Zur Discussion der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit.

Von Alfred Köpcke in Hamburg.

In Crelle's Journal Bd. LXXI*) hat Geh. Rath Kirchhoff die Discussion der Bewegung eines festen Rotationskörpers in einer incompressiblen reibungslosen Flüssigkeit auf elliptische Integrale zurückgeführt. An die in dieser Abhandlung gewählten Voraussetzungen und Bezeichnungen soll im Folgenden angeknüpft werden, um das Problem mit Hülfe von ϑ-Functionen der numerischen Berechnung zugänglich zu machen.

Kirchhoff setzt voraus, dass die incompressible reibungslose Flüssigkeit ausser durch die Oberfläche des festen Rotationskörpers noch im Unendlichen durch eine geschlossene Fläche begrenzt ist; dass auf das gesammte System keine äusseren Kräfte wirken; dass die Geschwindigkeiten in der Flüssigkeit sich stetig von Ort zu Ort ändern. Durch die Annahme, dass der Bewegungszustand des Systems durch Kräfte, die auf den Körper wirkten, entstanden sei, ist die Aufgabe beschränkt für den Fall, dass die Flüssigkeit einen mehrfach zusammenhängenden Raum erfüllt; andererseits erstreckt sich die Geltung der Resultate jener Abhandlung bei den gewählten Bezeichnungen nicht nur auf den Fall, dass der feste Körper ein geometrischer Rotationskörper ist, sondern auf alle Fälle, in denen der Körper in Bezug auf zwei oder mehr Paare zu einander senkrechter Ebenen, die sämmtlich durch dieselbe Gerade gehen, nach Gestalt und Massenvertheilung symmetrisch ist.

Für ein im Körper festes Coordinatensystem wird die letzterwähnte Gerade als x-Axe gewählt, so dass die y- und z-Axen in eines der Ebenenpaare fallen. Die Bewegung eines solchen Systems lehrt,

*) Zum grössten Theile (mit etwas veränderten Bezeichnungen) wieder abgedruckt in: Vorlesungen über mathematische Physik von Dr. Gustav Kirchhoff. Leipzig 1876, S. 233—247.

ermittelt, diejenige eines beliebigen materiellen Punktes x, y, z im Körper kennen; bezeichnen nun u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten des Anfangspunktes jenes Systems nach den Richtungen seiner Axen, und p, q, r die Drehungsgeschwindigkeiten um dieselben, so lässt sich die lebendige Kraft T des ganzen Systems — wie in der citirten Abhandlung gezeigt ist — bei den gemachten Voraussetzungen durch jene 6 Functionen der Zeit t ausdrücken nach der Gleichung:

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2)$$

worin $c_{11}\, c_{22}\, c_{44}$ und c_{55} Constanten bedeuten, die ausser von der Gestalt und Massenvertheilung des festen Körpers von der Dichte der Flüssigkeit abhängen.

Führt man ein zweites System von Coordinaten ξ, η, ζ mit im Raume festen Axen ein, so stehen zur Zeit t die Coordinaten desselben materiellen Punktes nach den beiden Axensystemen in den Beziehungen:

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z\\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z\\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,\end{aligned}$$

wenn die 12 Grössen α, β, γ Functionen der Zeit bedeuten. Unter Berücksichtigung der 12 Bedingungsgleichungen, die zwischen den α, β, γ und u, v, w, p, q, r bestehen, erhält man dann aus dem Hamilton'schen Princip $\delta\int T dt = 0$, wie es unter unseren Voraussetzungen gilt, 18 Differentialgleichungen; unter diesen bestimmen sechs — entstanden aus Differentiation nach u, v, w, p, q, r — nur 6 der benutzten unbestimmten Factoren; aus den übrigen 12 lassen sich mit Beachtung bekannter Relationen unter den α, β, γ mit Indd. 12 andere Gleichungen ableiten, von denen wir zunächst eine Hälfte betrachten, deren System nach Einsetzung des obigen Ausdrucks für T lautet:

$$(\mathrm{A})\ \begin{cases} c_{11}\dfrac{du}{dt} = -c_{22}(vr - wq), & \dfrac{dp}{dt} = 0\\[2mm] c_{22}\dfrac{dv}{dt} = c_{11}ur - c_{22}wp\ c, & {}_{55}\dfrac{dq}{dt} = (c_{11} - c_{22})uw + (c_{44} - c_{55})pr\\[2mm] c_{22}\dfrac{dw}{dt} = -c_{11}uq + c_{22}vp, & c_{55}\dfrac{dr}{dt} = -(c_{11} - c_{22})uv - (c_{44} - c_{55})pq.\end{cases}$$

In der citirten Abhandlung werden aus diesen Gleichungen noch die folgenden Schlüsse gezogen:

1) p ist constant.

2) Es ergeben sich drei Integralgleichungen:

$$
\text{(B)} \qquad \begin{cases} c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2) = L \\ c_{11}^2u^2 + c_{22}^2(v^2 + w^2) = M \\ c_{11}c_{44}up + c_{22}c_{55}(vq + wr) = N, \end{cases}
$$

in denen L, M und N Constanten des Problems sind.

3) Mit Einführung der Variabeln s, σ, φ, ψ durch:

$$
v = s\cos\varphi, \qquad q = \sigma\cos(\varphi + \psi)
$$
$$
w = s\sin\varphi, \qquad r = \sigma\sin(\varphi + \psi)
$$

folgt aus den vorigen Integralgleichungen:

$$
s = \sqrt{f - f'u^2}, \quad \sigma = \sqrt{g - g'u^2}, \quad s\sigma\cos\psi = h - h'u,
$$

worin f, f', g, g', h und h' Constanten bedeuten, die von L, M, N, p, c_{11}, c_{22}, c_{44} und c_{55} abhängen; aus dem System (A) ergeben sich durch eben diese Bezeichnung die beiden Differentialgleichungen:

$$
\text{(C)} \qquad \begin{cases} c_{22}\,dt = -c_{11}\dfrac{du}{\sqrt{(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2}} \\ c_{22}^2\,d\varphi = c_{11}\dfrac{c_{11}u(h - h'u) - c_{22}p(f - f'u^2)}{(f - f'u^2)\sqrt{(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2}}\,du. \end{cases}
$$

Hieraus ist direct klar, dass sich u und φ mittelst ϑ-Functionen durch t ausdrücken lassen; die erwähnte Abhandlung zeigt dann noch, wie sich in einfacher Weise Functionen von u und φ finden lassen, durch welche die Lage des Körpers zur Zeit t bestimmt ist. Hierauf kommen wir indessen zurück, wenn wir jene Reduction von u und φ auf ϑ-Functionen wirklich geleistet haben.

Reduction von u und φ auf ϑ-Functionen.

Es folgt leicht:

$$
f = \frac{M}{c_{22}^2}, \qquad f' = \left(\frac{c_{11}}{c_{22}}\right)^2
$$

und also sind, da M positiv ist, auch f und f' positiv.

Ferner ist:

$$
h = \frac{N}{c_{22}c_{55}}, \qquad h' = \frac{c_{11}c_{44}p}{c_{22}c_{55}}.
$$

Nun kann man stets das System der x, y, z so wählen, dass hh' eine positive Grösse ist; da die c positive Constanten sind, genügt es, dass Np positiv ist. Man führe nun x', y', z' als Coordinaten ein durch $x' = -x$, $y' = y$, $z' = -z$, so ist in $\xi = \alpha' + \alpha_1'x' + \alpha_2'y' + \alpha_3'z'$ $\alpha' = \alpha$, $\alpha_1' = -\alpha_1$, $\alpha_2' = \alpha_2$, $\alpha_3' = -\alpha_3$ und gelten ebenso die hieraus durch Vertauschung von ξ mit η und ζ, α mit β und γ entstehenden Gleichungen; sind ferner u', v', w', p', q', r' und N' die aus u, v, w, p, q, r

und N entstehenden Grössen, wenn man in Letzteren α, β, γ mit α', β', γ' vertauscht, so ist:

$$u' = -u, \quad v' = v, \quad w' = -w$$

$$p' = -p, \quad q' = q, \quad r' = -r$$

also:

$$N'p' = -Np,$$

d. h. es ist entweder Np positiv, oder $N'p'$; hätten wir im letzteren Falle gleich die x- und z-Axen in die Richtungen der x'- und z'-Axen gelegt, so wäre Np positiv geworden — wir können daher das System der x, y, z stets so wählen, dass Np und damit hh' positiv wird.

Da f und f' positiv sind, ergiebt sich aus $s = \sqrt{f - f'u^2}$, dass die u des Problems zwischen $+\sqrt{\frac{f}{f'}}$ und $-\sqrt{\frac{f}{f'}}$ liegen müssen, weil für dieselben s reell sein muss; wir setzen: $+\sqrt{\frac{f}{f'}} = \mathfrak{a}$.

Wir definiren nun:

$$(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2 = H(u).$$

Für die u des Problems muss $\sqrt{H(u)}$ reell, also $H(u)$ positiv sein. Unter allen Umständen ist aber $H(u)$ für $u = \pm \mathfrak{a}$ negativ — und da doch zwischen $-\mathfrak{a}$ und $+\mathfrak{a}$ die u des Problems liegen, folgt, dass $H(u)$ zwischen $u = -\mathfrak{a}$ und $u = +\mathfrak{a}$ stets *zwei* reelle Lösungen hat. Der Coefficient von u^4 in $(H)u$ ist $f'g'$; sein Vorzeichen ist das von $g' = \frac{c_{11}}{c_2 c_{55}}(c_{22} - c_{11})$, so dass $H(u)$ in $u = \pm\infty$ positiv oder negativ unendlich wird, je nachdem $c_{22} \gtrless c_{11}$ ist. Danach haben wir zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

1) $c_{22} > c_{11}$; $H(u)$ hat 4 reelle Lösungen, 2 innerhalb (β und γ), 2 ausserhalb $-\mathfrak{a}$ bis $+\mathfrak{a}$ (α und δ).

2) $c_{22} < c_{11}$; $H(u)$ hat zwischen $-\mathfrak{a}$ und $+\mathfrak{a}$ 4 reelle Lösungen oder nur 2 (β und γ), wo dann 2 Lösungen (α und δ) imaginär sind.

Da hh' immer positiv ist, unterscheidet sich $H(+u)$ gegen $H(-u)$ um $+4hh'u$, so dass $H(+u) > H(-u)$; daraus folgt, dass im 1. *Falle* nicht β und γ beide negativ sein können, sondern nur eintreten kann:

a) $\left.\begin{array}{c} fg - h^2 > 0 \\ \alpha < -\mathfrak{a} < \beta < 0 < \gamma < +\mathfrak{a} < \delta \end{array}\right\}$ oder b) $\begin{array}{c} fg - h^2 < 0 \\ \alpha < -\mathfrak{a} < 0 < \beta < \gamma < +\mathfrak{a} < \delta. \end{array}$

Dasselbe folgt, wenn im 2. *Falle* α und δ imaginär sind; giebt es aber in diesem Falle 4 reelle Lösungen, so folgt nur, dass nicht alle 4 Wurzeln negativ sein können, also nur eintreten kann:

(a) $fg - h^2 > 0$
$$-\infty < \alpha < \beta < \gamma < 0 < \delta < +\infty$$
oder
$$-\infty < \alpha < 0 < \beta < \gamma < \delta < +\infty$$

(b) $fg - h^2 < 0$
$$-\infty < \alpha < \beta < 0 < \gamma < \delta < +\infty$$
oder
$$-\infty < 0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta < +\infty.$$

Um nun u und φ durch ϑ-Functionen auszudrücken, haben wir die Ausdrücke (C) für t und φ zunächst auf Normalintegrale zurückzuführen. Es sei:

$$-\frac{c_{22}}{c_{11}}\,dt = \frac{du}{\sqrt{H(u)}} = dw.$$

Wir wollen nun den *ersten Fall*: $c_{22} > c_{11}$ zu Grunde legen; es liegt dann u zwischen β und γ, wenn $\alpha < \quad < \gamma < \delta$ die reellen Lösungen von $H(u)$ sind, und um $\frac{du}{\sqrt{H(u)}}$ in ein Normalintegral zu verwandeln, genügt der sogenannte 1. Fall der Gudermann'schen Transformation:

$$\frac{u-\beta}{u-\alpha} = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,z^2.$$

Entsprechen sich nun: $t = 0$, $u = \beta$, also $z = 0$, so giebt diese Transformation:

$$u = \frac{\beta - \alpha\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}z^2}{1 - \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}z^2}$$

$$dw = \frac{du}{\sqrt{H(u)}} = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -\frac{c_{22}}{c_{11}}\,dt$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{f'g'(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}, \quad k^2 = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,\frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}$$

$$z = \sin\operatorname{am}\varepsilon w = -\sin\operatorname{am}\varepsilon\,\frac{c_{22}}{c_{11}}\,t.$$

Die quadratische, Gudermann'sche Transformation war hier vorzuziehen, weil eine lineare Beziehung zwischen u und z bei Umformung des Ausdrucks

$$\varphi = \int\frac{F(z)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

auch trigonometrische Integrale liefern würde, da $F(z)$ nicht nur von z^2 abhängig wäre. Für unsere demgemäss gewählte Transformation definiren wir noch die Grössen

$$\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = \eta \text{ und } z^2 = x,$$

so ist:

$$u = \frac{\beta\eta - \alpha x}{\eta - x}$$

$$\frac{u(h-h'u)}{f-f'u^2} = \frac{(\beta\eta-\alpha x)\{(\eta-x)h-h'(\beta\eta-\alpha x)\}}{f(\eta-x)^2-f'(\beta\eta-\alpha x)^2}$$
$$= \frac{\alpha(h-h'\alpha)}{f-f'\alpha^2}\,\frac{(x-\xi)(x-\zeta)}{(x-\pi)(x-\chi)} = \frac{\alpha(h-h'\alpha)}{f-f'\alpha^2}\,F(x),$$

worin gesetzt ist:

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha}\,\eta, \qquad \pi = \frac{f-f'\alpha\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{ff'}}{f-f'\alpha^2}\,\eta = \frac{\mathfrak{a}-\beta}{\mathfrak{a}-\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta},$$

$$\zeta = \frac{h-h'\beta}{h-h'\alpha}\,\eta, \quad \chi = \frac{f-f'\alpha\beta-(\alpha-\beta)\sqrt{ff'}}{f-f'\alpha^2}\,\eta = \frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}.$$

Also ist nach den Differentialgleichungen (C):

$$(C_1)\qquad \begin{cases} d\varphi = \left(\frac{c_{11}}{c_{22}}\right)^2 \frac{u(h-h'u)}{f-f'u^2}\,\frac{du}{\sqrt{H(u)}} - \frac{c_{11}}{c_{22}}\,p\,\frac{du}{\sqrt{H(u)}} \\ \quad = \left(\frac{c_{11}}{c_{22}}\right)^2 \frac{\alpha(h-h'\alpha)}{f-f'\alpha^2}\,\frac{F(x)}{2\varepsilon}\,\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} - \frac{c_{11}}{c_{22}}\,\frac{p}{2\varepsilon}\,\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}, \end{cases}$$

worin:

$$\varphi(x) = x(1-x)(1-k^2x).$$

Um dies auf Normalintegrale zu reduciren, müssen wir bekanntlich — für das Verfahren und die hier benutzten Bezeichnungen sehe man: Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen; Lpzg. 1874 Bd. I. S. 263 — einige Reihenentwickelungen machen und in denselben die Coefficienten der negativen ersten Potenz suchen; für diesen Zweck bedeute $[f(x)]_{\frac{1}{x-a}}$ den Coefficienten von $\frac{1}{x-a}$ in der Reihenentwickelung der Function $f(x)$ um $x=a$; definiren wir mit dieser Bezeichnung dann die folgenden Grössen:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t-\pi}} = c_\pi, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t-\chi}} = c_\chi$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\pi\,(\chi)}\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t-\pi\,(\chi)}} = l_{\pi\,(\chi)}, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}} = l_0$$

$$L = l_\pi + l_\chi - l_0$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\pi\,(\chi)}\frac{t\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t-\pi\,(\chi)}} = k_{\pi\,(\chi)}, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\infty}\frac{t\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}} = k_0$$

$$K = k_\pi + k_\chi - k_0$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\pi\,(\chi)}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t-\pi\,(\chi)}} = f_{\pi\,(\chi)}(x), \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}} = f_0(x)$$

$$f(x) = f_\pi(x) + f_\chi(x) - f_0(x),$$

so ist:

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = c_\pi \frac{\sqrt{\varphi(\pi)}\,dx}{(x-\pi)\sqrt{\varphi(x)}} + c_\chi \frac{\sqrt{\varphi(\chi)}\,dx}{(x-\chi)\sqrt{\varphi(x)}}$$
$$+ L\frac{k^2}{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} - K\frac{k^2}{2}\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + d\left(\sqrt{\varphi(x)}\,f(x)\right).$$

Die Reihenentwickelungen geben nun:

$$c_\pi\sqrt{\varphi(\pi)} = \frac{(\pi-\xi)(\pi-\zeta)}{\pi-\chi}, \quad c_\chi\sqrt{\varphi(\chi)} = \frac{(\chi-\xi)(\chi-\zeta)}{\chi-\pi}$$
$$L=0, \quad -K\frac{k^2}{2}=1, \qquad f(x)=0.$$

Die ersten zwei dieser Grössen lassen sich umformen in:

$$c_\pi\sqrt{\varphi(\pi)} = \eta\,\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}\left\{\frac{\mathfrak{a}+\alpha}{\mathfrak{a}-\alpha} - \frac{\mathfrak{a}+\alpha}{h-h'\alpha}\,h'\right\}$$
$$c_\chi\sqrt{\varphi(\chi)} = \eta\,\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}\left\{\frac{\mathfrak{a}-\alpha}{\mathfrak{a}+\alpha} + \frac{\mathfrak{a}-\alpha}{h-h'\alpha}\,h'\right\}.$$

Beachtet man dann noch:

$$\frac{\eta(\alpha-\beta)}{2\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{f'g'}}\,\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\delta-\beta}},$$

so erhält man aus (C_1):

$$(C_2)\begin{cases} d\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{f'g'}}\left\{\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\sqrt{\dfrac{\gamma-\alpha}{\delta-\beta}}\left(\dfrac{h-h'\mathfrak{a}}{(\mathfrak{a}-\alpha)^2}\,\dfrac{dz}{(z^2-\pi)\sqrt{R(z)}} + \dfrac{h+h'\mathfrak{a}}{(\mathfrak{a}+\alpha)^2}\,\dfrac{dz}{(z^2-\chi)\sqrt{R(z)}}\right)\right. \\ \qquad\left. + \dfrac{2}{\sqrt{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}}\left(\dfrac{\alpha(h-h'\alpha)}{\mathfrak{a}^2-\alpha^2} - \dfrac{c_{11}}{c_{22}}\,p\right)\dfrac{dz}{\sqrt{R(z)}}\right\}. \end{cases}$$

Hiermit ist φ durch drei Integrale ausgedrückt, die wir auf ϑ-Functionen zu reduciren haben:

Wenn, wie hier:

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = -\varepsilon\,\frac{c_{22}}{c_{11}}\,t,$$

so ist (s. Königsberger, Vorlesungen S. 421):

$$\int_0^z \frac{dz}{(z^2-z_1^{\,2})\sqrt{R(z)}} = -\frac{k^2}{2}\,\frac{\sin^3\operatorname{am}\alpha}{\sin'\operatorname{am}\alpha}\,\lg\frac{\vartheta_0\left(\frac{w-\alpha}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w+\alpha}{2K}\right)}$$
$$-k^2\sin^2\operatorname{am}\alpha\cdot w\left\{1+\frac{\vartheta_3^{\,2}}{\vartheta_0^{\,2}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{2K}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\alpha}{2K}\right)}\,\frac{\dfrac{d\vartheta_0\left(\frac{\alpha}{2K}\right)}{d\alpha}}{\vartheta_3\left(\frac{\alpha}{2K}\right)}\right\},$$

wobei $\alpha = \int_0^{\frac{1}{kz_1}}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ gesetzt ist.

Diese so definirte Grösse α haben wir, und zwar für den hier angenommenen Fall $c_{22} > c_{11}$ näher zu betrachten.

In unserm *ersten* Integral ist

$$z_1 = \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\mathfrak{a}-\beta}{\mathfrak{a}-\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}.$$

Bei $c_{22} > c_{11}$ beweist man leicht:

$$1 < \pi < \frac{1}{k^2}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{nämlich aus: } & \dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} < 1 \text{ und daher } & \dfrac{\mathfrak{a}-\beta}{\mathfrak{a}-\alpha} > \dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \\ \text{und aus: } & \dfrac{\mathfrak{a}-\beta}{\mathfrak{a}-\alpha} < 1 \text{ und daher } & \dfrac{\delta-\beta}{\delta-\alpha} > \dfrac{\mathfrak{a}-\beta}{\mathfrak{a}-\alpha} \end{array}\right\} \text{ denn: } \delta > \mathfrak{a} > \gamma.$$

Ist nun $\alpha = 2Kw_1$ und $w_1 = -\frac{\tau}{2} + w_1'$, wobei $\tau = \frac{iK'}{K}$ aus

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \text{ und } K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

bestimmt ist, so folgt:

$$2Kw_1' = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Um aber ein ϑ-Argument zu erhalten, dessen obere Grenze < 1 ist, setze man einmal $w_1' = w_{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}$, so giebt die Formel:

$$\sin\operatorname{am} 2Kw_{\mathrm{I}} = \sin\operatorname{am}(2Kw_1' + K) = \frac{\cos\operatorname{am} 2Kw_1'}{\Delta\operatorname{am} 2Kw_1'}$$

$$2Kw_{\mathrm{I}} = \int_0^{\sqrt{\frac{\mathfrak{a}-\gamma}{\mathfrak{a}-\delta}\,\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

und setze man weiter $w_{\mathrm{I}} = -w_\pi i$, so giebt die Formel:

$$i\,tn\,(2Kw_{\mathrm{I}};\,k) = \sin\operatorname{am}(2Kw_{\mathrm{I}}i;\,k_1) = \sqrt{\frac{\mathfrak{a}-\gamma}{\mathfrak{a}-\beta}\,\frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma}};$$

$$2Kw_{\mathrm{I}}i = 2Kw_\pi = \int_0^{\sqrt{\frac{\mathfrak{a}-\gamma}{\mathfrak{a}-\beta}\,\frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}},$$

worin $\frac{\mathfrak{a}-\gamma}{\mathfrak{a}-\beta}\,\frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma} < 1$, denn $\frac{\mathfrak{a}-\gamma}{\mathfrak{a}-\beta} < 1$, d. h. $\frac{\mathfrak{a}-\gamma}{\mathfrak{a}-\beta} < \frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma}$.

Durch die bekannten Substitutionsformeln der ϑ-Functionen ergiebt sich nun für dieses Argument w_π:

$$\int_0^z \frac{dz}{(z^2-\pi)\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\vartheta_3^3(w_\pi i)}{\vartheta_1(w_\pi i)\,\vartheta_2(w_\pi i)\,\vartheta_3(w_\pi i)}\,\lg\frac{\vartheta_2\left(w_\pi i+\frac{w}{2K}\right)}{\vartheta_2\left(w_\pi i-\frac{w}{2K}\right)}$$

$$+\,w\left\{\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\vartheta_3^3(w_\pi i)}{\vartheta_1(w_\pi i)\vartheta_2(w_\pi i)\vartheta_3(w_\pi i)}\,\frac{1}{2K}\,\frac{d\lg\vartheta_2(w_\pi i)}{d(w_\pi i)} - \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{\vartheta_3^2(w_\pi i)}{\vartheta_2^2(w_\pi i)}\right\}.$$

Besonders zu beachten hat man bei dieser Umformung nur:

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_0\frac{w-\alpha}{2K}}{\vartheta_0\frac{w+\alpha}{2K}} = -\frac{w}{2K} + \lg\frac{\vartheta_1\left(w_1'-\frac{w}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(w_1'+\frac{w}{2K}\right)}$$

$$\frac{w}{2K}\,\frac{d\lg e^{w_1'\pi i}\vartheta_1(w_1')}{dw_1'} = +\frac{w\pi i}{2K} + \frac{d\lg\vartheta_1(w_1')}{dw_1'},$$

so dass sich in der Addition die imaginären Glieder fortheben.

In unserm *zweiten* Integral ist $\chi = \frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} < 0$. Hier genügt es also $\alpha = 2Kw_2$ und $w_2 = -\frac{\tau}{2} - w_\chi i$ zu setzen, so folgt:

$$\frac{\chi}{\chi-1} = \frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\gamma}\,\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\text{und } 2Kw_\chi = \int_0^{\sqrt{\frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\gamma}\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}$$

und sonach:

$$\int_0^z \frac{dz}{(z^2-\chi)\sqrt{R(z)}} = -\frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\vartheta_0^3(w_\chi i)}{\vartheta_1(w_\chi i)\vartheta_2(w_\chi i)\vartheta_3(w_\chi i)}\,\lg\frac{\vartheta_1\left(w_\chi i+\frac{w}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(w_\chi i-\frac{w}{2K}\right)}$$

$$-\,w\left\{\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\vartheta_0^3(w_\chi i)}{\vartheta_1(w_\chi i)\vartheta_2(w_\chi i)\vartheta_3(w_\chi i)}\,\frac{1}{2K}\,\frac{d\lg\vartheta_1(w_\chi i)}{d(w_\chi i)} + \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{\vartheta_0^2(w_\chi i)}{\vartheta_1^2(w_\chi i)}\right\};$$

φ ist damit für den Fall $c_{22} > c_{11}$ bereits auf ϑ-Functionen reducirt. Wenn $c_{22} < c_{11}$ und dabei alle Lösungen von $H(u)$ reell sind, so hätten wir entweder, wenn u zwischen α und β läge, den sogenannten 3. oder, wenn u zwischen γ und δ läge, den sog. 4. Fall der Gudermann'schen Transformation anwenden müssen; um indessen die alte Transformationsformel und die übrigen durch die Lösungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ definirten Grössen auch in diesen Fällen beibehalten zu können, brauchen wir nur die Lösungen von $H(u)$ in anderer Folge zu benennen, und zwar müssen wir setzen:

A) im ersten Falle: $-\mathfrak{a} < \beta < \gamma < \delta < \alpha < +\mathfrak{a}$,

B) im andern Falle: $-\mathfrak{a} < \delta < \alpha < \beta < \gamma < +\mathfrak{a}$.

Zu untersuchen sind dann $\pi = \frac{\mathfrak{a}-\beta}{\mathfrak{a}-\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$ und $\chi = \frac{\mathfrak{a}+\beta}{\mathfrak{a}+\alpha}\,\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$. Im Falle A) sind diese beiden Grössen negativ, da $\gamma-\alpha$ es ist. Im

Falle B) ist $1 < \pi < \frac{1}{k^2}$, wie bei $c_{22} > c_{11}$, und ebenso $1 < \chi < \frac{1}{k^2}$. Es können daher immer *beide* Integrale in eine der Formen gebracht werden, die sie für $c_{22} > c_{11}$ haben.

Ganz anders müssen wir verfahren, wenn das Polynom $H(u)$ zwei imaginäre Lösungen hat: $\alpha = a + bi$ und $\delta = a - bi$, was nach Früherem nur bei $c_{22} < c_{11}$ möglich ist. In diesem Falle ist eine Transformation nützlich, die einen Modul λ liefert, dessen absoluter Betrag $= 1$ ist, und dies leistet der sog. 3. Gudermann'sche Fall:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{-f'g'}\sqrt{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}, \quad \lambda^2 = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\,\frac{\delta-\gamma}{\delta-\beta}.$$

Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned}(\gamma - \alpha)(\delta - \beta) &= (\gamma - a - bi)(a - bi - \beta)\\ &= \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\end{aligned}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = k, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = k_1,$$

so folgt:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \tfrac{1}{2}\sqrt{-f'g'}\,\varrho\,(k + k_1 i)\\ \lambda^2 &= \left(\frac{k - ik_1}{k + ik_1}\right)^2.\end{aligned}$$

Wir suchen dann k statt λ als Integralmodul einzuführen, und zwar zunächst sin am $(u;\lambda)$ und ihre Perioden $4L$ und $2L'i$ durch sin am $(u;k)$ und deren Perioden $4K$ und $2K'i$ auszudrücken; es wird nun durch die Transformation: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ (s. Königsberger, Die Lehre von der Transformation, der Multiplication u. s. w. S. 61) der Multiplicator $a = k_1 + ik$, daher:

$$K = (k_1 + ik)\,C, \quad iK' = (k_1 + ik)(C + 2iC')$$

$$\sin\operatorname{am}\left[v\,(k_1 - ik);\ \frac{2\sqrt{kk_1 i}}{k + k_1 i}\right] = \frac{(k_1 - ik)\sin\operatorname{am}(v;k)\,\Delta\operatorname{am}(v;k)}{1 - k(k + ik_1)\sin^2\operatorname{am}(v;k)};$$

ferner wird durch:

$$a_0 = 0,\ a_1 = -1,\ b_0 = 1,\ b_1 = 0$$

(s. Königsberger a. a. O. S. 28) der Multiplicator $a = -i$, daher bei $v\,(k_1 - ik) = u$ und $\frac{2\sqrt{kk_1 i}}{k_1 i + k} = c$:

$$\sin\operatorname{am}(ui;\ c_1) = i\,tn\,(u, c),$$

d. h. da $c_1 = \lambda$ einfach:

$$\begin{aligned}C &= -L', & C' &= -L\\ K &= -(k_1 + ik)\,L', & iK' &= -(k_1 + ik)(L' + 2iL)\end{aligned}$$

oder:

$$L = \frac{iK' - K}{2}(k + ik_1), \quad L' = iK\,(k + ik_1).$$

Sei $\frac{iK'}{K} = \tau$, so ist:

$$\frac{L'i}{L} = \tau' = \frac{2K}{K - iK'} = \frac{2}{1-\tau}$$

$$-\frac{1}{\tau'} = \frac{-1+\tau}{2}.$$

Ferner können wir die ϑ-Functionen mit dem Modul τ' in solche mit dem Modul $-\frac{1}{\tau'}$ oder $\frac{-1+\tau}{2}$ umformen nach den Gleichungen:

$$\vartheta_3(v;\ \tau') = e^{\frac{-i\pi v^2}{\tau'}} C \cdot \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau'};\ -\frac{1}{\tau'}\right)$$

$$\vartheta_0(v,\ \tau') = e^{\frac{-i\pi v^2}{\tau'}} C \cdot \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau'};\ -\frac{1}{\tau'}\right)$$

$$\vartheta_1(v;\ \tau') = -ie^{\frac{-i\pi v^2}{\tau'}} C \cdot \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau'};\ -\frac{1}{\tau'}\right)$$

$$\vartheta_2(v;\ \tau') = e^{\frac{-i\pi v^2}{\tau'}} C \cdot \vartheta_0\left(\frac{v}{\tau'};\ -\frac{1}{\tau'}\right).$$

Es wird dadurch:

$$\lg \frac{\vartheta_2\left(w_\pi i + \frac{w}{2L};\ \tau'\right)}{\vartheta_2\left(w_\pi i - \frac{w}{2L};\ \tau'\right)} = \frac{2\pi w}{\tau' L} w_\pi + \lg \frac{\vartheta_0\left(\frac{w_\pi i}{\tau'} + \frac{w}{2L\tau'};\ -\frac{1}{\tau'}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w_\pi i}{\tau'} - \frac{w}{2L\tau'};\ -\frac{1}{\tau'}\right)}.$$

Das Argument w_π ist noch zu untersuchen; wir haben zunächst:

$$2L\tau' = 2iL' = -\frac{4K\varepsilon}{\sqrt{-f'g'\varrho}}$$

$$\frac{w}{2L\tau'} = -\frac{w\sqrt{-f'g'\varrho}}{4K\varepsilon} = \frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K}\,t.$$

Ferner war:

$$w_\pi i = -w_1' - \tfrac{1}{2},\quad 2Lw_1' = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2 z^2)}}$$

$$\frac{w_\pi i}{\tau'} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\tau'} - \frac{w_1'}{\tau'} = -\frac{1}{2\tau'} + v_1$$

$$-v_1 = \frac{w_1'}{\tau'} = \frac{1}{2L'i}\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2 z^2)}} = -\frac{\sqrt{-f'g'\varrho}}{4K\varepsilon}\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2 z^2)}}.$$

Die Gudermann'sche Substitution war:

$$z^2 = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\,\frac{u-\beta}{u-\alpha},$$

so dass sich entsprechen $z=0$, $u=\beta$ und $z=\sqrt{\pi}$, $u=+\alpha$, d. h. es bestimmt sich v_1 aus

$$2Kv_1 = \frac{\sqrt{-f'g'\varrho}}{2}\int_\beta^{+\alpha}\frac{du}{\sqrt{H(u)}}$$

und dann ist:

$$\lg\frac{\vartheta_0\left(\frac{w_\pi i}{\tau'}+\frac{w}{2L\tau'};-\frac{1}{\tau'}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{w_\pi i}{\tau'}-\frac{w}{2L\tau'};-\frac{1}{\tau'}\right)} = \lg\frac{\vartheta_1\left(v_1+\frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K}t;\frac{-1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(v_1-\frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K}t;\frac{-1+\tau}{2}\right)}.$$

Aehnlich wird:

$$\lg\frac{\vartheta_1\left(w_\chi i+\frac{w}{2L};\tau'\right)}{\vartheta_1\left(w_\chi i-\frac{w}{2L};\tau'\right)} = \frac{2\pi w}{L\tau'}w_\chi + \lg\frac{\vartheta_1\left(\frac{w_\chi i}{\tau'}+\frac{w}{2L\tau'};-\frac{1}{\tau'}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{w_\chi i}{\tau'}-\frac{w}{2L\tau'};-\frac{1}{\tau'}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{-g'\varrho}}{K}\pi t w_\chi + \lg\frac{\vartheta_0\left(v_2+\frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K}t;\frac{-1+\tau}{2}\right)}{\vartheta_0\left(v_2-\frac{\sqrt{-g'\varrho}}{4K}t;\frac{-1+\tau}{2}\right)},$$

wobei gesetzt ist:

$$\frac{w_\chi i}{\tau'} = -\frac{w_2}{\tau'}-\frac{1}{2} = v_2$$

$$2Kv_2 = \frac{\sqrt{-g'f'\varrho}}{2}\int_\beta^{-\alpha}\frac{du}{\sqrt{H(u)}}.$$

Den Winkel φ können wir sonach in allen Fällen auf ϑ-Functionen reduciren.

Leicht findet man mit den eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{\mathfrak{a}-u}{\mathfrak{a}-\alpha} = -\frac{\vartheta_0^2(w_3)}{\vartheta_3^2(w_\pi i)}\;\frac{\vartheta_2\left(\frac{w}{2K}+w_\pi i\right)\vartheta_2\left(\frac{w}{2K}-w_\pi i\right)}{\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}+w_3\right)\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}-w_3\right)}$$

$$\frac{\mathfrak{a}+u}{\mathfrak{a}+\alpha} = \frac{\vartheta_0^2(w_3)}{\vartheta_0^2(w_\chi i)}\;\frac{\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}+w_\chi i\right)\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}-w_\chi i\right)}{\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}+w_3\right)\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}-w_3\right)},$$

wobei $\sin^2 \mathrm{am}\, 2Kw_3 = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$ ist; dies Argument ist verschieden umzuformen:

I. Bei $c_{22} > c_{11}$ ist immer $\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} > \frac{1}{k^2}$, also zu setzen:

$$w_3 = -\frac{\tau}{2}+w_3' \quad 2Kw_3' = \int_0^{\frac{\delta-\beta}{\delta-\alpha}}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

II Bei $c_{22} < c_{11}$ und 4 reellen Wurzeln ist im Falle

A) $\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} < 0$, also: $w_3 = -\frac{\tau}{2} - w_3' i$

$$2 K w_3' = \int_0^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}}$$

B) $\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} > 1$, aber $< \frac{1}{k^2}$, also: $w_3 = -\frac{1}{2} - w_3' i$

$$2 K w_3' = \int_0^{\frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}}.$$

III. Bei $c_{22} < c_{11}$ und 2 imaginären Wurzeln entsprechen sich $z = 0$, $u = \beta$ und $z^2 = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}$, $u = \infty$; man setze demgemäss:

$$\frac{w_3}{\tau'} = -v_3, \quad 2 K v_3 = \frac{\sqrt{-g' f' \varrho}}{2} \int_\beta^\infty \frac{du}{\sqrt{H(u)}}.$$

Mit Hilfe von $\mathfrak{a} - u$ und $\mathfrak{a} + u$ ist direct gefunden:

$$s^2 = f' (\mathfrak{a} - u)(\mathfrak{a} + u).$$

Ist $b = +\sqrt{\frac{g}{g'}}$, so lassen sich auch

$$\sigma^2 = g - g' u^2 = g' (b - u)(b + u) \text{ und } \cos\psi = \frac{h - h' u}{s \sigma}$$

leicht finden.

Die Lage des Körpers zur Zeit t aus φ und u kennen zu lernen.

Die zweite Hälfte der in der Einleitung erwähnten 12 Gleichungen lautet:

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w} = A \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial w} = B \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w} = C \\ \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \mathrm{A} + \beta C - \gamma B \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \mathrm{B} + \gamma A - \alpha C \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \Gamma + \alpha B - \beta A, \end{cases}$$

worin A, B, C, A, B, Γ Constanten sind, zwischen denen die Bedingungsgleichungen existiren:

$$A^2 + B^2 + C^2 = M$$
$$A\mathrm{A} + B\mathrm{B} + C\Gamma = N.$$

Ohne das Problem zu beschränken, kann man $B = 0$ und $C = 0$ setzen, wodurch nur der ξ-Axe die Richtung einer Geschwindigkeit mit den Componenten $\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{t=0}$ $\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)$ gegeben wird, und ebenso kann man $\mathrm{B} = 0$ und $\Gamma = 0$ wählen, wodurch die bis dahin nur der Richtung nach bestimmte ξ-Axe parallel sich selbst verschoben wird.

Statt durch die 9 coss. $\alpha\beta\gamma$ mit indd. wollen wir die Lage des Körpers nun durch 3 Winkel Θ, Φ und Ψ bestimmen, die wir definiren durch die Substitutionsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\Theta \\
\alpha_2 &= -\sin\Phi\sin\Theta \\
\alpha_3 &= \cos\Phi\sin\Theta \\
\beta_1 &= \sin\Psi\sin\Theta \\
\beta_2 &= \cos\Phi\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos\Theta \\
\beta_3 &= \sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi\cos\Theta \\
\gamma_1 &= -\cos\Psi\sin\Theta \\
\gamma_2 &= \cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi\cos\Theta \\
\gamma_3 &= \sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\Theta.
\end{aligned}$$

Setzt man dann in System (D) den Ausdruck für T, wie er für Rotationskörper gilt, ein, so folgt:

$$\cos\Theta = \frac{1}{A}c_{11}u, \quad \sin\Theta = \frac{1}{A}c_{22}s, \quad \Phi = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

d. h. Θ und Φ sind bestimmbar durch die bereits berechneten Grössen u und φ. Nicht ganz so direct ist dies für Ψ zu erweisen; es ergiebt sich:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{A}{c_{22}}\frac{h - h'u}{f - f'u^2} \text{ d. h. } d\Psi = \mathfrak{a}\frac{h - h'u}{\mathfrak{a}^2 - u^2}\frac{du}{\sqrt{H(u)}}.$$

Auf Normalintegrale reducirt ist daher:

$$d\Psi = \frac{1}{f'}\left\{\frac{h - h'\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} - \alpha}\frac{dz}{(z^2 - \pi)\sqrt{R(z)}} + \frac{h + h'\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} + \alpha}\frac{dz}{(z^2 - \chi)\sqrt{R(z)}}\right\},$$

Ψ enthält daher nur bereits berechnete Normalintegrale. Schreibt man den Ausdruck (C_2) in der Form:

$$\varphi = \frac{\eta(\alpha - \beta)}{2\varepsilon}(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 \text{ wo: } \underset{(2)}{\varphi_1} = \frac{h \mp h'\mathfrak{a}}{(\mathfrak{a} \mp \alpha)^2}\int\frac{dz}{(z^2 - \underset{(\chi)}{\pi})\sqrt{R(z)}},$$

so ist

$$\Psi = \frac{1}{f'}\left\{(\mathfrak{a} - \alpha)\varphi_1 + (\mathfrak{a} + \alpha)\varphi_2\right\} + \text{const.}$$

Die Integrationsconstante lässt sich aus der Gleichung

$$\text{const} = \text{arc}\left(\text{tg} = -\frac{\beta_1}{\gamma_1}\right)_{t=0}$$

zu 0 bestimmen, wenn man die Richtungen der η- und ζ-Axen passend wählt.

Die Lage des Körpers zur Zeit t wäre also vollkommen bekannt, wenn man noch α, β und γ berechnen könnte. β und γ ergeben sich als Functionen von u, s und Ψ:

$$\gamma = \frac{1}{A^2}\left\{\frac{c_{11}c_{55}u(h-h'u)}{s} - c_{22}c_{44}ps\right\}\sin\Psi + \frac{c_{55}}{A}\frac{\sqrt{H(u)}}{s}\cos\Psi$$

$$\beta = \frac{1}{A^2}\left\{\frac{c_{11}c_{55}u(h-h'u)}{s} - \frac{c_{55}A\sqrt{H(u)}}{s}\right\}\sin\Psi - \frac{c_{44}c_{22}ps}{A^2}\cos\Psi.$$

Die Berechnung von α lässt sich aber nicht so direct ausführen; aus der Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$$

erhält man:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{A}{c_{22}}\left(1 - c_{11}(c_{11} - c_{22})\frac{u^2}{A^2}\right),$$

d. h.

$$d\alpha = -\sqrt{ff'}\,\frac{du}{\sqrt{H(u)}} + \frac{f'}{f}\,\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{22}}\,\frac{u^2\,du}{\sqrt{H(u)}}.$$

Auf Normalintegrale reducirt würde das

$$\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{H(u)}}$$

auch auf ein 3tes Integral führen, aber mit dem Coefficienten

$$\sqrt{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}\left\{\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right\}$$

multiplicirt; weil aber $H(u)$ kein Glied mit u^3 enthält, ist

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$$

und wird daher:

$$d\alpha = -\left(\frac{\sqrt{ff'}}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{K}}{\varepsilon}\right)\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{\mathrm{L}k^2}{\varepsilon}\,\frac{z^2\,dz}{\sqrt{R(z)}} - d\left(zf(z^2)\sqrt{R(z)}\right),$$

worin

$$\mathrm{K} = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}{2} - \alpha^2,\quad \mathrm{L} = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{2},$$

$$f(z^2) = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{2}\;\frac{1}{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} - z^2}.$$

Wir brauchen also nur

$$\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{R(z)}} \quad\text{und}\quad zf(z^2)\sqrt{R(z)}$$

durch ϑ-Functionen auszudrücken. Mit der Bezeichung

$$J = \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ist aber bekanntlich:

$$\int_0^z \frac{z^2\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{J}{K}\,w - \frac{1}{k^2}\,\frac{d \lg \vartheta_0\left(\frac{w}{2K}\right)}{dw}$$

$$-\, z f(z^2)\,\sqrt{R(z)} = -\,\mathrm{L}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{w}{2K}\right)\vartheta_2\left(\frac{w}{2K}\right)\vartheta_3\left(\frac{w}{2K}\right)\vartheta_0^2(w_3)}{\vartheta_3^2\,\vartheta_0\left(\frac{w}{2K}\right)\vartheta_1\left(w_3+\frac{w}{2K}\right)\vartheta_1\left(w_3-\frac{w}{2K}\right)}$$

Die Integrationsconstante für α kann man beliebig wählen und damit über die Lage des Anfangspunktes des ξ, η, ζ-Systems entscheiden.

Hamburg.