Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante.

par Henry d'Ovidio à Turin.

Depuis 1873 j'ai publié différents travaux sur la Géométrie *métrico-projective* (voir les *Annali di Matematica* et les Actes des Académies des Lincei, de Turin et de Naples). Je remets à une prochaîne occasion de rendre compte de ces travaux, ainsi que d'autres publiés récemment en Italie sur le même sujet. Aujourd'hui je donne un Résumé d'un long Mémoire lu à l'Académie des Lincei (Séance du 8 Avril 1877), dans lequel j'ai traité d'une manière tout-à-fait générale la théorie des fonctions métriques pour les espaces (Mannigfaltigkeiten) de plusieurs dimensions, sur la base de la dualité et de la projectivité.

Les définitions que l'on rencontre dans les premiers numéros sont nécessaires pour l'intelligence de ce qui suit, et d'ailleurs elles ne présentent aucune difficulté.

§ I. Considérons n variables, dont chacune puisse prendre les infinies valeurs réelles; et fixons notre attention sur les rapports de $n-1$ de ces variables à la dernière. Chaque groupe de valeurs de ces rapports constitue un *élément* d'une *variété* (*Mannigfaltigkeit*) de ∞^{n-1} éléments, ou bien un *point d'un espace de $n-1$ dimensions.* Les valeurs correspondantes des n variables sont les *coordonées homogènes* de ce point; on peut les multiplier toutes par un même nombre arbitraire.

Le point qui a pour coordonnées $x_1, \cdot\cdot, x_n$ sera représenté par x.

§ II. r points $x', \cdot\cdot, x^r$ étant donnés ($r < n$), le *lieu* des points

$$\lambda' x' + \cdot\cdot + \lambda^r x^r \quad (\lambda' \cdot\cdot \lambda^r \text{ indéterminées})$$

est un *rpoint*, que nous désignerons par R ou par $x' \cdot\cdot x^r$. C'est un espace de $r-1$ dimensions, *partiel* par rapport à l'espace proposé de $n-1$ dimensions.

Un point x appartient à R lorsque les équations

$$x_i + \lambda' x_i' + \cdot\cdot + \lambda^r x_i^r = 0 \quad (i = 1 \cdot\cdot n)$$

sont compatibles entr'elles, ce qui exige $n-r$ conditions distinctes.

R est déterminé par r points, avec la condition qu'ils n'appartiennent pas à un même $(r-k)$point $(k=1, 2 \cdot\cdot)$, ce qui exigerait $(n-r+1)k$ conditions. Au lieu de $x', \cdot\cdot, x^r$ il est permis de prendre r autres points

$$\lambda' x' + \cdot\cdot + \lambda^r x^r, \quad \mu' x' \cdot\cdot + \mu^r x^r, \cdot\cdot\cdot,$$

pourvu que le déterminant $\Sigma \pm \lambda' \mu'' \cdot\cdot$ ne soit pas zéro.

Un 1point n'est qu'un point simple, un 2point (ou bipoint) s'appelle aussi une *droite*, et un $(n-1)$point un *plan*. Un $n$point c'est tout l'espace proposé.

Chaque point x de R satisfait à $n-r$ équations linéaires

$$(1) \qquad \xi_1' x_1 + \cdot\cdot + \xi_n' x_n = 0, \quad \xi_1'' x_1 + \cdot\cdot + \xi_n'' x_n = 0, \cdot\cdot\cdot;$$

ce sont *les $n-r$ équations de l'$r$point R.* On peut les remplacer par d'autres de la forme

$$\begin{gathered}(\lambda' \xi_1' + \lambda'' \xi_1'' + \cdot\cdot) x_1 + \cdot\cdot + (\lambda' \xi_n' + \lambda'' \xi_n'' + \cdot\cdot) x_n = 0 \\ (\mu' \xi_1' + \mu'' \xi_1'' + \cdot\cdot) x_1 + \cdot\cdot + (\mu' \xi_n' + \mu'' \xi_n'' + \cdot\cdot) x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\end{gathered}$$

pourvu que $\Sigma \pm \lambda' \mu'' \cdot\cdot$ ne soit pas zéro.

Une seule équation représente un plan.

Un $r$point peut être regardé comme *l'enveloppe* de ses ∞^{n-r-1} plans, et alors il reçoit le nom de *$(n-r)$plan.* Une droite est un $(n-2)$plan, un point est un $(n-1)$plan.

Les multipoints et les multiplans constituent les deux systèmes de *formes fondamentales*, qui se correspondent deux à deux suivant la loi de *dualité.* La droite et le biplan sont de la 1^re^ espèce, etc.

§ III. Un $r$point R et un r'point R' en général n'ont pas de points communs si $r + r' \leqq n$, et ils ont un $k$point commun si $r + r' = n + k$ $(k = 1, 2 \cdot\cdot)$. Mais R et R' peuvent bien avoir un $k$point commun quoique $r + r' < n + k$, et les conditions pour que cela arrive sont en nombre de $(n + k - r - r')k$. Dans ce cas R et R' appartiennent à un même $(n + k - r - r')$point, c'est-à-dire que, considérés comme des multiplans, ils auront un $(n + k - r - r')$plan commun.

Les conditions pour la coïncidence de deux $r$points ou $(n-r)$-plans sont $(n-r)r$.

Dans un même $r$point existent $\infty^{(r-r')r'}$ r'points $(r > r')$.

§ IV. Il y a des droites qui passent par un point donné et coupent R et R' en deux points différents, 1° si $r + r' = n + k$ $(k = 0, 1, \cdot\cdot)$ et que R, R' aient un $k$point commun, 2° si $r + r' < n + k$ et que le point donné tombe dans le $(r + r' - k)$point K' déterminé par les points de R et de R'.

En général il y a des droites qui coupent simultanément en points distincts un $r$point, un r'point, un $(n-r)$point et un $(n-r')$point; le nombre de ces droites est le plus petit parmi $r, r', n-r, n-r'$.

§ V. On peut *associer* deux à deux les $r$points et les $(n-r)$-points en posant entre un point x de l'un et un point y de l'autre la relation réciproque

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0.$$

En d'autres termes, si les équations (1) représentent $n-r$ plans d'un $r$point, les points $(\xi_1' \cdots \xi_n')$, $(\xi_1'' \cdots \xi_n'')$, $\cdots$ détermineront l'$(n-r)$-point associé. Chaque point de l'un correspond univoquement à chaque plan de l'autre.

Un $r$point R et un r'point R' ne sont pas, en général, renfermés dans un même multipoint lorsque $r + r' > n - 1$, et ils sont renfermés dans un même $k$point lorsque $r + r' = k$. Lors même que $r + r' > k$ ils peuvent bien se trouver dans un même $k$point, mais cela exige $(r + r' - k)(n - k)$ conditions.

Par un r'point donné passent $\infty^{(r-r')(n-r)}$ $r$points.

Dans tout ce que nous venons d'exposer on peut échanger entre eux les deux éléments *point* et *plan*.

§ VI. Étant donné un $r$point R au moyen de $r$points $x' \cdots x^r$ ou bien des équations (1), les déterminants des deux matrices

$$\begin{Bmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^r & \cdots & x_n^r \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \xi_1' & \cdots & \xi_n' \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_1^{n-r} & \cdots & \xi_n^{n-r} \end{Bmatrix}$$

sont proportionnels; et si l'on pose

$$x_{b\,..\,c} \equiv \overset{r}{x}_{b\,..\,c} \equiv \sum \pm x_b' \cdots x_c^r, \qquad \xi_{d\,..\,e} \equiv \overset{n-r}{\xi}_{d\,..\,e} \equiv \sum \pm \xi_d' \cdots \xi_e^{n-r},$$

on trouve

$$x_{b\,..\,c} : \xi_{d\,..\,e} = \text{constante},$$

$b \cdots cd \cdots e$ désignant une permutation positive de $1 \cdots n$.

Les quantités $x_{b\,..\,c}$ différentes en valeur absolue sont $\binom{n}{r} = \frac{n \cdots (n-r+1)}{1 \cdots r}$, ainsi que les $\xi_{d\,..\,e}$. Entre les $x_{b\,..\,c}$ passent $\binom{n}{r} - (n-r)r - 1$ relations, ainsi qu'entre le $\xi_{d\,..\,e}$. On emploie les $x_{b\,..\,c}$ comme les *coordonnées homogènes de l' $r$point R*, et les $\xi_{d\,..\,e}$ comme les *coordonnées homogènes de l' $(n-r)$plan R*. Les rapports entre les $x_{b\,..\,c}$ demeurent constants lorsqu'on y remplace les points $x' \cdots$ par d'autres points de R, ainsi que les rapports entre les $\xi_{d\,..\,e}$ lorsqu'on y remplace les plans $\xi_1' x_1 + \cdots = 0, \cdots$ par d'autres plans de R.

Les coordonnées d'un plan $\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n = 0$ sont $\xi_1 \cdots \xi_n$. Cette équation représente le point x comme enveloppe lorsque $x_1 \cdots$ sont donnés et $\xi_1 \cdots$ variables.

§ VII. En désignant par $x_{1..r}, \cdots$ et $y_{1..r'}, \cdots$ les coordonnées d'un $r$point et d'un r'point, on peut exprimer en fonction de ces coordonnées les conditions pour que les deux multipoints aient un $k$point commun malgré que $r + r' < n + k$. On trouve

$$\sum (-1)^{\varepsilon} x_{b..cd..e}\, y_{b..cf..g} = 0;$$

ici $b \cdot\cdot c$, $d \cdot\cdot e$, $f \cdot\cdot g$ sont des combinaisons de $k-1$, $r-k+1$, $r'-k+1$ (tous différents entre eux) parmi les indices $1 \cdot\cdot n$; $b \cdot\cdot c$ ne varie que d'une équation à l'autre, tandis que $d \cdot\cdot e f \cdot\cdot g$ subit une permutation d'un terme à l'autre dans la même équation et ε est le nombre des inversions dans chaque permutation.

Les relations entre les coordonnées d'un même $r$point sont de la forme

$$x_{b..cde}\, x_{b..cfg} + x_{b..cdf}\, x_{b..cge} + x_{b..cdg}\, x_{b..cef} = 0,$$

$b \cdot\cdot c$ étant $r-2$ parmi $1 \cdot\cdot n$ et $defg$ quatre des indices restants.

Il s'ensuit que les $r$points existants dans un espace de $n-1$ dimensions sont les éléments d'un espace de $(n-r)\,r$ dimensions, qui n'est qu'une partie d'un espace de $\binom{n}{r} - 1$ dimensions, et qui est caractérisé par $\binom{n}{r} - (n-r) - 1$ équations entre les coordonnées de chaque élément.

Les mêmes considérations s'appliquent immédiatement aux multiplans.

§ VIII. Soit donnée une forme quadratique

$$A_{xx} \equiv \sum a_{ip} x_i x_p \quad (i,\, p = 1 \cdot\cdot n,\; a_{ip} = a_{pi}):$$

les ∞^{n-2} points caractérisés par l'équation $A_{xx} = 0$ forment ce que nous appelons, d'après Cayley, *l'absolu* des points de l'espace à $n-1$ dimensions.

Soit a le discriminant $\Sigma \pm a_{11} \cdot\cdot a_{nn}$ de A_{xx}, et posons

$$\alpha_{ip} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial a_{ip}}, \quad \alpha = \sum \pm \alpha_{11} \cdot\cdot \alpha_{nn};$$

nous aurons

$$a\alpha = 1, \quad a_{ip} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{ip}};$$

et si nous posons, en général,

$$a_{ij..,pq..} = \sum \pm a_{ip} a_{jq..}, \quad \alpha_{ij..,pq..} = \sum \pm \alpha_{ip} \alpha_{jq..},$$

il vient

$$\alpha_{ij..,pq..} = \frac{1}{a} a_{kl..,rs..}, \quad a_{ij..,pq..} = \frac{1}{\alpha} \alpha_{kl..,rs..},$$

$ij \cdot\cdot kl \cdot\cdot$ et $pq \cdot\cdot rs \cdot\cdot$ désignant des permutations positives de $1 \cdot\cdot n$.

La forme

$$A_{\xi\xi} \equiv \sum \alpha_{ip} \xi_i \xi_p$$

est la *réciproque* (*adjuncta*) de A_{xx}, à cause des relations indiquées entre les a_{ip} et le α_{ip}.

Considérons maintenant les deux systèmes de formes quadratiques

$$A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{x}} \equiv \sum a_{ij\,..,pq\,..} \overset{\nu}{x}_{ij\,..} \overset{\nu}{x}_{pq\,..}, \quad A_{\overset{\nu}{\xi}\overset{\nu}{\xi}} \equiv \sum \alpha_{ij\,..,pq\,..} \overset{\nu}{\xi}_{ij\,..} \overset{\nu}{\xi}_{pq\,..}$$

$$(\nu = 1^{*}),\ 2, \cdot\cdot\, n-1),$$

où l'on peut remarquer que les discriminants de $A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{x}}$, $A_{\overset{\nu}{\xi}\overset{\nu}{\xi}}$ sont égaux à $a^{\binom{n-1}{\nu-1}}$, $\alpha^{\binom{n-1}{\nu-1}}$.

Si l'on suppose (ce qui est permis) que, pour un même νpoint ou $(n-\nu)$plan $\overset{\nu}{x}$ ou $\overset{n-\nu}{\xi}$, on ait toujours

$$\overset{\nu}{x}_{ij\,..} : \overset{n-\nu}{\xi}_{kl\,..} = \sqrt{\alpha} : 1 = 1 : \sqrt{a},$$

on aura

$$A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{x}} = A_{\overset{n-\nu}{\xi}\overset{n-\nu}{\xi}}.$$

Et en général, si l'on forme les fonctions bilinéaires

$$A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{y}} \equiv \sum a_{ij\,..,pq\,..} \overset{\nu}{x}_{ij\,..} \overset{\nu}{y}_{pq\,..}, \quad A_{\overset{\nu}{\xi}\overset{\nu}{\eta}} \equiv \sum \alpha_{ij\,..,pq\,..} \overset{\nu}{\xi}_{ij\,..} \overset{\nu}{\eta}_{pq\,..},$$

on trouve

$$A_{\overset{\nu}{x}\overset{\nu}{y}} = A_{\overset{n-\nu}{\xi}\overset{n-\nu}{\eta}},$$

en supposant que $\overset{\nu}{x}$, $\overset{\nu}{y}$ se rapportent à deux νpoints et $\overset{n-\nu}{\xi}$, $\overset{n-\nu}{\eta}$ aux mêmes νpoints considérés comme des $(n-\nu)$plans.

§ IX. Les deux substitutions réciproques

$$x_i = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\xi\xi}}{\partial \xi_i}, \qquad \xi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x_i},$$

qui servent à transformer A_{xx} et $A_{\xi\xi}$ l'une en l'autre, établissent une correspondance univoque entre les points et plans dans l'espace proposé; nous appelons *conjugués* un point et un plan correspondants.

Les équations d'un plan ξ' et d'un point x' conjugués seront respectivement

$$\sum \xi_i' x_i = 0 \text{ ou } A_{xx'} = 0, \qquad \sum x_i' \xi_i = 0 \text{ ou } A_{\xi\xi'} = 0.$$

Les plans conjugués aux points d'un νpoint enveloppent un νplan ou $(n-\nu)$point, dont les points ont pour conjugués les plans du premier; ces deux multipoints sont appelés *conjugués*. Ils n'ont pas, en général, de points communs.

---

*) Pour $\nu = 1$ on retombe sur A_{xx} et $A_{\xi\xi}$ — Il faut remarquer que dans les groupes $ij\cdot\cdot$, $pq\cdot\cdot$ l'ordre des indices est indifférent, pourvu que chaque groupe ne soit pris qu'une fois seulement.

Deux points $x\,y$ et leurs plans conjugués $\xi\,\eta$ étant donnés, on a

$$A_{xy} = A_{\xi\eta} = \sum x_i \eta_i = \sum \xi_i y_i = -\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} x & \\ y & \alpha \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \xi & \\ \eta & a \end{pmatrix},$$

en faisant pour abrèger

$$\begin{pmatrix} xx' & \cdot \\ yy' & \cdot\cdot\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot & x_1 & x_2 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & x_1' & x_2' & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_1' & \cdot & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot \\ y_2 & y_2' & \cdot & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Et en général, si les points $xx'\cdots$, $yy'\cdots$ déterminent deux νpoints, et leurs plans conjugués $\xi\xi'\cdots$, $\eta\eta'\cdots$ déterminent les deux νplans conjugués, on a

$$\sum \pm A_{xy} A_{x'y'}\cdots = \frac{(-1)^\nu}{\alpha}\begin{pmatrix} xx'\cdots & \\ yy'\cdots & \alpha \end{pmatrix} = A_{\substack{\nu\,\nu \\ x\,x}}$$

$$= \sum \pm A_{\xi\eta} A_{\xi'\eta'}\cdots = \frac{(-1)^\nu}{a}\begin{pmatrix} \xi\xi'\cdots & \\ \eta\eta'\cdots & a \end{pmatrix} = A_{\substack{\nu\,\nu \\ \xi\,\eta}}\ {}^{*}).$$

Pour $\nu > n$ ces déterminants sont nuls, et pour $\nu = n$

$$\sum \pm A_{xy} A_{x'y'}\cdots = \sum \pm x_1 x_2' \cdots \sum \pm y_1 y_2' \cdots = \text{etc.}$$

Les formes $A_{\substack{\nu\,\nu \\ x\,x}}$, $A_{\substack{\nu\,\nu \\ \xi\,\xi}}$ sont aussi réciproques; on les transforme l'une en l'autre au moyen des substitutions

$$\overset{\nu}{x}_{ij\cdots} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial A_{\substack{\nu\,\nu \\ \xi\,\xi}}}{\partial \overset{\nu}{\xi}_{ij\cdots}}, \quad \overset{\nu}{\xi}_{ij\cdots} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial A_{\substack{\nu\,\nu \\ x\,x}}}{\partial \overset{\nu}{x}_{ij\cdots}},$$

$\overset{\nu}{x}$ et $\overset{\nu}{\xi}$ se rapportant à un multipoint et un multiplan conjugués.

§ X. Soient x, y deux points donnés, et $\lambda_1 x + \mu_1 y$, $\lambda_2 x + \mu_2 y$ deux points de la droite xy; $\frac{\lambda_1}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ sera le *rapport anharmonique* de ces deux couples de points. Le logarithme du rapport anharmonique des points $x\,y$ par rapport aux deux points où la droite $x\,y$ coupe l'absolu $A_{xx} = 0$, divisé par $2\sqrt{-1}$, sera la *distance* entre x et y; et en la désignant par (xy) on aura

$$\cos^2(xy) = \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}A_{yy}}, \quad \sin^2(xy) = \frac{\Sigma \pm A_{xx}A_{yy}}{A_{xx}A_{yy}}.$$

La fonction (xy) a pour période $\pi = 3{,}141\cdots$; on choisit toujours la valeur comprise entre 0 et π.

Pour trois points situés sur une même droite on a $(xy) + (yz) = (xz)$.

---

*) Le déterminant $\Sigma \pm A_{xx}A_{x'x'}\cdots$ peut se nommer *le déterminant du νpoint* $xx'\cdots$.

Le lieu des points *orthogonaux* à y est le plan $A_{xy}=0$ conjugué à y; point et plan *orthogonaux*. Les points de l'absolu sont à distance infinie de chaque point de l'espace. La distance (xy) est nulle si la droite xy est *tangente* à l'absolu. Les points communs à l'absolu et au plan $A_{xy}=0$ sont à distance indeterminée de y.

L'espace proposé est de courbure constante. Chaque multipoint est un espace partiel par rapport à tout l'espace proposé, et il est aussi de courbure constante.

§ XI. Dans chaque $r$point R il y a des points orthogonaux à un point donné, et il forment un $(r-1)$point. Un point est *orthogonal* à R, c'est-à-dire à tout les points de R, s'il est orthogonal à r points indépendants de R.

Dans R il y a $\infty^{\frac{1}{2}s(2r-s-1)}$ groupes de s points orthogonaux entre eux, et dans l'espace proposé $\infty^{\binom{n}{2}}$ groupes de n points pareils.

Tous les points orthogonaux à R forment l' $(n-r)$point conjugué R_0.

Un $r$point R et un r'point R' étant donnés $(r \geq r')$, R' ne renferme, en général, des points orthogonaux à R, mais il peut arriver que R' renferme un $l$point L de points orthogonaux à R, et par conséquent R renferme un l'point L' $(r-r'+l=l')$ de points orthogonaux à R'; dans ce cas R et R' seront appelés *l fois orthogonaux* entre eux. R' et R_0 se couperont suivant L, R et R_1 (conjugué de R') suivant L'.

R et R' peuvent être au surplus r' fois orthogonaux; alors ils sont *parfaitement* orthogonaux, et R' est compris dans R_0, R dans R_1.

§ XII. Toute droite qui coupe R_0 est orthogonale à R; toute droite qui coupe R et R_0 est *perpendiculaire* à R (et à R_0).

Il y a des droites qui coupent simultanément $R\,R'\,R_0\,R_1$ en points distincts, c'est-à-dire qui sont perpendiculaires à R et R' (à R_0 et R_1 aussi) en points distincts. En général, c'est-à-dire si R et R' 1°. ne présentent aucune orthogonalité, 2°. n'ont pas de points communs lorsque $r+r' \leq n$, 3°. n'ont qu'un $k$point commun lorsque $r+r'=n+k$; le nombre des droites en question est r' ou $r'-k$ $(r \geq r')$. Elles sont parfaitement orthogonales entr'elles ainsi qu'aux multipoints communs à $R\,R'\,R_0\,R_1$ (s'il y en a), et elles coupent $R\,R'\,R_0\,R_1$ en groupes de points mutuellement orthogonaux.

§ XIII. Les mêmes propriétés ont lieu lorsque R et R' ont un $k$point commun tout en étant $r+r'<n+k$, lorsqu'ils sont l fois orthogonaux, et lorsque les deux cas se présentent ensemble; mais le nombre des droites se réduit alors respectivement à $r'-k$, $r'-l$, $r'-k-l$. Nous appellerons toujours ϱ le nombre de ces droites.

§ XIV. Par un point x on peut mener une perpendiculaire à R, et le point y où elle rencontre R est la *projection* de x sur R. La même droite projecte x sur R_0.

§ XV. Parmi les points de R y est celui dont la distance à x est un *minimum*; (xy) s'appelle donc *la distance entre x et R*.

Les ϱ couples de points où R et R' sont coupés par leurs perpendiculaires communes donnent les distances *minima* entre les points de R et ceux de R', c'est-à-dire *les ϱ distances entre R et R'*. (On peut dire que l'existence d'un $k$point commun à R et R' réduit à zéro k distances, et une orthogonalité d'ordre l réduit à $\frac{\pi}{2}$ l distances.)

Les distances entre R et R' sont égales aux distances entre R_0 et R_1; elles sont complémentaires à $\frac{\pi}{2}$ des distances entre R' et R_0, R et R_1.

§ XVI. Le *moment* de R et R' est le produit des sinus des ϱ distances entre R et R'. Supposons que les points $z' \cdot\cdot z^k$ déterminent le $k$point K commun à $R R'$, et que $x' \cdot\cdot x^{r-k}$ et $y' \cdot\cdot y^{r'-k}$ avec $z' \cdot\cdot z^k$ déterminent respectivement R et R'; nous aurons la formule importante

$$m^2\,(R R') = \frac{\Sigma \pm A_{z'z'}\ldots \Sigma \pm A_{x'x'}..A_{y'y'}..A_{z'z'}..}{\Sigma \pm A_{x'x'}..A_{z'z'}..\ \Sigma \pm A_{y'y'}..A_{z'z'}..},\text{*)}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$m^2\,(R R') = \frac{\begin{pmatrix} z' \cdot\cdot \\ z' \cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha \begin{pmatrix} x' \cdot\cdot y' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \\ x' \cdot\cdot y' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha}{\begin{pmatrix} x' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \\ x' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha \begin{pmatrix} y' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \\ y' \cdot\cdot z' \cdot\cdot \end{pmatrix}\alpha}.$$

Lorsque $r + r' = n + k$, $\Sigma \pm A_{x'x'}..A_{y'y'}..A_{z'z'}..$ se réduit à

$$a\left\{\Sigma \pm x_1' \cdot\cdot y'_{r-k+1} \cdot\cdot z'_{n-k+1} \cdot\cdot\right\}^2.$$

Et si $R R'$ n'ont pas de points communs on a

$$m^2(R R') = \frac{\Sigma \pm A_{x'x'}..A_{y'y'}..}{\Sigma \pm A_{x'x'}..\ \Sigma \pm A_{y'y'}..},$$

dont le numérateur devient $a\left\{\Sigma \pm x_1' \cdot\cdot y'_{r+1} \cdot\cdot\right\}^2$ lorsque $r + r' = n$.

§ XVII. Le *comoment* de R et R' est le produit des cosinus des distances entre R et R', c'est-à-dire le moment de R et R_1 ou de R_0 et R'.

Supposons que $R R'$ soient l fois orthogonaux, et que les groupes de points

$$u' \cdot\cdot u^{l'},\ v' \cdot\cdot v^l,\ x' \cdot\cdot x^{r-l'}\, u' \cdot\cdot u^{l'},\ y' \cdot\cdot y^{r'-l}\, v' \cdot\cdot v^l\ (r - l' = r' - l)$$

*) Le dénominateur se compose des déterminants de R et de R', le numerateur de ceux de K et de K', K' étant l' $(r + r' - k)$point déterminé par les points de R et R' ensemble.

déterminent respectivement $L' \, L \, R \, R'$; nous aurons

$$\mathrm{cm}^2\,(R R') = \frac{\Sigma \pm A_{u'u'}\cdot\cdot\,\Sigma \pm A_{v'v'}\cdot\cdot}{\Sigma \pm A_{x'x'}\cdot\cdot A_{u'u'}\cdot\Sigma \pm A_{y'y'}\cdot\cdot A_{v'v'}\cdot\cdot}\left\{\Sigma \pm A_{x'y'}\cdot\cdot\right\}^2.$$

Voici quelques autres expressions du comoment. Si $R \, R'$ n'ont pas d'orthogonalité on a

$$\mathrm{cm}^2\,(R R') = \frac{(-1)^{r'}}{\Sigma \pm A_{x'x'}\cdot\cdot\,\Sigma \pm A_{y'y'}\cdot\cdot}\begin{vmatrix} 0 & \cdot & 0 & A_{y'x'} & \cdot & A_{y'x^r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & A_{y^{r'}x'} & & A_{y^{r'}x^r} \\ A_{x'y'} & \cdot & A_{x'y^{r'}} & A_{x'x'} & \cdot & A_{x'x'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{x^r y'} & \cdot & A_{x^r y^{r'}} & A_{x^r x'} & \cdot & A_{x^r x^r} \end{vmatrix},$$

et lorsqu' on y ajoute l'hypothèse $r = r'$

$$\mathrm{cm}^2\,(R R') = \frac{\left\{\Sigma \pm A_{x'y'}\cdot\cdot A_{x^r y^r}\right\}^2}{\Sigma \pm A_{x'x'}\cdot\cdot\,\Sigma \pm A_{y'y'}\cdot\cdot}.$$

§ XVIII. En appelant ν. *ème moment* de R et R' la racine carrée M_ν de la somme des produits ν à ν des sinus-carrés des ϱ distances entre R et R', on trouve

$$M_\nu{}^2 = S_\nu - \binom{l'}{1} S_{\nu+1} + \binom{l'+1}{2} S_{\nu+2} - + \cdot\cdot + (-1)^{\varrho-\nu}\binom{l'+\varrho-\nu-1}{\varrho-\nu} S_\varrho.$$

Ici on pose, en gardant les notations du § XXI,

$$S_\nu = \frac{\Sigma\left(\Sigma \pm A_{x^b x^f}\cdot\cdot A_{z'z'}\cdot\cdot\right)\left(\Sigma \pm A_{x^c x^g}\cdot\cdot A_{y'y'}\cdot\cdot A_{z'z'}\cdot\cdot\right)}{\Sigma \pm A_{x'x'}\cdot\cdot A_{z'z'}\cdot\cdot\,\Sigma \pm A_{y'y'}\cdot\cdot A_{z'z'}\cdot\cdot},$$

où $x^b\cdot\cdot x^c\cdot\cdot$, $x^f\cdot\cdot x^g\cdot\cdot$ sont des permutations positives de $x'\cdot\cdot x^r$, dans lesquelles les groupes $x^b\cdot\cdot$, $x^f\cdot\cdot$ de $\varrho - \nu$ élements ne présentent pas d'inversions et $x^c\cdot\cdot$, $x^g\cdot\cdot$ en présentent le moins possible.

Ce que nous avons nommé simplement le *moment* de R et R' serait leur ϱ. ème moment.

On peut aussi employer la formule

$$M_\nu{}^2 = S_\nu' - \binom{l}{1} S_{\nu+1}' + \binom{l+1}{2} S_{\nu+2}' - + \cdot\cdot + (-1)^{\varrho-\nu}\binom{l+\varrho-\nu-1}{\varrho-\nu} S_\varrho',$$

$S_\nu'\cdot\cdot$ différant de $S_\nu\cdot\cdot$ par l'échange des y avec les x.

Cela posé, l'équation aux sinus des distances D entre R et R' sera

$$\sin^{2\varrho} D - M_1{}^2 \sin^{2(\varrho-1)} D + M_2{}^2 \sin^{2(\varrho-2)} D - + \cdot\cdot + (-1)^\varrho M_\varrho{}^2 = 0.$$

§ XIX. De même, en appelant ν.*ème comoment* de R et R' la racine carrée C_ν de la somme des produits ν à ν des cosinus-carrés des distances entre R et R', on a

$$C_\nu{}^2 = S^{(\nu)} - \binom{k}{1} S^{(\nu+1)} + \binom{k+1}{2} S^{(\nu+2)} - + \cdot\cdot + (-1)^{\varrho-\nu}\binom{k+\varrho-\nu-1}{\varrho-\nu} S^{(\varrho)}.$$

Ici on pose (voir § XVII)

$$S^{(\nu)} = \frac{\Sigma(\Sigma \pm A_{x^b x^f}\cdots A_{u'u'}\cdots)(\Sigma \pm A_{y^i y^p}\cdots A_{v'v'}\cdots)(\Sigma \pm A_{x^c y^j}\cdots)(\Sigma \pm A_{x^g y^q}\cdots)}{\Sigma \pm A_{x'x'}\cdots A_{u'u'}\cdots \Sigma \pm A_{y'y'}\cdots A_{v'v'}\cdots},$$

$x^b \cdots x^c \cdots$, $x^f \cdots x^g \cdots$ et $y^i \cdots y^j \cdots$, $y^p \cdots y^q \cdots$ étant des permutations positives de $x' \cdots x^{r-l'}$ et $y' \cdots y^{r'-l}$ respectivement, où les premiers $\varrho - \nu$ éléments $x^b \cdots$, $x^f \cdots$, $y^i \cdots$, $y^p \cdots$ ne présentent pas d'inversions et les autres le moins possible.

L'équation aux cosinus des distances D est

$$\cos^{2\varrho} D - C_1^2 \cos^{2(\varrho-1)} D + C_2^2 \cos^{2(\varrho-2)} D - + \cdots + (-1)^\varrho C_\varrho^2 = 0.$$

§ XX. Deux plans $\xi\,\eta$ n'admettent qu'une seule distance, donnée par la formule

$$\cos^2(\xi\eta) = \frac{A^2_{\xi\eta}}{A_{\xi\xi}\,A_{\eta\eta}}.$$

On choisit pour *absolu* des plans l'ensemble des plans ξ qui satisfont à l'équation $A_{\xi\xi} = 0$. En nommant *rapport anharmonique* de deux couples de plans d'un même biplan, ξ, η et $\lambda_1\xi + \mu_1\eta$, $\lambda_2\xi + \mu_2\eta$, la quantité $\frac{\lambda_1}{\mu_1} : \frac{\lambda_2}{\mu_2}$, et *angle* de deux plans $\xi\,\eta$ le logarithme (divisé par $2\sqrt{-1}$) de leur rapport anharmonique par rapport aux deux plans communs au biplan $\xi\eta$ et à l'absolu; on trouve que *l'angle de deux plans est égal à leur distance* lorsqu'on les regarde comme des $(n-1)$ points.

Tout ce qui a été exposé au § X s'applique aux plans, avec un accord parfait même dans la nomenclature.

§ XXI. Il en est de même de la notion d'orthogonalité établie au § XI. Ainsi, un biplan peut être perpendiculaire à un multiplan *en* un certain plan.

Deux multiplans $R\,R'$ admettent des biplans perpendiculaires communs (§§ XIII et XIV), et les angles compris entre les couples de plans où chaque biplan est perpendiculaire à R et R' sont les *angles* entre R et R'. Ils sont égaux aux distances entre R et R' regardés comme des multipoints.

On obtient les expressions des moments et des comoments des multiplans en changeant les coordonnées des points en celles des plans dans les formules des §§ XVI, $\cdots$

§ XXII. On peut exprimer les moments de deux multipoints R et R' en fonction de leurs coordonnées $x_{1\ldots r}, \cdots$ et $y_{1\ldots r'}, \cdots$

Posons d'abord

$$\frac{1}{\omega} = A_{\substack{r\,r\\xx}} A_{\substack{r'r'\\yy}}.$$

Alors, si $r + r' < n$ et que RR' n'aient pas de points communs, on a

$$\mathrm{m}^2(RR') = \omega \sum a_{c..\,d..,\,g..\,h..}\, x_{c..} y_{d..} x_{g..} y_{h..},$$

$c \cdots d \cdots$ et $g \cdots h \cdots$ désignant des arrangements de $1 \cdots n$, dans lesquels les premiers r éléments $c \cdots$ et $g \cdots$, ainsi que les derniers r' $d \cdots$ et $h \cdots$, ne présentent aucune inversion.

Si $r + r' = n$ et $R\,R'$ n'ont pas de points communs,

$$\mathrm{m}^2\,(RR') = \omega a \left\{\sum x_{c\ldots}\, y_{d\ldots}\right\}^2,$$

$c \cdots d \cdots$ désignant des permutations positives de $1 \cdots n$ ($c \cdots$ sans inversions et $d \cdots$ avec le moins possible).

Si $r + r' = n + k$ et que $R\,R'$ aient un $k$point commun,

$$\mathrm{m}^2\,(RR') = \omega a \sum a_{b\ldots, f\ldots}\, x_{b\ldots c\ldots}\, y_{b\ldots d\ldots}\, x_{f\ldots g\ldots}\, y_{f\ldots h\ldots},$$

$b \cdots c \cdots d \cdots$ et $f \cdots g \cdots h \cdots$ désignant des permutations positives de $1 \cdots n$, où les k éléments $b \cdots$ et $f \cdots$, ainsi que $c \cdots$ et $g \cdots$, ne présentent aucune inversion, et $d \cdots$, $h \cdots$ le moins possible.

Si enfin $r + r' < n + k$ et $R\,R'$ ont un $k$point commun,

$$\mathrm{m}^2\,(RR') = \omega \sum a_{b\ldots, f\ldots}\, a_{b\ldots c\ldots d\ldots, f\ldots g\ldots h\ldots}\, x_{b\ldots c\ldots}\, y_{b\ldots d\ldots}\, x_{f\ldots g\ldots}\, y_{f\ldots h\ldots},$$

$b \cdots c \cdots d \cdots$ et $f \cdots g \cdots h \cdots$ désignant des arrangements de $1 \cdots n$, où les groupes de k éléments $b \cdots$ et $f \cdots$, ainsi que les autres, ne présentent aucune inversion.

On a aussi

$$S_\nu = \omega \sum a_{b\ldots c\ldots, f\ldots g\ldots}\, a_{b\ldots d\ldots e\ldots, f\ldots h\ldots i\ldots}\, x_{b\ldots c\ldots d\ldots}\, y_{b\ldots e\ldots}\, x_{f\ldots g\ldots h\ldots}\, y_{f\ldots i\ldots},$$

$b \cdots c \cdots d \cdots e \cdots$ et $f \cdots g \cdots h \cdots i \cdots$ désignant des arrangements de $1 \cdots n$, où $b \cdots$ et $f \cdots$ (k éléments), $c \cdots$ et $g\,..$ ($\varrho - \nu$ éléments), etc. ne présentent aucune inversion.

Il y a des formules analogues pour les comoments.

§ XXIII. Si R et R' sont deux $r$points, on a

$$\mathrm{cm}^2\,(RR') = \frac{\underset{xy}{A_{rr}}^2}{\underset{xx}{A_{rr}}\,\underset{yy}{A_{rr}}}.$$

Choisissons pour *absolu* de l'espace à $(n - r)\,r$ dimensions qui a pour *éléments* les $r$points, l'ensemble de ceux $r$points qui satisfont à l'équation $\underset{xx}{A_{rr}} = 0$; alors le comoment de deux $r$points est égal au cosinus de la distance entre deux éléments d'un tel espace, qui n'est d'ailleurs qu'une partie d'un espace à $\binom{n}{r} - 1$ dimensions, dont on ait pris pour absolu

$$A_{XX} \equiv \sum a_{ij\ldots, pq\ldots}\, X_{ij\ldots}\, X_{pq\ldots} = 0,$$

$X_{1\ldots r}, \cdots$ désignant les $\binom{n}{r}$ coordonnées d'un élément.

Puisqu'on a $A_{\overset{n-r}{\xi}\overset{n-r}{\xi}} = A_{\overset{r}{x}\overset{r}{x}}$ lorsque $\overset{n-r}{\xi}$ se rapporte à un $r$point $\overset{r}{x}$ regardé comme un $(n-r)$plan, nous prendrons $A_{\overset{n-r}{\xi}\overset{n-r}{\xi}} = 0$ pour *absolu* de l'espace qui a pour ses éléments les $(n-r)$plans, et qui n'est qu'une partie d'un espace à $\binom{n}{r} - 1$ dimensions ayant pour absolu

$$A_{\Xi\Xi} = \sum \alpha_{kl..,rs..}\Xi_{kl..}\Xi_{rs..} = 0.$$

Les deux espaces de $\binom{n}{r} - 1$ dimensions peuvent s'identifier en établissant la relation $X_{ij..} : \Xi_{kl..} =$ constante ($ij \cdot\cdot kl \cdot\cdot$ étant une permutation positive de $1 \cdot\cdot n$).

L'absolu des points $A_{xx} = 0$ est l'ensemble des points *autorthogonaux*, qui tombent par conséquent dans leurs plans conjugués. Et l'absolu des plans $A_{\xi\xi} = 0$ résulte de l'ensemble des plans autorthogonaux, qui passent par leurs points conjugués. Lorsque un point appartient à $A_{xx} = 0$ le plan conjugué appartient à $A_{\xi\xi} = 0$, et réciproquement.

L'absolu des $r$points est l'aggrégat des $r$points dans lesquels existe un point orthogonal à tout l' $r$point, c'est-à-dire un point qui appartient aussi à l' $(n-r)$point conjugué, où il remplit le même rôle. (Ainsi l'absolu des droites est formé des droites tangentes à l'absolu des points.) Chacun de ces $r$points R renferme ∞^{r-2} points de $A_{xx}=0$, distribués sur ∞^{n-3} droites (ce sont deux pour un tripoint) issues du point X orthogonal à R, et toute droite menée par X dans R touche $A_{xx} = 0$ en X. On dit alors que R est *tangent* à l'absolu des points en X.

R pourrait bien toucher $A_{xx}=0$ *suivant* une droite, un tripoint, etc.

Tout cela s'applique aux multiplans *mutatis mutandis*.

§ XXIV. Désignons par $\sin^2(x' \cdot\cdot x^r)$ le déterminant

$$\sum \pm \cos(x'x') \cdot\cdot \cos(x^r x^r) = \frac{\Sigma \pm A_{x'x'} \cdot\cdot A_{x^r x^r}}{A_{x'x'} \cdot\cdot A_{x^r x^r}};$$

on peut appeler $(x' \cdot\cdot x^r)$ *l'amplitude* du groupe des points $x' \cdot\cdot x^r$. Elle se réduit à zéro pour $r > n$ et à l'unité pour $r = 1$.

Posons encore

$$\sin^2(RR' \cdot\cdot) = \sum \pm \mathrm{cm}(RR)\ \mathrm{cm}(R'R') \cdots,$$

où il faut remarquer que les comoments deviennent quelquefois des simples cosinus, p. ex. si $RR' \cdots$ sont des plans.

Voici maintenant quelques théorèmes analogues à ceux qui se rapportent aux triangles plans et sphériques, aux tétraèdres, etc.

1⁰. Deux groupes de r points $x' \cdot\cdot x^r$, $y' \cdot\cdot y^r$ étant donnés, on a

$$\sin(x'\cdot\cdot)\sin(y'\cdot\cdot)\,\mathrm{cm}(x'\cdot\cdot,y'\cdot\cdot)=\sum\pm\cos(x'y')\cdots=\frac{\Sigma\pm A_{x'y'}\cdots}{\{A_{x'x'}\cdots A_{y'y'}\cdots\}^{\frac{1}{2}}}.$$

et en particulier

$$\sin(x'\cdot\cdot x^n)\sin(y'\cdot\cdot y^n)=\sum\pm\cos(x'y')\cdot\cdot\cos(x^ny^n)$$

$$=a\frac{\Sigma\pm x_1'\cdot\cdot x_n^n\,\Sigma\pm y_1'\cdot\cdot y_n^n}{\{A_{x'x'}\cdots A_{y'y'}\cdots\}^{\frac{1}{2}}}.$$

2⁰. En divisant r points en deux groupes $x'\cdot\cdot x^k$, $x^{k+1}\cdot\cdot x^r$, on a

$$\sin(x'\cdot\cdot x^r)=\sin(x'\cdot\cdot x^k)\sin(x^{k+1}\cdot\cdot x^r)\,\mathrm{m}\,(x'\cdot\cdot x^k,\;x^{k+1}\cdot\cdot x^r);$$

et en les divisant en trois groupes $x'\cdot\cdot x^k$, $x^{k+1}\cdot\cdot x^s$, $x^{s+1}\cdot\cdot x^r$,

$$\sin(x'\cdot\cdot x^k)\sin(x'\cdot\cdot x^r)$$

$$=\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot x^s)\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{s+1}\cdot\cdot x^r)\,\mathrm{m}\,(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot x^s,x'\cdot\cdot x^kx^{s+1}\cdot\cdot x^r).$$

3⁰. Si parmi les points $x'\cdot\cdot x^r$ on en choisit k, $x'\cdot\cdot x^k$, et que l'on fasse les combinaisons s à s ($x^{k+1}\cdot\cdot$, $x^l\cdot\cdot$, etc.), des autres; on obtient

$$\sin^{\binom{r-k-1}{s}}(x'\cdot\cdot x^k)\sin^{\binom{r-k-1}{s-1}}(x'\cdot\cdot\cdot x^r)$$

$$=\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot)\sin(x'\cdot\cdot x^kx^l\cdot\cdot)\cdots\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot,x'\cdot\cdot x^kx^l\cdot\cdot,\cdots).$$

D'ici on tire

$$\sin(x''\cdot\cdot x^r):\sin(x'x'''\cdot\cdot x^r,\cdots,x'x''\cdot\cdot x^{r-1})=\text{constante}.$$

4⁰. On a aussi

$$\mathrm{cm}^{\binom{r-k-1}{s}}(x'\cdot\cdot x^k,y'\cdot\cdot y^k)\,\mathrm{cm}^{\binom{r-k-1}{s-1}}(x'\cdot\cdot x^r,y'\cdot\cdot y^r)\sin(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot,x'\cdot\cdot x^kx^l\cdot\cdot,\ldots)\cdot$$

$$\cdot\sin(y'\cdot\cdot y^ky^{k+1}\cdot\cdot,y'\cdot\cdot y^ky^l\cdot\cdot,\cdots)$$

$$=\sum\pm\mathrm{cm}(x'\cdot\cdot x^kx^{k+1}\cdot\cdot,y'\cdot\cdot y^ky^{k+1}\cdot\cdot)\,\mathrm{cm}(x'\cdot\cdot x^kx^l\cdot\cdot,y'\cdot\cdot y^ky^l\cdot\cdot)\cdots$$

5⁰. Si les points $x'\cdot\cdot x^r$ déterminent un $r$point R, et qu'on les projecte sur un r'point R' ($r\le r'$) en $z'\cdot\cdot z^r$, on a

$$\frac{\sin(z'\cdot\cdot z^r)}{\sin(x'\cdot\cdot x^r)}=\frac{\mathrm{cm}(RR')}{\cos(x'z')\cdots\cos(x^rz^r)}.$$

NB. Toutes ces propositions subsistent aussi pour les multiplans avec une dualité parfaite.

§ XXV. Considérons les n points *fondamentaux* P_1 $(10\cdot\cdot0)$, P_2 $(010\cdot\cdot0)$, $\cdots$, ansi que les multipoints déterminés par eux, et que nous dirons aussi *fondamentaux*. On a pour un $r$point R $(x_{1\cdot\cdot r},\cdots)$

$$\frac{x_{b\cdot\cdot}}{\sqrt{A_{\substack{rr\\xx}}}}=\sqrt{\alpha_{b\cdot\cdot,\,b\cdot\cdot}}\,\mathrm{m}\,(R,P_c\cdot\cdot),$$

$b\cdot\cdot c\cdot\cdot$ étant une permutation de $1\cdot\cdot n$; c'est-à-dire que les coordonnées $x_{b\cdot\cdot}$ de R sont proportionelles aux moments de R avec les $(n-r)$points fondamentaux $P_c\cdot\cdot$, multipliés par les nombres $\sqrt{\alpha_{b\cdot\cdot,\,b\cdot\cdot}}$. Ces moments sont liés par une équation quadratique

$$1 = \sum a_{c\ldots,g\ldots}\, \alpha_{c\ldots,g}\,.\ \frac{\mathrm{m}(R, P_c\cdot\cdot)\,\mathrm{m}(R, P_g\cdot\cdot)}{\mathrm{cm}(P_c\cdot\cdot, P_g\cdot\cdot)}\,.$$

Pour un $r$plan on a

$$\frac{\xi_{b\ldots}}{\sqrt{A_{\substack{rr\\ \xi\xi}}}} = \sqrt{a_{b\ldots,b\ldots}}\ \mathrm{m}\,(R, P_b\cdot\cdot)\,.$$

La transformation des coordonnées est règlée par la formule

$$X_{b\ldots} = \sum x_{p\ldots}\, y^{c\ldots}_{q\ldots},$$

$X_{b\ldots}$, $x_{p\ldots}$ désignant les nouvelles et les anciennes coordonnées d'un $r$point, et $y^{c\ldots}_{q\ldots}$ les coordonnées des nouveaux $(n-r)$points fondamentaux.

§ XXVI. Un $r$point R et un r'point R' sont parallèles lorsqu'ils ont en commun un $k$point K appartenant à l'absolu des $k$points, c'est-à-dire tangent à l'absolu des points. Il arrive dans ce cas qu'une des ϱ distances entre R et R' s'annulle, ainsi que le moment (le ϱ. ème) de R et R'. Les moments des ordres inférieurs n'éprouvent cependant aucune altération, mais dans leur composition il est inutile de compter la distance qui vient de s'évanouir; p. ex. le produit des sinus des $\varrho - 1$ distances effectives est $\sqrt{S_{\varrho-1}}$. On peut faire abstraction de la distance nulle aussi dans les comoments, en remplaçant la première équation du § XIX par la suivante

$$C^2_\nu = S^{(\nu+1)} - \binom{k+1}{1} S^{(\nu+2)} + \cdot\cdot \pm \binom{k+\varrho-\nu-1}{\varrho-\nu-1} S^{(\varrho)}\,.$$

Il y a des parallèlismes d'ordre supérieur: R et R' sont dits *m fois parallèles* si K touche l'absolu des points suivant un $m$point M. Dans ce cas m distances s'annulent; le produit des sinus des $\varrho - m$ qui restent est $\sqrt{S_{\varrho-m}}$, etc.

Si $R\,R'$ sont m fois parallèles, leurs conjugués $R_0\,R_1$ appartiennent à un même $(n-k)$point K_0 (le conjugué de K) qui touche l'absolu des points suivant le même $m$point M, et on peut appeler R_0 et R_1 *antiparallèles m fois*. Réciproquement, si deux multipoints sont antiparallèles, leurs conjugués seront parallèles.

Tout cela s'applique aux multiplans. Deux multiplans m fois parallèles, regardés comme des multipoints, seront m fois antiparallèles; et réciproquement.

§ XXVII. Il y a un cas où la parfaite dualité que nous avons toujours signalée entre les points et les plans, ainsi qu'entre les formes engendrées par eux, ne subsiste plus; c'est-à-dire lorsqu'on suppose que le discriminant a de A_{xx}, ou bien celui (α) de $A_{\xi\xi}$, soit nul. Le cas $\alpha = 0$ se produit dans l'espace Euclidien à 1, 2, 3 dimensions; nous allons étudier le cas $a=0$, qui ne diffère de celui-là que par l'échange des mots *point* et *plan*.

Pour $a = 0$, l'absolu des points se réduit à un point *principal* X orthogonal à tout l'espace, avec ∞^{n-2} autres points distribués sur ∞^{n-3} droites passantes par X.

L'absolu des plans se réduit à $\left\{\Sigma\sqrt{a_{j..,j}}\,.\,\xi_i\right\}^2 = 0$ ($ij\cdot\cdot$ désignant les permutations positives de $1\cdot\cdot n$); c'est l'ensemble des plans passants par X comptés deux fois.

L'angle $(\xi\xi')$ de deux plans quelconques se réduit à zéro; mais on peut le remplacer, toutes les fois qu'il s'agit de comparer des angles entre eux, par la fonction algèbrique $[\xi\xi']$ définie par l'équation

$$[\xi\xi']^2 = \lim\left\{\frac{\sin(\xi\xi')}{\sqrt{a}}\right\}^2 = \frac{\Sigma a_{d..,h..}(\xi_b\xi_c' - \xi_b'\xi_c)(\xi_f\xi_g' - \xi_f'\xi_g)}{\left\{\Sigma\sqrt{a_{c..,c..}}\,\xi_b\cdot\Sigma\sqrt{a_{c..,c..}}\,\xi_b'\right\}^2},$$

$bcd\cdot\cdot$, $fgh\cdot\cdot$ désignant des permutations positives de $1\cdot\cdot\cdot n$.

Il faut dire le même de l'amplitude d'un groupe quelconque de $r$plans $(\xi\xi'\cdot\cdot)$; elle est nulle, mais on peut la remplacer par $[\xi\xi'\cdot\cdot]$, en posant

$$[\xi\xi'\cdot\cdot]^2 = \lim\left\{\frac{\sin(\xi\xi'\cdot\cdot)}{a^{\frac{1}{2}(r-1)}}\right\}^2 = \frac{\Sigma a_{d..,h..}(\Sigma\pm\xi_b\xi_c'\cdot\cdot)(\Sigma\pm\xi_f\xi_g'\cdot\cdot)}{\left\{\Sigma\sqrt{a_{c..,c..}}\,\xi_b\cdot\Sigma\sqrt{a_{c..,c..}}\,\xi_b'\cdots\right\}^2},$$

$bc\cdot\cdot d\cdot\cdot$, $fg\cdot\cdot h\cdot\cdot$ étant des permutations positives de $1\cdot\cdot n$.

§ XXVIII. Toujours pour $a=0$, un plan quelconque a pour conjugué le point X, et un $r$point a pour conjugué un $r$plan dont les plans passent par X.

Si $r + r' = n + k$ ($k = 0, 1, \cdot\cdot$) et que les deux multipoints R, R' aient un $k$point commun, une des ϱ distances entre R et R' s'évanouit toujours, mais on peut la remplacer par *l'angle* de deux plans convenables (suivant le dernier sens du mot *angle*). Il est aisé d'obtenir l'expression de cet angle, ainsi que l'équation aux sinus des $\varrho - 1$ distances restantes, au moyen des moments des ordres $\varrho - 1$, $\varrho - 2$, $\cdot\cdot$ La formule de l'angle est $\frac{1}{a}\cdot\frac{m(RR')}{\sqrt{S_{\varrho-1}}}$, $m(RR')$ et $S_{\varrho-1}$ ayant les expressions données au § XXII.

Lorsque R et R' sont m fois parallèles, m distances vont à zéro; et par conséquent il y aura $\varrho - m - 1$ distances plus l'angle si $r + r' = n + k$, et $\varrho - m$ distances sans angle si $r + r' < n + k$ (on suppose que R et R' aient un $k$point commun).

Si enfin R et R' sont deux *multiplans* parallèles, ils auront $\varrho - 1$ distances et un angle.

Il est bon de remarquer que, si l'on prend X pour un des n points fondamentaux en lui donnant pour coordonnées $0\cdot\cdot 0\,1$, et que l'on suppose les autres $n - 1$ points deux à deux orthogonaux, on peut écrire

$$A_{xx} = x_1^2 + \cdot\cdot + x_{n-1}^2.$$

En supposant encore $\xi_n = 1$ pour chaque plan, on obtient

$$[\xi\xi']^2 = (\xi_1 - \xi_1')^2 + \cdots + (\xi_{n-1} - \xi'_{n-1})^2,$$

$$[\xi\xi'\cdots]^2 = \sum \begin{vmatrix} \xi_b\, \xi_b' \cdot\cdot 1 \\ \xi_c\, \xi_c' \cdot\cdot 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix}^2$$

$bc\cdots$ désignant les combinaisons r à r de $1\cdots n-1$; et

$$[\xi\xi'\cdots\xi^{n-1}] = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdot\, \xi_{n-1} & 1 \\ \xi_1' & \xi_2' & \cdot\, \xi_{n-1}' & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot & \cdot \\ \xi_1^{n-1} & \xi_2^{n-1} & \cdot\, \xi_{n-1}^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

Turin, 3. Avril 1877.