Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre.

Von H. GRASSMANN in Stettin.

Da die Ausdehnungslehre nur die *eine* willkührliche Annahme macht, dass es nämlich Grössen gebe, die sich aus mehr als einer Einheit numerisch ableiten lassen, und sie von da aus in ganz objectiver Weise fortschreitet, so müssen alle Ausdrücke, die aus einer Anzahl unabhängiger Einheiten numerisch ableitbar sind, und also auch die Hamilton'schen Quaternionen, in der Ausdehnungslehre ihren bestimmten Ort haben und erst in ihr ihre wissenschaftliche Grundlage finden. Dies ist bisher nicht erkannt und Göran Dillner in seiner lehrreichen Abhandlung über die Quaternionen (Annalen XI, 168 ff.) thut der Ausdehnungslehre nicht einmal Erwähnung, obgleich er eine ganze Reihe von Sätzen aus der Theorie der Quaternionen ableitet, welche schon in meiner Ausdehnungslehre von 1844 ($\mathfrak{A}_1$), und ebenso in der späteren Bearbeitung von 1862 ($\mathfrak{A}_2$) ihre viel einfachere und aus der Natur der Sache entspringende Begründung gefunden haben. Auch ist es verwerflich und der Lehre von den Quaternionen wenig förderlich gewesen, dass man nach Hamilton's Vorgang einfache und längst bekannte Begriffe mit neuen, oft recht unpassenden Namen bezeichnet hat, wie „Vector" statt „Strecke", „Tensor" statt „Länge" oder „numerischer Werth" ($\mathfrak{A}_2$ 414), u. s. w.

Die Hamilton'schen Quaternionen entspringen aus einer der Multiplicationen, welche ich (in meiner Abhandlung Sur les différents genres de multiplication in Crelle's Journal Bd. 49 S. 136 ff.) dargestellt und an die 3 Gleichungsgruppen

$$(1) \qquad e_r e_s = e_s e_r$$

$$(2) \qquad e_r e_s + e_s e_r = 0, \quad e_1{}^2 = e_2{}^2 = \cdots = e_n{}^2$$

$$(3) \qquad e_1{}^2 + e_2{}^2 + \cdots + e_n{}^2 = 0$$

geknüpft habe, wo e_1, $e_2 \cdots e_n$ die von einander unabhängigen Einheiten und e_r und e_s zwei beliebige von einander verschiedene dieser Einheiten bezeichnen, und zwar knüpfen sich die Quaternionen für den Fall, dass $n = 3$ ist, an die Multiplication, deren Bedingungsgleichungen die mittlere jener drei Gruppen bilden. Ich will diese Art der Multiplication die mittlere nennen, und zwar hauptsächlich deshalb, weil sie, wie sich sogleich zeigen wird, zwischen den beiden Hauptarten der Multiplication, die ich die „äussere“ und die „innere“ genannt habe, die Mittelstufe bildet. Die äussere Multiplication hat nämlich zu Bedingungsgleichungen die zwei Gruppen (2) und (3) und die innere die zwei Gruppen (1) und (2). Ich habe das äussere Product zweier Strecken a und b mit $[ab]$, das innere Product derselben mit $[a \mid b]$ bezeichnet und werde in dieser Abhandlung unter ab (ohne scharfe Klammern) stets das mittlere Product der Strecken a und b verstehen. Dann ergiebt sich sogleich, dass das mittlere Product ab zweier Strecken sich darstellen lässt in der Form

$$(4) \qquad ab = \lambda\,[a \mid b] + \mu'\,[ab]$$

wo λ und μ' constant und zunächst willkührlich, jedoch nicht null sind. Aus den Bedingungsgleichungen (2) ergiebt sich, dass es für das mittlere Product zweier Strecken $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ von einander unabhängige Einheitsproducte giebt, von denen eins (etwa e_1^2) dem inneren Producte $[a \mid b]$, die andern ($e_1 e_2$, $e_1 e_3$, $e_2 e_3$, u. s. w.) dem äusseren Producte $[ab]$ zu Grunde liegen. Im Raume, wo die Anzahl der von einander unabhängigen Strecken drei beträgt, also $n = 3$ ist, ist also die Zahl der Einheitsproducte, auf die die mittlere Multiplication zurückführt, gleich *vier*. Die Bedingungsgleichungen der mittleren Multiplication werden dann

$$(a) \qquad e_3 e_2 = -e_2 e_3, \quad e_1 e_3 = -e_3 e_1, \quad e_2 e_1 = -e_1 e_2$$

$$(b) \qquad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2$$

Aber das wesentlich Eigenthümliche der mittleren Multiplication im Raume als einem Gebiete dritter Stufe ist, dass die Anzahl der von einander unabhängigen Einheitsproducte in (a) gleich der Anzahl der Einheiten ist, und man daher jene auf diese zurückführen kann. So bleiben also dann die Einheiten des Productes, wenn man noch die in (b) zu Grunde liegende Zahleinheit hinzunimmt, dieselben wie die ursprünglichen. Diese einfache Beziehung verschwindet bei den Gebieten höherer Stufe, so dass die mittlere Multiplication in der Ausdehnungslehre, welche Gebiete beliebiger Stufe behandelt, keine einfache Bedeutung behält. Ich beschränke mich daher auf den Raum und nehme an, dass die drei zu Grunde gelegten Einheiten e_1, e_2, e_3 drei gleich lange zu einander senkrechte Strecken sind, deren Länge 1 beträgt. Nun habe ich in der Ausdehnungslehre ($\mathfrak{A}_2$ 50, 51) nachgewiesen, dass die Bedingungsgleichungen der äusseren Multiplication noch bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten beliebige andere einführt, und ($\mathfrak{A}_2$ 330 ff.), dass, wenn e_1, e_2, e_3 einen

Normalverein bilden, d. h. sie auf einander senkrecht stehen und die Länge 1 haben, d. h. $[e_r \mid e_r] = 1$ ist, die Bedingungsgleichungen der inneren Multiplication auch dann noch bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Einheiten eines beliebigen Normalvereins setzt. Da also bei dieser Aenderung der Einheiten auch die Bedingungsgleichungen der äusseren Multiplication bestehen bleiben, so bleibt auch das mittlere Product, als aus dem äusseren und inneren zusammengesetzt, bei dieser Aenderung des Normalvereins in einen andern ungeändert.

In der angeführten Abhandlung (Crelle Bd. 49 S. 131 ff.) habe ich diese Unveränderlichkeit für alle aus den 3 Gleichungsgruppen (1, 2, 3) ableitbaren Multiplicationen also auch unmittelbar für die mittlere nachgewiesen.

Es kommt nun darauf an, die 3 Producte $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ auf die ursprünglichen Einheiten zurückzuführen; auch dies ist schon in der Ausdehnungslehre ($\mathfrak{A}_2$) vollendet, wo e_1, e_2, e_3 als Ergänzungen von $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ aufgefasst und

$$(5)\qquad \begin{cases} e_1 = \mid [e_2 e_3], & e_2 = \mid [e_3 e_1], & e_3 = \mid [e_1 e_2] \\ [e_2 e_3] = \mid e_1, & [e_3 e_1] = \mid e_2, & [e_1 e_2] = \mid e_3 \end{cases}$$

gesetzt sind, und wo der Strich $\mid$ das Zeichen der Ergänzung ist und vorausgesetzt wird, dass e_1, e_2, e_3 einen Normalverein bilden. Dann wird ferner für eine beliebige Strecke a, die aus den ursprünglichen Einheiten durch die Zahlen α_1, α_2, α_3 abgeleitet ist, festgesetzt, dass ihre Ergänzung aus den Ergänzungen jener Einheiten durch dieselben Zahlen abgeleitet sei, also

$$(6)\qquad \begin{cases} \mid (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha_1 [e_2 e_3] + \alpha_2 [e_3 e_1] + \alpha_3 [e_1 e_2] \\ \mid [\alpha_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_3 e_1 + \alpha_3 e_1 e_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \end{cases}$$

sei, und es ist nachgewiesen ($\mathfrak{A}_2$ 37 ff.), dass dieselben Beziehungen bestehen bleiben, wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Einheiten eines beliebigen andern Normalvereins setzt. Mit Hilfe dieser Begriffe können wir nun die Fundamentalgleichung (4) in der Form schreiben

$$ab = \lambda [a \mid b] + \mu \mid [ab]$$

wo λ und μ constante Zahlen sind. Aendern sich λ und μ in gleichem Verhältnisse, z. B. um den Factor ν, so ändert sich das Product nur um denselben Zahlfactor, bleibt also seinem Wesen nach unverändert. Wir können daher ohne wesentliche Aenderung eine dieser Zahlen 1 setzen. Wir setzen $\mu = 1$. Dann bestimmen wir λ dadurch, dass jedes mittlere Product aus 3 Factoren dem Gesetz der Vereinbarkeit (dem associativen Princip) unterliegen d. h. $abc = a(bc)$ sein soll. Dies wird erfüllt sein, wenn es für die Einheitsproducte der mittleren

Multiplication gilt. Diese Einheitsproducte lassen sich nach der Formel $ab = \lambda\,[a \mid b] + \mid [ab]$ auf die der inneren und äusseren Multiplication zurückführen. Für diese beiden sind nach dem Obigen die Einheitsproducte an die Formeln

$$[e_r \mid e_r] = 1, \quad [e_r \mid e_s] = 0; \quad [e_r e_r] = 0, \quad [e_r e_s] = -[e_s e_r]$$

geknüpft, wo r und s zwei verschiedene der Indices 1, 2, 3 sind. Dazu kommen noch vermöge des obigen Begriffes der Ergänzung die Formeln

$$\mid [e_r e_s] = e_t,$$

wenn r, s, t dem Cyclus 1, 2, 3 angehören, d. h. r, s, t entweder $=$ 1, 2, 3 oder 2, 3, 1 oder 3, 1, 2 sind. Hieraus folgen für die mittlere Multiplication der Einheiten e_1, e_2, e_3 die bedingenden Gesetze

$$(7) \qquad e_r e_r = \lambda, \quad e_r e_s = e_t, \quad e_s e_r = -e_r e_s$$

wenn r, s, t dem Cyclus $1, 2, 3$ angehören. Dann ergiebt sich für die mittlere Multiplication dreier Einheiten, wenn man die cyclische Bedeutung von r, s, t festhält, $e_r e_s e_t = e_t e_t = \lambda = e_r e_r = e_r(e_s e_t)$, ebenso $e_t e_s e_r = -e_r e_r = -\lambda = -e_t e_t = e_t(e_s e_r)$, d. h. für drei verschiedene Einheitsfactoren gilt Vereinbarkeit. Ebenso für drei gleiche. So auch für zwei gleiche, die durch einen ungleichen getrennt sind. Denn $e_r(e_s e_r) = -(e_s e_r) e_r = e_r e_s e_r$. Dagegen ist $e_r e_r e_s = \lambda e_s$, und $e_r(e_r e_s) = e_r e_t = -e_s$. Soll also auch für diesen Fall Vereinbarkeit gelten, so muss nothwendig $\lambda = -1$ sein. Umgekehrt wenn $\lambda = -1$ ist, so ergiebt sich auch für die noch übrigen Producte aus 3 Einheiten Vereinbarkeit der Factoren. Denn dann ist $e_s e_s e_r = \lambda e_r = -e_r = -e_s e_t = e_s(e_s e_r)$; ferner $e_r e_s e_s = e_t e_s = -e_r = \lambda e_r = e_r(e_s e_s)$ und $e_s e_r e_r = -e_t e_r = -e_s = \lambda e_s = e_s(e_r e_r)$. Es folgt also dann Vereinbarkeit für je 3 Einheitsfactoren, also auch für je 3 Factoren, also auch für beliebig viele ($\mathfrak{A}_1$ § 3.). Wir setzen daher für die mittlere Multiplication $\lambda = -1$, während $\mu = 1$ gesetzt war, also

$$(\mathrm{I}) \qquad ab = -[a \mid b] + \mid [ab].$$

Aus dieser Fundamentalgleichung folgen alle Gesetze der Quaternionen, und zwar fast alle mit der grössten Leichtigkeit. Auch die *naturgemässe* Benennung ergiebt sich hiernach von selbst. Wir werden $-[a \mid b]$ den inneren, $\mid [ab]$ den äusseren Theil der Quaternion nennen können. Sind a und b parallel, so wird der äussere Theil null, und die Factoren wie bei jedem inneren Product vertauschbar. Werden a und b zu einander senkrecht, so wird der innere Theil null und die Factoren wie bei jedem äusseren Product mit Zeichenwechsel vertauschbar. Vertauscht man die Factoren eines mittleren Products, so bleibt der innere Theil unverändert, der äussere ändert sein Zeichen ($\mp$).

Ich werde auch im Folgenden die Zahlen stets mit griechischen, die Strecken stets mit lateinischen Buchstaben bezeichnen, nur den

Buchstaben q werde ich für die Bezeichnung der Quaternionen aufbewahren. Ist $\alpha + a$ eine Quaternion, so bezeichnet man bekanntlich die Quaternion $\alpha - a$ als die zu jener conjugirte. Von fundamentaler Bedeutung ist das Gesetz:

(II) „Wenn $(\alpha + a)(\beta + b) = \gamma + c$ ist, so ist auch
$$(\beta - b)(\alpha - a) = \gamma - c\text{“}.$$

In der That ist der innere Theil des ersten Productes $\alpha\beta - [a \mid b]$ also dies $= \gamma$, aber $\alpha\beta - \mid [a \mid b]$ ist auch der innere Theil des zweiten Productes. Hingegen der äussere Theil des ersten Productes ist $\alpha b + \beta a + \mid [ab] = c$, der äussere Theil des zweiten ist $-\alpha b - \beta a + \mid [ba]$ d. h. da $[ba] = -[ab]$ ist, gleich $-c$, also das zweite Product $\gamma - c$. Es ist unmittelbar klar, dass sich dies auf beliebig viele Factoren ausdehnen lässt. Also

(II) „Das Product beliebig vieler Quaternionen ist conjugirt dem umgekehrt geordneten Producte der conjugirten Quaternionen.“

Es stellt dieser Satz die Formel (14) bei **Dillner** dar, aus welcher seine Formel (13) hervorgeht, wenn man die inneren Theile $(\alpha, \beta, \cdot\cdot)$ null setzt.

Wenn die Strecke $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ ist, so wird $[a \mid a]$, was ich der Kürze wegen mit $a^{\underline{2}}$ bezeichnet habe, gleich $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ und stellt das Quadrat der Länge jener Strecke dar. Nach dieser Analogie nenne ich, wenn $q = \alpha + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \alpha + a$ ist, $\sqrt{\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ d. h. $\sqrt{\alpha^2 + a^{\underline{2}}} = \sqrt{\alpha^2 - a^2}$ die Länge der Quaternion q (nach **Hamilton** der Tensor). Multiplicirt man nun die erste Formel in II mit der zweiten, so erhält man

$$(\alpha + a)(\beta + b)(\beta - b)(\alpha - a) = (\gamma + c)(\gamma - c)$$

d. h.

$$(\alpha + a)(\beta^2 - b^2)(\alpha - a) = \gamma^2 - c^2$$

Da $\beta^2 - b^2 = \beta^2 + b^{\underline{2}}$ eine Zahl ist, so ist ihre Stellung gleichgültig, wir können also die Factoren $\alpha + a$ und $\alpha - a$ zusammenrücken und erhalten $(\alpha^2 - a^2)(\beta^2 - b^2) = \gamma^2 - c^2$ oder

(III) $$\sqrt{\alpha^2 - a^2}\,\sqrt{\beta^2 - b^2} = \sqrt{\gamma^2 - c^2}$$

d. h. da sich dies auf beliebig viele Factoren ausdehnen lässt,

(III) „Die Länge eines Products von Quaternionen ist das Product aus den Längen der Factoren.“

Es kommt also nur auf die Multiplication der quaternen Einheiten, d. h. der Quaternionen, deren Länge 1 ist, an.

Es sei nun ϱ die Länge einer Quaternion $q = \alpha + \beta a$, wo a eine Strecke von der Länge 1 ist, so ist $\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Nun sei $\alpha = \varrho \cos \gamma$, so ist $\beta = \varrho \sin \gamma$, also

$$q = \varrho(\cos\gamma + a \sin\gamma).$$

Es heisse a das Mass und γ der Winkel der Quaternion, während $\cos\gamma + a\sin\gamma$ nach dem Obigen die quaterne Einheit ist. Das Product gleichmassiger quaterner Einheiten führt zu sehr einfachen Resultaten. In der That, es sei a das Mass zweier quaterner Einheiten und α und β ihre Winkel, so findet man

$$\text{(IV)}\quad \begin{aligned}&(\cos\alpha + a\sin\alpha)(\cos\beta + a\sin\beta) = a(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ &\text{da } a^2 = -a^2 = -1 \text{ ist, also } = \cos(\alpha+\beta) + a\sin(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

d. h. „Gleichmassige quaterne Einheiten multiplicirt man, indem man ihre Winkel addirt."

Hierin liegt eingeschlossen, dass man eine quaterne Einheit mit einer ganzen positiven Zahl potenzirt, indem man ihren Winkel mit dieser Zahl multiplicirt. Auch für das Potenziren mit einer gebrochenen und negativen Zahl können wir dieselbe Bestimmung festhalten, aber mit der Beschränkung, dass der Winkel der zu potenzirenden Quaternion innerhalb der Grenzen einer ganzen Umrollung bleibe, z. B. zwischen π und $-\pi$ liege (vergl. meine Arithmetik Stettin 1860 Nr. 426—433.). Eine Definition für diese Verknüpfungen ist nothwendig, und ebenso die oben angegebene Beschränkung, weil man sonst gegen die logische Regel verstösst, dass man dieselbe Sache nicht auf zwei verschiedene Arten definiren darf, namentlich wenn die beiden Definitionen sich widersprechen. Letzteres würde aber bei der Potenzirung mit gebrochenem Exponenten der Fall sein, wenn man jene Beschränkung nicht eintreten liesse. So z. B. ist $\cos 0 + a\sin 0 = \cos(2\pi) + a\sin(2\pi)$. Beide würden mit $\frac{1}{2}$ potenzirt, wenn man festsetzte, die quaterne Einheit mit $\frac{1}{2}$ potenziren, hiesse ihren Winkel mit $\frac{1}{2}$ multipliciren, verschiedenes liefern; denn ersteres würde danach 1 liefern, letzteres aber $\cos\pi + a\sin\pi$ d. h. -1. Obige Definition festgesetzt, erhält man, wenn α zwischen π und $-\pi$ liegt und μ reell ist,

$$\text{(V)}\qquad (\cos\alpha + a\sin\alpha)^{\mu} = \cos(\alpha\mu) + a\sin(\alpha\mu)$$

d. h. „Eine quaterne Einheit, deren Winkel zwischen π und $-\pi$ liegt, potenzirt man mit einer reellen Zahl, indem man ihren Winkel mit dieser Zahl multiplicirt."

Hier ist die Darstellung Dillner's (Nr. 30.) ungenügend. Ebenso vermisse ich bei der Division (Nr. 12.) den Beweis der Eindeutigkeit des Quotienten. Dieser sei hier ergänzt. Wenn q eine von Null verschiedene Quaternion ist, so gilt als Definition von $\frac{1}{q}$ die Gleichung $\frac{1}{q}q = 1$. Wenn nun e_1 eine beliebige Strecke von der Länge 1 ist, so lässt sich q in der Form darstellen $q = \alpha_0 + \alpha_1 e_1$; nun sei $\frac{1}{q} = \beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$, wo e_1, e_2, e_3 einen Normalverein bilden; dann erhält man zur Bestimmung von $\beta_0 \cdots \beta_3$ die Gleichung

$(\beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3)(\alpha_0 + \alpha_1 e_1) = 1$, welche die 4 Gleichungen einschliesst

$$\begin{aligned} \beta_0 \alpha_0 - \beta_1 \alpha_1 &= 1 \\ \beta_0 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_0 &= 0 \\ -\beta_2 \alpha_1 + \beta_3 \alpha_0 &= 0 \\ \beta_2 \alpha_0 + \beta_3 \alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den zwei ersten folgt

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}, \qquad \beta_1 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2};$$

wo $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = \varrho^2$, ϱ die Länge von q ist, aus den zwei letzten folgt β_2 und $\beta_3 = 0$, also

$$\frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e_1} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 e_1}{\varrho^2},$$

namentlich wenn $q = \alpha_0 + \alpha_1 e_1$ eine quaterne Einheit also $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = \varrho^2 = 1$ ist, so wird $\frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e_1} = \alpha_0 - \alpha_1 e_1$.

Hieraus ergiebt sich dann leicht $\frac{1}{q^\mu} = q^{-\mu}$, in Uebereinstimmung mit der Algebra.

Die von Dillner behandelten Abschnitte über die Rechnung in doppeltem Axensysteme, so wie über das distributive Gesetz (Nr. 14 bis 23) werden durch die von mir zu Grunde gelegte Definition I überflüssig.

Unter den üblichen Anwendungen der Quaternionen sind zu verwerfen die auf die Zusammensetzung der Kräfte (Dilln. Nr. 4.), auf das Drehungsmoment und die mechanische Arbeit (Dilln. Nr. 24.), da die Verknüpfung der Strecken diese Begriffe aufs einfachste liefert, während die Quaternionen Ungehöriges hineinmischen. In der That ist $a + b$ die aus a und b zusammengesetzte Kraft, $[ab]$ das Moment der Kraft b am Hebelarm a, $[abc]$ das Moment der Kraft c am Hebelarm b, der an der festen Axe a angebracht ist, $[a \mid b]$ die Arbeit der Kraft b in Bezug auf den Weg a. Aus gleichem Grunde ist die Rechnung mit Quaternionen zu verbannen bei der Drehung eines räumlichen Gebildes um eine Axe (Dilln. Nr. 39—42.) und bei der Transformation rechtwinkliger Coordinaten (Dilln. Nr. 44—48, Hankel § 58.). Die letztere Aufgabe wird für senkrechte Coordinatensysteme aufs leichteste und unmittelbarste durch innere Multiplication gelöst; ich verweise in dieser Beziehung auf meine Abhandlung über „die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre“ in diesen Annalen Bd. XII. S. 222. Die erstere Aufgabe wird am leichtesten gelöst durch die vollständigen *Quotienten der Strecken* ($\mathfrak{A}_2$ Nr. 377—390.). Unter einem solchen Quotienten verstehe ich einen Ausdruck, welcher jede Strecke durch Multiplication (mit diesem Ausdruck) in eine bestimmte Strecke verwandelt. Es genügt zu dem Ende, festzusetzen, in welche drei Strecken sich drei nicht einer Ebene parallele Strecken im Raume durch jene Multiplication verwandeln sollen. Sollen z. B. durch einen solchen Quotienten Q die Strecken e_1, e_2, e_3 (die in keiner Zahlbeziehung stehen d. h. nicht derselben Ebene parallel sind) in die Strecken a_1, a_2, a_3 durch Multiplication mit Q verwandelt werden, d. h. ist $e_1 Q = a_1$, $e_2 Q = a_2$, $e_3 Q = a_3$, so ist nach dem allgemeinen Multiplicationsgesetze:

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)\, Q = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

und das Product jeder Strecke im Raume mit Q ist dann genau bestimmt. Ich schreibe dann

$$Q = \frac{a_1,\, a_2,\, a_3}{e_1,\, e_2,\, e_3}$$

und nenne e_1, e_2, e_3 die Nenner, a_1, a_2, a_3 die entsprechenden Zähler. Von fundamentaler Bedeutung ist die Aufgabe, die Strecken x (ihrer Richtung nach) zu suchen, welche sich dabei in ihr Vielfaches verwandeln, so dass also $xQ = \varrho x$ wird. Diese Aufgabe wird ($\mathfrak{A}_2$ Nr. 388 ff.) durch die äussere Multiplication vermittelst einer Gleichung dritten Grades aufs einfachste gelöst. Hat nämlich Q den obigen Werth und ist $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, so verwandelt sich die Gleichung $xQ - \varrho x = 0$ in die Gleichung $x_1(a_1 - \varrho e_1) + x_2(a_2 - \varrho e_2) + x_3(a_3 - \varrho e_3) = 0$. Hier können nicht x_1, x_2, x_3 zugleich null sein, weil sonst x null wäre, was natürlich ausgeschlossen ist. Ist nun z. B. x_1 von null verschieden, so multiplicire man die Gleichung äusserlich mit $(a_2 - \varrho e_2)$ und $a_3 - \varrho e_3$, so erhält man nach Division mit x_1 die Gleichung

$$[(a_1 - \varrho e_1)\ (a_2 - \varrho e_2)\ (a_3 - \varrho e_3)] = 0,$$

indem nämlich das äussere Product dreier Strecken stets null wird, wenn zwei Strecken einander gleich werden (siehe unten).

Dies ist eine cubische Gleichung in Bezug auf ϱ. Ich nehme an, dass die drei Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 dieser Gleichung von einander verschieden seien, da der Fall gleicher Wurzeln sich als Uebergangsfall leicht aus jenem allgemeineren Falle der ungleichen Wurzeln ableiten lässt. Zu jedem dieser Werthe ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sind dann vermöge der ersteren Gleichung die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ genau bestimmt und können durch äussere Multiplication mit je einer der Grössen $a_1 - \varrho e_1$, $a_2 - \varrho e_2$, $a_3 - \varrho e_3$ unmittelbar gefunden werden. Man erhält also drei ihrer Richtung nach bestimmte Axen c_1, c_2, c_3, die zu den drei Wurzeln ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gehören, und, wie man unmittelbar sieht, in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen.

So wird nun Q in der normalen Form

$$Q = \frac{\varrho_1 c_1,\, \varrho_2 c_2,\, \varrho_3 c_3}{c_1,\, c_2,\, c_3}$$

dargestellt. Ich nenne c_1, c_2, c_3 die Axen des Quotienten und $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die zugehörigen Hauptzahlen. Diese Darstellung ist für die Theorie der lineären Verwandtschaften, und für eine Menge algebraischer Probleme, z. B. für die, welche Dr. Gottlob Frege in seiner Dissertation zur Erlangung der venia docendi Jena 1874 S 20—23 behandelt hat, von fundamentaler Bedeutung.

Soll der Quotient Q, worauf es bei der angeregten Aufgabe ankommt, nur eine *Drehung* bewirken, so werden zwei der drei Axen imaginär, eine wird reell und ihre zugehörige Hauptzahl 1. Es sei a diese reelle Axe, alsdann sind die imaginären von der Form $b + ci$ und $b - ci$, wo a, b, c zu einander senkrecht sind. Die beiden zu diesen imaginären Axen gehörigen Hauptzahlen haben den numerischen Werth 1, sind also von den Formen $\cos\alpha - i\sin\alpha$ und $\cos\alpha + i\sin\alpha$, also wird dann

$$aQ = a, \quad (b+ci)Q = (b+ci)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = b\cos\alpha + c\sin\alpha + i(c\cos\alpha - b\sin\alpha)$$
$$(b-ci)Q = (b-ci)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = b\cos\alpha + c\sin\alpha - i(c\cos\alpha - b\sin\alpha)$$

Diese beiden Gleichungen addirt und mit 2 dividirt geben

$$bQ = b\cos\alpha + c\sin\alpha$$

und die zweite von der ersten subtrahirt und mit $2i$ dividirt giebt

$$cQ = c\cos\alpha - b\sin\alpha$$

d. h. b dreht sich durch Multiplication mit Q in der Ebene bc um den Winkel α nach c zu, und c dreht sich um denselben Winkel. Dann dreht sich offenbar jede Vielfachensumme von b und c d. h. jede Strecke der Ebene bc um denselben Winkel. Es ist sehr zweckmässig, für diesen Quotienten folgende zwei symbolische Ausdrücke festzustellen, zwischen denen man je nach Bedürfniss wählen kann,

$$Q = a^{\alpha} = e^{\angle bb'}$$

wo a die Drehungsaxe von der Länge 1, α der Drehungswinkel, b' aber die Strecke ist, in die sich b, was gegen die Axe senkrecht ist, durch die Drehung verwandelt. Es unterscheiden sich hier α und $\angle bb'$ nur dadurch, dass jenes den Winkel als Zahl, dieses aber denselben Winkel als Theil der Drehungsebene betrachtet darstellt. Dann bedeutet xa^{π} die Strecke x', welche mit a denselben Winkel bildet wie x, aber nach der entgegengesetzten Seite hin, so dass also $\angle xx' = 2\angle ax'$ ist; ebenso stellt $x'b^{\pi}$ die Strecke x'' dar, welche wieder so liegt, dass $\angle x'x'' = 2\angle x'b$ ist, dann ist also $xa^{\pi}b^{\pi} = xe^{2\angle ax' + 2x'b} = xe^{2\angle ab}$. So erhält man

$$a^{\pi}b^{\pi} = e^{2\angle ab}.$$

Dieser Satz ist für die Fortsetzung der Drehungen von Bedeutung. In der That ergiebt sich

$$e^{2\angle ab} \cdot e^{2\angle bc} = a^\pi b^\pi b^\pi c^\pi = a^\pi c^\pi = e^{2\angle ac},$$

also

$$e^{2\angle ab} \cdot e^{2\angle bc} = e^{2\angle ac},$$

eine Formel, die statt der verwickelten und mit fremdartigen Bestandtheilen vermischten Formel (81) von **Dillner** eintreten muss.

Die schönste Anwendung der Quaternionen ist die auf die sphärische Trigonometrie. Doch glaube ich, dass auch hier die Verknüpfung der Strecken der Rechnung mit Quaternionen überlegen ist. Hierzu ist noch der in dem Obigen schon implicite enthaltene Begriff des Productes $[abc]$ dreier Strecken a, b, c erforderlich. In der That, wenn $[bc]$ die Ergänzung der Strecke a_1 ist, also $[bc] = | a_1$, so wird $[abc] = [a \mid a_1]$, also gleich dem inneren Producte der Strecken a und a_1. Ich nenne $[abc]$ das äussere Product der drei Strecken a, b, c ($\mathfrak{A}_1$ 30, $\mathfrak{A}_2$ 262). Es ergeben sich leicht aus dem Obigen die Formeln

$$[abc] = [bca] = [cab] = -[acb] = -[bac] = -[cba]$$

ferner das Gesetz, dass $[abc] = 0$ ist, wenn zwei der Factoren gleich sind, und begrifflich, dass $[abc]$ gleich dem Parallelepipedon (Spat) ist, in welchem 3 sich aneinander schliessende Kanten gleich a, b und c sind.

Nun setze ich statt eines sphärischen Polygons $ABCD\cdot\cdot$, die Reihe der Strecken $a, b, c, d, ..$ welche vom Mittelpunkt der Kugel nach den Ecken $A, B, C, D, \cdots$ gezogen sind, und setze die Länge des Kugelradius 1. Setzt man dann statt $ab, bc, cd, \cdot\cdot$ die Radien, welche auf $ab, bc, cd, \cdot\cdot$ nach derselben Seite hin (z. B. nach links hin) senkrecht stehen, so erhält man das zugehörige Polareck. Es seien namentlich a, b, c die nach den Ecken eines sphärischen Dreiecks gezogenen Radien und sei c' der auf a, b senkrechte Radius, doch so, dass $[abc']$ positiv ist, und ebenso sei b' auf c, a, a' auf b, c senkrecht und $[cab']$ $[bca']$ positiv. Dann ist $a'b'c'$ die Polarecke, aber auch a auf b', c', b auf c', a', c auf a', b' senkrecht, nach gleicher Seite hin, also auch abc Polarecke von $a'b'c'$. Nun seien die Winkel $bc, ca, ab, b'c', c'a', a'b'$ mit α, β, γ, α', β', γ' bezeichnet, und zwar so, dass diese sechs Winkel als positive Zahlen betrachtet werden. Um nun die Beziehungen zwischen diesen Grössen auf die einfachste Weise ableiten zu können, mache ich noch von dem Product zweier Flächenräume im Raume Gebrauch, indem ich (nach $\mathfrak{A}_1$ § 132., $\mathfrak{A}_2$ Nr. 103)

$$[ab \cdot bc] = [abc] \cdot b$$

setze. Dann ergiebt sich ($\mathfrak{A}_2$ 97), dass das Product der Ergänzungen zweier Strecken a, b im Raume die Ergänzung des Productes dieser Strecken ist, d. h.

$$[| a \mid b] = | [ab].$$

Hieraus folgt für die obigen 6 Radien a, b, c, a', b', c', zunächst

$a' \sin\alpha = |\,[bc]$. Denn ist $\angle\, b\, c_1$ in der Ebene bc gleich 90^0 und c_1 gleichfalls Radius, so bilden a', b, c_1 einen Normalverein und es ist also $a' = |\,[bc_1] = |\,[bc] : \sin\,\alpha$. Auf gleiche Weise ist $b' \sin\beta = |\,[ca]$, $c' \sin\gamma = |\,[ab]$, $a \sin\alpha' = |\,[b'c']$, $b \sin\beta' = |\,[c'a']$, $c \sin\gamma' = |\,[a'b']$. Also ist

$$a = \frac{|\,[b'c']}{\sin\alpha'} = \frac{[\,|\,b'\,|\,c']}{\sin\,\alpha'} = \frac{[ca \cdot ab]}{\sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma} = \frac{[abc]\,a}{\sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma}$$

also $\quad [abc] = \sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cdot \dfrac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$.

Da nun $[abc] = [bca] = [cab]$ ist, so kann man auch $\sin\beta' : \sin\beta$ und $\sin\gamma' : \sin\gamma$ statt $\sin\alpha' : \sin\,\alpha$ setzen. Es sei $\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \varkappa$ gesetzt, so wird

$$[abc] = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cdot \varkappa \text{ und ebenso}$$
$$[a'b'c'] = \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma' \frac{1}{\varkappa},$$
$$\varkappa = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma}.$$

Ferner da $|\,a' \sin\alpha = [bc]$ ist, so hat man $[a'bc] = [a'\,|\,a'] \sin\alpha = \sin\alpha$, und so

$[a'bc] = \sin\alpha, [b'ca] = \sin\beta, [c'ab] = \sin\gamma, [ab'c'] = \sin\alpha', [bc'a'] = \sin\beta'$, $[ca'b'] = \sin\gamma'$.

Ferner $[b'bc] = [b'\,|\,a'] \sin\alpha = \sin\alpha \cos\gamma'$, und so überhaupt

$[b'bc] = \sin\alpha \cos\gamma'$, $[c'ca] = \sin\beta \cos\alpha'$, $[a'ab] = \sin\gamma \cos\beta'$,
$[c'bc] = \sin\alpha \cos\beta'$ u. s. w.
$[bb'c'] = \sin\alpha' \cos\gamma$, $[cc'a'] = \sin\beta' \cos\alpha$, $[aa'b'] = \sin\gamma' \cos\beta$,
$[cb'c'] = \sin\alpha' \cos\beta$ u. s. w.

Nun seien a, b, c drei beliebige Strecken, die nicht einer Ebene angehören, so lässt sich jede andere Strecke d aus ihnen numerisch ableiten. Es sei

$$d = xa + yb + zc,$$

so erhält man durch äussere Multiplication mit $[bc]$, da $[bbc]$, $[cbc]$ null sind, $[dbc] = x[abc]$, also $x = \dfrac{[dbc]}{[abc]}$ und entsprechend für die übrigen, also

$$d\,[abc] = a\,[dbc] + b\,[adc] + c\,[abd]$$

oder symmetrischer

$$a\,[bcd] - b\,[cda] + c\,[dab] - d\,[abc] = 0$$

für beliebige 4 Strecken a, b, c, d.

Diese Gleichung können wir benutzen, um unmittelbar die Hauptaufgabe zu lösen: „Die Gleichung aufzustellen zwischen je 4 der Radien a, b, c, a', b', c'."

Man findet zuerst für a, b, c, a' die Gleichung

$$a\,[bca'] - b\,[ca'a] + c\,[a'ab] - a'\,[abc] = 0$$

(VI) d. h. $a \sin\alpha + b \sin\beta \cos\gamma' + c \sin\gamma \cos\beta' = a'\,(abc)$

oder indem man mit beliebigem Radius r innerlich multiplicirt und statt abc seinen Werth setzt

$$\cos ra\cdot\sin\alpha+\cos rb\sin\beta\cos\gamma'+\cos rc\sin\gamma\cos\beta'=\cos ra'\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma'.$$

Solcher Formeln erhält man sechs. Es sind dies die Formeln, welche Dillner unter Formel (71) andeutet.

Ferner findet man für a, b, a', b' die Gleichung

$$a[ba'b']-b[a'b'a]+a'[b'ab]-b'[aba']=0, \text{ d. h.}$$

(VII) $\sin\gamma'(a\cos\alpha-b\cos\beta)+\sin\gamma(a'\cos\alpha'-b'\cos\beta')=0$

oder

$$\sin\gamma'(\cos ra\cos\alpha-\cos rb\cos\beta)+\sin\gamma(\cos ra'\cos\alpha'-\cos rb'\cos\beta')=0.$$

Setzt man insbesondere $r=a$, so erhält man, da $\cos aa'=[a\mid a']=\frac{[abc]}{\sin\alpha}=\sin\beta\sin\gamma'$ ist, nach Division mit $\sin\gamma'$ die bekannte Formel

$$\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha'=0.$$

Solcher Formeln wie (VII) erhält man drei.

Endlich findet man für a, b, c', a'

$$a[bc'a']-b[c'a'a]+c'[a'ab]-a'[abc']=0 \text{ d. h.}$$

(VIII) $\sin\beta'(a-b\cos\gamma)=\sin\gamma(a'-c'\cos\beta')$

oder $\sin\beta'(\cos ra-\cos rb\cos\gamma)=\sin\gamma(\cos ra'-\cos rc'\cos\beta')$

Solcher Formeln giebt es 6.

Man erkennt hieraus den grossen Reichthum der Beziehungen, die durch diese Methode hervortreten. Jede geometrische Gleichung lässt sich auf diese Weise in Sätze der Sphärik umwandeln.

Ich führe als Beispiel an den von Hankel S. 193 citirten Gaussschen Satz für das sphärische Viereck, nämlich

$$\sin AB\sin CD\cos(AB, CD)=\cos AC\cos BD-\cos AD\cos BC,$$

welcher eine Umwandlung der Formel ($\mathfrak{A}_2$ 176) ist, nämlich der Formel

$$[ab\mid cd]=[a\mid c][b\mid d]-[a\mid d][b\mid c].$$

Als zweites Beispiel führe ich an die Umwandlung der Gleichung $a_1+b_1+c_1+\cdots=s_1$, wo $a_1, b_1, c_1, \cdots s_1$ Strecken sind. Es sei $a_1=\mathfrak{a}a$, $b_1=\mathfrak{b}b$, $c_1=\mathfrak{c}c$, $s_1=\mathfrak{s}s$, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots \mathfrak{s}$ die Längen sind, $a, b, c, \cdots s$ also Radien einer Kugel von der Länge 1, so hat man durch innere Multiplication mit einem beliebigen Radius r

$$\mathfrak{a}\cos ra+\mathfrak{b}\cos rb+\cdots=\mathfrak{s}\cos rs.$$

Setzt man hier $r=s$, so hat man

$$\mathfrak{a}\cos sa+\mathfrak{b}\cos sb+\cdots=\mathfrak{s}, \quad \text{also}$$

$$\frac{\mathfrak{a}\cos ra+\mathfrak{b}\cos rb+\cdots}{\mathfrak{a}\cos sa+\mathfrak{b}\cos sb+\cdots}=\cos rs$$

eine Formel, von der d'Arrest in den Berichten der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften von 1852 (S. 37 ff.) einen speciellen Fall entwickelt hat.

Stettin, den 25. April 1877.