	17	149	70	118
2006	18	136	118	136
0233	1	39	4	22
0224	8	98	22	64
0215	20	160	64	122
0206	28	170	122	169
1160	0	0	0	0
1151	0	0	0	0
1142	0	12	0	6
1133	3	43	6	26
1123	9	91	26	63
1115	16	137	63	108
1106	21	155	108	142
1080,0180	0	0	0	0
1071,0171	0	0	0	0
1062,0162	0	0	0	0

Sign.	λ_{10B}	λ'_{10B}	$\dot{\lambda}_{10}$	$\bar{\lambda}_{10}$
1053,0153	0	20	0	10
1044	6	88	10	52
1035	19	195	52	133
1026	33	286	133	226
1017	39	291	226	278
1008	34	200	278	256
0144	4	82	10	48
0135	17	189	48	127
0126	36	297	127	230
0117	49	325	230	302
0108	44	222	302	284
00$\overline{10}$0	0	0	0	0
0091	0	0	0	0
0082	0	0	0	0
0073	0	0	0	0
0064	0	40	0	20
0055	10	170	20	100
0046	36	384	100	260
0037	69	583	260	456
0028	88	616	456	580
0019	78	422	580	540
00010	60	280	540	440.

89. Es sind für diese Tabelle nur noch die $\dot{\lambda}_{10}$ für die Signaturen $[k, l, m, 0]_{10}$ oder die λ_{11B} für die Signaturen $[k, l, m+1, 0]_{11}$ direct zu ermitteln. Aus Nr. 30. ist aber zu nehmen, dass $\lambda_{11B=0}$, wenn $k+l<5$; es bleiben nur die 6 ersten Signaturen der vorhergehenden Tabelle. λ_{11B} ist aber die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen, wo der Scheitel B auf einer Geraden b liegt, oder die Ordnung der Fläche der Punkte B, welche Punkten A durch solche Correlationen associirt sind. Es ergiebt sich leicht, dass $\lambda_{11B}=0$ ist auch für [5010], [0510], [4110], [1410].

Bei [3210] wird $\alpha' = A_1 A_2 A_3$, $\beta' = B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$; $(A\alpha')(A_1 A_2 A_3 a_1 a_2)$ $\barwedge$ $(B\beta')(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2)$. Jedem Punkte B in β' oder A in α' (z. B. der Spur von b oder a) entspricht ein und nur ein Punkt A in α' oder B in β', also ist $\lambda_{11B}=1$ für [3210] und [2310].

Zu dem früher gefundenen ergiebt sich, dass zwischen den Punkten dieser beiden Ebenen eine eindeutige Association durch Correlation mit singulären Ebenen stattfindet; den Punkten freilich der beiden Curven $\bar{a}^4$, $\bar{b}^4$ entspricht zwar in der andern Ebene auch nur ein Punkt ausserdem aber noch unendlich viele Punkte, die einer Geraden b^1, a^1, und zwar durch allgemeine Correlation.

Der Werth von $\bar{\lambda}_{10}$ für $[0001\bar{0}]$ oder von λ_{11B} für $[000\overline{11}]$ führt zu folgendem Satze: *Gegeben sind zwei Gruppen von je* 11 *Geraden* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{11}$, $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{11}$; *wir suchen solche Paare von Strahlbüscheln* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *dass* $(A\alpha)\,(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{11}) \barwedge (B\beta)\,(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{11})$; *die Scheitel* A, B *erfüllen je eine Fläche* 440. *Ordnung, die Ebenen* α, β *umhüllen je eine Fläche* 440. *Klasse.*

90. Wir können nun gleich zur Aufstellung der Tabelle 6 schreiten, zu welcher die Formeln (Nr. 12.)

(6a u. b) $\quad 2\nu_{11} = \mu_{11} + \zeta_{11B} + \zeta'_{11B}; \quad 2\mu_{11} = \nu_{11} + \lambda_{11B}$

führen.

Tab. 6; $\sigma = 11$.

Sign.	ζ_{11B}	ζ'_{11B}	λ_{11B}	μ_{11}	ν_{11}
5010, 0510	1	11	0	4	8
5001, 0501	2	22	0	8	16
4110, 1410	1	11	0	4	8
4101, 1401	2	14	4	8	12
3210, 2310	1	9	1	4	7
3201	1	12	4	7	10
2301	2	15	2	7	12
4030, 0430	1	11	0	4	8
4021, 0421	2	22	0	8	16
4012, 0412	4	36	4	16	28
4003	4	32	24	28	32
0403	8	44	16	28	40
3130, 1330	1	11	0	4	8
3121, 1321	2	20	1	8	15
3112	3	26	8	15	22
3103	4	32	15	22	29
1312	4	29	6	15	24
1303	5	35	16	24	32
2230	1	11	0	4	8
2221	2	18	2	8	14
2212	3	27	6	14	22
2203	4	30	16	22	28
3050, 0350	1	11	0	4	8
3031, 0341	2	22	0	8	16
3032, 0332	4	42	1	16	31
3023	7	62	12	31	50

Sign.	ζ_{11B}	ζ'_{11B}	λ_{11B}	μ_{11}	ν_{11}
3014	8	64	39	50	61
3005	7	48	64	61	58
0323	8	65	10	31	52
0314	13	79	32	52	72
0305	14	66	68	72	76
2150, 1250	1	11	0	4	8
2141, 1241	2	22	0	8	16
2132, 1232	4	38	3	16	29
2123	6	53	14	29	44
2114	8	62	31	44	57
2105	8	55	54	57	60
1223	7	56	12	29	46
1214	9	65	32	46	60
1205	10	62	54	60	66
2070, 0270	1	11	0	4	8
2061, 0261	2	22	0	8	16
2052, 0252	4	44	0	16	32
2043, 0243	8	80	4	32	60
2034	13	115	26	60	94
2025	16	126	70	94	118
2016	15	103	118	118	118
2007	12	70	136	118	100
0234	15	121	22	60	98
0225	22	144	64	98	132
0216	24	128	122	132	142
0207	20	86	160	142	124

Sign.	ζ_{11B}	ζ'_{11B}	λ_{11B}	μ_{11}	ν_{11}
1170	1	11	0	4	8
1161	2	22	0	8	16
1152	4	44	0	16	32
1143	8	76	6	32	58
1134	13	109	26	58	90
1125	17	127	63	90	117
1116	18	117	108	117	126
1107	15	79	142	126	110
1090, 0190	1	11	0	4	8
1081, 0181	2	22	0	8	16
1072, 0172	4	44	0	16	32
1063, 0163	8	88	0	32	64
1054, 0154	16	156	10	64	118
1045	26	224	52	118	184
1036	33	253	133	184	235
1027	33	220	226	235	244
1018	27	149	278	244	210
1009	20	98	256	210	164

Sign.	ζ_{11B}	ζ'_{11B}	λ_{11B}	μ_{11}	ν_{11}
0145	28	230	48	118	188
0136	39	271	127	188	249
0127	42	245	230	249	268
0118	35	165	302	268	234
0109	26	108	284	234	184
$00\overline{11}0$	1	11	0	4	8
$00\overline{10}1$	2	22	0	8	16
0092	4	44	0	16	32
0083	8	88	0	32	64
0074	16	176	0	64	128
0065	32	312	20	128	236
0056	54	454	100	236	372
0047	72	524	260	372	484
0038	75	465	456	484	512
0029	62	314	580	512	444
$001\overline{10}$	46	206	540	444	348
$000\overline{11}$	32	132	440	348	256.

91. Die μ_{11}, ν_{11} geben uns also wieder *die Zahlen* ζ_{12B} *d. i. die Ordnung der Fläche der **Punkte*** $(B)_{12}$, *welche für* $[k, l, m+1, n]_{12}$, *bez.* $[k, l, m, n+1]_{12}$ *associirte **Punkte*** $(A)_{12}$ *besitzen;* jedoch nur für solche Signaturen, bei denen **nicht** m, n beide null sind. Die Tabelle zeigt, dass *für* $n=0$ *alle Signaturen* (die dieser Bedingung genügen) ζ_{12B} *und also auch* $\zeta_{12A}=4$ *haben, ferner für* $n=1$ *ist* $\zeta_{12B}=\zeta_{12A}=8$, *ausser bei* [3211] *und* [2311], *wo es* 7 *ist;* $n=2$ hat schon 6 Ausnahmen von dem Werthe 16 der Ordnung u. s. w.

Es bleiben noch die 7 Signaturen: [6000], [0600]; [5100], [1500]; [4200], [2400]; [3300]. Wir können bei jeder von ihnen ein Paar $A_i b_i$ oder $B_i a_i$ ersetzen durch zwei Paare conjugirter Punkte $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i'$, wo $\mathfrak{A}_i$ mit A_i identisch, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_i'$ mit b_i incident sind, bez. durch $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{A}_i'\mathfrak{B}_i$, und es wird sich dabei herausstellen, dass die Identität zweier $\mathfrak{A}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$, zu der diese Auflösung führt, bei den sechs ersten Signaturen auf die Formel (6a) keinen Einfluss hat. Sie bewirkt auf den beiden eindeutig bezogenen Curven, die wir bei der Ableitung dieser Formel betrachtet haben, keine weiteren vereinigten entsprechenden Punkte. Also ist auch bei diesen 6 Signaturen $\zeta_{12B}=\zeta_{12A}=4$. Hingegen

$$[3300] \qquad \begin{matrix} A_1\,A_2\,A_3\,a_1\,a_2\,a_3 \\ b_1\,b_2\,b_3\,B_1\,B_2\,B_3, \end{matrix}$$

welches wir in

$$[3220] \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

verwandeln wollen, führt zu einer Ausnahme. Wir wissen (Nr. 89.), dass der jedem *beliebigen* Punkte B der Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$, also z. B. auch der der Spur von b für

$$[3210] \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

associirte Punkt A in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ liegt und durch Correlation mit singulären Ebenen associirt ist. $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1$ sei das in Nr. 12. hinzugefügte Paar. Die beiden Ebenen von $B = (b, B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)$ nach den durch $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$ gelegten Geraden $\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''$ gehen durch $B \mathfrak{B}_1$, schneiden also die singuläre Ebene $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ in dem nämlichen Strahle des Büschels derselben, also entspricht beiden nach den Eigenschaften dieser exceptionellen Correlation derselbe Strahl der singulären Ebene im Bündel A. Es kommt also durch die Identität von $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ zu den in Nr. 12. betrachteten vereinigten entsprechenden Punkten der beiden Curven durch diesen Strahl noch ein weiterer hinzu. Vergl. Nr. 66.

Mithin ergiebt sich für [3300] $\zeta_{12B} = 3$, und da $k = l$ ist, auch $\zeta_{12A} = 3$.

Von sämmtlichen Signaturen $[k l m 0]_{12}$ *bildet also* [3300] *eine Ausnahme; während im Allgemeinen die Flächen der Punkte* $(A)_{12}$, $(B)_{12}$, *welche associirte Punkte* (B_{12}), $(A)_{12}$ *besitzen, zwei Flächen* 4. *Ordnung* α^4, β^4 *erzeugen, befinden sie sich bei* [3300] *auf zwei Flächen* 3. *Ordnung* α^3, β^3.*)

92. Wenn wir die Gerade b, welche in Nr. 12. benutzt wurde, durch einen der Punkte B_i legen und stets von den mit diesen B_i incidenten Gebilden absehen, so erhalten wir die Vielfachheit der Punkte B_i auf der Fläche der $(B)_{12}$. Diejenige der b_ι, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{b}_\iota$ ergiebt sich nach Nr. 3., wenn auch die Incidenz von b mit ihnen ebenfalls zu derselben führen würde. Auf den Flächen α^4, β^4 bei $n = 0$ sind die A_i, B_i doppelt, die a_i, b_i und die $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ einfach; auf den α^3, β^3 bei [3300] sind auch die A_i, B_i nur einfach. (C. P. Nr. 36.) Die Grade der Vielfachheit von A_i, B_ι; a_ι, b_ι; $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ auf den α^8, β^8 bei $n = 1$ sind doppelt so gross als bei α^4, β^4; auf α^7, β^7 bei [3211] sind jedoch die A_i, B_i nur dreifach, die a_i, b_i; $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ ebenfalls doppelt. Die Vielfachheit von $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ ist bei allen Flächen, wo $n = 1$, gleich 1.

Da jedem Punkte A, B der Curven a_0^{10}, b_0^{10}, die sich bei $[k l m 0]_{11}$

*) Auf diese Ausnahme machte mich Hirst, gleichzeitig mit der früheren, aufmerksam; ich verweise noch bei dieser Gelegenheit auf die analoge Untersuchung im Probl. der Coll. (Nr. 24), wo sich in jedem Raume eine Fläche 2. Grades ergab.

ergaben, eine cubische Raumcurve associirt ist, so hat er für $[k, l, m+1, 0]_{12}$ einen, für $[klm1]_{12}$ zwei associirte Punkte auf derselben (Nr. 71.). Also *liegen die Curven* a_0^{10}, b_0^{10} *auf den Flächen* α^4, β^4 *einfach und auf den Flächen* α^8, β^8 *doppelt.*

Die Signatur

$$[3210]_{12} \qquad \begin{matrix} A_1\, A_2\, A_3\, a_1\, a_2\, \mathfrak{A}_1 \\ b_1\, b_2\, b_2\, B_1\, B_2\, \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

erfordert besondere Betrachtung. In jeder der beiden Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ giebt es eine Curve 4. Ordnung $\bar{a}^1$, $\bar{b}^1$, von welcher jeder Punkt A, B für [3210] eine ganze Gerade b^1, a^1 associirt hat und, wenn noch $\mathfrak{A}_2\, \mathfrak{B}_2$ oder $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ hinzugefügt wird, giebt es dann noch einen Punkt auf b^1, a^1, der dem A, B auch noch für $[3220]_{12}$, bez. $[3211]_{12}$ associirt ist, ausser wenn $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_i$ identisch ist, also [3300] entsteht, in welchem Fall es keinen solchen Punkt giebt (Nr. 58., 72., 73.). *Die Curven* $\bar{a}^4$, $\bar{b}^4$ *liegen also einfach auf* α^4, β^4 *bei* [3220] *oder* [4200] *und* α^7, β^7 *bei* [3211], *dagegen nicht auf* α^3, β^3 *auf* [3300]; die Restcurven a_0^6, b_0^6 machen keine Ausnahme. (Cf. C. P. Nr. 36–38.)

93. Bei der *Ausnahme-Signatur*

$$[3300] \qquad \begin{matrix} A_1\, A_2\, A_3\;\, a_1\;\, a_2\;\, a_3 \\ b_1\;\, b_2\;\, b_3\;\, B_1\, B_2\, B_3 \end{matrix}$$

lassen sich *die Schnitte der beiden Flächen* α^3, β^3 *mit den Ebenen* $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$ *und* $\beta_{123} = B_1 B_2 B_3$ leicht nachweisen. Wir haben in jeder dieser beiden Ebenen eine Gruppe von 6 Punkten: in der einen die Punkte A_i und die Spuren der a_i, in der andern, ihnen homolog, die Spuren der b_i und die B_i. Folglich giebt es in ihnen bez. zwei eindeutig bezogene Curven 3. Ordnung $\mathfrak{a}^3$, $\mathfrak{b}^3$, für deren entsprechende Punkte A, B

$$(A\,\alpha_{123})\,(A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2\, a_3) \;\overline{\wedge}\; (B\,\beta_{123})\,(b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 B_3)$$

(Eb. Proj. Nr. 14.). Es geht daraus hervor, dass A, B sich durch exceptionelle Correlation mit singulären Ebenen correspondiren, dass also diese beiden Curven die erwähnten Schnitte sind.

Es ist aus der Theorie der cubischen Flächen bekannt, dass die Fläche α^3 das Hyperboloid $\alpha_{123}^2 = [a_1\, a_2\, a_3]$ noch in drei Geraden a^0 der andern Schaar schneidet; die Spur einer dieser Geraden in α_{123}, auf $\mathfrak{a}^3$ gelegen, hat einen entsprechenden Punkt B^0 auf $\mathfrak{b}^3$, folglich

$$a^0\,(A_1 A_2\, A_3\, a_1\, a_2 a_3) \;\overline{\wedge}\; (B^0\,\beta_{123})\,(b_1\, b_2 b_3 B_1\, B_2\, B_3).$$

Sei nun A ein beliebiger Punkt von a^0, $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$ beliebige (nur nicht in α_{123}, bez. β_{123} befindliche) Punkte von $a_1 a_2 a_3 b_3$ und bilden wir für die Bündel A, B^0 die Correlation

$$[2040] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \mathfrak{A}' \mathfrak{A}'' \mathfrak{A}''' \\ b_1\, b_2 \mathfrak{B}''' B_1 B_2 B_3, \end{matrix}$$

welche eine Lösung hat, so werden in derselben auch a^0 und β_{123} ferner A $(A_3 a_1 a_2 a_3)$ und B^0 $(b_3 B_1 B_1 B_3)$ homolog sein.

Wir haben also 3 *Punkte* B^0, A^0 *auf* $\mathfrak{b}^3$, $\mathfrak{a}^3$, *von denen jedem alle Punkte einer Geraden* a^0, b^0 *des Hyperboloids* α^2_{123}, β^2_{123} *für* [3300] *durch allgemeine Correlation* — ausser was die Punkte in α_{123}, β_{123} selbst anlangt — *associirt sind.* Der Schnitt der Bündel, deren Scheitel die a^0, b^0 durchwandert, mit der Ebene α_{123}, β_{123} ist unveränderlich; wird also noch $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ zugefügt, so *findet sich wieder auf jeder der* a^0, b^0 *noch ein Punkt, der dem associirten* B^0, A^0 *auch noch für* [3310] *oder* [3301] *associirt ist.*

Wenn bei einer andern Signatur $n = 0$ $l > 2$ $(k > 2)$ ist, so entspricht der Curve 5. Ordnung, welche α^4 (β^4) mit dem Hyperboloid α^2_{ikl} (β^2_{ikl}) gemein hat, stets — Punkt für Punkt — durch allgemeine Correlation der Schnitt von β^4 (α^4) mit der Ebene β_{ikl} (α_{ikl}). (C. P. Nr. 39.)

Bei der Signatur

$$[3211] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{a}_1 \\ b_1\, b_2\, b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{b}_1 \end{matrix}$$

haben wir in $A_1 A_2 A_3$ sechs Punkte: A_1, A_2, A_3, die Spuren von $a_1 a_2 \mathfrak{a}_1$, in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ ebenfalls, jenen homolog, sechs Punkte: die Spuren von b_1, b_2, b_3, B_1, B_2 und die Spur von $\mathfrak{b}_1$: wir erhalten also auch 2 Curven 3. Ordnung $\mathfrak{a}^3$, $\mathfrak{b}^3$, die sich, Punkt für Punkt, in Bezug auf die beiden Gruppen entsprechen und deshalb auch für [3211] durch Correlation mit singulären Ebenen associirt sind. Diese Curven sind die *ferneren Schnitte ihrer Ebenen mit den sich für* [3211] *associirten Flächen* α^7, β^7, *ausser* $\overline{a}^4$, $\overline{b}^4$.

94. Bei $[klm0]_{10}$ war jedem Punkt B eine cubische Raumcurve zugeordnet, ausser bei [3200]. Die Ebenen der verschiedenen Bündel der Punkte dieser Curve, welche einem Strahl von B homolog sind, der durch einen festen Punkt B' geht, drehen sich um eine feste Sehne der cubischen Raumcurve. Wird nun B auf einer Geraden b bewegt, so treffen so viele dieser Sehnen eine gegebene Gerade a', als es für $[k, l+1, m, 0]_{12}$ Punkte $(B)_{12}$ auf b giebt, wobei das Paar $a'B'$ zugefügt ist; also erzeugen die Sehnen eine Fläche vom 4. Grade. Geht aber b durch B' selbst, so giebt es, da B' auf β^4 doppelt ist, nur noch 2 Punkte $(B)_{12}$ auf b, also ist die erzeugte Fläche 2. Grades.

Bei [3200] tritt an Stelle der cubischen Raumcurve eine Gerade und an Stelle der Sehne eine Gerade in der Ebene α_{123}; $[k, l+1, m, 0]$ wird hier [3300], wo es auf einer beliebigen Geraden b drei, auf einer durch B' gehenden zwei Punkte $(B)_{12}$ giebt.

An Stelle der Fläche 4., bez. 2. Grades tritt also eine Curve 3., bez. 2. Klasse in α_{123}. (C. P. Nr. 42.)

95. Wir gehen nun zur Aufstellung der Tabelle VII über;

$$\text{(VII a u. b)} \quad 2\dot{\pi}'_{10} = \bar{\pi}'_{10} + \Theta'_{10}, \quad 2\bar{\lambda}'_{10} = \dot{\lambda}'_{10} + \Theta'_{10} + \lambda'_{10B} + \lambda'_{10A};$$

(Nr. 26.), wo also die Θ_{10}' durchweg, die $\dot{\pi}_{10}'$ und $\dot{\lambda}_{11}'$ für die Signaturen $n = 0$ direct zu ermitteln sind; die $\dot{\pi}_{10}'$ d. h. die π_{11}' für $[k, l, m+1, 0]_{11}$ sind schon bei Gelegenheit der Betrachtungen von Nr. 82. ermittelt.

Tab. VII; $\sigma = 10$.

Sign.	Θ'_{10}	$\dot{\pi}'_{10}$	π'_{10}	λ'_{10B}	λ'_{10A}	$\dot{\lambda}'_{10}$	$\bar{\lambda}'_{10}$
5000, 0500	0	20	40	0	0	0	0
4100, 1400	24	20	16	8	8	0	20
3200, 2300	8	14	20	6	3	5	11
4020, 0420	0	20	40	0	0	0	0
4011, 0411	24	40	56	8	8	0	20
4002, 0402	80	56	32	40	28	20	84
3120, 1320	6	20	34	2	2	0	5
3111, 1311	32	34	36	14	11	5	31
3102, 1302	34	36	38	20	23	31	54
2220	12	20	28	4	4	0	10
2211	16	28	40	9	9	10	22
2202	48	40	32	24	24	22	59
3040, 0340	0	20	40	0	0	0	0
3031, 0331	6	40	74	2	2	0	5
3022, 0322	56	74	92	22	19	5	51
3013, 0313	114	92	70	60	51	51	138
3004, 0304	120	70	20	80	92	138	215
2140, 1240	0	20	40	0	0	0	0
2131, 1231	18	40	62	6	6	0	15
2122, 1222	48	62	76	23	20	15	53
2113, 1213	82	76	70	44	47	53	113
2104, 1204	100	70	40	69	68	113	175
2060, 0260	0	20	40	0	0	0	0
2051, 0251	0	40	80	0	0	0	0
2042, 0242	24	80	136	8	8	0	20
2033, 0233	104	136	168	45	39	20	104
2024, 0224	196	168	140	104	98	104	251
2015, 0215	220	140	60	149	160	251	390
2006, 0206	120	60	0	136	170	390	408

Sign.	Θ_{10}'	$\dot{\pi}_{10}'$	$\bar{\pi}_{10}'$	λ_{10B}'	λ_{10A}'	$\dot{\lambda}_{10}'$	$\bar{\lambda}_{10}'$
1160	0	20	40	0	0	0	0
1161	0	40	80	0	0	0	0
1142	36	80	124	12	12	0	30
1133	96	124	152	43	43	30	106
1124	164	152	140	91	91	106	226
1115	200	140	80	137	137	226	350
1106	160	80	0	155	155	350	410
1080,0180	0	20	40	0	0	0	0
1071,0171	0	40	80	0	0	0	0
1062,0162	0	80	160	0	0	0	0
1053,0153	60	160	260	20	20	0	50
1044,0144	200	260	320	88	82	50	210
1035,0135	360	320	280	195	189	210	477
1026,0126	420	280	140	286	297	477	740
1017,0117	280	140	0	291	325	740	818
1008,0108	0	0	0	200	222	818	620
$00\overline{10}0$	0	20	40	0	0	0	0
0091	0	40	80	0	0	0	0
0082	0	80	160	0	0	0	0
0073	0	160	320	0	0	0	0
0064	120	320	520	40	40	0	100
0055	400	520	640	170	170	100	420
0046	720	640	560	384	384	420	954
0037	840	560	280	583	583	954	1480
0028	560	280	0	616	616	1480	1636
0019	0	0	0	422	422	1636	1240
$000\overline{10}$	0	0	0	280	280	1240	900.

96. In Bezug auf die $\dot{\lambda}_{10}'$ für $[klm0]_{10}$, also die λ_{11}' für $[k, l, m+1, 0]_{11}$ zeigt wieder die Tabelle, dass sie alle null sind, mit Ausnahme von $[3210]_{11}$, oder $[2310]_{11}$. Für diejenigen Signaturen, wo $k+l<5$, folgt es aus Nr. 30., für [5010], [0510]; [4100, 1400] ist es auch leicht einzusehen. Bei

$$[3210] \qquad \begin{matrix} A_1\, A_2\, A_3\, a_1\, a_2\, \mathfrak{A}_1 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1\, B_2\, \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

sind die Punkte A und B der Ebenen $\alpha' = A_1 A_2 A_3$ und $\beta' = B_1 B_2 \mathfrak{B}_2$ eindeutig durch Correlation mit ihnen als singulären Ebenen associirt (Nr. 89.) und nur diese Punkte. Wird B auf dem Schnitte der Ebene β mit β' bewegt, oder A auf $\alpha\alpha'$, so beschreibt A in α' oder B in β'

eine Curve 5. Ordnung (Eb. Proj. Nr. 10.), so dass 5 Punkte in α oder β liegen. Wir erhalten also für [3210], [2310] $\lambda_{11}' = 5$.

Der Werth 900 von $\overline{\lambda}_{10}'$ für $[000\overline{10}]$ oder λ_{11}' für $[000\overline{11}]$ führt zu folgendem Satze:

Sind zwei Gruppen von je 11 *Geraden* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{11}$; $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{11}$ *gegeben; und man verlangt Strahlbüschel* $(A\alpha)$, $(B\beta)$ *derartig, dass*

$$(A\alpha)\,(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{11}) \;\overline{\wedge}\; (B\beta)\,(\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{11});$$

so beschreibt A eine Curve 900. *Ordnung, α einen Torsus* 900. *Klasse, wenn B mit einer gegebenen Ebene oder β mit einem gegebenen Punkte incident sein soll.*

97. Die Formeln (Nr. 13.)

(7 a u. b) $\quad 2\nu_{11}' = \mu_{11}' + \pi_{11}' + \zeta_{11\,B}' + \zeta_{11\,A}', \quad 2\mu_{11}' = \nu_{11}' + \lambda_{11}'$

führen zu folgender Tabelle für μ_{11}', ν_{11}':

Tab. 7; $\sigma = 11$.

Sign.	$\zeta_{11\,B}'$	$\zeta_{11\,A}'$	π_{11}'	λ_{11}'	μ_{11}'	ν_{11}'
5010, 0510	11	11	20	0	14	28
5001, 0501	22	22	40	0	28	56
4110, 1410	11	11	20	0	14	28
4101, 1401	14	14	16	20	28	36
3210, 2310	9	9	14	5	14	23
3201, 2301	12	15	20	11	23	35
4030, 0430	11	11	20	0	14	28
4021, 0421	22	22	40	0	28	56
4012, 0412	36	36	56	20	56	92
4003, 0403	32	44	32	84	92	100
3130, 1330	11	11	20	0	14	28
3121, 1321	20	20	34	5	28	51
3112, 1312	26	29	36	31	51	71
3103, 1303	32	35	38	54	71	88
2230	11	11	20	0	14	28
2221	18	18	28	10	28	46
2212	27	27	40	22	46	70
2203	30	30	32	59	70	81
3050, 0350	11	11	20	0	14	28
3041, 0341	22	22	40	0	28	56
3032, 0332	42	42	74	5	56	107
3023, 0323	62	65	92	51	107	163
3014, 0314	64	79	70	138	163	188
3005, 0305	48	66	20	215	188	161

Sign.	ζ'_{11B}	ζ'_{11A}	π'_{11}	λ'_{11}	μ'_{11}	ν'_{11}
2150, 1250	11	11	20	0	14	28
2141, 1241	22	22	40	0	28	56
2132, 1232	38	38	62	15	56	97
2123, 1223	53	56	76	53	97	141
2114, 1214	62	65	70	113	141	169
2105, 1205	55	62	40	175	169	163
2070, 0270	11	11	20	0	14	28
2061, 0261	22	22	40	0	28	56
2052, 0252	44	44	80	0	56	112
2043, 0243	80	80	136	20	112	204
2034, 0234	115	121	168	104	204	304
2025, 0225	126	144	140	251	304	357
2016, 0216	103	128	60	390	357	324
2007, 0207	70	86	0	408	324	240
1170	11	11	20	0	14	28
1161	22	22	40	0	28	56
1152	44	44	80	0	56	112
1143	76	76	124	30	112	194
1134	109	109	152	106	194	282
1125	127	127	140	226	282	338
1116	117	117	80	350	338	326
1107	79	79	0	410	326	242
1090, 0190	11	11	20	0	14	28
1081, 0181	22	22	40	0	28	56
1072, 0172	44	44	80	0	56	112
1063, 0163	88	88	160	0	112	224
1054, 0154	156	156	260	50	224	398
1045, 0145	224	230	320	210	398	586
1036, 0136	253	271	280	477	586	695
1027, 0127	220	245	140	740	695	650
1018, 0118	149	165	0	818	650	482
1009, 0109	98	108	0	620	482	344
$00\overline{11}0$	11	11	20	0	14	28
$00\overline{10}1$	22	22	40	0	28	56
0092	44	44	80	0	56	112
0083	88	88	160	0	112	224
0074	176	176	320	0	224	448
0065	312	312	520	100	448	796
0056	454	454	640	420	796	1172
0047	524	524	560	954	1172	1390

Sign.	ζ'_{11B}	ζ'_{11A}	π'_{11}	λ_{11}	μ'_{11}	ν'_{11}
0038	465	465	280	1480	1390	1300
0029	314	314	0	1636	1300	964
$001\overline{10}$	206	206	0	1240	964	688
$000\overline{11}$	132	132	0	900	688	476.

98. Die μ_{11}', ν_{11}' geben uns also *die Ordnung* ζ_{12}' *der Curve der Punkte* $(A)_{12}$, $(B)_{12}$, *welche ihre associirten* $(B)_{12}$, $(A)_{12}$ *in einer gegebenen Ebene* β, α *haben*, jedoch zunächst nur für die Signaturen, wo nicht m und n beide gleich 0 sind.

Für diese kann auf ähnliche Weise als in Nr. 91. der Werth von ζ_{12}' ermittelt werden und ergiebt sich wie *bei den übrigen Signaturen, bei denen* $n = 0$ *ist*, $\zeta_{12}' = 14$, *nur diejenige Signatur, die auch im Vorhergehenden eine Ausnahme machte*, [3300] *macht sie auch hier.* Wir lösen sie wieder auf in

$$[3220] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2\, \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1; \end{matrix}$$

für [3210] sind die Punkte von $A_1 A_2 A_3$ mit denen von $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ durch Correlation mit singulären Ebenen eindeutig associirt, ausgenommen die Punkte der Curven $\overline{a}^4$, $\overline{b}^4$; die Curven, auf denen A und B bewegt werden (Nr. 13.), sind 9[ter] Ordnung: sie sind die Schnitte der Ebenen α, β mit den Flächen 9. Ordnung α^9, β^9, welche β, α associirt sind; die Fläche β^9 enthält in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ die Curve $\overline{b}^4$, folglich liegen von der Curve 9. Ordnung in β ausserhalb $\overline{b}^4$ noch 5 Punkte; diese 5 Punkte führen zu 5 weiteren vereinigten Punkten auf den eindeutig bezogenen Curven. Also *ist* $\zeta_{12}' = 9$ *für* [3300].

99. *Für die Signaturen* $[klm0]_{12}$ *und* $[klm1]_{12}$ *kann der Werth von* ζ_{12}' *auch auf folgende Weise ermittelt werden.* Nachdem eventuell, wenn $m = 0$, was bei $[klm1]$ nicht möglich, $[kl00]_{12}$ in $[k, l-1, 2, 0]_{12}$ aufgelöst ist, bringen wir die Fläche α^4, bez. α^8 der Punkte $(A)_{12}$ mit der Fläche α^9, welche für $[k, l, m-1, 0]_{11}$, bez. $[klm0]_{11}$ der Ebene β associirt ist, zum Schnitt; dieser Schnitt besteht aus der Curve a_0^{10}, dreifach auf α^{11}, einfach auf α^4, bez. doppelt auf α^8, auf welcher alle Punkte (Nr. 84., 92.) liegen, denen für $[k, l, m-1, 0]$, bez. $[klm0]$ mehr als ein Punkt (und deshalb alle Punkte einer cubischen Raumcurve) associirt ist, und aus der Curve 14. Ordnung, bez. 28. Ordnung, um die es sich jetzt handelt. Bei der Signatur

$$[3220] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \end{matrix}$$

und

$$[3211] \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\, a_2 \mathfrak{A}_1\, \mathfrak{a}_1 \\ b_1\, b_2\, b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{b}_1 \end{matrix}$$

tritt an Stelle von α^{11} eine Fläche α^9; a_0^{10} zerlegt sich in a_0^6, welche auf α^9 dreifach, auf α^4 einfach, bez. auf α^7 doppelt ist, und $\bar{a}^4$, die auf α^9, α^4, α^7 einfach ist (Nr. 84., 92.); es bleibt eine Curve 14. Ordnung, bez. 23. Ordnung. Ist aber $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ identisch, so dass wir [3300] erhalten, so tritt an Stelle von α^4 eine Fläche α^3, auf der die Curve $\bar{a}^4$ nicht mehr liegt (Nr. 91., 92.); es bleibt blos eine Curve 9. Ordnung, wie sie auch oben gefunden wurde. (C. P. Nr. 40.)*)

100. Die Zahl der Durchgänge der Curve $\zeta_{12}'^{\text{ter}}$ Ordnung der Punkte $(A)_{12}$ oder $(B)_{12}$, welche für $[klmn]_{12}$ associirte Punkte in β oder α haben, durch jeden der Punkte A_i (B_i) und der Begegnungspunkte mit einer $a_i (b_i)$ ergiebt sich wieder leicht mit Hilfe von Nr. 4. Die bei $n = 0$ gefundene Curve 14. Ordnung a^{14}, b^{14} trifft jede Gerade a_i, b_i achtmal und geht durch jeden Punkt A_i, B_i dreimal; die Curve a^9, b^9 bei [3300] geht einmal durch jeden A_i, B_i und trifft jede a_i, b_i sechsmal. Im letztern Falle trifft a^9 die Ebene α_{123} ausserdem noch in den 3 Punkten, welche den Schnitten der associirten Curve $\beta\beta^3$ mit β_{123} associirt sind, und in den 3 Punkten A^0, welche den Punkten βb^0 correspondiren (Nr. 93.); im allgemeinen Falle wird jede etwa vorhandene Ebene α_{ikl} von a^{14} noch in den 5 Punkten getroffen, welche den nicht auf b_i, b_k, b_l gelegenen Schnitten von $\beta\beta^4$ mit dem Hyperboloide β^2_{ikl} entsprechen.

Bei den Curven a^{28}, b^{28} sind die Zahlen doppelt so gross, wie bei a^{14}, b^{14}; die $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ treffen sie 11mal. Die a^{23}, b^{23} bei [3211] gehen durch jeden A_i, B_i 4mal, treffen jede a_i, b_i 14mal und die $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ 9mal.

Da a^{14} mit a_0^{10}, wie oben gezeigt, einen vollständigen Schnitt (α^4, α^{11}) bildet, zu welchem a_0^{10} dreifach gehört, so sind nun leicht die Zahl der Durchgänge von a_0^{10} durch jeden A_i und die Begegnungspunkte mit jeder a_i zu verificiren (Nr. 84.)

101. Mit einem Punkte B_i, z. B. B_1, ist für $[klmn]_{12}$ die Curve ζ_{10B}^{ter} Ordnung associirt, welche ihm für $[k, l-1, m, n]_{10}$ correspondirt, wo das Paar $a_1 B_1$ weggelassen ist; sie trifft also a_1 nicht. Geht mithin die Ebene β durch B_1, so löst sich diese Curve von der Curve $a^{\zeta_{12}'}$ ab.

Jeder Punkt einer b_i, z. B. b_1, hat einen associirten und diese associirten Punkte erzeugen eine Curve, deren Ordnung offenbar gleich der Zahl der Begegnungspunkte der Curve $b^{\zeta_{12}'}$, die der Ebene α — oder genauer der Curve $\alpha\alpha^{\zeta_{12}}$ — associirt ist, mit b_i. Um zu erkennen, wie oft diese Curve durch A_1 oder einen der andern A geht, haben

*) Im „Problem der Collineation" ergab sich für die dort betrachtete Signatur dieselbe Curve von der 11. Ordnung (Nr. 31., 35.). Diese Ordnung wurde dort mit Hilfe des Correspondenzprincips der Ebene gefunden.

wir α durch denselben zu legen und von der diesem Punkte allein entsprechenden Curve abzusehen.

Betrachten wir als Beispiel die Signaturen $n = 0$ ausser [3300]. Der Ebene α correspondirt eine Curve b^{14}, welche b_1 8mal trifft; also der b_1 eine Curve 8. Ordnung. Legen wir α durch A_1, so zerfällt b^{14} in eine cubische Raumcurve und eine Curve 11. Ordnung, von denen die erstere der b_1 nicht, die letztere also noch 8mal begegnet. Die Curve 8. Ordnung geht demnach nicht durch A_1 (und das wird allgemein statthaben). Geht aber α durch einen andern A_ι, so trifft die sich ablösende Curve 3. Ordnung die b_1 zweimal, die Curve 11. Ordnung dieselbe also nur noch sechsmal; d. h. die Ebene α enthält von der Curve 8. Ordnung ausser dem A_i noch 6 Punkte, also den A_i doppelt. Legte man α durch eine a_i, so würde dies zu nichts führen. Man findet aber die Zahl der Begegnungspunkte der Curve 8. Ordnung, die der b_1 associirt ist, mit einer a_i so: es werde $A_1\, b_1$ ersetzt durch $A_1 \mathfrak{B}'$, wo $\mathfrak{B}'$ auf b_1 liegt; so dass $[klm0]_{12}$ in $[k-1, l, m+1, 0]_{11}$ übergeht. Die Curve 11. Ordnung, die der Geraden b_1 hierfür correspondirt und a_i 7mal trifft, zerfällt in die blos dem $\mathfrak{B}'$ correspondirende cubische Raumcurve (d. i. die ihm für $[k-1, l, m, 0]_{10}$, wo $A_1 \mathfrak{B}'$ weggelassen, associirte), welche a_i zweimal trifft, und die Curve 8. Ordnung, welche also a_i noch fünfmal trifft.

Im Falle [3300] ist mit jeder Geraden b_i eine Curve 6. Ordnung associirt, welche durch den homologen A_i nicht geht, durch die andern je einmal und die a_i je viermal trifft. (C. P. Nr. 41).

VIII $\sigma = 13$.

102. Wir kommen zur Tabelle VIII, für welche die Formel (Nr. 27.)

$$\text{VIII b)} \qquad 2\overline{\lambda}_{11} = \dot{\lambda}_{11} + \lambda_{11\,B} + \lambda_{11}'$$

dient. Es fehlt die Kenntniss der $\dot{\lambda}_{11}$ für die Signaturen $[klm0]_{11}$, oder der $\lambda_{12\,B}$ für die Signaturen $[k, l, m+1, 0]_{12}$; für diejenigen Signaturen, wo $k + l < 6$, sagt Nr. 30., dass $\lambda_{12\,B} = 0$ ist; aber auch von den 7 übrigen haben 6 diesen Werth von $\lambda_{12\,B}$; nur [3300] macht wieder eine Ausnahme. $\lambda_{12\,B}$ ist die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen, bei denen der Scheitel B in einer gegebenen Ebene β liegt, oder die Ordnung der Curve der Punkte B, denen Punkte A durch solche Correlationen correspondiren.

Die 3 Schnitte von β mit der Curve (β^3, β_{123}), deren Punkte denen von (α^3, α_{123}) durch solche Correlationen entsprechen (Nr. 93.), führen zu 3 Lösungen; also $\lambda_{12\,B} = 3$; aber für die folgende Tabelle ist dieses $\lambda_{12\,B}$ noch nicht nothwendig.

Tab. VIII; $\sigma = 11$.

Sign.	λ_{11B}	λ'_{11}	$\dot{\lambda}_{11}$	$\overline{\lambda}_{11}$
5010, 0510	0	0	0	0
5001, 0501	0	0	0	0
4110, 1410	0	0	0	0
4101, 1401	4	20	0	12
3210, 2310	1	5	0	3
3201	4	11	3	9
2301	2	11	3	8
4030, 0430	0	0	0	0
4021, 0421	0	0	0	0
4012, 0412	4	20	0	12
4003	24	84	12	60
0403	16	84	12	56
3130, 1330	0	0	0	0
3121, 1321	1	5	0	3
3112	8	31	3	21
3103	15	54	21	45
1312	6	31	3	20
1303	16	54	20	45
2230	0	0	0	0
2221	2	10	0	6
2212	6	22	6	17
2203	16	59	17	46
3050, 0350	0	0	0	0
3041, 0341	0	0	0	0
3032, 0332	1	5	0	3
3023	12	51	3	33
3014	39	138	33	105
3005	64	215	105	192
0323	10	51	3	32
0314	32	138	32	101
0305	68	215	101	192
2150, 1250	0	0	0	0
2141, 1241	0	0	0	0
2132, 1232	3	15	0	9
2123	14	53	9	38
2114	31	113	38	91
2105	54	175	91	160

Sign.	λ_{11B}	λ'_{11}	$\dot{\lambda}_{11}$	$\overline{\lambda}_{11}$
1223	12	53	9	37
1214	32	113	37	91
1205	54	175	91	160
2070, 0270	0	0	0	0
2061, 0261	0	0	0	0
2052, 0252	0	0	0	0
2043, 0243	4	20	0	12
2034	26	104	12	71
2025	70	251	71	196
2016	118	390	196	352
2007	136	408	352	448
0234	22	104	12	69
0225	64	251	69	192
0216	122	390	192	352
0207	160	408	352	460
1170	0	0	0	0
1161	0	0	0	0
1152	0	0	0	0
1143	6	30	0	18
1134	26	106	18	75
1125	63	226	75	182
1116	108	350	182	320
1107	142	410	320	436
1090, 0190	0	0	0	0
1081, 0181	0	0	0	0
1072, 0172	0	0	0	0
1063, 0163	0	0	0	0
1054, 0154	10	50	0	30
1045	52	210	30	146
1036	133	477	146	378
1027	226	740	378	672
1018	278	818	672	884
1009	256	620	884	880
0145	48	210	30	144
0136	127	477	144	374
0127	230	740	374	672
0118	302	818	672	896
0109	284	620	896	900

Sign.	λ_{11B}	λ'_{11}	$\dot\lambda_{11}$	$\bar\lambda_{11}$
$00\overline{11}0$	0	0	0	0
$00\overline{10}1$	0	0	0	0
0092	0	0	0	0
0083	0	0	0	0
0074	0	0	0	0
0065	20	100	0	60

Sign.	λ_{11B}	λ'_{11}	$\dot\lambda_{11}$	$\bar\lambda_{11}$
0056	100	420	60	290
0047	260	954	290	752
0038	456	1480	752	1344
0029	580	1636	1344	1780
$001\overline{10}$	540	1240	1780	1780
$000\overline{11}$	440	900	1780	1560.

Das letzte Resultat, also $\bar\lambda_{11}$ für $[000\overline{11}]$ oder λ_{12B} für $[000\overline{12}]$ giebt folgenden Satz: *Wenn 2 Gruppen von je 12 Geraden* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{12}$, $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{12}$ *gegeben sind und man sucht solche Büschel* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *dass* $(A\alpha)\ (\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{12}) \barwedge (B\beta)\ (\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{12})$; *so liegen die* A, *sowohl wie die* B *auf je einer Curve* 1560ter *Ordnung, und die* α, *wie die* β *umhüllen je einen Torsus von der* 1560ten *Klasse.*

103. Zur Aufstellung der Tabelle 8 sind die Formeln (Nr. 14.)

(8 a u. b) $$2\nu_{12} = \mu_{12} + \zeta_{12B} + \zeta'_{12}; \quad 2\mu_{12} = \nu_{12} + \lambda_{12B}$$

nöthig.

Tab. 8; $\sigma = 12$.

Sign.	ζ_{12B}	ζ'_{12}	λ_{12B}	μ_{12}	ν_{12}
6000, 0600, 5100, 1500, 4200, 2400	4	14	0	6	12
3300	3	9	3	6	9
5020, 0520	4	14	0	6	12
5011, 0511	8	28	0	12	24
5002, 0502	16	56	0	24	48
4120, 1420	4	14	0	6	12
4111, 1411	8	28	0	12	24
4102, 1402	12	36	12	24	36
3220, 2320	4	14	0	6	12
3211, 2311	7	23	3	12	21
3202	10	35	9	21	33
2302	12	35	8	21	34
4040, 0440	4	14	0	6	12
4031, 0431	8	28	0	12	24
4022, 0422	16	56	0	24	48
4013, 0413	28	92	12	48	84
4004	32	100	60	84	108
0404	40	100	56	84	112
3140, 1340	4	14	0	6	12
3131, 1331	8	28	0	12	24

Sign.	ζ_{12B}	ζ'_{12}	λ_{12B}	μ_{12}	ν_{12}
3122, 1322	15	51	3	24	45
3113	22	71	21	45	69
3104	29	88	45	69	93
1313	24	71	20	45	70
1304	32	88	45	70	95
2240	4	14	0	6	12
2231	8	28	0	12	24
2222	14	46	6	24	42
2113	22	70	17	42	67
2204	28	81	46	67	88
3060, 0360	4	14	0	6	12
3051, 0351	8	28	0	12	24
3042, 0342	16	56	0	24	48
3033, 0333	31	107	3	48	93
3024	50	163	33	93	153
3015	61	188	105	153	201
3006	58	161	192	201	210
0324	52	163	32	93	154
0315	72	188	101	154	207
0306	76	161	192	207	222
2160, 1260	4	14	0	6	12
2151, 1251	8	14	0	12	24
2142, 1242	16	28	0	24	48
2133, 1233	29	97	9	48	87
2124	44	141	38	87	136

Sign.	ζ_{12B}	ζ'_{12}	λ_{12B}	μ_{12}	ν_{12}
2115	57	169	91	136	181
2106	60	163	160	181	202
1224	46	141	37	87	137
1215	60	169	91	137	183
1206	66	163	160	183	206
2080, 0280	4	14	0	6	12
2071, 0271	8	28	0	12	24
2062, 0262	16	56	0	24	48
2053, 0253	32	112	0	48	96
2044, 0244	60	204	12	96	180
2035	94	304	71	180	289
2026	118	357	196	289	382
2017	118	324	352	382	412
2008	100	240	448	412	376
0235	98	304	69	180	291
0226	132	357	192	291	390
0217	142	324	352	390	428
0208	124	240	460	428	396
1180	4	14	0	6	12
1171	8	28	0	12	24
1162	16	56	0	24	48
1153	32	112	0	48	96
1144	58	194	18	96	174
1135	90	282	75	174	273
1126	117	338	182	273	364
1117	126	326	320	364	408
1108	110	242	436	408	380
$0\overline{10}0$, $01\overline{10}0$	4	14	0	6	12
1091, 0191	8	28	0	12	24

Sign.	ζ_{12B}	ζ'_{12}	λ_{12B}	μ_{12}	ν_{12}
1082, 0182	16	56	0	24	48
1073, 0173	32	112	0	48	96
1064, 0164	64	224	0	96	192
1055, 0155	118	398	30	192	354
1046	184	586	146	354	562
1037	235	695	378	562	746
1028	244	650	672	746	820
1019	210	482	884	820	756
$100\overline{10}$	164	344	880	756	632
0146	188	586	144	354	564
0137	249	695	374	564	754
0128	268	650	672	754	836
0119	234	482	896	836	776
$010\overline{10}$	184	344	900	776	652
$00\overline{12}0$	4	14	0	6	12
$00\overline{11}1$	8	28	0	12	24
$00\overline{10}2$	16	56	0	24	48
0093	32	112	0	48	96
0084	64	224	0	96	192
0075	128	448	0	192	384
0066	236	796	60	384	708
0057	372	1172	290	708	1126
0048	484	1390	752	1126	1500
0039	512	1300	1344	1500	1656
$002\overline{10}$	444	964	1780	1656	1532
$001\overline{11}$	348	688	1780	1532	1284
$000\overline{12}$	256	476	1560	1284	1008.

104. Die μ_{12}, ν_{12} geben *die Ordnung* ζ_{13B} *der Curve der Punkte* $B)_{13}$, *welche für* $[k, l, m+1, n]_{13}$, $[k, l, m, n+1]_{13}$ *associirte Punkte* $(A)_{13}$ *haben.*

Die Tabelle zeigt, dass, *wenn* $n = 0$, ζ_{13B} (*und also auch* ζ_{13A}) *ohne Ausnahme* 6 *ist*, *bei* $n = 1$ $\zeta_{12B} = 12$ *ist und nur* [3301] *eine Ausnahme mit* $\zeta_{13B} = 9$ *macht*, *bei* $n = 2$ $\zeta_{13B} = 24$ *mit alleiniger Ausnahme von* [3212], [2312], *wo* $\zeta_{13B} = 21$ *ist*, während nun die Ausnahmen zahlreicher werden und bei $n = 6$ nur für [0076] $\zeta_{13B} = 384$ ist.

Für $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ *lässt sich dies Resultat auch so erreichen:* Man zerlegt (13) α) in $\left(11, \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}\right)$ und $\left(11, \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{B}_2}\right)$, β) in $\left(11, \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}\right)$, und $\left(11, \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1}\right)$, γ) in $\left(11, \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1}\right)$ und $\left(11, \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{b}_2}\right)$. Wir erhalten in **B** α) zwei Flächen 4. Ordnung, β) eine Fläche 4. und eine 8. Ordnung, γ) zwei Flächen 8. Ordnung. Diese schneiden sich in der zu (11) gehörigen Curve b_0^{10}, die auf den Flächen 4. Ordnung einfach, auf den Flächen 8. Ordnung doppelt ist (Nr. 92.) und die Punkte enthält, denen für (11) mehr als ein Punkt associirt ist, und in einer Curve α) 6., β) 12., γ) 24. Ordnung; jedem Punkte derselben ist für (11) nur ein Punkt associirt, der dann auch für $\left(11, \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}\right)$ und $\left(11, \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{B}_2}\right)$, u. s. f. und also auch für (13) associirt ist.

Wenn aber (11) die Signatur

$$[3210] \qquad \begin{matrix} A_1\, A_2\, A_3\, a_1\, a_2\, \mathfrak{A}_1 \\ b_1\, b_2\, b_3\, B_1\, B_2\, \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

ist und es wird bez. α) $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3$; β) $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; γ) $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$ hinzugefügt, so dass sich α) [3230] und, falls $\mathfrak{B}_2$ identisch $\mathfrak{B}_1$ ist, [3310], β) [3221] bez. [3301], γ) [3212] ergiebt; so haben wir in α) für $\left(3210, \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{B}_2}\right)$ und $\left(3210, \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{B}_3}\right)$ je eine Fläche β^4 in B, denen die Curve 10. Ordnung b_0^{10}, bestehend aus b_0^6 und $\overline{b}^4$, gemein ist und ausserdem die Curve b^6 wie oben; in β) erhalten wir eine Fläche 4. und eine 7. Ordnung; auf der ersteren liegt b_0^6 einfach, auf der letzteren doppelt, $\overline{b}^4$ aber auf beiden einfach; also bleibt auch hier eine Curve 12. Ordnung. Ist aber $\mathfrak{B}_2$ identisch mit $\mathfrak{B}_1$, so führt $\left(3210, \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{B}_1}\right)$ nur zu einer Fläche 3. Ordnung, auf der $\overline{b}^4$ nicht liegt; es bleibt als Schnitt dieser Fläche in α) mit der Fläche 4. Ordnung, mit der sie die b_0^6 einfach gemein hat, eine Curve 6. Ordnung, wie bisher, in β) mit der Fläche 7. Ordnung, auf der b_0^6 doppelt ist, eine Curve 9. Ordnung, wie sie sich bei [3301] ergeben hat. In γ) erhalten wir zwei Flächen 7. Ordnung, welche beide die Curve b_0^6 doppelt, die $\overline{b}^4$ einfach enthalten, so dass ein Schnitt 21. Ordnung bleibt, wie er für [3212] gefunden ist. Für [2310] ergeben sich dieselben Resultate.

105. Die Zahl der Durchgänge der Curve $a^{\zeta''}$, $b^{\zeta''}$ der Punkte $(A)_{13}$, $(B)_{13}$ durch die Punkte A_i, B_i und der Begegnungspunkte mit den a_i, b_i, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ ist wieder leicht aus Nr. 4. zu entnehmen. Die Curve 6. Ordnung a^6, b^6 bei $n = 0$ geht durch jeden A_i, B_i einmal und trifft jede Linie a_i, b_i dreimal; bei den Curven 12., 24. Ordnung verdoppeln und vervierfachen sich diese Zahlen; die $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ treffen sie 4-, 8mal. Die a^9, b^9 bei [3301] geht durch A_i, B_i je einmal, trifft a_i, b_i fünfmal und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ dreimal.

Die Curve a^{21} bei [3212] geht durch die A_i je dreimal, trifft die a_i je eilfmal und die $\mathfrak{a}_i$ je siebenmal; ebenso verhält sich b^{21} gegen die B_i, b_i, $\mathfrak{b}_i$.

Die Curven a^6, b^6 bei [3310] und a^9, b^9 bei [3301] gehen beide durch $A_1 A_2 A_3$, bez. $B_1 B_2 B_3$ einfach, schneiden ferner (Nr. 93.) die α_{123}, β_{123} noch in den drei Punkten A^0, B^0; die drei weiteren Schnittpunkte der Curven a^9, b^9 mit den beiden Ebenen sind die Punkte $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}^0$, für welche

$$(\mathfrak{A}^0 \alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 a_3 \mathfrak{a}_1) \barwedge (\mathfrak{B}^0 \beta_{123})\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 B_3 \mathfrak{b}_1)$$

(Eb. Proj. Nr. 16.); womit zugleich der Werth 3 für λ_{13} bei [3301] gewonnen ist. (C. P. Nr. 43.)

106. Im Vorhergehenden ist *für* $n = 0, 1, 2$ die Curve $a^{\zeta^{13}}$, $b^{\zeta^{13}}$ als partieller Schnitt von zwei Flächen erkannt worden, der durch $a_0{}^{10}$, $b_0{}^{10}$ zum vollen Schnitt ergänzt wird; es ist nicht unwichtig, *die Zahl der Begegnungspunkte* $a^{\zeta^{13}} a_0{}^{10}$, $b^{\zeta^{13}} b_0{}^{10}$ zu ermitteln.

Die Curven a^6, a^{12}, a^{24} treffen, wenn unsere Signaturen aus $[klm0]_{11}$ hervorgegangen sind wie oben, die Fläche α^{11}, welche einer Ebene β hierfür associirt ist, in 6. 11, 12. 11, 24. 11 Punkten. Zu diesen gehören die k Punkte A_i, auf α^{11} 6fach, auf den Curven bez. 1-, 2-, 3fach, ferner die 6, 12, 24 Punkte, welche den Schnitten der associirten Curven b^6, b^{12}, b^{24} mit β correspondiren; also bleiben noch $60 - 6k$, $120 - 12k$, $240 - 24k$ Punkte, welche sowohl für (11) einen associirten auf β, also auch einen davon verschiedenen associirten für (13) haben, der mithin auch schon für (11) associirt war; folglich haben sie eine ganze cubische Curve für (11) associirt (Nr. 41.); die Punkte befinden sich demnach auf $a_0{}^{10}$ (zu welcher ja die a_i gehören); da dieselbe auf α^{11} dreifach ist, so ist ihre Zahl nur $20 - 2k$, $40 - 4k$, $80 - 8k$. Die Zahl derjenigen, welche auf der Restcurve $a_0{}^{10-l}$ liegen, beträgt mithin $20 - 2k - 3l$, $40 - 2k - 6l$, $80 - 8k - 12l$. Ebenso haben die associirten Curven b^6, b^{12}, b^{24} mit $b_0{}^{10}$ bez. $10 - 2l$, $40 - 4l$, $80 - 8l$ Punkte gemein, also mit $b_0{}^{10-k}$ $20 - 2l - 3k$, $40 - 4l - 6k$, $80 - 8l - 12k$.

Die Signatur

$$[3210]_{11} \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{A}_1 \\ b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{B}_1 \end{matrix}$$

erfordert wieder eine besondere Betrachtung. Wir erhielten in den drei obigen Fällen α), β), γ), wenn $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3$; $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$ hinzugefügt wird, so dass die Signaturen [3230], [3221] und [3212] entstehen, eine Curve a^6, a^{12}, a^{21} und ihr associirt b^6, b^{12}, b^{21}. Jene schneiden die Fläche α^9, die der Ebene β für [3210] correspondirt, in 9.6, 9.12, 9.21 Punkten; dazu gehören die 3 Punkte A_i, auf α^9 vierfach, auf den Curven bez. 1-, 2-, 3fach. Diese Curven treffen ferner die Ebene α_{123} ausser in den A_i noch in 3, 6, 12 Punkten. Die ausserhalb der Curve $\overline{a}^4$ gelegenen Punkte dieser Ebene correspondiren für [3210] ihren associirten Punkten (in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$) durch Correlation mit singulären Ebenen; bei [3230], [3221] giebt es keine derartig associirten Punkte, bei [3212] jedoch 3 Paare $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ in α_{123} und $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$, diejenigen, welche der Bedingung

$(\mathfrak{A}'\alpha_{123})\ (A_1 A_2 A_3 a_1 a_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \barwedge (\mathfrak{B}',\ B_1 B_2 \mathfrak{B}_1)\ (b_1 b_2 b_3 B_1 B_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)$ genügen (Eb. Proj. Nr. 16.); beides wird auch in der nächsten Tabelle erkannt werden. Daraus geht hervor, dass die obigen 3, 6 Punkte bei a^6, a^{12} auf $\overline{a}^1$ liegen, von den 12 bei a^{21} aber nur 9. In diesen 3, 6, 9 Punkten schneiden die a^6, a^{12}, a^{21} die Fläche α^9 einfach, ausserdem noch in den Punkten, welche den Schnitten von b^6, b^{12}, b^{21} mit β associirt sind; es bleiben demnach 33, 66, 123 weitere Schnittpunkte übrig; dies sind die 11, 22, 41 Punkte, in denen unsere Curven die auf α^9 dreifache $a_0{}^6$ treffen, welche mit $\overline{a}^4$ die $a_0{}^{10}$ bildet. Ist aber in α), β) $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ identisch, so dass man [3310] und [3301] hat, so tritt bei a^6 keine Aenderung ein; an Stelle von a^{12}, b^{12} tritt aber a^9, b^9; a^9 geht durch die A_i einmal, und die 3 Schnitte mit $\overline{a}^4$ sind die 3 bei [3300] gefundenen Punkte A^0 (Nr. 93). Es bleiben $9.9 - 3.4.1 - 3 - 9 = 3.19$ Punkte; a^9 hat also mit $a_0{}^{10}$ 22 Punkte gemein, 19 auf $a_0{}^6$ und 3 auf $\overline{a}^4$.

Die Curven b^6, b^{12}, b^{21} in B haben mit der einer α associirten Fläche β^{11} gemein 1) die 2 Punkte B_1, B_2, auf letzterer 4fach, auf ersteren 1-, 2-, 3fach; 2) die den Schnitten von α mit a^6, a^{12}, a^{21} associirten; 3) 4, 8, 12 Punkte auf $\overline{b}^4$, indem bei b^{21} drei ausserhalb $\overline{b}^4$ liegende Punkte in $B_1 B_2 \mathfrak{B}_1$ die obigen $\mathfrak{B}'$ sind, also noch 36, 72, 132, welche die 12, 24, 44 Schnitte von b^6, b^{12}, b^{21} mit $b_0{}^6$ sind. Bei a^6, a^{12}; b^6, b^{12} ist die Zahl der Begegnungspunkte mit der ganzen $a_0{}^{10}$; $b_0{}^{10}$ also $11+3$, $22+6$; $12+4$, $24+8$, folglich gleich den obigen Werthen $20-2k$, $40-4k$; $20-2l$, $40-4l$.

Lässt man aber wieder $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_1$ in B_3 zusammenfallen, so geht b^{12} wieder in b^9 über, welche durch die auf β^9 vierfachen Punkte B_1, B_2 einfach geht, β^9 auf $\overline{b}^4$ in den 3 Punkten B^0 und dem in B_3 übergegangenen $\mathfrak{B}_1$, ferner in den den 9 Punkten αa^9 associirten Punkten und demnach auf der Curve $b_0{}^6$ in $\frac{1}{3}(9.9 - 2.4.1 - 4 - 9) = 20$ Punkten trifft. Bei b^6 geht keine Veränderung vor; die 4 Punkte auf $\overline{b}^4$ sind B_3 und die drei B^0. (Cf. C. P. Nr. 44., 45.)

IX $\sigma = 14$.

107. Die Tabelle IX ergiebt sich aus der Formel (Nr. 28.).

(IX b) $$2\overline{\lambda}_{12} = \dot{\lambda}_{12} + \lambda_{12B} + \lambda_{12A}.$$

Tab. IX; $\sigma = 12$.

Sign.	λ_{12B}	λ_{12A}	$\dot{\lambda}_{12}$	$\overline{\lambda}_{12}$	Sign.	λ_{12B}	λ_{12A}	$\dot{\lambda}_{12}$	λ_{12}
6000, 0600					3300	3	3	0	3
5100, 1500	0	0	0	0	5020, 0520	0	0	0	0
4200, 2400					5011, 0511	0	0	0	0

Sign.	λ_{12B}	λ_{12A}	$\dot{\lambda}_{12}$	$\bar{\lambda}_{12}$
5002, 0502	0	0	0	0
4120, 1420	0	0	0	0
4111, 1411	0	0	0	0
4102, 1402	12	12	0	12
3220, 2320	0	0	0	0
3211, 2311	3	3	0	3
3202, 2302	9	8	3	10
4040, 0440	0	0	0	0
4031, 0431	0	0	0	0
4022, 0422	0	0	0	0
4013, 0413	12	12	0	12
4004, 0404	60	56	12	64
3140, 1340	0	0	0	0
3131, 1331	0	0	0	0
3122, 1322	3	3	0	3
3113, 1313	21	20	3	22
3104, 1304	45	45	22	56
2240	0	0	0	0
2231	0	0	0	0
2222	6	6	0	6
2213	17	17	6	20
2204	46	46	20	56
3060, 0360	0	0	0	0
3051, 0351	0	0	0	0
3042, 0342	0	0	0	0
3033, 0333	3	3	0	3
3024, 0324	33	32	3	34
3015, 0315	105	101	34	120
3006, 0306	192	192	120	252
2160, 1260	0	0	0	0
2151, 1251	0	0	0	0
2142, 1242	0	0	0	0
2133, 1233	9	9	0	9
2124, 1224	38	37	9	42
2115, 1215	91	91	42	112
2106, 1206	160	160	112	216
2080, 0280	0	0	0	0
2071, 0271	0	0	0	0
2062, 0262	0	0	0	0

Sign.	λ_{22B}	λ_{12A}	$\dot{\lambda}_{12}$	$\bar{\lambda}_{12}$
2053, 0253	0	0	0	0
2044, 0244	12	12	0	12
2035, 0235	71	69	12	76
2026, 0226	196	192	76	232
2017, 0217	352	352	232	468
2008, 0208	448	460	468	688
1180	0	0	0	0
1171	0	0	0	0
1162	0	0	0	0
1153	0	0	0	0
1144	18	18	0	18
1135	75	75	18	84
1126	182	182	84	224
1117	320	320	224	432
1108	436	436	432	652
$10\overline{10}0, 01\overline{10}0$	0	0	0	0
1091, 0191	0	0	0	0
1082, 0182	0	0	0	0
1073, 0173	0	0	0	0
1064, 0164	0	0	0	0
1055, 0155	30	30	0	30
1046, 0146	146	144	30	160
1037, 0137	378	374	160	456
1028, 0128	672	672	456	900
1019, 0119	884	896	900	1340
$100\overline{10}, 010\overline{10}$	880	900	1340	1560
$00\overline{12}0$	0	0	0	0
$00\overline{11}1$	0	0	0	0
$00\overline{10}2$	0	0	0	0
0093	0	0	0	0
0084	0	0	0	0
0075	0	0	0	0
0066	60	60	0	60
0057	290	290	60	320
0048	752	752	320	912
0039	1344	1344	912	1800
$002\overline{10}$	1780	1780	1800	2680
$001\overline{11}$	1780	1780	2680	3120
$000\overline{12}$	1560	1560	3120	3120.

Die Tabelle zeigt, dass λ_{12} bei allen Signaturen $[klm0]_{12}$ oder λ_{13} bei allen Signaturen $[k, l, m+1, 0]_{13}$ den Werth 0 hat, wie aus Nr. 30. schon hervorgeht, da $k + l < 7$ ist. Die $\overline{\lambda}_{12}$ für [3300] und [3211] oder λ_{13} für [3301] und [3212] sind schon in Nr. 105., 106. (die Punkte $\mathfrak{A}^0\mathfrak{B}^0$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$) gleich 3 erkannt. Wir interpretiren wieder das letzte Resultat: $\overline{\lambda}_{12}$ für [00012] oder λ_{13} für $[000\overline{1}3]$ gleich 3120.

Hat man zwei Gruppen von je 13 *Geraden:* $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{13}$, $\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{13}$, *so giebt es* 3120 *Paare von Strahlbüscheln* $(A\alpha)$, $(B\beta)$, *so dass*

$$(A\alpha)\ (\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{13}) \barwedge (B\beta)\ (\mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_{13}).$$

108. Wir kommen nun zur letzten Tabelle, durch welche wir *die Zahl* ζ_{14} *der Paare von associirten Punkten für* $\sigma = 14$ finden. Für die Aufstellung derselben dienen die Formeln (Nr. 15.):

(9 a u. b) $\qquad 2\nu_{13} = \mu_{13} + \zeta_{13B} + \zeta_{13A};\quad 2\mu_{13} = \nu_{13} + \lambda_{13}.$

Tab. 9; $\sigma = 13$.

Sign.	ζ_{13B}	ζ_{13A}	λ_{13}	μ_{13}	ν_{13}
6010, 0610	6	6	0	4	8
6001, 0601	12	12	0	8	16
5110, 1510	6	6	0	4	8
5101, 1501	12	12	0	8	16
4210, 2410	6	6	0	4	8
4201, 2401	12	12	0	8	16
3310	6	6	0	4	8
3301	9	9	3	8	13
5030, 0530	6	6	0	4	8
5021, 0521	12	12	0	8	16
5012, 0512	24	24	0	16	32
5003, 0503	48	48	0	32	64
4130, 1430	6	6	0	4	8
4121, 1421	12	12	0	8	16
4112, 1412	24	24	0	16	32
4103, 1403	36	36	12	32	52
3230, 2330	6	6	0	4	8
3221, 2321	12	12	0	8	16
3212, 2312	21	21	3	16	29
3203, 2303	33	34	10	29	48
4050, 0450	6	6	0	4	8
4041, 0441	12	12	0	8	16
4032, 0432	24	24	0	16	32
4023, 0423	48	48	0	32	64

Sign.	ζ_{13B}	ζ_{13A}	λ_{13}	μ_{13}	ν_{13}
4014, 0414	84	84	12	64	116
4005, 0405	108	112	64	116	168
3150, 1350	6	6	0	4	8
3141, 1341	12	12	0	8	16
3132, 1332	24	24	0	16	32
3123, 1323	45	45	3	32	61
3114, 1314	69	70	22	61	100
3105, 1305	93	95	56	100	144
2250	6	6	0	4	8
2241	12	12	0	8	16
2232	24	24	0	16	32
2223	42	42	6	32	58
2214	67	67	20	58	96
2205	88	88	56	96	136
3070, 0370	6	6	0	4	8
3061, 0361	12	12	0	8	16
3052, 0352	24	24	0	16	32
3043, 0343	48	48	0	32	64
3034, 0334	93	93	3	64	125
3025, 0325	153	154	34	125	216
3016, 0316	201	207	120	216	312
3007, 0307	210	222	252	312	372
2170, 1270	6	6	0	4	8
2161, 1261	12	12	0	8	16
2152, 1252	24	24	0	16	32
2143, 1243	48	48	0	32	64
2134, 1234	87	87	9	64	119
2125, 1225	136	137	42	119	196
2116, 1216	181	183	112	196	280
2107, 0207	202	206	216	280	344
2090, 0290	6	6	0	4	8
2081, 0281	12	12	0	8	16
2072, 0272	24	24	0	16	32
2063, 0263	48	48	0	32	64
2054, 0254	96	96	0	64	128
2045, 0245	180	180	12	128	244
2036, 0236	289	291	76	244	412
2027, 0227	382	390	232	412	592
2018, 0218	412	428	468	592	716
2009, 0209	376	396	688	716	744

Sign.	ζ_{13B}	ζ_{13A}	λ_{13}	μ_{13}	ν_{13}
1190	6	6	0	4	8
1181	12	12	0	8	16
1172	24	24	0	16	32
1163	48	48	0	32	64
1154	96	96	0	64	128
1145	174	174	18	128	238
1136	273	273	84	238	392
1127	364	364	224	392	560
1118	408	408	432	560	688
1109	380	380	652	688	724
$10\overline{11}0, 01\overline{11}0$	6	6	0	4	8
$10\overline{10}1, 01\overline{10}1$	12	12	0	8	16
1092, 0192	24	24	0	16	32
1083, 0183	48	48	0	32	64
1074, 0174	96	96	0	64	128
1065, 0165	192	192	0	128	256
1056, 0156	354	354	30	256	482
1047, 0147	562	564	160	482	804
1038, 0138	746	754	456	804	1152
1029, 0129	820	836	900	1152	1404
$101\overline{10}, 011\overline{10}$	756	776	1340	1404	1468
$100\overline{11}, 010\overline{11}$	632	652	1560	1468	1376
$00\overline{13}0$	6	6	0	4	8
$00\overline{12}1$	12	12	0	8	16
$00\overline{11}2$	24	24	0	16	32
$00\overline{10}3$	48	48	0	32	64
0094	96	96	0	64	128
0085	192	192	0	128	156
0076	384	384	0	256	512
0067	708	708	60	512	964
0058	1126	1126	320	964	1608
0049	1500	1500	912	1608	2304
$003\overline{10}$	1656	1656	1800	2304	2808
$002\overline{11}$	1532	1532	2680	2808	2936
$001\overline{12}$	1284	1284	3120	2936	2752
$000\overline{13}$	1008	1008	3120	2752	2384.

109. Die μ_{13}, ν_{13} geben nun die Zahl ζ_{14} für $[k, l, m+1, n]$, bez. $[k, l, m, n+1]$. *Alle bisher erhaltenen Signaturen* $[k, l, m, 0]_{14}$

haben also $\zeta_{14} = 4$ *und auch die* 8 *Signaturen* $[k, l, 0, 0]_{14}$ *weichen,* wie man wieder durch Auflösung einer Doppel- in zwei einfache Bedingungen erkennt, *davon nicht ab*; *alle Signaturen ferner* $[k, l, m, 1]_{14}$ *haben* $\zeta_{14} = 8$.

Bei $n = 2$ ist $\zeta_{14} = 16$, ausser für [3302], wo es 13 ist;

bei $n = 3$ ist $\zeta_{14} = 32$, ausser für [3213], [2313], wo es 29 ist;

bei $n = 4$ ist $\zeta_{14} = 64$, ausser für [4104], [1404]; [3204), [2304]; [3124], [1324]; [2224], wo es bez. 52, 48, 61, 58 ist;

bei $n = 5$ ist $\zeta_{14} = 128$, ausser für [4015], [0415]; [3115], [1315]; [2215]; [3035], [0335]; [2135], [1235], wo es bez. 116, 100, 96, 125, 119 ist. Nachher nehmen die Ausnahmen überhand. *)

Bis zu $n = 3$ *können diese Zahlenwerthe von* ζ_{14} *auch auf folgende Weise gefunden werden:* Zu $[klm0]_{11}$ werden 3 Paare conjugirter Elemente (Punkte oder Geraden) zugefügt, wobei zunächst noch von [3210] abgesehen wird; wir combiniren einmal das eine Paar und dann die beiden andern Paare mit $[klm0]_{11}$; im ersteren Falle erhalten wir, wenn das Paar aus Punkten besteht, in A durchweg eine Fläche α^4 und wenn es aus Geraden besteht, durchweg eine Fläche α^8, auf α^4 ist a_0^{10} einfach, auf α^8 doppelt; auf jener die A_i doppelt, auf dieser vierfach.

Im zweiten Falle ergiebt sich, je nach der Beschaffenheit der zugefügten Paare, eine Curve 6., 12. oder 24. Ordnung, welche durch die A_i 1-, 2-, 4mal geht und die a_0^{10} in $20 - 2k$, $40 - 4k$, $80 - 8k$ Punkten trifft; schneiden wir diese Curve zunächst mit α^4, so werden von den 24, 48, 96 Begegnungspunkten dadurch schon $1 \cdot 2k + 20 - 2k$, $2 \cdot 2k + 40 - 4k$, $4 \cdot 2k + 80 - 8k$, also 20, 40, 80 Punkte absorbirt und es bleiben 4, 8, 16 Punkte, von welchen jeder für beide entstandenen Signaturen (12) und (13) einen associirten Punkt besitzt, und zwar denselben, den einzigen, der ihm für (11) associirt ist; folglich findet auch Association für die Signatur (14) statt, die durch die Hinzufügung aller drei Paare zu $[klm0]_{11}$ entsteht. Tritt α^8 an Stelle von α^4, so verdoppeln sich offenbar alle Zahlen und wir erhalten 8, 16, 32 Paare associirter Punkte. Identitäten zwischen einem hinzugefügten $\mathfrak{A}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$ mit einem schon in $[klm0]_{11}$ enthaltenen, oder auch zweier hinzugefügten unter einander ändern nichts. Ist z. B. in dem im ersteren Falle, wo sich α^4 ergiebt, hinzugefügten Paare $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ der Punkt $\mathfrak{A}_1$ mit einem in $[klm0]_{11}$ enthaltenen Punkt $\mathfrak{A}_i$ identisch, so liegt dieser Punkt wohl auf α^4 (und zwar doppelt), aber nicht

---

*) Die Werthe von ζ_{14} für $n = 0$ bis $n = 7$ hat auch Hirst in ganz übereinstimmender Weise durch seine Untersuchungen gefunden und mir im Frühjahre 1876, wo ich erst den Werth $\zeta_{14} = 4$ für $n = 0$ kannte, mitgetheilt. Man vergl. auch das im Probl. der Coll. gefundene analoge Resultat (Nr. 41.), wo ebenfalls 4 sich ergeben hat.

auf den Curven des zweiten Falles; ist der $\mathfrak{A}_1$ eines der beiden für den zweiten Fall addirten Paare mit einem schon in $[klmO]_{11}$ enthaltenen $\mathfrak{A}_i$ identisch, so repräsentirt der dadurch für (13) entstehende Punkt A_i 1, 2, 4 von den Schnittpunkten der Curve 6., 12., 24. Ordnung mit a_0^{10}. Ist ein für den ersten Fall addirter $\mathfrak{A}_i$ mit einem im zweiten addirten identisch, so liegt er wohl auf der Fläche α^4, aber nicht auf der Curve a^6 oder a^{12}.

110. Betrachten wir nun auch die Signatur

$$[3210] \qquad \begin{matrix} A_1\,A_2\,A_3\,a_1\,a_2\,\mathfrak{A}_1 \\ b_1\,b_2\,b_3\,B_1\,B_2\,\mathfrak{B}_1; \end{matrix}$$

wird $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ zugefügt, so ergiebt sich eine Fläche α^4 oder α^3, je nachdem $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ nicht identisch oder identisch ist; erstere enthält die A_i doppelt, die $\bar{a}^4$ einfach, die a_0^6 einfach, letztere die A_i einfach, die $\bar{a}^4$ gar nicht, die a_0^6 ebenfalls einfach. Wird aber $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ zugefügt, so ergiebt sich eine Fläche 7. Ordnung α^7, welche die A_i dreifach, die $\bar{a}^4$ einfach, die a_0^6 doppelt enthält.

Fügt man nun andererseits *α*) 2 Paare conjugirter Punkte, wobei auch Identität der beiden $\mathfrak{A}_i$ oder $\mathfrak{B}_i$ möglich ist, *β*) zwei conjugirte Punkte und zwei conjugirte Geraden, *γ*) 2 Paare conjugirter Geraden zu; so ergiebt sich eine Curve a^6, a^{12}, a^{21}, welche durch die drei A_i 1-, 2-, 3mal geht und a_0^6 in 11, 22, 41 Punkten, die a^4 in 3, 6, 9 Punkten trifft (Nr. 106.). Bringen wir sie mit α^4 zum Schnitt, so erhalten wir $6\,4 - 3\cdot1\cdot2 - 11 - 3$, $12\cdot4 - 3\cdot2\cdot2 - 22 - 6$, $21\cdot4 - 3\cdot3\cdot2 - 41 - 9$ übrige Punkte; das sind die 4, 8, 16 Punkte $(A)_{14}$ für [3240] (oder [4220] oder [3320]), [3231], [3222]; schneiden wir sie mit α^3, so erhalten wir $6\cdot3 - 3\cdot1\cdot1 - 11$, $12\cdot3 - 3\cdot2\cdot1 - 22$, $21\cdot3 - 3\cdot3\cdot1 - 41$ übrige Punkte; dies sind die 4, 8, 13 Punkte $(A)_{14}$ für [3320] (oder [4300] oder [3400]), [3311] und [3302]. Von ihren Begegnungspunkten mit α^7 bleiben übrig $6\cdot7 - 3\cdot1\cdot3 - 2\cdot11 - 3$, $12\cdot7 - 3\cdot2\cdot3 - 2\cdot22 - 6$, $21\cdot7 - 3\cdot3\cdot3 - 2\cdot41 - 9$. Dies sind die 8, 16, 29 Punkte $(A)_{14}$ für [3231] (oder [4211] oder [3311]), [3222], [3213].

Man hätte natürlich auch die $(B)_{14}$ abzählen können und wäre zu denselben Zahlen gelangt. (Cf. C. P. Nr. 46.).

Anhang.

111. Bei der Signatur [0070] nehmen wir an, dass jeder $\mathfrak{A}_i$ sich mit seinem homologen $\mathfrak{B}_i$ zu $\mathfrak{C}_i$ vereinige. Man habe weiter zwei Punkte A, B.

Es giebt ein System von Correlationen zwischen den Bündeln A, B und die einem Strahle des einen Bündels entsprechenden Ebenen im andern erzeugen einen Ebenenbüschel, jeder Ebene desselben entspricht eine Correlation (Hirst Nr. 41.). Jede Correlation führt nun durch die

Schnitte homologer Strahlen und Ebenen zu einer Fläche 2. Grades, welche durch die 9 Punkte A, B, $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_7$ geht; Herr Schröter hat nun in § 6. der schon in der Einleitung erwähnten Abhandlung (Borchardt's Journal Bd. 62. S. 215) den interessanten Satz bewiesen, dass sämmtliche Correlationen des Systems *dieselbe* Fläche hervorrufen. Die Axe des Büschels der Ebenen z. B. in B, welche in den verschiedenen Correlationen einem Strahle von A homolog sind, begegnet sich mit diesem Strahle in dem Punkte, wo er die Fläche zum zweiten Male schneidet. Nach Hirst giebt es in dem Systeme drei Axen-Correlationen. Zwei derselben haben zu Axen die durch A und B gehenden Geraden der Fläche aus der einen, bez. aus der andern Schaar und die Erzeugung der Fläche geschieht durch projective Ebenenbüschel (Ebene Proj. Nr. 19.; Fiedler darst. Geom. 2. Aufl., S. 676); bei der dritten Axen-Correlation sind die projectiven Büschel zu identischen, um die Gerade $\overline{AB}$ geworden; jede Ebene entspricht sich selbst (Eb. Proj. Nr. 17.) und enthält den ihr im andern Bündel homologen Strahl ganz. *Durch diese Correlation wird also die Fläche nicht erzeugt.* Fügt man demnach $\mathfrak{A}_8 \mathfrak{B}_8$ zu, so giebt es in dem Ebenenbüschel, der dem Strahle $A\mathfrak{A}_8$ im Systeme entspricht, eine durch $\mathfrak{B}_8$ gehende Ebene, und es ist eine Correlation aus dem Systeme bestimmt (cf. Schröter a. a. O.). Vereinigen sich aber $\mathfrak{A}_8$, $\mathfrak{B}_8$ in den Punkt $\mathfrak{C}_8$, der von dem zweiten Schnitte von $A\mathfrak{C}_8$ mit der Fläche 2. Gr. verschieden ist, so enthält die durch $\mathfrak{B}_8 \equiv \mathfrak{A}_8 \equiv \mathfrak{C}_8$ gehende Ebene des Büschels die ganze Gerade $A\mathfrak{C}_8$, da sie ausserdem noch jenen zweiten Schnitt enthält, durch den ja die Büschelaxe geht. Also ist die Correlation die dritte Axen-Correlation, welche die Fläche nicht erzeugt.

Wenn also bei [0080] die Punkte $\mathfrak{B}_i$ je mit $\mathfrak{A}_i$ sich zu $\mathfrak{C}_i$ vereinigen, so ist die Correlation zwischen zwei Bündeln A, B stets von der Art der oben beschriebenen dritten Axen-Correlation, ausser wenn die 10 Punkte A, B, $\mathfrak{C}_1 \cdots \mathfrak{C}_8$ auf derselben Fläche 2. Grades liegen, in welchem Falle dann ein ganzes Correlationssystem möglich ist.*)

Darmstadt, Februar 1877.

---

*) Eine Fläche 3. O. kann durch einen Strahlenbündel und ein Flächennetz 2. O., die in Correlation stehen, erzeugt werden (cf. meine Fl. 3. O. Nr. 110.); von den Grundpunkten des Netzes kann man nur 6 in beliebige Punkte der Fläche legen, weil sonst nicht beide übrigen auch auf dieselbe fallen. Thut man dies, wenn 19 Punkte der Fläche gegeben sind, dann lässt sich dieselbe noch auf einfach unendlich viele Weisen erzeugen; es beschreibt dabei der Scheitel des Strahlenbündels eine Curve 6. Ordnung, weil $\zeta^{13B} = 6$ für $[00\overline{13}0]$, während (Eb. Proj. Nr. 46.) die beiden andern Netzgrundpunkte eine Curve 27. Ordnung durchlaufen: ein Resultat, das dem Schröter'schen analog ist. Man vergl. hierfür Herrn v. Escherich's Aufsatz März 1877 der Wiener Sitzungsberichte, wo auch $\zeta_{11B} = 1$ für $[00\overline{11}0]$ und $\zeta_{14} = 4$ für $[00\overline{14}0]$ ermittelt ist. (Juli 1877.)