Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie.

Von

MARTIN KRAUSE in Breslau.

Die von Jacobi begründete Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen ist in neuerer Zeit der Gegenstand einer Reihe von Arbeiten geworden, unter denen wir diejenigen von Sohnke*), Schröter**), Hermite***), Königsberger†), Joubert††) hervorheben. Indessen beschränken sich alle diese Arbeiten auf den Fall einer unpaaren Transformation und selbst dieser hat erst im vorigen Jahre durch das schon angegebene Werk von Joubert in gewisser Weise seinen endgültigen Abschluss gefunden. Erst in diesem nämlich ist die Existenz von Modulargleichungen für den allgemeinsten unpaaren Transformationsgrad nachgewiesen worden.

Der Fall einer paaren Transformation dagegen hat bisher wenig Berücksichtigung gefunden. Ausführlich ist nur die Transformation zweiten Grades von Hermite†††) behandelt worden, überdies hat Joubert†*) die Transformation vierten Grades zur Herstellung gewisser in der Theorie der complexen Multiplication auftretender Gleichungen benutzt, endlich hat eben derselbe für den Transformationsgrad 2^μ einen speciellen Satz ohne Beweis angeführt. Hiermit ist aber die Literatur über diesen Gegenstand erschöpft, wenigstens insoweit,

---

*) Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum, Crelle 16.

**) De aequationibus modularibus. Diss. in. Regiomonti 1854.

***) Sur la théorie des équations modulaires ... Paris 1859.

†) Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, 1874.

††) Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Paris 1876.

†††) Sur la théorie des fonctions elliptiques. Comptes rendus tome LVII. 1863.

†*) Sur la théorie des fonctions elliptiques... Paris, 1860. oder comptes rendus tome 50.

als dieselbe dem Verfasser des vorliegenden Aufsatzes bekannt geworden ist.

Es hat nun die folgende Arbeit den Zweck, diese Lücke auszufüllen. Es soll gezeigt werden, dass auch für einen paaren Transformationsgrad Modulargleichungen existiren, die sich zwar in mehrfachen Beziehungen von denen der unpaaren Transformation unterscheiden, die aber an Einfachheit und Symmetrie der Form von ihnen nicht übertroffen werden. Ueberdies gewinnen diese Gleichungen dadurch an Bedeutung, dass auch sie eine Reihe wichtiger Anwendungen auf das Gebiet der Algebra, complexen Multiplication und Zahlentheorie zulassen. Es soll dieser Umstand nicht völlig ausgeführt werden, vielmehr beschränken wir uns darauf, nachzuweisen, wie aus den genannten Gleichungen mit leichter Mühe ein Theil jener Summenformeln hergeleitet werden kann, die Kronecker*) für die Classenanzahl von Formen mit negativer Determinante aufgestellt hat.

§ 1.

Existenzbeweis von Modulargleichungen für einen beliebigen paaren Transformationsgrad.

Wir beweisen zunächst die Existenz von Modulargleichungen für den Transformationsgrad $m = 2^\alpha$.

Wir setzen:

$$C = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\,;\; iC' = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\,;\; \tau = \frac{iC'}{C}\,;\; q = e^{\pi\tau i}.$$

Ferner:

$$\varphi(\tau) = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots} = \sqrt[4]{c} = u$$

$$\psi(\tau) = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots} = \sqrt[4]{c_1} = u_1$$

und nehmen an, dass auf τ eine paare Transformation m^{ten} Grades ausgeübt werde, so dass aus τ wird:

$$\tau_1 = \frac{\beta_0 - \alpha_0\tau}{\alpha_1\tau - \beta_1}, \text{ wenn } \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = m \text{ ist.}$$

Solcher Zahlensysteme $\alpha_0\beta_0\alpha_1\beta_1$ giebt es unendlich viele, doch zerfallen dieselben in eine endliche Anzahl von Classen, als deren Repräsentanten man stets ein und nur ein System von der Form wählen

*) Crelle Bd. 57. pag. 247.

kann: $\alpha_0 = \delta'$; $\alpha_1 = 0$; $\beta_0 = \xi'$; $\beta_1 = \delta_1'$, wenn δ' ein Theiler von m, $\delta_1' = \frac{m}{\delta'}$ und ξ' eine ganze Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots \delta_1' - 1$ ist. Von diesen Classen schliessen wir alle diejenigen aus, bei deren Repräsentanten die Grössen δ', ξ', δ_1' einen gemeinsamen Theiler haben, da dieselben auf Transformationen niederer Grade verbunden mit Multiplication der elliptischen Functionen führen.

Die so definirten Repräsentanten zerfallen in zwei Abtheilungen. In die erste gehören alle diejenigen, in welchen δ' ungerade und ξ' gerade ist, — für sie drückt die Sinusamplitude des transformirten Integrals sich als rationale Function der Sinusamplitude des ursprünglichen aus. In die zweite Abtheilung gehören alle übrigen Repräsentanten — für diese drücken sich nur die elliptischen Functionen des einen Integrals als rationale Functionen der drei elliptischen Functionen des anderen Integrals aus. Wir wollen die zu diesen beiden Fällen gehörenden Transformationen durch die Namen der rationalen und irrationalen von einander unterscheiden.

Für die rationale Transformation ist nun allgemein:

$$\psi^2\left[\frac{\delta'\tau - 2\xi}{\delta_1'}\right] = (-c_1)^{\frac{m}{2}} [tn(\bar{w}) \cdot tn(3w) \cdots tn((m-1)\bar{w})]^2,$$

wenn:

$$w = \frac{(2p\delta_1' - 2(2q+1)\xi)C + (2q+1)\delta' i C'}{m}$$

ist und n und q zwei beliebige Zahlen bedeuten, für welche die Ausdrücke:

$$2p\delta_1' - 2(2q+1)\xi \text{ und } (2q+1)\delta'$$

zu einander relativ prim sind.

Ist daher $m = 2^\alpha$, so wird gesetzt werden können:

$$\psi^2\left[\frac{\tau - 2\xi}{m}\right] = (-c_1)^{\frac{m}{2}} \left[ln\left((2q+1)\frac{iC' - 2\xi C}{m}\right)\right.$$
$$\cdot \left.\left(3(2q+1)\frac{iC' - 2\xi C}{m}\right) \cdots tn\left((m-1)(2q+1)\frac{iC' - 2\xi C}{m}\right)\right]^2.$$

Da nun allgemein $tn\,(2s+1)u$ eine rationale Function von $tn\,u$ ist, deren Zähler eine ungerade, deren Nenner eine gerade Function von $tn\,u$ ist, so wird:

$$\psi^2\left[\frac{\tau - 2\xi}{m}\right] = (-c_1)^{\frac{m}{2}} f\left[tn^2\left((2q+1)\frac{iC' - 2\xi C}{m}\right)\right],$$

wo $f(u)$ eine rationale Function von u bedeutet.

Wir wollen jetzt an Stelle von $2q+1$ der Reihe nach setzen: $1, 3, 5, \cdots m-1$, so wird:

$$\psi^2\left[\frac{\tau-2\xi}{m}\right]=(-c_1)^{\frac{m}{2}}f\left[tn^2\left(\frac{iC'-2\xi C}{m}\right)\right]$$

$$=(-c_1)^{\frac{m}{2}}f\left[tn^2\left(3\,\frac{iC'-2\xi C}{m}\right)\right]\cdots=(-c_1)^{\frac{m}{2}}f\left[tn^2\left((m-1)\,\frac{iC'-2\xi C}{m}\right)\right],$$

oder:

$$\psi^2\left[\frac{\tau-2\xi}{m}\right]=\frac{2}{m}(-c_1)^{\frac{m}{2}}\sum_1^{\frac{m}{2}}{}_r f\left[tn^2\left((2r-1)\,\frac{iC'-2\xi C}{m}\right)\right].$$

Ferner setzen wir an Stelle von ξ der Reihe nach $0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots+\frac{m}{2}$, so wird:

$$\psi^2\left[\frac{\tau}{m}\right]\quad=\frac{2}{m}(-c_1)^{\frac{m}{2}}\sum_1^{\frac{m}{2}}{}_r f\left[tn^2\left((2r-1)\,\frac{iC'}{m}\right)\right]$$

$$\psi^2\left[\frac{\tau\mp 2}{m}\right]=\frac{2}{m}(-c_1)^{\frac{m}{2}}\sum_1^{\frac{m}{2}}{}_r f\left[tn^2\left((2r-1)\,\frac{iC'\mp 2C}{m}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi^2\left[\frac{\tau-m}{m}\right]=\frac{2}{m}(-c_1)^{\frac{m}{2}}\sum_1^{\frac{m}{2}}{}_r f\left[tn^2\left((2r-1)\,\frac{iC'-mC}{m}\right)\right],$$

also:

$$\frac{\psi^{2p}\left[\frac{\tau}{m}\right]+\psi^{2p}\left[\frac{\tau\mp 2}{m}\right]+\cdots\psi^{2p}\left[\frac{\tau-m}{m}\right]}{(-c_1)^{\frac{pm}{2}}}$$

$$=\left(\frac{2}{m}\right)^p\sum{}_{r_1}\left[\sum{}_r f\left[tn^2\left(\frac{(2r-1)iC'-2r_1C}{m}\right)\right]\right]^p$$

$$r=1\cdots\cdots\frac{m}{2};\ r_1=0,\pm 1,\pm 2\cdots\frac{m}{2}.$$

Da die Argumente von tn^2 nicht um ganze Vielfache von $2C$ oder $2iC'$ von einander verschieden sind, da ferner der Ausdruck:

$$tn^2\left(\frac{(2\varrho+1)iC'+2\varrho_1C}{m}\right)$$

für alle ganzzahligen Combinationen der ϱ und ϱ_1 überhaupt nur $\frac{m^2}{2}$ von einander verschiedene Werthe annimmt, die man aus den Combinationen:

$$2\varrho_1:0,\ m;\qquad\qquad 2\varrho_1\quad :2,\ 4\cdots\cdots m-2$$

$$2\varrho+1:1,3,\cdots\cdots m-1;\ 2\varrho+1:\pm 1,\pm 3\cdots\cdots\pm m-1$$

erhalten kann, so ist die Grösse:

$$\frac{\psi^{2p}\left[\frac{\tau}{m}\right]+\psi^{2p}\left[\frac{\tau\mp 2}{m}\right]+\cdots\psi^{2p}\left[\frac{\tau-m}{m}\right]}{(-c_1)^{\frac{mp}{2}}}$$

eine rationale symmetrische Function der Ausdrücke:

$$tn^2\left(\frac{(2\varrho+1)iC'+2\varrho_1 C}{m}\right).$$

Nun ist aber für ein gerades m:

$$\operatorname{sn}(mv)=m\cdot\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v\cdot\frac{\prod\left(1-\frac{tn^2 v}{tn^2\left(\frac{2\varrho iC'+2\varrho_1 C}{m}\right)}\right)}{\prod\left(1-\frac{tn^2 v}{tn^2\left(\frac{(2\varrho+1)iC'+2\varrho_1 C}{m}\right)}\right)}$$

und andrerseits:

$$\operatorname{sn}(mv)=\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v$$

mal einer rationalen Function von $tn^2 v$, deren Coefficienten ganze Functionen von u^8 sind.

Daraus folgt, dass jede rationale symmetrische Function der Grössen:

$$tn^2\left(\frac{(2\varrho+1)iC'+2\varrho_1 C}{m}\right)$$

eine rationale Function von u^8 ist.

Wir wollen von jetzt an im Folgenden annehmen, dass in $m=2^\alpha$ $\alpha>2$ sei, da die Fälle $m=2$ und $m=4$, wie bemerkt, schon behandelt worden sind.

Alsdann ergiebt sich als erstes Resultat: Die Grössen

$$\psi^2\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right],\ \psi^2\left[\frac{\tau\mp 2}{2^\alpha}\right]\ \ldots\ldots\ \psi^2\left[\frac{\tau-2^\alpha}{2^\alpha}\right]$$

sind Wurzeln einer Gleichung, die in Bezug auf die Unbekannte

$$v_1{}^2=\psi^2\left[\frac{\tau-2\xi}{2^\alpha}\right]$$

vom Grade 2^α ist und deren Coëfficienten rationale Functionen von u^8 sind.

Bezeichnen wir diese Gleichungen mit:

$$F(v_1{}^2,\ u^8)=0,$$

so haben die Gleichungen $F(u^2,\ v_1{}^8)=0$ die Lösungen: — $v_1{}^8$ als Unbekannte aufgefasst —

$$\psi^8\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right],\ \psi^8\left[\frac{\tau\mp 8}{2^\alpha}\right],\ \ldots\ \psi^8\left[\frac{\tau-2^\alpha}{2^\alpha}\right].$$

In der That, setzen wir an Stelle von τ: $-\frac{2^\alpha}{\tau\mp 8\xi}$, so geht u^8 über in $v_1{}^8=\psi^8\left[\frac{\tau\mp 8\xi}{2^\alpha}\right]$, ferner $v_1{}^2$ in $\psi^2\left[-\frac{1}{\tau\mp 8\xi}\right]$, d. h. in $u^2 = \varphi(\tau)^2$.*)

*) Hermite: Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Comptes rendus, tome 46., 1858; oder: Königsberger: Die lineare Transformation der Hermiteschen φ Function. Mathem. Annalen Band III.

Ebenso einfach lässt sich zeigen, dass die Gleichungen $F(v_1^2, u^8) = 0$ und $F(u^2, v_1^8) = 0$, wenn man v_1^2 als Unbekannte auffasst, *nur* die Lösungen $\psi^2\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right]$, $\psi^2\left[\frac{\tau \mp 8\xi}{2^\alpha}\right]_{\xi=1\ldots 2^{\alpha-3}-1}$, $\psi^2\left[\frac{\tau - 2^\alpha}{2^\alpha}\right]$ gemeinsam haben, so dass sich das zweite Resultat ergiebt:

Es sind die Grössen $\psi^2\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right]$, $\psi^2\left[\frac{\tau \mp 8}{2^\alpha}\right] \cdots \psi^2\left[\frac{\tau - 2^\alpha}{2^\alpha}\right]$ Wurzeln einer algebraischen Gleichung, die in Bezug auf die Unbekannte $v_1^2 = \psi^2\left[\frac{\tau - 8\xi}{2^\alpha}\right]$ vom Grade $2^{\alpha-2}$ ist und deren Coefficienten rationale Functionen von u^2 sind.

Eine jede rationale symmetrische Function der Grössen

$$\psi^2\left[\frac{\tau}{2^\alpha}\right] \cdots \psi^2\left[\frac{\tau - 2^\alpha}{2^\alpha}\right]$$

ist also eine rationale Function von u^2.

Hieraus folgt die Existenz von Modulargleichungen für einen beliebigen paaren Transformationsgrad, der durch acht theilbar ist.

Ist $n = b^\beta c^\gamma \cdots$ eine beliebige ungerade Zahl, δ ein beliebiger Theiler derselben, $\delta\delta_1 = n$, lässt man ferner x alle Werthe $0, 1, 2, \cdots \delta_1 - 1$ durchlaufen, mit Ausnahme derer, welche zu gleicher Zeit Theiler von δ und δ_1 sind, so besteht nach Joubert zwischen den Grössen $v_1^2 = \psi^2\left[\frac{\delta\tau - 8x}{\delta_1}\right]$ und $u_1^2 = \psi^2(\tau)$ eine algebraische Gleichung, die in Bezug auf v_1^2 vom Grade $T = b^{\beta-1} c^{\gamma-1} (b+1)(c+1) \cdots$ ist. Eine jede rationale symmetrische Function der Grössen v_1^2 ist also eine rationale Function von $\psi^2(\tau)$.

Denken wir uns nun $m = 2^\alpha n$ gesetzt und die Grössen gebildet: $\psi^2\left[\frac{\delta\tau - 8\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$, wo δ und δ_1 die frühere Bedeutung haben und ξ alle Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \cdots, 2^{\alpha-3}\delta_1$, mit Ausnahme derer bedeutet, die zu gleicher Zeit Theiler von δ und δ_1 sind, so zeigt eine leichte Ueberlegung, dass dieselben in die Form gebracht werden können:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau_\varkappa - 8x}{\delta_1}\right],$$

wenn δ, δ_1, x die frühere Bedeutung haben, wenn ferner

$$\tau_\varkappa = \frac{\tau - 8\varkappa}{2^\alpha}$$

ist und $\varkappa$ alle Werthe $0, \pm 1, \cdots 2^{\alpha-3}$ annimmt.

Dann folgt nach dem früher Bemerkten, dass eine jede rationale symmetrische Function der Grössen $\psi^2\left[\frac{\delta\tau - 8\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$ eine rationale symmetrische Function der Grössen $\psi^2[\tau_\varkappa]$, mithin eine rationale Function der Grösse $u^2 = \varphi^2(\tau)$ ist.

Unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungen ergiebt sich also als drittes Resultat der *Lehrsatz:*

Zwischen den Grössen $v_1{}^2 = \psi^2\left[\frac{\delta\tau - 8\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$ *und* $u^2 = \varphi^2(\tau)$ *besteht eine algebraische Gleichung, die in Bezug auf* $v_1{}^2$ *vom Grade* $2^{\alpha-2}\,T$ *ist.*

Diese Gleichungen, die wir mit:

$$f(v_1{}^2, u^2) = 0$$

bezeichnen, sollen den späteren Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Es wird sich zeigen, dass dieselben als Fundamentalgleichungen angesehen werden können.

Schliesslich bemerken wir, dass für die geraden Transformationszahlen, welche nur durch 2 oder nur durch 4 theilbar sind, ähnliche Gleichungen existiren, doch sehen wir von der Aufstellung derselben ab.

§ 2.

Haupteigenschaften der eingeführten Gleichungen.

1) *Die eingeführten Gleichungen sind reciprok in Bezug auf* $v_1{}^2$.

Der Beweis ist unmittelbar klar, da die Wurzeln in die Form gebracht werden können:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau}{2^\alpha\delta_1}\right],\ \psi^2\left[\frac{\delta\tau}{2^\alpha\delta_1}+1\right],\ \psi^2\left[\frac{\delta\tau-8}{2^\alpha\delta_1}\right],\ \psi^2\left[\frac{\delta\tau-8}{2^\alpha\delta_1}+1\right] \text{ etc.}$$

und allgemein $\psi^2[\tau+1] = \frac{1}{\psi^2[\tau]}$ ist.

Es sind die Wurzeln der eingeführten Gleichungen also erstens die zu denjenigen Repräsentanten der rationalen Transformation gehörenden Functionen ψ^2, bei welchen $b_0 \equiv 0 \bmod 8$ ist, zweitens die reciproken Werthe derselben. —

2) *Die Gleichungen sind reciprok in Bezug auf* u^2.

Setzen wir an Stelle von τ: $\frac{\tau}{\tau+1}$, so geht u^2 in $\frac{1}{u^2}$ über, während die Wurzeln der Gleichung die Gestalt annehmen:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\,\frac{\tau}{\tau+1} - 8\xi}{2^\alpha\delta_1}\right] = \psi^2\left[\frac{(\delta-8\xi)\,\tau - 8\xi}{2^\alpha\delta_1\tau + 2^\alpha\delta_1}\right].$$

Die Reihe der auf diese Weise entstehenden Functionen ist identisch mit der Reihe der ursprünglichen Wurzeln, d. h. es ist:

$$\psi^2\left[\frac{(\delta-8\xi)\,\tau-8\xi}{2^\alpha\delta_1\tau+2^\alpha\delta_1}\right] = \psi^2\left[\frac{d\tau-8x}{2^\alpha d_1}\right],$$

wo d, d_1, x analoge Bedeutung wie δ, δ_1, ξ haben.

In der That, allgemein ist:

$$\psi^2[\tau] = \psi^2[\tau_1], \text{ wenn:}$$

$$\tau = \frac{b_0 - a_0\tau_1}{a_1\tau_1 - b_1} \text{ und } a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1 \text{ ist, so zwar, dass:}$$

$$a_0 \equiv b_1 \equiv 1 \bmod 2;\ a_1 \equiv 0 \bmod 8;\ b_0 \equiv 0 \bmod 2 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt, dass in unserem Falle sein müsste:

$$\frac{(\delta - 8\xi)\,\tau - 8\xi}{2^\alpha \delta_1 \tau + 2^\alpha \delta_1} = \frac{b_0 2^\alpha d_1 + a_0 8x - a_0 d\tau}{a_1 d\tau - a_1 8x - b_1 2^\alpha d_1},$$

oder dass sonst die Gleichungen stattfinden müssen:

$$\begin{aligned} &1)\ \delta - 8\xi = -a_0 d, \\ &2)\ -8\xi = b_0 2^\alpha d_1 + a_0 8x, \\ &3)\ 2^\alpha \delta_1 = a_1 d, \\ &4)\ 2^\alpha \delta_1 = -b_1 2^\alpha d_1 - a_1 8x. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich d als ungerade Zahl — als grösster gemeinsamer Theiler von $\delta - 8\xi$ und $2^\alpha \delta_1$ —, während d_1 aus $d_1 = \frac{n}{d}$ bestimmt ist, ferner folgt aus 1) a_0 als ungerade, aus 3) a_1 als gerade durch acht theilbare Zahl, endlich ist $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$.

$8x$ ergiebt sich aus einer der beiden gleichwerthigen, auflösbaren Congruenzen:

$$8a_0 x \equiv -8\xi \bmod 2^\alpha d_1,$$
$$8a_1 x \equiv -2^\alpha \delta_1 \bmod 2^\alpha d_1$$

und zwar erhält man zwei nach dem Modul $2^{\alpha+1} d_1$ incongruente Lösungen. Einer jeden entsprechen ganzzahlige Werthe von b_0 und b_1, so zwar, dass b_1 jedenfalls ungerade ist. Da ferner die beiden incongruenten Lösungen die Gestalt haben $8x$ und $8x + 2^\alpha d_1$, so kann eine derselben immer so gewählt werden, dass b_0 eine gerade Zahl ist.

Aehnlich folgt:

3) *Die Gleichungen ändern sich nicht, wenn man u^2 mit $v_1{}^2$ vertauscht.*

4) *Die Gleichungen sind irreductibel*, d. h. eine jede algebraische Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von u^2 sind und welche mit ihnen eine Lösung gemeinsam hat, hat alle gemeinsam. Der Beweis hierfür ist analog demjenigen bei den Modulargleichungen unpaarer Transformation und mag daher fortgelassen werden.

Es soll jetzt gezeigt werden, inwiefern die Gleichungen Fundamentalgleichungen genannt werden können.

Dazu beweisen wir, dass aus ihnen durch einfache Transformationen eine Reihe anderer Gleichungen abgeleitet werden kann, deren Wurzeln die zu den übrigen Repräsentanten der rationalen oder irrationalen Transformation gehörenden ψ^2 oder φ^2 Functionen und deren reciproke Werthe sind.

Setzen wir an Stelle von $\tau : \tau + 4$ d. h. an Stelle von $\varphi^2(\tau) : -\varphi^2(\tau)$, so haben die Wurzeln der neuen Gleichung die Gestalt:

$$v_1{}^2 = \psi^2 \left[\frac{\delta\tau - 8\xi + 4}{2^\alpha \delta_1}\right].$$

Setzen wir an Stelle von τ: $\tau \pm 2$ d. h. an Stelle von $\varphi^2(\tau) : \pm i\varphi^2(\tau)$, so haben die Wurzeln der transformirten Gleichungen die Gestalt:

$$v_1{}^2 = \psi^2 \left[\frac{\delta\tau - 8\xi \pm 2\delta}{2^\alpha \delta_1}\right].$$

Damit ist der Fall der rationalen Transformation erledigt.

Wir setzen jetzt an Stelle von τ: $\frac{-1}{\tau}$ d. h. an Stelle von $\varphi^2(\tau) : \psi^2(\tau)$, so gehen die Wurzeln über in: $\psi^2 \left[\frac{-\delta - 8\xi\tau}{2^\alpha \delta_1 \tau}\right]$. Dieselben können in die Form gebracht werden: $\psi^2 \left[\frac{b_0 - a_0 \frac{d'\tau - x}{d_1'}}{a_1 \frac{d'\tau - x}{d_1'} - b_1}\right]$, wobei $d_1' d' = m$ ist und die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} -\delta &= b_0 d_1' + a_0 x, \\ 8\xi &= a_0 d', \\ 0 &= a_1 x + b_1 d_1', \\ 2^\alpha \delta_1 &= a_1 d'. \end{aligned}$$

Die Discussion dieser Gleichungen giebt folgendes Resultat: So oft $8\xi \equiv 0 \bmod 2^{\alpha+1}$ ist, gehen die Wurzeln über in $\varphi^2 \left[\frac{2^\alpha d\tau - x}{d_1}\right]$, so oft $8\xi \equiv 2^\alpha \bmod 2^{\alpha+1}$ ist, gehen die Wurzeln über in $\frac{1}{\varphi^2 \left[\frac{2^\alpha d\tau - x}{d_1}\right]}$, in allen übrigen Fällen in $e^{-2^{\nu-2} d_1 x\pi i} \psi^2 \left[\frac{2^{\alpha-\nu} d\tau - x}{2^\nu d_1}\right]$, wobei d und d_1 die ungeraden Theiler von d' und d_1' sind und nebst x und ν aus den aufgestellten Gleichungen bestimmt sind. ν ist von Null verschieden, $\alpha - \nu$ grösser als 2. Aehnlich folgt, dass wenn an Stelle von $\varphi^2(\tau)$: $\frac{-1}{\psi^2(\tau)}$ gesetzt wird, die Lösungen der transformirten Gleichung die Form haben: $e^{-2^{\alpha-4} d_1 x\pi i} \psi^2 \left[\frac{4d\tau - x}{2^{\alpha-2} d_1}\right]$, und wenn an Stelle von $\varphi^2(\tau)$: $\frac{\pm i}{\psi^2(\tau)}$ gesetzt wird, die Form: $e^{-2^{\alpha-3}\pi i} \psi^2 \left[\frac{2d\tau - x}{2^{\alpha-1} d_1}\right]$.

Wie wir sehen, haben wir auf diese Weise Gleichungen erhalten, deren Lösungen sämmtliche ψ^2 resp. φ^2 Functionen und deren reciproke Werthe sind, welche zu Repräsentanten der Form gehören: $\alpha_0 \equiv \alpha_1 \equiv \beta_0 \equiv 0 \bmod 2, \beta_1 \equiv 1 \bmod 2$ und $\alpha_0 \equiv \alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 0 \bmod 2, \beta_0 \equiv 1 \bmod 2$.

Die noch fehlenden repräsentirenden ψ^2 Functionen und deren reciproke Werthe sind Wurzeln von Gleichungen, die entstehen, wenn in der ursprünglichen an Stelle von $\varphi^2(\tau)$: $e^{\frac{s i \pi}{4}} \frac{\psi^2(\tau)}{\varphi^2(\tau)}$ $s = 1, 3, 5, 7$ gesetzt wird.

Damit ist die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung nachgewiesen worden.

Eine weitere Ueberlegung zeigt, dass aus den zu Grunde gelegten Gleichungen eine Reihe anderer Modulargleichungen abgeleitet werden kann, welche ähnliche Eigenschaften zeigen. Setzen wir z. B. an Stelle von u^2 in der ursprünglichen Gleichung $-u^2$ und multipliciren die auf diese Weise entstandene mit ihr, so erhalten wir eine Gleichung, deren Coefficienten ganze Functionen von u^4 sind und deren Lösungen die Form haben: $\psi^2\left[\frac{\delta\tau - 4\xi}{2^\alpha \delta_1}\right]$, ebenso können Gleichungen abgeleitet werden, deren Coefficienten ganze Functionen von u^4, deren Lösungen die Grössen $\psi^4\left[\frac{\delta\tau - 4\xi}{2^\alpha \delta_1}\right]$ sind oder deren Coefficienten ganze Functionen von u^8, deren Lösungen die Grössen $\psi^8\left[\frac{\delta\tau - 2\xi}{2^\alpha \delta_1}\right]$ sind u. s. w.

Alle diese Gleichungen, die einen bedeutenden Theil derjenigen bilden, die überhaupt in der Theorie der paaren Transformation vorkommen können, haben nicht die einfache Gestalt, wie die zu Grunde gelegten, so dass letztere als Fundamentalgleichungen angesehen werden können.

§ 3.

Wurzelentwickelungen.

Es möge das Problem der Wurzelentwickelung dahin verallgemeinert werden, dass wir nicht nur die Fundamentalgleichungen berücksichtigen, sondern auch diejenigen, welche aus ihnen durch Aenderung von u^2 in $-u^2$ oder in $\pm iu^2$ entstanden sind.

Bekanntlich genügt der zu der Transformation m^{ten} Grades $\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ \xi & 2^\alpha \delta_1 \end{vmatrix}$ gehörende Multiplicator der Gleichung:

$$M^2 = \frac{1}{m} \frac{v^4(1-v^8)}{u^4(1-u^8)} \frac{du^4}{dv^4}.$$

Diese Formel kann geschrieben werden:

$$M^2 = -\frac{1}{m} \frac{v_1^2}{u^2} \frac{v^8}{u_1^8} \frac{du^2}{dv_1^2}.$$

Daraus folgt, dass der Quotient $\frac{dv_1^2}{du^2}$ an allen endlichen Stellen endlich sein muss, mit Ausnahme der Stellen $u^2 = 0$, $u^2 = e^{\frac{2 s i \pi}{4}}$. Werden daher an einer beliebigen endlichen Stelle $u^2 = u_0^2$, welche von 0 und $e^{\frac{2si\pi}{4}}$ verschieden ist, p Wurzeln v_1^2 einander gleich, gleich v_0^2, so lauten die Wurzelentwickelungen an der Stelle $u_0^2 v_0^2$:

$$v_1^2 - v_0^2 = a_1(u^2 - u_0^2) + b_1(u^2 - u_0^2)^2 + \cdots$$
$$v_1^2 - v_0^2 = a_2(u^2 - u_0^2) + b_2(u^2 - u_0^2)^2 + \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$v_1^2 - v_0^2 = a_p(u^2 - u_0^2) + b_p(u^2 - u_0^2)^2 + \cdots.$$

Es bleibt übrig die Stellen $u^2 = 0$ und $u^2 = e^{\frac{2si\pi}{4}}$ in Betracht zu ziehen.

Aus dem für $\varphi(r)$ aufgestellten Ausdrucke folgt:

$$e^{\pi i \tau} = u^8 (B_0 + B_1 u^8 + B_2 u^{16} + \cdot\cdot)$$

mithin wird:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau - 2\xi}{2^\alpha \delta_1}\right] = 1 + \sum_{\beta\gamma} \alpha_{\beta\gamma} u^{\frac{8\delta\beta + 8.2^\alpha \delta_1\gamma}{2^\alpha \delta_1}} e^{-\frac{2\xi\pi i}{2^\alpha \delta_1}}.$$

Für $u^2 = 0$, werden somit alle Wurzeln gleich 1.

Um die analogen Wurzelentwickelungen für den Punkt $u^2 = 1$ zu erhalten, möge zunächst untersucht werden, welchen Werth die Wurzeln der definirten Gleichungen im Punkte $u^2 = 1$ annehmen.

Setzen wir $\tau = -\frac{1}{\tau_1}$, so haben, wie gezeigt, je nachdem:

$$2\xi \equiv 0 \bmod 2^{\alpha+1} \text{ oder } 2\xi \equiv 2^\alpha \bmod 2^{\alpha+1} \text{ oder } 2\xi \quad 2^{\alpha-\nu} \bmod 2^{\alpha+1}$$

ist, die Wurzeln die Gestalt:

$$\varphi^2\left[\frac{2^\alpha d\tau_1 - x}{d_1}\right], \quad \frac{1}{\varphi^2\left[\frac{2^\alpha d\tau_1 - x}{d_1}\right]}, \quad \varepsilon\psi^2\left[\frac{2^{\alpha-\nu} d\tau_1 - x}{2^\nu d_1}\right]$$

wobei ε die Werthe $\pm i$, -1, $+1$ annimmt, je nachdem ν gleich 1, 2 oder einem höheren Werthe als 2 ist.

$u^2 = 1$ entspricht u. a. $\tau = 0$ d. h. $\tau_1 = -\infty$. Für $\tau_1 = -\infty$ wird aber $\varphi^2\left[\frac{2^\alpha d\tau_1 - x}{d_1}\right] = 0$, $\psi^2\left[\frac{2^{\alpha-\nu} d\tau_1 - x}{2^\nu d_1}\right] = 1$, mithin nehmen die Wurzeln je nach dem Werthe von ξ die Gestalt an: $0, \infty, \varepsilon$.

Aehnlich wie bei $u^2 = 0$ folgt nun, dass, wenn:

$$2\xi \equiv 0 \bmod 2^{\alpha+1}$$

ist, wird:

$$\psi^8\left[\frac{\delta\tau - 2\xi}{2^\alpha \delta_1}\right] = A(u^8 - 1)^{\frac{2^\alpha d}{d_1}} e^{-\frac{xi\pi}{d_1}} \left(1 + \sum_{\beta\gamma} a_{\beta\gamma}(u^8 - 1)^{\frac{2^\alpha d\beta + d_1\gamma}{d_1}} e^{-\frac{xi\pi\beta}{d_1}}\right)$$

wenn dagegen:

$$2\xi \equiv 2^{\alpha-\nu} \bmod 2^{\alpha+1}$$

ist:

$$\psi^8\left[\frac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]=1+\sum_{\beta\gamma}a_{\beta\gamma}(u^8-1)^{\frac{2^{\alpha-\nu}d\beta+2^\nu d_1\gamma}{2^\nu d_1}}e^{-\frac{x\beta\pi i}{2^\nu d_1}}$$

wobei die Grössen d, d_1, ν, x bestimmt sind aus:

$$\begin{aligned}-\delta&=b_0 2^\nu d_1+a_0 x\\ 2\xi&=a_0 2^{\alpha-\nu}d\\ 0&=a_1 x+b_1 2^\nu d_1\\ 2^\alpha\delta_1&=a_1 2^{\alpha-\nu}d.\end{aligned}$$

Dann ergeben aber die vorhin angestellten Betrachtungen die Entwickelungen:

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]=\sqrt[4]{A}(u^2-1)^{\frac{2^{\alpha-2}d}{d_1}}e^{-\frac{xi\pi}{4d_1}}\left(1+\sum_{\beta\gamma}r_{\beta\gamma}(u^2-1)^{\frac{\beta 2^\alpha d+\gamma d_1}{d_1}}e^{-\frac{x\beta\pi i}{d_1}}\right)$$

$$2\xi\equiv 0 \mod 2^{\alpha+1}.$$

$$\psi^2\left[\frac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]=\varepsilon\left(1+\sum_{\beta\gamma}r_{\beta\gamma}(u^2-1)^{\frac{\beta 2^{\alpha-\nu}d+\gamma 2^\nu d_1}{2^\nu d_1}}e^{-\frac{x\beta\pi i}{2^\nu d_1}}\right)$$

$$2\xi\equiv 2^{\alpha-\nu} \mod 2^{\alpha+1}.$$

Für die Punkte $u^2=-1$, $u^2=\pm i$ ergeben sich ähnliche Entwickelungen.

Hiermit ist das Problem der Wurzelentwickelung vollkommen gelöst.

Es hat sich das Resultat ergeben, dass *die Riemann'sche Fläche der Grösse v_1^2, welche aus $f(v_1^2, u^2)=0$ als Function von u^2 bestimmt ist, aus $2^{\alpha-2}T$ Blättern besteht, welche nur in den Punkten $u^2=0$; $u^2=e^{\frac{2s i\pi}{4}}$; $u^2=\infty$ mit einander zusammenhängen und hier in einer a priori bestimmten Weise.*

§ 4.

Numerische Beispiele.

Es mögen für die einfachsten Fälle die Fundamentalgleichungen wirklich aufgestellt werden. Dieselben lauten:

1) $n=8$.

$$(1-u^2)^2(1-v_1^2)^2-8u^2v_1^2=0.$$

2) $n=16$.

$$(1-u^2)^4(1-v_1^2)^4-64(1+u^4)(1+v_1^4)u^2v_1^2=0.$$

3) $n = 24$.

$$[(1-u^2)^2(1-v_1^{\,2})^2-8u^2v_1^{\,2}]^2-256(1-u^4)(1-v_1^{\,4})(1-u^8)(1-v_1^{\,8})u^2v_1^{\,2}=0.$$

4) $n = 32$.

$$(1-u^2)^8(1-v_1^{\,2})^8-64\cdot 16\,(1+u^2)^4(1+v_1^{\,2})^4(1+u^1)(1+v_1^{\,4})u^2v_1^{\,2}=0.$$

5) $n = 40$.

$$[(1-u^2)^2(1-v_1^{\,2})^2-8u^2v_1^{\,2}]^6-16\cdot 64(1-u^4)(1-v_1^{\,4})(1-u^8)(1-v_1^{\,8})u^2v_1^{\,2}[3(1+6v_1^{\,4}+v_1^{\,8})(1+6u^4+u^8)+20u^2(1+u^4)(1-v_1^{\,4})^2+20v_1^{\,2}(1+v_1^{\,4})(1-u^1)^2]=0.$$

Zu diesen Gleichungen gelangt man entweder durch successive Anwendung der Transformation zweiten Grades auf die entsprechenden Modulargleichungen, die zu einer Transformation zweiten oder unpaaren Grades gehören oder aber durch Anwendung der Sohnke'schen Entwickelungen*) unter Hinzunahme der Formeln:

$$\psi(\tau)=1-2q+2q^2-4q^3+6q^4-8q^5+12q^6-16q^7+22q^8-30q^9+40q^{10}\cdots$$

$$\psi^2(\tau)=1-4q+8q^2-16q^3+32q^4-56q^5+96q^6-160q^7+256q^8-404q^9+624q^{10}\cdots$$

. . . .

§ 5.

Anwendungen auf die Zahlentheorie.

Wir gehen zunächst von den Gleichungen aus, welche zwischen u^8 und $v_1^{\,8}$ bestehen, deren Wurzeln also die Grössen:

$$v_1^{\,8} = \psi^8\left[\frac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$$

sind. In denselben möge $v_1^{\,8} = u^8$ gesetzt werden, es fragt sich, welches die Wurzeln der so definirten Gleichungen sind. Die Argumente derselben müssen der Gleichung genügen:

$$\tau = \frac{b_0 - a_0\dfrac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}}{a_1\dfrac{\delta\tau-2\xi}{2^\alpha\delta_1}-\beta_1}, \text{ wobei:}$$

$a_0b_1 - a_1b_0 = 1$ und $a_0 \equiv b_1 \equiv 0 \bmod 2$, $a_1 \equiv b_0 \equiv 1 \bmod 2$ ist, oder der Gleichung $\quad P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$, wobei:

$$P = a_1\delta$$
$$2Q = a_0\delta - b_1 2^\alpha\delta_1 - a_1 2\xi$$
$$-R = a_0 2\xi + b_0 2^\alpha\delta_1 \text{ gesetzt ist.}$$

Die Determinante der Gleichung hat die Form:

$$\Delta = a^2 - n$$

*) Crelle 16. pag. 113.

und zwar kann a einen jeden Werth annehmen, für welchen a^2 eine positive ganze Zahl kleiner als n ist. Die Discussion der aufgestellten Gleichungen ergiebt folgendes Resultat:*)

Eine jede Classe der überhaupt möglichen Determinanten, in welcher die Coefficienten der in ihr enthaltenen Formen nicht denselben Theiler mit m haben und in welchen mindestens einer der beiden äusseren Coefficienten derselben ungerade ist, liefert zwei von einander verschiedene Werthe von u^8, welche einer oder 2μ Wurzeln gleich werden, je nachdem $a = 0$ oder die Zahl der eigentlichen Darstellungen von m durch die Form $(1, 0, -\Delta')$ gleich μ ist, — vorausgesetzt, dass $\frac{\Delta}{\Delta'}$ gleich dem grössten in Δ enthaltenen ungeraden Quadrat ist.

Ebenso gross ist der Grad der Vielfachheit von u^8 in:

$$f(u^8, u^8) = 0$$

wie eine einfache Betrachtung lehrt, die analog derjenigen am Anfange des dritten Paragraphen ist.

Es bleibt übrig, den Punkt $u^8 = 1$ zu betrachten.

Dazu möge die Modulargleichung nach steigenden Dimensionen von $1 - u^8$ und $1 - v_1^8$ d. h. von u_1^8 und v^8 geordnet werden, so dass, wenn die r^{te} Dimension die niedrigste ist, sich ergiebt:

$$f(v_1^8, u^8) = (a_0\, u_1^{8r} + a_1 u_1^{8(r-1)} v^8 + \cdots\; a_r v^{8r}) + (u_1^8, v^8)_{r+1} + \cdots.$$

Setzen wir

$$\frac{v^8}{u_1^8} = w,$$

so werden die dem Werthe $u^8 = 1$ entsprechenden Werthe von w bestimmt sein durch: $a_0 + a_1 w + \cdots\; a_r w^r = 0$.

Behufs der weiteren Schlüsse mögen zwei neue Functionen eingeführt werden.

Sei d_1 ein beliebiger gerader Theiler von m, der nicht durch 2^α theilbar ist, ferner $\sigma(d_1)$ die doppelte Anzahl aller positiven Zahlen, welche kleiner als d_1 sind und mit d_1 und $\frac{m}{d_1}$ keinen gemeinsamen Theiler haben, so werde gesetzt:

$$\mathfrak{T} = \sum \sigma\,(d_1)$$

wo die Summe über alle diejenigen Werthe von d_1 auszudehnen ist, welche kleiner als $\sqrt{m}$ sind.

---

*) Siehe die entsprechenden Betrachtungen in der Arbeit: Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. Math. Annalen Bd. XII, oder auch Joubert: Sur la théorie des Fonctions elliptiques. pag. 22 sequ. od. comptes rendus tome 50. pag. 1041 sequ.

Ist ferner m ein volles Quadrat, so möge mit t die doppelte Anzahl der Zahlen bezeichnet werden, welche zu $\sqrt{m}$ relativ prim sind und mit m keinen gemeinsamen Theiler haben, ist dagegen m kein volles Quadrat, so sei $t = 0$.

Dann folgt aus den Entwickelungen des dritten Paragraphen, dass die Gleichung:

$$a_0 + a_1 w + \cdots a_r w^r = 0$$

die Form annimmt:

$$w^{\mathfrak{T}}\,(a_{\mathfrak{T}} + a_{\mathfrak{T}+1} w + \cdots a_{\mathfrak{T}+t}\, w^t) = 0.$$

Mithin wird die Modulargleichung:

$$f(v_1{}^8, u^8) = v^{8\mathfrak{T}} u^{8(r-\mathfrak{T}-t)}(a_{\mathfrak{T}} u_1{}^{8t} + a_{\mathfrak{T}+1} u_1{}^{8(t-1)} v^8 + \cdots a_{\mathfrak{T}+1} v^{8t}) + (u_1{}^8, v^8)_{r+1} + \cdots$$

Da dieselbe ungeändert bleibt, wenn man $u_1{}^8$ und v^8 vertauscht, so folgt, dass:

$$r = 2\mathfrak{T} - t$$

ist. Ebenso gross ist der Grad der Vielfachheit der Wurzel $u^8 = 1$ in $f(u^8, u^8) = 0$.

Nennen wir daher $F_1(\Delta)$ die Summe der vorhin definirten Classen der Determinante $-\Delta$, so folgt:

$$F_1(m) + 2F_1(m-1) + 2F_1(m-2^2) + \cdot = 2^\alpha T - \mathfrak{T} - \frac{t}{2}.$$

Wie eine einfache Betrachtung zeigt, geht diese Summenformel in die erste Summenformel von Kronecker über, wenn die Classen derjenigen Formen hinzugenommen werden, in welchen die drei Coefficienten mit m einen von 2 verschiedenen gemeinsamen Theiler haben.

Aehnliche Resultate ergeben sich, wenn von den Gleichungen ausgegangen wird, die zwischen u^4 und $v_1{}^4 = \psi^4 \left[\frac{\delta\tau - 4\xi}{2^\alpha \delta_1}\right]$ bestehen. Alsdann wird:

$$F_1(m) + 2F_1(m-2^2) + 2F_1(m-4^2) + \cdots = 2^{\alpha-1} T - \mathfrak{T}_1 - \frac{t}{2}$$

wenn $\mathfrak{T}_1$ eine ähnliche Bedeutung wie $\mathfrak{T}$ hat unter der Hinzunahme, dass d_1 weder durch 2^α noch durch $2^{\alpha-1}$ jedoch durch 4 theilbar ist.

Auch diese Formel ist implicite in denen von Kronecker enthalten.

Für $m \equiv 0 \bmod 16$ ergiebt sich unter Hinzunahme der zuletzt definirten Classen wieder die erste Formel, für $m \equiv 8 \bmod 16$ dagegen die zweite. Allerdings müssen in diesem Falle die von Kronecker aufgestellten Relationen zu Hilfe genommen werden: Es ist:

$$F(4n) = 2F(n) - 1 \text{ oder } F(4n) = 2F(n),$$

je nachdem n ein volles ungerades Quadrat ist, oder nicht.

Gehen wir schliesslich von den Gleichungen zwischen u^2 und $v_1{}^2 = \psi^2\left[\frac{\delta\tau - 8\xi}{2^\alpha\delta_1}\right]$ aus, so ergiebt sich, wenn $m \equiv 8 \bmod 16$:

$$F_1(m) + 2F_1(m-4^2) + 2F_1(m-8^2) + \cdots = 2T.$$

Diese Formel liefert im Vereine mit den früheren die dritte von Kronecker.

Ist $m \equiv 16 \bmod 32$, so wird:

$$F_1(m) + 2F_1(m-4^2) + 2F_1(m-8^2) + \cdots = 4T - \mathfrak{T}_2 - \frac{t}{2}$$

wo $\mathfrak{T}_2$ eine analoge Bedeutung wie $\mathfrak{T}$ hat, unter der Hinzunahme, dass $d_1 \equiv 4 \bmod 8$ ist. Diese Formel liefert die fünfte von Kronecker.

Die weiteren Fälle ergeben keine neuen Resultate.

Diese Beispiele mögen genügen, um die Anwendbarkeit der aufgestellten Gleichungen darzuthuen.

Breslau den 7. Juni 1877.