Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen, insbesondere derjenigen dritter Ordnung ($\varrho = 4$).

Von

ALFRED PRINGSHEIM in München.

Die allgemeine ϑ-Function mit ϱ Variablen, welche durch den Ausdruck definirt wird

$$\vartheta(v_1, \cdots v_\varrho) = \sum_{-\infty\; \nu_1 \ldots \nu_\varrho}^{+\infty\; (\varrho)} e^{\sum_{1\,\alpha}^{\varrho} \nu_\alpha (\nu_1 \tau_{\alpha 1} + \cdots + \nu_\varrho \tau_{\alpha\varrho}) \pi i} \cdot e^{(2\nu_1 v_1 + \cdots\cdot 2\nu_\varrho v_\varrho)\pi i}$$

wird charakterisirt durch ein System von Constanten oder Moduln:

$$\begin{array}{cccc} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1\varrho} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2\varrho} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \tau_{\varrho 1} & \tau_{\varrho 2} & \cdots & \tau_{\varrho\varrho}, \end{array}$$

deren Anzahl vermöge der Bedingung

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

gleich $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ ist. Diese $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Moduln sind von einander durchaus unabhängig und nur — behufs der Convergenz jener ϱ-fach unendlichen ϑ-Reihe — der Beschränkung unterworfen, dass die Quadratzerlegung des reellen Theiles von

$$\sum_{1}^{\varrho}{}_{\alpha}\, \nu_\alpha (\nu_1 \tau_{\alpha 1} + \cdots + \nu_\varrho \tau_{\alpha\varrho}) \pi i$$

lauter negative Coëfficienten besitzt.

Diejenigen ϑ-Functionen, welche bei der Umkehrung der Abel'schen Integrale auftreten, bilden eine speciellere Gattung der eben erwähnten allgemeinen, insofern zwischen den $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Moduln eine Anzahl von Relationen stattfinden muss. Riemann hat gezeigt

(s. Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 54), dass die Umkehrungsfunctionen der allgemeinsten Abel'schen Integrale erster Gattung, d. h. solcher allenthalben endlich bleibender Integrale, deren Differential eine $2\varrho + 1$ fach zusammenhängende algebraische Function ist, nur $3\varrho - 3$ unabhängige Constanten enthalten, dass also zwischen den $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ ϑ-Moduln $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2} - (3\varrho - 3)$ oder $\frac{(\varrho-2)(\varrho-3)}{2}$ Relationen stattfinden müssen. Die Anzahl der unabhängigen Constanten vermindert sich noch mehr für speciellere Gattungen Abel'scher Integrale, und zwar reducirt sie sich für den einfachsten Fall, nämlich den der hyperelliptischen Integrale, auf $2\varrho - 1$. Diese Integrale, welche bekanntlich die Variable nur in rationaler Verbindung mit einer Quadratwurzel aus einem Polynom $2\varrho + 1^{\text{ten}}$ Grades enthalten, scheinen zwar zunächst $2\varrho + 1$ unabhängige Constanten (Verzweigungswerthe) zu besitzen: allein es lässt sich stets deren Anzahl durch eine lineare Transformation auf $2\varrho - 1$ reduciren, und ebenso gross kann also auch nur die Anzahl der unabhängigen ϑ-Moduln sein. Daraus folgt nun, dass zwischen den Moduln *hyperelliptischer* ϑ-Functionen $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2} - (2\varrho - 1)$ oder $\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$ Relationen bestehen müssen.

Welcher Art diese Relationen sein müssen, ergiebt sich aus einem von Herrn Weierstrass herrührenden Satze über das Verschwinden hyperelliptischer ϑ-Functionen, welcher folgendermassen lautet:

Bezeichnet man mit η den Index einer hyperelliptischen ϑ-Function mit ϱ Variablen von folgender Zusammensetzung

$$\eta = (1, 3, 5 \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho)$$

oder

$$\eta = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{\varrho+1}),$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho, \varepsilon_{\varrho+1}$ ϱ resp. $\varrho + 1$ beliebige Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho$ bezeichnen, dann ist stets

$$\vartheta_\eta (0, 0 \cdots 0) \gtrless 0$$

Bildet man dagegen

$$\eta' = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r),$$

wo $r < \varrho$ (oder $> \varrho + 1$ — insofern man bekanntlich jede Combination von $\varrho + 1 + \alpha$ Indices durch diejenigen $\varrho - \alpha$ ersetzen kann, welche noch zur Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho$ fehlen), so wird stets

$$\vartheta_{\eta'} (0, 0, \cdots 0) = 0.$$

(Dieser Satz findet sich in einer Abhandlung meines verehrten Lehrers Herrn Königsberger über Transformation der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal Bd. 64.) Der Beweis dieses Satzes beruht wesentlich darauf, dass die Argumente und Moduln der betreffenden ϑ-

Functionen in der bekannten Weise von einem entsprechenden Systeme hyperelliptischer Integrale 1ter Gattung abhängen, und es bildet daher dieses Verschwinden aller ϑ-Functionen, deren Index die Form η' hat, für die Nullwerthe der Argumente zunächst jedenfalls eine *nothwendige* Bedingung dafür, dass das System ein hyperelliptisches ist.

Diese Bedingung hat die Form von Relationen zwischen den ϑ-Moduln $\tau_{11} \cdots \tau_{\varrho\varrho}$, sobald sich unter den ϑ-Functionen von der Form $\vartheta_{\eta'}(v_1 \cdots v_\varrho)$ *gerade* Theta's befinden, welche also nicht für die Nullwerthe der Argumente an sich verschwinden würden. Es ist nun aber leicht zu zeigen, dass sich für $\varrho \geqq 3$ unter den Functionen, deren Index die Form η' hat, in der That stets eine Anzahl gerader Theta's befinden müssen.

Zunächst ist klar, dass die Indices *aller* überhaupt existirenden $2^{2\varrho}$ ϑ-Functionen sich auf eine der beiden Formen η oder η' bringen lassen müssen, und dass alsdann *alle ungeraden* Theta's Indices von der Form η' haben müssen — da sie ja für die Nullwerthe der Argumente in jedem Falle verschwinden. Nun lautet die Bedingung dafür, dass $\vartheta_\lambda(v_1 \cdots v_\varrho)$ eine ungerade Function sein soll:

$$m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda + \cdots + m_\varrho^\lambda n_\varrho^\lambda \equiv 1 \pmod 2,$$

wo m_α^λ, n_α^λ die Charakteristiken von ϑ_λ bedeuten. Die Anzahl aller möglichen ungeraden ϑ-Functionen wird daher gleich sein der Anzahl der Lösungen dieser Congruenz, wenn nur solche Lösungen in Betracht gezogen werden, welche nach dem Modul 2 *incongruent sind*, also alle Combination von der Form (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) — mithin gleich $2^{\varrho-1}(2^\varrho - 1)$.

[NB. Ich will bei dieser Gelegenheit bemerken, dass sich die Anzahl der nach dem Modul 2 incongruenten Lösungen der obigen Congruenz noch in anderer Form darstellen lässt, und dass sich aus der Vergleichung dieser beiden verschiedenen Darstellungen eine a priori wohl nicht ersichtliche ganzzahlige Identität ergiebt. Befriedigt man nämlich zunächst jene Congruenz in der Weise, dass man dem ersten Gliede den Werth 1 giebt, während man alle übrigen verschwinden lässt, so bleiben für jedes der $\varrho - 1$ verschwindenden Glieder noch die drei Möglichkeiten (0, 0), (0, 1), (1, 0), im ganzen also $3^{\varrho-1}$ Combinationen, und man erhält daher, wenn man nun jenes eine nicht verschwindende Glied alle möglichen ϱ Stellen einnehmen lässt, $\varrho \cdot 3^{\varrho-1}$ Lösungen. Lässt man jetzt 3 Glieder den Werth 1 annehmen und die übrigen $\varrho - 3$ verschwinden, so ergeben sich durch Erschöpfung aller möglichen Combinationen $\frac{\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3^{\varrho-3}$ Lösungen, u. s. f. Man gelangt auf diese Weise schliesslich zu einem Ausdrucke von der Form

$$\sum_{0}^{\varrho'}{}_{\alpha} \frac{\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\cdots(\varrho-2\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(2\alpha+1)}\, 3^{\varrho-(2\alpha+1)},$$

wo die Summation über α zu erstrecken ist über alle ganzen Zahlen von 0 bis ϱ' und $\varrho' = \frac{\varrho-1}{2}$, wenn ϱ ungerade, $\varrho' = \frac{\varrho}{2} - 1$, wenn ϱ gerade.

Hieraus ergiebt sich dann die erwähnte Identität in der Form

$$\sum_{0}^{\varrho'}{}_{\alpha} \frac{\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-2\alpha)}{1\cdot 2\cdots(2\alpha+1)}\, 3^{\varrho-(2\alpha+1)} = 2^{\varrho-1}(2^{\varrho}-1)$$

welche sich unmittelbar verificiren lässt, indem man

$$2^{\varrho-1}(2^{\varrho}-1) = \tfrac{1}{2}(2^{2\varrho}-2^{\varrho}) = \tfrac{1}{2}\{(3+1)^{\varrho}-(3-1^{\varrho}\}$$

nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt.]

Aus dem Ausdrucke für die Anzahl aller ungeraden ϑ-Functionen ergiebt sich die Anzahl aller geraden gleich $2^{2\varrho} - 2^{\varrho-1}(2^{\varrho}-1) = 2^{\varrho-1}(2^{\varrho}+1)$.

Ferner ist die Anzahl aller ϑ-Functionen, deren Index die Form η hat und welche sämmtlich gerade sein müssen, da sie für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwinden, gleich

$$\frac{(2\varrho+1)(2\varrho)(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\varrho}.$$

Mithin wäre die Zahl derjenigen geraden Theta's, welche etwa noch unter den Functionen mit den Indices η' enthalten sind, gleich

$$2^{\varrho-1}(2^{\varrho}+1) - \frac{(2\varrho+1)(2\varrho)(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\varrho}$$

und dieser Ausdruck wird nur $= 0$ für $\varrho = 2$, dagegen stets > 0 für $\varrho \geqq 3$.

Daraus folgt, dass für $\varrho = 2$, die hyperelliptischen Theta's keiner besonderen Beziehung zwischen den Modulen bedürfen, sondern dass sie gleichzeitig die allgemeinsten Theta's mit 2 Variablen sind. Es hat dies seinen Grund darin, dass die 3 charakteristischen Zahlen

$\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ d. h. die Anzahl der in den allgemeinen ϑ-Function vorhandenen Moduln,

$3\varrho - 3$ d. h. die höchste mögliche Anzahl unabhängiger Constanten, welche in den Umkehrungsfunctionen Abel-scher Integrale 1^{ter} Gattung vorkommen können,

$2\varrho - 1$ d. h. die Anzahl eben dieser Constanten für den speciellen Fall der hyperelliptischen Integrale

für $\varrho = 2$ sämmtlich denselben Werth 3 annehmen.

Für $\varrho = 3$ ist die Anzahl gerader Theta's, deren Index die Form η' hat, gleich 1 und es ist daher das Verschwinden *einer* geraden ϑ-Function — nämlich $\vartheta_{135}(v_1, v_2, v_3)$ die Bedingung dafür, dass das

System ein hyperelliptisches sei: in der That bleiben in Folge dieser einen Bedingung von den 6 vorhandenen ϑ-Moduln nur $2\varrho - 1 = 5$ unabhängig. Was die allgemeinste ϑ-Function mit 3 Variablen und 6 unabhängigen ϑ-Moduln betrifft, so führt diese zwar nicht mehr auf hyperelliptische Functionen, aber immerhin — weil hier $3\varrho - 3 = 6$ ist — noch auf eindeutige Umkehrungen Abel'scher Integrale erster Gattung.

Etwas Aehnliches findet nicht mehr statt, sobald $\varrho > 3$ wird. Denn schon für $\varrho = 4$ — in welchem Falle die Anzahl der überhaupt vorhandenen ϑ-Moduln $= 10$ ist — wird die Anzahl der unabhängigen Constanten im allgemeinsten Falle: $3\varrho - 3 = 9$, und erniedrigt sich für hyperelliptische Functionen auf $2\varrho - 1 = 7$. Und es ist klar, dass mit wachsendem ϱ die Differenz zwischen der Anzahl der vorhandenen ϑ-Moduln und der unabhängig anzunehmenden Constanten der betreffenden Classe Abel'scher Functionen immer mehr zunimmt, da ja die Zahl der ϑ-Moduln $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ die Zahl ϱ im Quadrat, dagegen die Anzahl der möglichen unabhängigen Constanten $3\varrho - 3$ die Zahl ϱ nur linear enthält. Es werden also für $\varrho > 3$ die allgemeinsten ϑ-Functionen nicht mehr auf *eindeutige* Umkehrungen Abel'scher Integrale erster Gattung führen, und es werden umgekehrt die betreffenden Abel'schen Functionen nicht die allgemeinsten 2ϱfach periodischen Functionen darstellen. Setzt man also

$$u_1 = \sum_1^{\varrho}{}_{\alpha} \psi_1(x_\alpha)$$

$$u_2 = \sum_1^{\varrho}{}_{\alpha} \psi_2(x_\alpha)$$

$$\vdots$$

$$u_\varrho = \sum_1^{\varrho}{}_{\alpha} \psi_\varrho(x_\alpha)$$

und bestimmt $\psi_1(x) \cdots \psi_\varrho(x)$ in der Weise als Abel'sche Integrale 1ter Gattung, dass jede rationale symmetrische Function von $(x_1, \cdots x_\varrho)$ sich als eindeutige Function von $(u_1 \cdots u_\varrho)$ ergiebt, so gelangt man zu einer *speciellen* Gattung von 2ϱfach periodischen Functionen, insofern zwischen den darin vorkommenden $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Moduln so viele Relationen bestehen müssen, dass nur $3\varrho - 3$ willkürlich bleiben. In Folge dessen ist Herr Weierstrass, um zu den allgemeinsten 2ϱfach periodischen Functionen zu gelangen, zu einer Verallgemeinerung des Umkehrproblem's geführt worden, welche folgendermassen lautet: Es sollen die Functionen $\psi_1(x) \cdots \psi_\varrho(x)$ so bestimmt werden, dass zu *einem* Systeme der Grössen $(u_1 \cdots u_\varrho)$ zwar nicht mehr *ein einziges* System, wohl aber nur eine *endliche* Anzahl von Systemen der Grössen $(x_1 \cdots\cdot x_\varrho)$ gehören. Alsdann lässt sich zeigen, dass $x_1 \cdots\cdot x_\varrho$ die Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades sind, deren Coefficienten sich *algebraisch* durch die partiellen Ableitungen einer eindeutigen, 2ϱfach periodischen Function von $(u_1 \cdots u_\varrho)$ ausdrücken lassen. Herr Weierstrass hat damit den Existenzbeweis dieser verallgemeinerten Abel'schen Functionen gegeben, während deren wirkliche Darstellung in Folge bedeutender, sich hierbei ergebender algebraischer Schwierigkeiten bisher noch nicht gelungen ist. (S. Monatsberichte der Berliner Akademie, 1869.)

Was nun die hyperelliptischen ϑ-Functionen beliebiger Ordnung betrifft, so müssen, wie oben bemerkt wurde, zwischen ihren Moduln $\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$ Relationen bestehen, derart, dass

$$2^{\varrho-1}(2^\varrho+1) - \frac{(2\varrho+1)\,2\varrho\,(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots \varrho} = \mu$$

gerade ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente verschwinden. Da aber jedes solche gerade $\vartheta_\lambda(0, 0, \cdots 0)$ gleich Null gesetzt *eine* Bedingung für die ϑ-Moduln repräsentirt und für $\varrho > 3$

$$2^{\varrho-1}(2^\varrho+1) - \frac{(2\varrho+1)\,2\varrho\,(2\varrho-1)\cdots\cdot(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \varrho} > \frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$$

ist, so können diese μ Bedingungen nicht sämmtlich von einander unabhängig sein, sondern es muss ein Zusammenhang von der Be*schaffenheit zwischen ihnen bestehen, dass nur* $\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$ von den überhaupt vorhandenen $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ ϑ-Moduln dadurch beschränkt werden, während noch $2\varrho - 1$ völlig unabhängig bleiben.

In Folge dieser für hyperelliptische ϑ-Functionen als *nothwendig* sich ergebenden Bedingungen — (ich werde späterhin für den speciellen Fall $\varrho = 4$ zeigen, dass diese Bedingungen auch die *hinreichenden* dafür sind, dass ein System von ϑ-Functionen die Umkehrungsfunctionen eines hyperelliptischen Systemes liefert) — gestaltet sich das Additionstheorem, sowie eine Reihe daraus abgeleiteter Beziehungen bei weitem einfacher als für die allgemeinen ϑ-Functionen.

Für *allgemeine* Theta's stellt sich das Additionstheorem zunächst in der Form dar:

$$(\mathrm{A})\quad \left\{ \begin{aligned} &\vartheta(u_1+v_1+w_1, \cdots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)\,\vartheta(u_1-v_1, \cdots u_\varrho-v_\varrho) \\ &\qquad = \sum\nolimits_\lambda C_\lambda \cdot \vartheta_\lambda(u_1 \cdots u_\varrho)\,\vartheta_\lambda(u_1+v_1, \cdots u_\varrho+v_\varrho), \end{aligned} \right.$$

wo die Summation nach λ über 2^ϱ beliebige Indices auszuführen ist und C_λ eine Grösse bedeutet, die vom Index λ und den Argumenten

v_α und w_α, *nicht* aber von u_α abhängig ist. Genügt nun ein System der Bedingung, dass alle Theta's, deren Index die Form hat:

$$\eta' = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r) \text{ (wo } r < \varrho)$$

für die Nullwerthe der Argumente verschwinden, so lassen sich jene Coëfficienten C_λ in der Weise durch ϑ-Functionen mit Nullargumenten und den Argumenten v_α, w_α ausdrücken, dass Gl. (A) übergeht in:

$$(B)\ \vartheta_\eta(0\cdots 0)\vartheta_\eta(w_1\cdots w_\varrho)\vartheta(u_1+v_1+w_1, \cdots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)\vartheta(u_1-v_1, \cdots u_\varrho-v_\varrho)$$

$$= \sum\nolimits_\gamma (-1)^{\sum_1^\varrho \alpha\, n_\alpha^\gamma m_\alpha^\eta}\ \vartheta_\gamma(u_1 \cdots u_\varrho)\, \vartheta_\gamma(u_1 + w_1, \cdots u_\varrho + w_\varrho)$$

$$\times\, \vartheta_{\eta\gamma}(v_1 \cdots v_\varrho)\, \vartheta_{\eta\gamma}(v_1 + w_1, \cdots v_\varrho + w_\varrho),$$

wo dann die Indices γ und η folgendermassen zu bestimmen sind: Man wählt ϱ beliebige Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, ... 2ϱ, — es seien dies $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_\varrho$ — und setzt

$$\eta = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho),$$

bestimmt alsdann noch einen beliebigen Index δ und bezeichnet mit γ jeden der 2^ϱ Indices, welche entstehen, wenn man δ mit allen möglichen Combinationen von $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ zur 0^{ten}, 1^{ten}, $\cdots \varrho^{\text{ten}}$ Classe verbindet, so dass also γ die folgenden Formen annimmt:

$$\begin{array}{l}
\delta \\
\delta\varepsilon_1, \delta\varepsilon_2, \cdots \delta\varepsilon_\varrho \\
\delta\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta\varepsilon_1\varepsilon_3, \cdots\cdots \delta\varepsilon_{\varrho-1}\varepsilon_\varrho \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\delta\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\varrho
\end{array}$$

(vgl. die oben erwähnte Königsberger'sche Abhandlung, Crelle's Journal Bd. 64.).

Setzt man jetzt in Gl. (B) $v_\alpha = 0$, $w_\alpha = 0$, so wird

$$(C,1)\ \vartheta_\eta^2 \vartheta^2(u_1 \cdots u_\varrho) = \sum\nolimits_\gamma (-1)^{\gamma|\eta} \vartheta_{\eta\gamma}^2 \vartheta_\gamma^2(u_1 \cdots u_\varrho) \left(\begin{array}{c}\text{wo das Symbol} \\ (-1)^{\gamma|\eta} = (-1)^{\sum_1^\varrho \alpha\, n_\alpha^\gamma m_\alpha^\eta}\end{array}\right)$$

eine Gleichung, welche eine lineare homogene Relation — zunächst zwischen $1 + 2^\varrho$ ϑ-Quadraten liefert: diese Anzahl wird indessen dadurch beträchtlich erniedrigt, dass in Folge der oben gemachten Voraussetzung ein Theil der Coëfficienten von der Form $\vartheta_{\eta\gamma}^2$ verschwinden muss. Um dies zu beweisen, wähle ich für $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ die Reihe der geraden Zahlen 0, 2, $\cdots 2\varrho - 2$, für δ die in der Reihe der überhaupt möglichen, einfachen, geraden Indices noch fehlende Zahl 2ϱ; alsdann nimmt γ die Form an:

$$\begin{array}{l}
2\varrho \\
(0,\ 2\varrho),\ (2,\ 2\varrho),\cdots(2\varrho-2,\ 2\varrho) \\
(0,\ 2,\ 2\varrho),\ (0,\ 4,\ 2\varrho),\cdots\cdots(2\varrho-4,\ 2\varrho-2,\ 2\varrho) \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
(0,\ 2,\cdots 2\varrho-2,\ 2\varrho).
\end{array}$$

Bildet man jetzt $\eta\gamma$, wo

$$\eta = (1,\ 3,\cdots 2\varrho-1,\ 0,\ 2,\cdots 2\varrho-2) = 2\varrho,$$

so resultirt für den Anfangswerth $\gamma = 2\varrho$ das Fundamentaltheta; ferner nimmt $\eta\gamma$ für die γ der zweiten Horizontalreihe die Werthe an

$$0,\ 2,\cdots\cdots 2\varrho-2,$$

hingegen für alle anderen γ solche Werthe, welche ausser den ungeraden Zahlen $1,\ 3,\cdots 2\varrho-1$ *weniger* als ϱ Zahlen aus der Reihe $0,\ 2,\cdots\cdot 2\varrho$ enthalten, so dass die betreffenden $\vartheta_{\eta\gamma}(0,\ 0,\cdots 0)$ verschwinden müssen, und somit auf der rechten Seite der Gleichung (C, 1) nur die $\varrho+1$ Glieder stehen bleiben, welche den Werthen γ der beiden ersten Horizontalreihen entsprechen.

Wendet man jetzt noch auf Gl. (C, 1) die Substitution (η) an, worunter hier, wie späterhin zu verstehen ist, dass jedes der Argumente

$$u_\alpha \text{ um } \tfrac{1}{2}m_\alpha^\eta + \tfrac{1}{2}n_1^\eta\,\tau_{1\alpha} + \cdots + \tfrac{1}{2}n_\varrho^\eta\tau_{\varrho\alpha}$$

vermehrt werden soll, und bezeichnet mit $a_0,\cdots a_\varrho$ Factoren von der Form ± 1, so ergiebt sich

$$\vartheta^2\vartheta^2(u_1\cdots u_\varrho) + a_0\vartheta_0^2\vartheta_0^2(u_1\cdots) + a_1\vartheta_2^2\vartheta_2^2(u_1,\cdots) + \cdots\cdots a_\varrho\vartheta_{2\varrho}^2\vartheta_{2\varrho}^2(u_1\cdots) = 0,$$

d. h.: Zwischen den $\varrho+2$ Quadraten der Theta's mit einfachem, *geradem* Index und des Fundamentaltheta's findet eine homogene lineare Relation statt. Oder — wenn wir dem Fundamentaltheta, wie üblich, noch den Index $2\varrho+1$ geben: Zwischen den Quadraten aller überhaupt möglichen $\varrho+2$ *geraden* ϑ-Functionen mit einfachem Index findet eine lineare homogene Relation statt.

Um diese Beziehungen nun auch auf ungerade Theta's auszudehnen, werde auf Gl. (C, 1) zunächst eine Substitution angewendet, deren Index $\varkappa$ heissen möge; dann geht dieselbe über in:

$$\text{(C, 2)} \qquad \vartheta_\eta^2\vartheta_\varkappa^2(u_1\cdots u_\varrho) = \sum_\gamma (-1)^{\varkappa|\gamma+\gamma|\eta}\,\vartheta_{\eta\gamma}^2\,\vartheta_{\gamma\varkappa}^2(u_1\cdots u_\varrho).$$

Ich wähle nun wieder für $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ die Reihe der geraden Zahlen $0, 2, \cdots 2\varrho - 2$, also wie früher

$$\eta = (1, 3, 5 \cdots 2\varrho - 1, 0, 2, \cdots 2\varrho - 2) = 2\varrho$$

setze aber jetzt

$$\delta = \varkappa,$$

wo $\varkappa$ irgend eine Zahl aus der Reihe der ungeraden $1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1$ bedeuten, also als Index einer ungeraden ϑ-Function angehören soll. Dann nimmt γ die folgenden Formen an:

$$\begin{array}{l}
\varkappa \\
(0, \varkappa), (2, \varkappa), \cdots\cdots (2\varrho - 2, \varkappa) \\
(0, 2, \varkappa), (0, 4, \varkappa), \cdots\cdots (2\varrho - 4, 2\varrho - 2, \varkappa) \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
(0, 2, \cdots 2\varrho - 4, 2\varrho - 2, \varkappa)
\end{array}$$

und es enthält somit $\eta\gamma$ wiederum für alle γ von der dritten Horizontalreihe ab neben den Zahlen $1, 3, \cdots\cdots 2\varrho - 1$ weniger als ϱ andere Zahlen, so dass also $\vartheta_{\eta\gamma}$ für alle diese verschwindet, während für die γ der ersten und zweiten Horizontalreihe $\eta\gamma$ die Werthe erhält:

$$\begin{array}{l}
(\varkappa, 2\varrho) \\
(0, \varkappa, 2\varrho), (2, \varkappa, 2\varrho), \cdots\cdots (2\varrho - 2, \varkappa, 2\varrho),
\end{array}$$

für welche $\vartheta_{\eta\gamma}$ *nicht* verschwindet. Gleichzeitig ergeben sich für den Index $\gamma\varkappa$ die Werthe

$$\begin{array}{l}
2\varrho + 1 \\
0 \qquad 2 \cdots\cdots 2\varrho - 2,
\end{array}$$

so dass, wenn wir mit $b_0 \cdots b_\varrho$ Factoren von der Form ± 1 bezeichnen, aus Gl. (C, 2) die folgende Beziehung resultirt:

$$\text{(II)} \qquad \vartheta_{2\varrho}^2 \vartheta_\varkappa^2 (u_1 \cdots u_\varrho) + b_0\, \vartheta_{0,\varkappa,2\varrho}^2 \vartheta_0^2 (u_1 \cdots) + b_1 \vartheta_{2,\varkappa,2\varrho}^2 \vartheta_2^2 (u_1 \cdots)$$
$$+ \cdots + b_{\varrho-1} \vartheta_{2\varrho-2,\varkappa,2\varrho}^2 \vartheta_{2\varrho-2}^2 (u_1 \cdots) + b_\varrho\, \vartheta_{\varkappa,2\varrho}^2 \vartheta_{2\varrho+1}^2 (u_1 \cdots) = 0$$

also eine homogene lineare Relation zwischen $\varrho + 2$ Quadraten von ϑ-Functionen mit einfachem Index, von denen eine — $\vartheta_\varkappa (u_1 \cdots u_\varrho)$ — beliebig ungerade, die übrigen gerade sind. In der Reihe der letzteren fehlt hier $\vartheta_{2\varrho} (u_1 \cdots u_\varrho)$. Allein es ist klar, dass man mit Hilfe von Gl. (I) irgend ein gerades $\vartheta(u_1 \cdots u_\varrho)$ aus Gl. (II) eliminiren und dafür $\vartheta_{2\varrho} (u_1 \cdots u_\varrho)$ eintreten lassen kann, und dass man eben dasselbe auch ganz direct erreichen könnte, wenn man oben in der Reihe der $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ statt der Zahl 2ϱ irgend eine andere gerade Zahl weglässt.

Geben wir nun ferner in Gleichung (II) dem Index $\varkappa$ alle möglichen ϱ Werthe aus der Reihe $1, 3 \cdots 2\varrho - 1$, so erhalten wir ϱ Gleichungen, welche alle dieselben $\varrho + 1$ geraden und je eine ungerade ϑ-Function mit den Argumenten $u_1 \cdots u_\varrho$ enthalten. Aus $r + 1$ beliebigen dieser Gleichungen kann man stets r gerade Theta's eliminiren und es ergiebt sich dann also eine homogene lineare Relation zwischen $\varrho + 2$ ϑ-Quadraten, unter denen $r + 1$ ungeraden und $\varrho - r + 1$ geraden ϑ-Functionen angehören. Da aber ausserdem, wie vorher bemerkt wurde, die Wahl der $\varrho + 1$ geraden Theta's mit einfachem Index in Gleichung (II) eine durchaus beliebige ist, so folgt:

> Zwischen beliebigen $r + 2$ hyperelliptischen ϑ-Quadraten mit den Argumenten $u_1 \cdots u_\varrho$, deren Indices Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho + 1$ sind, findet eine homogene lineare Relation statt.

Hierbei ist freilich zunächst nicht ersichtlich, ob die Coefficienten dieser Relationen sich gleichfalls wie in Gleichung (I) und (II) in der Form einfacher ϑ-Quadrate mit Nullargumenten darstellen. Allein nachdem einmal die Existenz jener Relationen erwiesen, lässt sich dies leicht zeigen.

Wir bezeichnen mit

$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\varrho-1} \alpha_\varrho$ die Reihe der geraden Zahlen $0, 2, 4 \cdots 2\varrho - 2, 2\varrho$

$\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\varrho-1} \beta_\varrho$ „ „ „ ungeraden „ $1, 3 \cdots 2\varrho - 3, 2\varrho - 1$

in irgend einer beliebigen Reihenfolge. Dann muss — wenn wir vorläufig die Relationen, in denen das Fundamentaltheta $\vartheta_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ vorkommt, bei Seite lassen — jede der in Rede stehenden Beziehungen sich in die Form setzen lassen:

$$\text{(III)} \quad \vartheta^2_{\alpha_0}(u_1 \cdots) = A_1 \vartheta^2_{\alpha_1}(u_1 \cdots) + A_2 \vartheta^2_{\alpha_2}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + A_\varkappa \vartheta^2_{\alpha_\varkappa}(u_1 \cdots)$$
$$+ B_1 \vartheta^2_{\beta_1}(u_1 \cdots) + B_2 \vartheta^2_{\beta_2}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + B_\lambda \vartheta^2_{\beta_\lambda}(u_1 \cdots)$$

wo $\varkappa$ und λ ganze Zahlen sind, welche der Bedingung $\varkappa + \lambda = \varrho + 1$ genügen, und $A_1 \cdots A_\varkappa$ $B_1 \cdots B_\lambda$ gewisse Constanten bezeichnen.

Ich setze jetzt zur Abkürzung die combinirten Indices

$$(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{\varrho-1}, \beta_\varrho) = (1, 3, 5 \cdots 2\varrho - 1) = \varepsilon$$
$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \cdots \alpha_\varkappa \beta_1 \beta_2 \cdots\cdots \beta_\lambda) = \xi \qquad (\text{also } \varepsilon\xi = \alpha_1 \cdots \alpha_\varkappa \beta_{\lambda+1} \cdots \beta_\varrho)$$

und denke mir auf Gleichung (III) die folgenden $\varrho + 1$ Substitutionen halber Perioden angewendet:

$$(\varepsilon \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{\varkappa-1} \alpha_\varkappa \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\lambda-1} \beta_\lambda) = \varepsilon \xi \alpha_1$$
$$(\varepsilon \alpha_3 \alpha_4 \cdots \alpha_\varkappa \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots \beta_\lambda \quad \alpha_1) = \varepsilon \xi \alpha_2$$
$$\vdots$$
$$(\varepsilon \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\varkappa-2} \alpha_{\varkappa-1} \alpha_\varkappa \beta_1 \cdots \beta_{\lambda-2} \beta_{\lambda-1}) = \varepsilon \xi \beta_\lambda$$

und alsdann die Argumente $u_1 \cdots u_\varrho$ sämmtlich $= 0$ gesetzt. Dann wird die *linke* Seite der aus (III) resultirenden Gleichungen stets Indices annehmen, welche aus ε und $\varrho + 1$ anderen Indices zusammengesetzt sind, und es werden somit die auf diese Weise sich ergebenden

$$\vartheta_{\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon \xi}\; \vartheta_{\alpha_0 \alpha_2 \varepsilon \xi} \cdots \cdots \vartheta_{\alpha_0 \alpha_\varkappa \varepsilon \xi}\; \vartheta_{\alpha_0 \beta_1 \varepsilon \xi} \cdots \cdots \vartheta_{\alpha_0 \beta_\lambda \varepsilon \xi}$$

nicht verschwinden. — Auf der rechten Seite wird für die erste Substitution das Glied mit A_1 den Index $\varepsilon \xi$ erhalten, und zwar kann $\vartheta_{\varepsilon\xi}(0 \cdots 0)$ *nicht* verschwinden, da ja $\varepsilon \xi$ ausser ε noch $\varrho + 1$ andere Indices $(\alpha_1 \cdots \alpha_\varkappa\; \beta_1 \cdots \beta_\lambda)$ enthält. Hingegen werden alle anderen Glieder Indices erhalten, welche ausser ε nur noch $\varrho - 1$ Zahlen enthalten (da sich von den ϱ Zahlen, welche jeder Substitutions-Index ausser 2 noch enthält, immer eine forthebt) und müssen folglich verschwinden. Ebenso erhält für die zweite Substitution das Glied mit $A_2 \cdots \cdots$, für die letzte das mit B_λ den Index $\varepsilon \xi$, während wiederum alle übrigen Glieder verschwinden. Es ergeben sich somit zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten $A_1 \cdots A_\varkappa\; B_1 \cdots B_\lambda$ folgende Gleichungen:

$$\vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon \xi} = \pm A_1 \vartheta^2_{\varepsilon \xi}, \cdots \cdots, \vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_\varkappa \varepsilon \xi} = \pm A_\varkappa \vartheta^2_{\varepsilon \xi}$$

$$\vartheta^2_{\alpha_0 \beta_1 \varepsilon \xi} = \pm B_1 \vartheta^2_{\varepsilon \xi}, \cdots \cdots, \vartheta^2_{\alpha_0 \beta_\lambda \varepsilon \xi} = \pm B_\lambda \vartheta^2_{\varepsilon \xi},$$

sodass — wenn wir mit $a_1 \cdots \cdots a_\varkappa\; b_1 \cdots \cdots b_\lambda$ Factoren von der Form ± 1 bezeichnen — Gleichung (III) in die folgende übergeht:

$$\text{(IV)}\; \vartheta^2_{\varepsilon\xi} \vartheta^2_{\alpha_0}(u_1 \cdots) + a_1 \vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon \xi} \vartheta^2_{\alpha_1}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + a_\varkappa \vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_\varkappa \varepsilon \xi} \vartheta^2_{\alpha_\varkappa}(u_1 \cdots)$$
$$+ b_1\, \vartheta^2_{\alpha_0 \beta_1 \varepsilon \xi} \vartheta^2_{\beta_1}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + b_\lambda \vartheta^2_{\alpha_0 \beta_\lambda \varepsilon \xi} \vartheta^2_{\beta_\lambda}(u_1 \cdots) = 0.$$

Jetzt bleibt nur noch der oben ausgeschlossene Fall zu betrachten, dass Gleichung (III) etwa das Fundamentaltheta $\vartheta_{2\varrho+1}(u_1 \cdots \cdots u_\varrho)$ enthalte. In diesem Falle möge dasselbe unter $\vartheta_{\alpha_0}(u_1 \cdots \cdots u_\varrho)$ verstanden werden: dann sind die Indices, welche die linke Seite in Folge der gemachten Substitutionen annimmt, die Indices dieser Substitutionen selbst, und da diese sämmtlich aus ε und ϱ anderen Zahlen zusammengesetzt sind, so wird auch in diesem Falle die linke Seite für keine der gemachten Substitutionen verschwinden, während auf der rechten Seite alles genau so bleibt wie früher. Es wird somit schliesslich in Gleichung (IV) statt $\vartheta^2_{\alpha_0}(u_1 \cdots u_\varrho) \cdots \vartheta_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ zu setzen und in den zusammengesetzten Indices der Coefficienten die Zahl α_0 einfach wegzulassen sein. — Wir können jetzt dem bereits oben ausgesprochenen Satze folgende noch präcisere Form geben:

Genügt ein System von ϑ-Functionen mit ϱ Argumenten der Bedingung, dass alle geraden Theta's, deren Index die Form $\eta' = (1, 3, \cdots 2\varrho - 1,\; \varepsilon_1,\; \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r)$, wo $r < \varrho$, hat, für die Nullargumente verschwinden, so findet zwischen $r+2$ beliebigen ϑ-Quadraten mit einfachem Index eine homogene lineare Relation statt, deren Coefficienten einfache und nicht verschwindende ϑ-Quadrate mit Nullargumenten sind. —

Denkt man sich die Zahlen $0, 1, 2, \cdots 2\varrho+1$ in der Weise zu je $\varrho+2$ combinirt, dass man die Indices jedesmal um eine Stelle cyclisch vorrücken lässt, so kann man $2\varrho+2$ Relationen von der Form (IV) erhalten, und wenn man auf jede derselben alle möglichen $2^{2\varrho}-1$ Substitutionen halber Perioden anwendet, so ergeben sich im Ganzen $2^{2\varrho}(2\varrho+2)$ derartige Beziehungen — eine Zahl, welche den von Rosenhain aufgestellten 96 Relationen für die hyperelliptischen Functionen 1ter Ordnung entspricht.

Ich bemerke, dass der soeben ausgesprochene Satz und seine Folgerung mit den beiden Sätzen übereinkommt, welche Herr Weierstrass in seiner Theorie der Abel'schen Functionen folgendermassen ausspricht (Crelle's Journal, a. a. O. § 5.):

I. Durch je ϱ von den Quadraten der Grössen

$$p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots p_{2\varrho+1}$$

können die übrigen linear ausgedrückt werden.

II. Ebenso können durch je ϱ Quadrate der Grössen

$$p_\gamma, p_{1\gamma}, p_{2\gamma}, \cdots p_{(2\varrho+1)\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \text{ eine der Zahlen } 1, 2 \cdots 2\varrho+1 \\ \text{wo } p_{\gamma\gamma} \text{ fortzulassen ist} \end{pmatrix}$$

die übrigen linear ausgedrückt werden

(wo

$$p_\alpha \;=\; al_\alpha(u_1, u_2 \cdots\cdot u_\varrho) = \frac{\vartheta_{2\alpha-1}(v_1 \cdots v_\varrho)}{\vartheta(v_1 \cdots v_\varrho)} \quad \alpha = 1, 2, \cdots \varrho$$

$$p_{\varrho+\beta} = al_{\varrho+\beta}(u_1, u_2 \cdots\cdot u_\varrho) = \frac{\vartheta_{2\beta}(v_1 \cdots v_\varrho)}{\vartheta(v_1 \cdots v_\varrho)} \quad \beta = 0, 1, 2 \cdots \varrho).$$

Man erhält nämlich offenbar den ersten dieser beiden Sätze aus Gleichung (III), wenn man darin $\alpha_0 = 2\varrho+1$ setzt, die übrigen Indices irgendwie aus der Reihe $0, 1, \cdots 2\varrho$ wählt und die ganze Gleichung durch $\vartheta^2_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ dividirt; und ebenso den zweiten jener Sätze, wenn man noch auf Gleichung (III) — in welcher wiederum $a_0 = 2\varrho+1$ zu nehmen ist, falls die Endgleichung ein Theta mit einfachem Index (dem p_γ entsprechend) enthalten soll — eine Substitution halber Perioden anwendet, deren Index einer derjenigen ist, welche in der Gleichung selbst vorkommen, und schliesslich wieder durch $\vartheta^2_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ dividirt.

Ich beweise jetzt einen analogen Satz für gewisse Producte von je 2 ϑ-Functionen, nämlich solche, deren zweiter Factor durch die nämliche Substitution halber Perioden aus dem ersten hergeleitet ist, wie in $\vartheta_\alpha(u_1\cdots)\,\vartheta_{\alpha\mu}(u_1\cdots)$, $\vartheta_\beta(u_1\cdots)\,\vartheta_{\beta\mu}(u_1\cdots)$ etc.

Ich zeige:

Zwischen $\varrho+1$ ϑ-Producten von der Form $\vartheta_\alpha(u_1\cdots)\,\vartheta_{\alpha\mu}(u_1\cdots)$, wo α einen variablen Index aus der Reihe $0, 1, \cdots 2\varrho$, μ einen festen Index (aus derselben Reihe und von α verschieden) bedeutet, findet eine homogene lineare Relation statt.

Zu diesem Behufe vermehre ich in Gleichung (B) (S. 441.)

$$v_a \text{ um } -\tfrac{1}{2}m_a^\beta \qquad -\tfrac{1}{2}n_1^\beta\tau_{a1} \qquad -\cdots\cdots-\tfrac{1}{2}n_\varrho^\beta\tau_{a\varrho}$$

$$w_a \text{ um } +\tfrac{1}{2}\left(m_a^\alpha+m_a^\beta\right)+\tfrac{1}{2}\left(n_1^\alpha+n_1^\beta\right)\tau_{a1}+\cdots\cdots+\tfrac{1}{2}\left(n_\varrho^\alpha+n_\varrho^\beta\right)\tau_{a\varrho}.$$

Alsdann ergiebt sich

$$(\mathrm{D},1)\ \vartheta_\eta(0,\cdots 0)\,\vartheta_{\eta\alpha\beta}(w_1\cdots)\,\vartheta_\alpha(u_1+v_1+w_1,\cdots)\,\vartheta_\beta(u_1-v_1,\cdots)$$
$$=\sum_\gamma(-1)^{C_\gamma}\vartheta_\gamma(u_1\cdots)\,\vartheta_{\gamma\alpha\beta}(u_1+w_1,\cdots)\,\vartheta_{\eta\gamma\beta}(v_1\cdots)\,\vartheta_{\eta\gamma\alpha}(v_1+w_1\cdots)$$

wo C_γ eine aus den Charakteristiken der vorkommenden Indices zusammengesetzte ganze Zahl bedeutet, welche sich folgendermassen bestimmt: Man setze

$$m_a^{\eta\gamma}=m_a^\eta+m_a^\gamma+2H_a$$

$$m_a^\eta+m_a^\alpha+m_a^\beta=-2M_a+m_a^\nu \qquad m_a^\eta+m_a^\gamma-m_a^\beta+2H_a=-2M_a''+m_a^{\nu''}$$

$$m_a^\gamma+m_a^\alpha+m_a^\beta=-2M_a'+m_a^{\nu'} \qquad m_a^\eta+m_a^\gamma+m_a^\alpha+2H_a=-2M_a'''+m_a^{\nu'''}$$

(wo die ganzen Zahlen H_a, M_a, M_a' etc. durch die Bedingung völlig bestimmt sind, dass die eingeführten Hilfsgrössen m_a^ν, $m_a^{\nu'}$ etc. nur die Werthe 0 oder -1 annehmen sollen).

Dann ist

$$C_\gamma=\sum_1^\varrho{}_a\Big\{n_a^\gamma m_a^\eta+n_a^\alpha m_a^\gamma+H_a\left(n_a^\alpha+n_a^\beta\right)+M_a\left(n_a^\eta+n_a^\alpha+n_a^\beta\right)$$
$$+M_a'\left(n_a^\gamma+n_a^\beta+n_a^\alpha\right)+M_a''\left(n_a^\eta+n_a^\gamma+n_a^\beta\right)+M_a'''\left(n_a^\eta+n_a^\gamma+n_a^\alpha\right)\Big\}.$$

Setzt man nun in Gleichung (D, 1) $v_a=0$, $w_a=0$, so wird:

$$(\mathrm{D},2)\ \vartheta_\eta\vartheta_{\eta\alpha\beta}\vartheta_\alpha(u_1\cdots)\,\vartheta_\varrho(u_1\cdots)=\sum_\gamma(-1)^{C_\gamma}\vartheta_{\eta\gamma\alpha}\vartheta_{\eta\gamma\beta}\vartheta_\gamma(u_1\cdots)\,\vartheta_{\gamma\alpha\beta}(u_1\cdots).$$

Ich bezeichne jetzt mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{\varrho+2}$ $\varrho+2$ verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, \cdots 2\varrho$ und setze

$$\alpha=\varepsilon_{\varrho+1};\ \beta=\varepsilon_{\varrho+1}\varepsilon_{\varrho+2};\ \eta=(1, 3, \cdots 2\varrho-1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho).$$

Dann ist zunächst ersichtlich, dass der Coefficient der linken Seite in Gleichung (D, 2) *nicht* verschwindet. Wird ferner $\delta=2\varrho+1$ (Index des Fundamentaltheta's) gesetzt, so nimmt γ die Werthe an

$$\begin{array}{l} 2\varrho+1 \\ \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \cdots\cdots \varepsilon_\varrho \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 \cdots\cdots \varepsilon_{\varrho-1}\varepsilon_\varrho \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\varrho . \end{array}$$

Daraus folgt zunächst, dass auf der rechten Seite der Gleichung (D, 2) $\vartheta_{\eta\gamma\alpha}$ für alle γ, ausser für diejenigen der ersten und zweiten Horizontalreihe verschwindet.

Ausserdem verschwindet aber noch $\vartheta_{\eta\gamma\beta}$ für $\gamma = 2\varrho+1$, während für $\gamma = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho$ weder $\vartheta_{\eta\gamma\alpha}$, noch $\vartheta_{\eta\gamma\beta}$ verschwindet. Es ergiebt sich somit, wenn man nunmehr die betreffenden Werthe von $\gamma\alpha\beta$ bildet, dass zwischen den Producten:

$$\vartheta_{\varepsilon_{\varrho+1}}(u_1 \cdots)\,\vartheta_{\varepsilon_{\varrho+1}\varepsilon_{\varrho+2}}(u_1 \cdots)$$

und

$$\vartheta_{\varepsilon_1}(u_1 \cdots)\,\vartheta_{\varepsilon_1\varepsilon_{\varrho+2}}(u_1 \cdots) \cdots\cdots \vartheta_{\varepsilon_\varrho}(u_1 \cdots)\,\vartheta_{\varepsilon_\varrho\varepsilon_{\varrho+2}}(u_1 \cdots)$$

eine homogene lineare Relation besteht — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist. Derselbe entspricht wiederum einem Satze von Herrn Weierstrass, welcher folgendermassen lautet:

Durch je ϱ von den Producten

$$p_1 p_{1\gamma} \quad p_2 p_{2\gamma} \cdots\cdots p_{2\varrho+1} p_{2\varrho+1,\gamma} \quad (\text{wo } p_{\gamma\gamma} \text{ fortzulassen ist})$$

lässt sich jedes der übrigen linear und homogen ausdrücken. —

Ich bemerke schliesslich noch, dass die Anzahl der in jeder der soeben betrachteten Relationen enthaltenen ϑ-Functionen sich noch beträchtlich reducirt, sobald man die Argumente zu Null werden lässt. Bezeichnet man z. B. mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ irgend drei Zahlen aus der Reihe $0, 2, \cdots 2\varrho$ — resp. auch die Zahl $2\varrho+1$ — so muss nach Gl. (IV) (S. 445) u. a. auch eine Relation von folgender Form bestehen:

$$\vartheta^2_{\varepsilon\xi}\vartheta^2_{\alpha_0}(u_1\cdots)+a_1\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_1\varepsilon\xi}\vartheta^2_{\alpha_1}(u_1\cdots)+a_2\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_2\varepsilon\xi}\vartheta^2_{\alpha_2}(u_1\cdots)+P=0$$

wo P ein Aggregat von $\varrho-1$ ϑ-Quadraten bezeichnen soll, deren Indices der Reihe $1, 3, \cdots 2\varrho-1$ angehören. In diesem Falle ist in Gl. (IV) $\lambda = \varrho - 1$ zu setzen, und daher:

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{\varrho-1}) \quad \varepsilon\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_\varrho).$$

Setzen wir jetzt in obiger Gleichung $u_1 = u_2 = \cdots = u_\varrho = 0$, so muss P verschwinden, und es wird daher, wenn wir noch statt β_ϱ, welches ja einen beliebigen Index der Reihe $1, 3, \cdots 2\varrho-1$ bezeichnet, einfach β schreiben:

$$(\text{V}, 1) \qquad \vartheta^2_{\alpha_1\alpha_2\beta}\vartheta^2_{\alpha_0} + a_1\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_2\beta}\vartheta^2_{\alpha_1} + a_2\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_1\beta}\vartheta^2_{\alpha_2} = 0$$

und für den speciellen Fall, das α_0 den Index des Fundamentaltheta's bedeutet:

$$(\mathrm{V}, 2) \qquad \vartheta^2_{\alpha_1\alpha_2\beta}\,\vartheta^2_{2\varrho+1} + a_1\,\vartheta^2_{\alpha_2\beta}\,\vartheta^2_{\alpha_1} + a_2\,\vartheta^2_{\alpha_1\beta}\,\vartheta^2_{\alpha_2} = 0.$$

Es findet somit zwischen je drei ϑ-Quadraten gerader ϑ-Functionen mit einfachem Index und Nullargumenten eine homogene lineare Relation statt.

Ich wende mich jetzt zu dem speciellen Fall $\varrho = 4$ und will mit Hilfe von ϑ-Functionen mit 4 Variablen, welche der Bedingung für hyperelliptische Systeme genügen, das Umkehrproblem für die hyperelliptischen Integrale 1ter Gattung und 3ter Ordnung nach derselben Methode behandeln, welche Rosenhain in seinem „Mémoire sur les Fonctions de deux Variables et à quatre Périodes etc." für die hyperelliptischen Functionen 1ter Ordnung angewendet hat. Ich werde demgemäss eine Anzahl von Relationen zwischen 10 ϑ-Functionen mit den Indices 0, 1, 2, $\cdots$ 8, 9 (wo 9 der Index des Fundamentaltheta's) und mit vier veränderlichen Argumenten $u_1, \cdots u_4$, sowie eine Reihe von Beziehungen für die Theta's mit Nullargumenten entwickeln, werde alsdann zeigen, dass sich die Quotienten aller Theta's mit Nullargumenten durch 7 (bez. 9) Constanten, die aller Theta's mit variablen Argumenten als symmetrische Functionen von 4 Variablen $x_1 \cdots x_4$ und eben jenen Constanten darstellen lassen, und dass endlich die auf diese Weise eingeführten Grössen $x_1 \cdots x_4$ einem hyperelliptischen Differentialgleichung-Systeme 3ter Ordnung genügen, mithin jene ϑ-Quadrate die Lösungen für das Umkehrproblem der betreffenden hyperelliptischen Integrale 3ter Ordnung liefern. —

Die Anzahl derjenigen ϑ-Functionen, deren Index die Form $\eta' = (1, 3, 5, 7, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)$ — wo $r < 4$ — hat, beträgt hier 130; unter diesen sind 120 *ungerade* und verschwinden also an sich schon für die Nullargumente, während die folgenden 10 mit den Indices

1357,1 1357,3 1357,5 1357,7 1357,0 1357,2 1357,4 1357,6 1357,8 1357

oder

157 357 137 135 2468 0468 0268 0248 0246 1357

gerade sind und also erst in Folge unserer besonderen Annahme für die Nullargumente verschwinden werden. —

Zunächst gebe ich nun eine Uebersicht über die Indices und Charakteristiken der überhaupt existirenden 256 ϑ-Functionen mit 4 Argumenten, da eine solche für jede weitere Rechnung durchaus unentbehrlich.

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
	0	—1	—1	—1	—1	0	0	0	0
*	1	—1	—1	—1	—1	1	0	0	0
	2	0	—1	—1	—1	1	0	0	0
*	3	0	—1	—1	—1	0	1	0	0
	4	0	0	—1	—1	0	1	0	0
*	5	0	0	—1	—1	0	0	1	0
	6	0	0	0	—1	0	0	1	0
*	7	0	0	0	—1	0	0	0	1
	8	0	0	0	0	0	0	0	1
	9	0	0	0	0	0	0	0	0
	01	0	0	0	0	1	0	0	0
*	02	—1	0	0	0	1	0	0	0
	03	—1	0	0	0	0	1	0	0
*	04	—1	—1	0	0	0	1	0	0
	05	—1	—1	0	0	0	0	1	0
*	06	—1	—1	—1	0	0	0	1	0
	07	—1	—1	—1	0	0	0	0	1
*	08	—1	—1	—1	—1	0	0	0	1
	12	—1	0	0	0	0	0	0	0
*	13	—1	0	0	0	1	1	0	0
	14	—1	—1	0	0	1	1	0	0
*	15	—1	—1	0	0	1	0	1	0
	16	—1	—1	—1	0	1	0	1	0
*	17	—1	—1	—1	0	1	0	0	1
	18	—1	—1	—1	—1	1	0	0	1
	23	0	0	0	0	1	1	0	0
*	24	0	—1	0	0	1	1	0	0
	25	0	—1	0	0	1	0	1	0
*	26	0	—1	—1	0	1	0	1	0
	27	0	—1	—1	0	1	0	0	1
*	28	0	—1	—1	—1	1	0	0	1
	34	0	—1	0	0	0	0	0	0
*	35	0	—1	0	0	0	1	1	0
	36	0	—1	—1	0	0	1	1	0
*	37	0	—1	—1	0	0	1	0	1
	38	0	—1	—1	—1	0	1	0	1
	45	0	0	0	0	0	1	1	0
*	46	0	0	—1	0	0	1	1	0
	47	0	0	—1	0	0	1	0	1
*	48	0	0	—1	—1	0	1	0	1
	56	0	0	—1	0	0	0	0	0
*	57	0	0	—1	0	0	0	1	1
	58	0	0	—1	—1	0	0	1	1
	67	0	0	0	0	0	0	1	1
*	68	0	0	0	—1	0	0	1	1
	78	0	0	0	—1	0	0	0	0
	012	0	—1	—1	—1	0	0	0	0
*	013	0	—1	—1	—1	1	1	0	0
	014	0	0	—1	—1	1	1	0	0
*	015	0	0	—1	—1	1	0	1	0
	016	0	0	0	—1	1	0	1	0
*	017	0	0	0	—1	1	0	0	1
	018	0	0	0	0	1	0	0	1
	023	—1	—1	—1	—1	1	1	0	0
*	024	—1	0	—1	—1	1	1	0	0
	025	—1	0	—1	—1	1	0	1	0
*	026	—1	0	0	—1	1	0	1	0
	027	—1	0	0	—1	1	0	0	1
*	028	—1	0	0	0	1	0	0	1
	034	—1	0	—1	—1	0	0	0	0
*	035	—1	0	—1	—1	0	1	1	0
	036	—1	0	0	—1	0	1	1	0
*	037	—1	0	0	—1	0	1	0	1
	038	—1	0	0	0	0	1	0	1
	045	—1	—1	—1	—1	0	1	1	0
*	046	—1	—1	0	—1	0	1	1	0
	047	—1	—1	0	—1	0	1	0	1
*	048	—1	—1	0	0	0	1	0	1
	056	—1	—1	0	—1	0	0	0	0
*	057	—1	—1	0	—1	0	0	1	1
	058	—1	—1	0	0	0	0	1	1
	067	—1	—1	—1	—1	0	0	1	1
*	068	—1	—1	—1	0	0	0	1	1
	078	—1	—1	—1	0	0	0	0	0
*	123	—1	—1	—1	—1	0	1	0	0
	124	—1	0	—1	—1	0	1	0	0
*	125	—1	0	—1	—1	0	0	1	0
	126	—1	0	0	—1	0	0	1	0
*	127	—1	0	0	—1	0	0	0	1
	128	—1	0	0	0	0	0	0	1
*	134	—1	0	—1	—1	1	0	0	0
**	135	—1	0	—1	—1	1	1	1	0
*	136	—1	0	0	—1	1	1	1	0
**	137	—1	0	0	—1	1	1	0	1
*	138	—1	0	0	0	1	1	0	1
*	145	—1	—1	—1	—1	1	1	1	0
	146	—1	—1	0	—1	1	1	1	0
*	147	—1	—1	0	—1	1	1	0	1

(NB. Die mit einem * bezeichneten Indices gehören ungeraden, die mit ** bezeichneten hingegen solchen geraden Theta's an, welche in Folge der gemachten Voraussetzung für die Nullargumente verschwinden.)

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
	148	−1	−1	0	0	1	1	0	1
*	156	−1	−1	0	−1	1	0	0	0
**	157	−1	−1	0	−1	1	0	1	1
*	158	−1	−1	0	0	1	0	1	1
*	167	−1	−1	−1	−1	1	0	1	1
	168	−1	−1	−1	0	1	0	1	1
*	178	−1	−1	−1	0	1	0	0	0
	234	0	0	−1	−1	1	0	0	0
*	235	0	0	−1	−1	1	1	1	0
	236	0	0	0	−1	1	1	1	0
*	237	0	0	0	−1	1	1	0	1
	238	0	0	0	0	1	1	0	1
	245	0	−1	−1	−1	1	1	1	0
*	246	0	−1	0	−1	1	1	1	0
	247	0	−1	0	−1	1	1	0	1
*	248	0	−1	0	0	1	1	0	1
	256	0	−1	0	−1	1	0	0	0
*	257	0	−1	0	−1	1	0	1	1
	258	0	−1	0	0	1	0	1	1
	267	0	−1	−1	−1	1	0	1	1
*	268	0	−1	−1	0	1	0	1	1
	278	0	−1	−1	0	1	0	0	0
*	345	0	−1	−1	−1	0	0	1	0
	346	0	−1	0	−1	0	0	1	0
*	347	0	−1	0	−1	0	0	0	1
	348	0	−1	0	0	0	0	0	1
*	356	0	−1	0	−1	0	1	0	0
**	357	0	−1	0	−1	0	1	1	1
*	358	0	−1	0	0	0	1	1	1
*	367	0	−1	−1	−1	0	1	1	1
	368	0	−1	−1	0	0	1	1	1
*	378	0	−1	−1	0	0	1	0	0
	456	0	0	0	−1	0	1	0	0
*	457	0	0	0	−1	0	1	1	1
	458	0	0	0	0	0	1	1	1
	467	0	0	−1	−1	0	1	1	1
*	468	0	0	−1	0	0	1	1	1
	478	0	0	−1	0	0	1	0	0
*	567	0	0	−1	−1	0	0	0	1
	568	0	0	−1	0	0	0	0	1
*	578	0	0	−1	0	0	0	1	0
	678	0	0	0	0	0	0	1	0
	0123	0	0	0	0	0	1	0	0
*	0124	0	−1	0	0	0	1	0	0
	0125	0	−1	0	0	0	0	1	0
*	0126	0	−1	−1	0	0	0	1	0
	0127	0	−1	−1	0	0	0	0	1
*	0128	0	−1	−1	−1	0	0	0	1

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
	0134	0	−1	0	0	1	0	0	0
*	0135	0	−1	0	0	1	1	1	0
	0136	0	−1	−1	0	1	1	1	0
*	0137	0	−1	−1	0	1	1	0	1
	0138	0	−1	−1	−1	1	1	0	1
	0145	0	0	0	0	1	1	1	0
*	0146	0	0	−1	0	1	1	1	0
	0147	0	0	−1	0	1	1	0	1
*	0148	0	0	−1	−1	1	1	0	1
	0156	0	0	−1	0	1	0	0	0
*	0157	0	0	−1	0	1	0	1	1
	0158	0	0	−1	−1	1	0	1	1
	0167	0	0	0	0	1	0	1	1
*	0168	0	0	0	−1	1	0	1	1
	0178	0	0	0	−1	1	0	0	0
*	0234	−1	−1	0	0	1	0	0	0
	0235	−1	−1	0	0	1	1	1	0
*	0236	−1	−1	−1	0	1	1	1	0
	0237	−1	−1	−1	0	1	1	0	1
*	0238	−1	−1	−1	−1	1	1	0	1
*	0245	−1	0	0	0	1	1	1	0
**	0246	−1	0	−1	0	1	1	1	0
*	0247	−1	0	−1	0	1	1	0	1
**	0248	−1	0	−1	−1	1	1	0	1
*	0256	−1	0	−1	0	1	0	0	0
	0257	−1	0	−1	0	1	0	1	1
*	0258	−1	0	−1	−1	1	0	1	1
*	0267	−1	0	0	0	1	0	1	1
**	0268	−1	0	0	−1	1	0	1	1
*	0278	−1	0	0	−1	1	0	0	0
	0345	−1	0	0	0	0	0	1	0
*	0346	−1	0	−1	0	0	0	1	0
	0347	−1	0	−1	0	0	0	0	1
*	0348	−1	0	−1	−1	0	0	0	1
	0356	−1	0	−1	0	0	1	0	0
*	0357	−1	0	−1	0	0	1	1	1
	0358	−1	0	−1	−1	0	1	1	1
	0367	−1	0	0	0	0	1	1	1
*	0368	−1	0	0	−1	0	1	1	1
	0378	−1	0	0	−1	0	1	0	0
*	0456	−1	−1	−1	0	0	1	0	0
	0457	−1	−1	−1	0	0	1	1	1
*	0458	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1
*	0467	−1	−1	0	0	0	1	1	1
**	0468	−1	−1	0	−1	0	1	1	1
*	0478	−1	−1	0	−1	0	1	0	0
	0567	−1	−1	0	0	0	0	0	1
*	0568	−1	−1	0	−1	0	0	0	1

Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
0578	−1	−1	0	−1	0	0	1	0
*0678	−1	−1	−1	−1	0	0	1	0
1234	−1	−1	0	0	0	0	0	0
*1235	−1	−1	0	0	0	1	1	0
1236	−1	−1	−1	0	0	1	1	0
*1237	−1	−1	−1	0	0	1	0	1
1238	−1	−1	−1	−1	0	1	0	1
1245	−1	0	0	0	0	1	1	0
*1246	−1	0	−1	0	0	1	1	0
1247	−1	0	−1	0	0	1	0	1
*1248	−1	0	−1	−1	0	1	0	1
1256	−1	0	−1	0	0	0	0	0
*1257	−1	0	−1	0	0	0	1	1
1258	−1	0	−1	−1	0	0	1	1
1267	−1	0	0	0	0	0	1	1
*1268	−1	0	0	−1	0	0	1	1
1278	−1	0	0	−1	0	0	0	0
*1345	−1	0	0	0	1	0	1	0
1346	−1	0	−1	0	1	0	1	0
*1347	−1	0	−1	0	1	0	0	1
1348	−1	0	−1	−1	1	0	0	1
*1356	−1	0	−1	0	1	1	0	0
**1357	−1	0	−1	0	1	1	1	1
*1358	−1	0	−1	−1	1	1	1	1
*1367	−1	0	0	0	1	1	1	1
1368	−1	0	0	−1	1	1	1	1
*1378	−1	0	0	−1	1	1	0	0
1456	−1	−1	−1	0	1	1	0	0
*1457	−1	−1	−1	0	1	1	1	1
1458	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1
1467	−1	−1	0	0	1	1	1	1
*1468	−1	−1	0	−1	1	1	1	1
1478	−1	−1	0	−1	1	1	0	0
*1567	−1	−1	0	0	1	0	0	1
1568	−1	−1	0	−1	1	0	0	1
*1578	−1	−1	0	−1	1	0	1	0

Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
1678	−1	−1	−1	−1	1	0	1	0
2345	0	0	0	0	1	0	1	0
*2346	0	0	−1	0	1	0	1	0
2347	0	0	−1	0	1	0	0	1
*2348	0	0	−1	−1	1	0	0	1
2356	0	0	−1	0	1	1	0	0
*2357	0	0	−1	0	1	1	1	1
2358	0	0	−1	−1	1	1	1	1
2367	0	0	0	0	1	1	1	1
*2368	0	0	0	−1	1	1	1	1
2378	0	0	0	−1	1	1	0	0
*2456	0	−1	−1	0	1	1	0	0
2457	0	−1	−1	0	1	1	1	1
*2458	0	−1	−1	−1	1	1	1	1
*2467	0	−1	0	0	1	1	1	1
**2468	0	−1	0	−1	1	1	1	1
*2478	0	−1	0	−1	1	1	0	0
2567	0	−1	0	0	1	0	0	1
*2568	0	−1	0	−1	1	0	0	1
2578	0	−1	0	−1	1	0	1	0
*2678	0	−1	−1	−1	1	0	1	0
3456	0	−1	−1	0	0	0	0	0
*3457	0	−1	−1	0	0	0	1	1
3458	0	−1	−1	−1	0	0	1	1
3467	0	0	0	0	0	0	1	1
*3468	0	−1	0	−1	0	0	1	1
3478	0	−1	0	−1	0	0	0	0
*3567	0	−1	0	0	0	1	0	1
3568	0	−1	0	−1	0	0	1	1
*3578	0	−1	0	−1	0	1	1	0
3678	0	−1	−1	−1	0	1	1	0
4567	0	0	0	0	0	1	0	1
*4568	0	0	0	−1	0	0	1	1
4578	0	0	0	−1	0	1	1	0
*4678	0	0	−1	−1	0	1	1	0
5678	0	0	−1	−1	0	0	0	0

Ich entwickle jetzt 5 Relationen zwischen je 6 der 10 ϑ-Functionen mit den einfachen Indices $0, 1, 2, \cdots 9$: und zwar wähle ich diese Relationen so, dass jede derselben das Fundamentaltheta $\vartheta_9(v_1 \cdots v_4)$ und die 4 geraden Functionen mit den Indices 0, 2, 4, 6, ausserdem aber je eine ungerade ϑ-Function oder das noch fehlende $\vartheta_8(v_1 \cdots v_4)$ enthält. Man könnte diese Beziehungen durch Specialisirung von $\varrho = 4$ auf demselben Wege herleiten, wie oben die Gleichung (IV): indessen wird die Rechnung zur Bestimmung der Vorzeichen eine kürzere, wenn man sich jener ebenfalls oben bereits benützten Formeln bedient, wie sie sich unmittelbar aus dem Additionstheorem durch Nullsetzen gewisser Argumente ergeben.

Man findet zunächst aus Gleichung (C_1), wenn man

die Werthe

$$\begin{array}{cccccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \eta & \delta \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 0246 8 \end{array}$$

giebt und ausserdem auf die Gleichung noch die Substitution (η) anwendet:

$$\vartheta_8^2 \cdot \vartheta_8^2(v_1 \cdots) = \vartheta_9^2 \vartheta_9^2(v_1 \cdots) - \vartheta_0^2 \vartheta_0^2(v_1 \cdots) - \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_2^2(v_1 \cdots) - \vartheta_4^2 \vartheta_4^2(v_1 \cdots) - \vartheta_6^2 \vartheta_6^2(v_1 \cdots)$$

oder wenn ich von jetzt ab zur Abkürzung

$\vartheta_\alpha(v_1, \cdots v_4)$ mit $[\alpha]$

$\vartheta_\alpha(0, \cdots 0)$ mit α und im Falle einer Zweideutigkeit mit (α)

bezeichne:

(VI, 1) $9^2 \cdot [9]^2 = 0^2 \cdot [0]^2 + 2^2 \cdot [2]^2 + 4^2 \cdot [4]^2 + 6^2 \cdot [6]^2 + 8^2 \cdot [8]^2.$

Ferner ergeben sich aus Gleichung (C, 2), wenn man darin wiederum

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = 2 \quad \varepsilon_3 = 4 \quad \varepsilon_4 = 6 \quad \text{also} \quad \eta = 8$$

wählt, und sowohl δ als $\varkappa$ der Reihe nach die Werthe 1, 3, 5, 7 giebt, die folgenden 4 Beziehungen:

$$(\mathrm{VI})\left\{\begin{array}{ll} 18^2 \cdot [9]^2 = 018^2 \cdot [0]^2 - 128^2 \cdot [2]^2 - 148^2 \cdot [4]^2 - 168^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [1]^2 & (2) \\ 38^2 \cdot [9]^2 = 038^2 \cdot [0]^2 + 238^2 \cdot [2]^2 - 348^2 \cdot [4]^2 - 368^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [3]^2 & (3) \\ 58^2 \cdot [9]^2 = 058^2 \cdot [0]^2 + 258^2 \cdot [2]^2 + 458^2 \cdot [4]^2 - 568^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [5]^2 & (4) \\ 78^2 \cdot [9]^2 = 078^2 \cdot [0]^2 + 278^2 \cdot [2]^2 + 478^2 \cdot [4]^2 + 678^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [7]^2 & (5) \end{array}\right.$$

Ehe ich mit diesen Gleichungen weiter operiren kann, muss ich nun eine Anzahl von Relationen für die ϑ-Functionen mit Nullargumenten entwickeln. Ich gebe hier drei Kategorien solcher Relationen. Die erste giebt eine Beziehung für die Theta's mit dreifachem Index und solche mit ein- und zweifachem Index und entsteht durch Specialisirung der Indices aus Gleichung (V b). Ich ziehe es indessen wiederum vor die betreffenden Relationen aus der Formel (C, 1) herzuleiten, indem ich darin zunächst $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ setze, sodass also

$$(\mathrm{E}) \qquad \vartheta_\eta^2\, \vartheta_9^2 = \sum\nolimits_\gamma (-1)^{\gamma|\eta} \vartheta_\gamma^2\, \vartheta_{\eta\gamma}^2 .$$

Giebt man hierin

$$(\mathrm{VII})\left\{\begin{array}{lccccccl} & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \delta & & \\ \text{die Werthe} & 0 & 2 & 4 & 7 & 8, & \text{so folgt:} & 9^2 \cdot 678^2 = 8^2 \cdot 67^2 + 6^2 \cdot 78^2 \cdots \quad (1) \\ & 0 & 2 & 6 & 7 & 8 & - & 9^2 \cdot 478^2 = 8^2 \cdot 47^2 + 4^2 \cdot 78^2 \cdots \quad (2) \\ & 0 & 4 & 6 & 7 & 8 & - & 9^2 \cdot 278^2 = 8^2 \cdot 27^2 + 2^2 \cdot 78^2 \cdots \quad (3) \\ & 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & - & 9^2 \cdot 078^2 = 8^2 \cdot 07^2 + 0^2 \cdot 78^2 \cdots \quad (4) \end{array}\right.$$

		ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	δ			
(VII)	die Werthe	0	2	4	5	8,	so folgt:	$9^2\cdot568^2=8^2\cdot56^2-6^2\cdot58^2$ ···	(5)
		0	2	4	3	8	—	$9^2\cdot368^2=8^2\cdot36^2-6^2\cdot38^2$ ···	(6)
		0	2	4	1	8	—	$9^2\cdot168^2=8^2\cdot16^2-6^2\cdot18^2$ ···	(7)
		0	2	6	5	8	—	$9^2\cdot458^2=8^2\cdot45^2+4^2\cdot58^2$ ···	(8)
		0	4	6	5	8	—	$9^2\cdot258^2=8^2\cdot25^2+2^2\cdot58^2$ ···	(9)
		2	4	6	5	8	—	$9^2\cdot058^2=8^2\cdot05^2+0^2\cdot58^2$ ···	(10)
		0	2	6	3	8	—	$9^2\cdot348^2=8^2\cdot34^2-4^2\cdot38^2$ ···	(11)
		0	2	6	1	8	—	$9^2\cdot148^2=8^2\cdot14^2-4^2\cdot18^2$ ···	(12)
		0	4	6	3	8	—	$9^2\cdot238^2=8^2\cdot23^2+2^2\cdot38^2$ ···	(13)
		2	4	6	3	8	—	$9^2\cdot038^2=8^2\cdot03^2+0^2\cdot38^2$ ···	(14)
		0	4	6	1	8	—	$9^2\cdot128^2=8^2\cdot12^2-2^2\cdot18^2$ ···	(15)
		2	4	6	1	8	—	$9^2\cdot018^2=8^2\cdot01^2+0^2\cdot18^2$ ···	(16)
		0	2	8	7	6	—	$9^2\cdot467^2=4^2\cdot67^2-6^2\cdot47^2$ ···	(17)
		0	4	8	7	6	—	$9^2\cdot267^2=2^2\cdot67^2-6^2\cdot27^2$ ···	(18)
		2	4	8	7	6	—	$9^2\cdot067^2=0^2\cdot67^2-6^2\cdot07^2$ ···	(19)
		0	6	8	7	4	—	$9^2\cdot247^2=2^2\cdot47^2-4^2\cdot27^2$ ···	(20)
		2	6	8	7	4	—	$9^2\cdot047^2=0^2\cdot47^2-4^2\cdot07^2$ ···	(21)
		4	6	8	7	2	—	$9^2\cdot027^2=0^2\cdot27^2-2^2\cdot07^2$ ···	(22)
		0	2	8	5	6	—	$9^2\cdot456^2=6^2\cdot45^2+4^2\cdot56^2$ ···	(23)
		0	4	8	5	6	—	$9^2\cdot256^2=6^2\cdot25^2+2^2\cdot56^2$ ···	(24)
		2	4	8	5	6	—	$9^2\cdot056^2=6^2\cdot05^2+0^2\cdot56^2$ ···	(25)
		0	2	8	3	6	—	$9^2\cdot346^2=6^2\cdot34^2-4^2\cdot36^2$ ···	(26)
		0	2	8	1	6	—	$9^2\cdot146^2=6^2\cdot14^2-4^2\cdot16^2$ ···	(27)
		0	4	8	3	6	—	$9^2\cdot236^2=6^2\cdot23^2+2^2\cdot36^2$ ···	(28)
		2	4	8	3	6	—	$9^2\cdot036^2=6^2\cdot03^2+0^2\cdot36^2$ ···	(29)
		0	4	8	1	6	—	$9^2\cdot126^2=6^2\cdot12^2-2^2\cdot16^2$ ···	(30)
		2	4	8	1	6	—	$9^2\cdot016^2=6^2\cdot01^2+0^2\cdot16^2$ ···	(31)
		0	6	8	5	4	—	$9^2\cdot245^2=2^2.45^2-4^2\cdot25^2$ ···	(32)
		2	6	8	5	4	—	$9^2\cdot045^2=0^2\cdot45^2-4^2\cdot05^2$ ···	(33)
		4	6	8	5	2	—	$9^2\cdot025^2=0^2\cdot25^2-2^2\cdot05^2$ ···	(34)
		0	6	8	3	4	—	$0^2\cdot234^2=4^2\cdot23^2+2^2\cdot34^2$ ···	(35)
		2	6	8	3	4	—	$9^2\cdot034^2=4^2\cdot03^2+0^2\cdot34^2$ ···	(36)
		0	6	8	1	4	—	$9^2\cdot124^2=4^2\cdot12^2-2^2\cdot14^2$ ···	(37)
		2	6	8	1	4	—	$9^2\cdot014^2=4^2\cdot01^2+0^2\cdot14^2$ ···	(38)
		4	6	8	3	2	—	$9^2\cdot023^2=0^2\cdot23^2-2^2\cdot03^2$ ···	(39)
		4	6	8	1	2	—	$9^2\cdot012^2=2^2\cdot01^2+0^2\cdot12^2$ ···	(40)

(VIII)	$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,\delta\ \varkappa$			(VIIIa)
(1)	0 2 4 7 8 56	—	$56^2\cdot678^2 = 67^2\cdot568^2 + 6^2\cdot5678^2$	$9^2\cdot5678^2 = 56^2\cdot78^2 + 58^2\cdot67^2$ (1)
(2)	0 2 4 7 6 58	—	$58^2\cdot678^2 = -78^2\cdot568^2 + 8^2\cdot5678^2$	
(3)	0 2 4 7 8 36	—	$36^2\cdot678^2 = 67^2\cdot368^2 + 6^2\cdot3678^2$	$9^2\cdot3678^2 = 36^2\cdot78^2 + 38^2\cdot67^2$ (2)
(4)	0 2 4 7 6 38	—	$38^2\cdot678^2 = -78^2\cdot368^2 + 8^2\cdot3678^2$	
(5)	0 2 4 7 8 16	—	$16^2\cdot678^2 = 67^2\cdot168^2 + 6^2\cdot1678^2$	$9^2\cdot1678^2 = 16^2\cdot78^2 + 18^2\cdot67^2$ (3)
(6)	0 2 4 7 6 18	—	$18^2\cdot678^2 = -78^2\cdot168^2 + 8^2\cdot1678^2$	
(7)	0 2 6 7 8 45	—	$45^2\cdot478^2 = 47^2\cdot458^2 + 4^2\cdot4578^2$	$9^2\cdot4578^2 = 45^2\cdot78^2 - 58^2\cdot47^2$ (4)
(8)	0 2 6 7 4 58	—	$58^2\cdot478^2 = 78^2\cdot458^2 - 8^2\cdot4578^2$	
(9)	0 4 6 7 8 25	—	$25^2\cdot278^2 = 27^2\cdot258^2 + 2^2\cdot2578^2$	$9^2\cdot2578^2 = 25^2\cdot78^2 - 58^2\cdot27^2$ (5)
(10)	0 4 6 7 2 58	—	$58^2\cdot278^2 = 78^2\cdot258^2 - 8^2\cdot2578^2$	
(11)	2 4 6 7 8 05	—	$05^2\cdot078^2 = 07^2\cdot058^2 + 0^2\cdot0578^2$	$9^2\cdot0578^2 = 05^2\cdot78^2 - 58^2\cdot07^2$ (6)
(12)	2 4 6 7 0 58	—	$58^2\cdot078^2 = 78^2\cdot058^2 - 8^2\cdot0578^2$	
(13)	0 2 6 7 8 34	—	$34^2\cdot478^2 = 47^2\cdot348^2 + 4^2\cdot3478^2$	$9^2\cdot3478^2 = 34^2\cdot78^2 + 38^2\cdot47^2$ (7)
(14)	0 2 6 7 4 38	—	$38^2\cdot478^2 = -78^2\cdot348^2 + 8^2\cdot3478^2$	
(15)	0 2 6 7 8 14	—	$14^2\cdot478^2 = 47^2\cdot148^2 + 4^2\cdot1478^2$	$9^2\cdot1478^2 = 14^2\cdot78^2 + 18^2\cdot47^2$ (8)
(16)	0 2 6 7 4 18	—	$18^2\cdot478^2 = -78^2\cdot148^2 + 8^2\cdot1478^2$	
(17)	0 4 6 7 8 23	—	$23^2\cdot278^2 = 27^2\cdot238^2 + 2^2\cdot2378^2$	$9^2\cdot2378^2 = 23^2\cdot78^2 - 38^2\cdot27^2$ (9)
(18)	0 4 6 7 2 38	—	$38^2\cdot278^2 = 78^2\cdot238^2 - 8^2\cdot2378^2$	
(19)	2 4 6 7 8 03	—	$03^2\cdot078^2 = 07^2\cdot038^2 + 0^2\cdot0378^2$	$9^2\cdot0378^2 = 03^2\cdot78^2 - 38^2\cdot07^2$ (10)
(20)	2 4 6 7 0 38	—	$38^2\cdot078^2 = 78^2\cdot038^2 - 8^2\cdot0378^2$	
(21)	0 4 6 7 8 12	—	$12^2\cdot278^2 = 27^2\cdot128^2 + 2^2\cdot1278^2$	$9^2\cdot1278^2 = 12^2\cdot78^2 + 18^2\cdot27^2$ (11)
(22)	0 4 6 7 2 18	—	$18^2\cdot278^2 = -78^2\cdot128^2 + 8^2\cdot1278^2$	
(23)	2 4 6 7 8 01	—	$01^2\cdot078^2 = 07^2\cdot018^2 + 0^2\cdot0178^2$	$9^2\cdot0178^2 = 01^2\cdot78^2 - 18^2\cdot07^2$ (12)
(24)	2 4 6 7 0 18	—	$18^2\cdot078^2 = 78^2\cdot018^2 - 8^2\cdot0178^2$	
(25)	0 2 4 5 8 36	—	$36^2\cdot568^2 = 56^2\cdot368^2 + 6^2\cdot3568^2$	$9^2\cdot3568^2 = 38^2\cdot56^2 - 36^2\cdot58^2$ (13)
(26)	0 2 4 5 6 38	—	$38^2\cdot568^2 = 58^2\cdot368^2 + 8^2\cdot3568^2$	
(27)	0 2 4 5 8 16	—	$16^2\cdot568^2 = 56^2\cdot168^2 + 6^2\cdot1568^2$	$9^2\cdot1568^2 = 18^2\cdot56^2 - 16^2\cdot58^2$ (14)
(28)	0 2 4 5 6 18	—	$18^2\cdot568^2 = 58^2\cdot168^2 + 8^2\cdot1568^2$	
(29)	0 2 4 3 8 16	—	$16^2\cdot368^2 = 36^2\cdot168^2 + 6^2\cdot1368^2$	$9^2\cdot1368^2 = 18^2\cdot36^2 - 16^2\cdot38^2$ (15)
(30)	0 2 4 3 6 18	—	$18^2\cdot368^2 = 38^2\cdot168^2 + 8^2\cdot1368^2$	
(31)	0 2 6 5 8 34	—	$34^2\cdot458^2 = 45^2\cdot348^2 + 4^2\cdot3458^2$	$9^2\cdot3458^2 = 34^2\cdot58^2 + 38^2\cdot45^2$ (16)
(32)	0 2 6 5 4 38	—	$38^2\cdot458^2 = -58^2\cdot348^2 + 8^2\cdot3458^2$	
(33)	0 2 6 5 8 14	—	$14^2\cdot458^2 = 45^2\cdot148^2 + 4^2\cdot1458^2$	$9^2\cdot1458^2 = 14^2\cdot58^2 + 18^2\cdot45^2$ (17)
(34)	0 2 6 5 4 18	—	$18^2\cdot458^2 = -58^2\cdot148^2 + 8^2\cdot1458^2$	
(35)	0 4 6 5 8 23	—	$23^2\cdot258^2 = 25^2\cdot238^2 + 2^2\cdot2358^2$	$9^2\cdot2358^2 = 23^2\cdot58^2 - 38^2\cdot25^2$ (18)
(36)	0 4 6 5 2 38	—	$38^2\cdot258^2 = 58^2\cdot238^2 - 8^2\cdot2358^2$	
(37)	2 4 6 5 8 03	—	$03^2\cdot058^2 = 05^2\cdot038^2 + 0^2\cdot0358^2$	$9^2\cdot0358^2 = 03^2\cdot58^2 - 38^2\cdot05^2$ (19)
(38)	2 4 6 5 0 38	—	$38^2\cdot058^2 = 58^2\cdot038^2 - 8^2\cdot0358^2$	
(39)	0 4 6 5 8 12	—	$12^2\cdot258^2 = 25^2\cdot128^2 + 2^2\cdot1258^2$	$9^2\cdot1258^2 = 12^2\cdot58^2 + 18^2\cdot25^2$ (20)
(40)	0 4 6 5 2 18	—	$18^2\cdot258^2 = -58^2\cdot128^2 + 8^2\cdot1258^2$	
(41)	2 4 6 5 8 01	—	$01^2\cdot058^2 = 05^2\cdot018^2 + 0^2\cdot0158^2$	$9^2\cdot0158^2 = 01^2\cdot58^2 - 18^2\cdot05^2$ (21)
(42)	2 4 6 5 0 18	—	$18^2\cdot058^2 = 58^2\cdot018^2 - 8^2\cdot0158^2$	
(43)	0 2 6 3 8 14	—	$14^2\cdot348^2 = 34^2\cdot148^2 + 4^2\cdot1348^2$	$9^2\cdot1348^2 = 18^2\cdot34^2 - 38^2\cdot14^2$ (22)
(44)	0 2 6 3 4 18	—	$18^2\cdot348^2 = 38^2\cdot148^2 + 8^2\cdot1348^2$	
(45)	0 4 6 3 8 12	—	$12^2\cdot238^2 = 23^2\cdot128^2 + 2^2\cdot1238^2$	$9^2\cdot1238^2 = 12^2\cdot38^2 + 18^2\cdot23^2$ (23)
(46)	0 4 6 3 2 18	—	$18^2\cdot238^2 = -38^2\cdot128^2 + 8^2\cdot1238^2$	
(47)	2 4 6 3 8 01	—	$01^2\cdot038^2 = 03^2\cdot018^2 + 0^2\cdot0138^2$	$9^2\cdot0138^2 = 01^2\cdot38^2 - 03^2\cdot18^2$ (24)
(48)	2 4 6 3 0 18	—	$18^2\cdot038^2 = 38^2\cdot018^2 - 8^2\cdot0138^2$	

(XI)

$$\frac{a_{78}}{a_{68}} = \frac{8^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 678^2} \qquad \frac{a_{67}}{a_{68}} = \frac{6^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 678^2}\ (\mathrm{VII},1) \qquad \frac{a_{78}}{a_{48}} = \frac{8^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 478^2} \qquad \frac{a_{47}}{a_{48}} = \frac{4^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 478^2}\ (\mathrm{VII},2)$$

$$\frac{a_{78}}{a_{28}} = \frac{8^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 278^2} \qquad \frac{a_{27}}{a_{28}} = \frac{2^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 278^2}\ (\mathrm{VII},3) \qquad \frac{a_{78}}{a_{08}} = \frac{8^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 078^2} \qquad \frac{a_{07}}{a_{08}} = \frac{0\cdot 78^2}{9^2\cdot 078^2}\ (\mathrm{VII},4)$$

$$\frac{a_{58}}{a_{68}} = \frac{8^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 568^2} \qquad \frac{a_{56}}{a_{68}} = \frac{6^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 568^2}\ (\mathrm{VII},5) \qquad \frac{a_{38}}{a_{68}} = \frac{8^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 368^2} \qquad \frac{a_{36}}{a_{68}} = \frac{6^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 368^2}\ (\mathrm{VII},6)$$

$$\frac{a_{18}}{a_{68}} = \frac{8^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 168^2} \qquad \frac{a_{16}}{a_{68}} = \frac{6^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 168^2}\ (\mathrm{VII},7) \qquad \frac{a_{58}}{a_{48}} = \frac{8^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 458^2}\ (\mathrm{IX},1) \qquad \frac{a_{45}}{a_{48}} = \frac{4^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 458^2}\ (\mathrm{VII},8)$$

$$\frac{a_{58}}{a_{28}} = \frac{8^2\cdot 25^3}{9^2\cdot 258^2}\ (\mathrm{IX},2) \qquad \frac{a_{25}}{a_{28}} = \frac{2^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 258^2}\ (\mathrm{VII},9) \qquad \frac{a_{58}}{a_{08}} = \frac{8^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 058^2}\ (\mathrm{IX},3) \qquad \frac{a_{05}}{a_{08}} = \frac{0^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 058^2}\ (\mathrm{VII},10)$$

$$\frac{a_{38}}{a_{78}} = \frac{8^2\cdot 34^2}{9^2. 348^2}\ (\mathrm{IX},4) \qquad \frac{a_{34}}{a_{48}} = \frac{4^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 348^2}\ (\mathrm{VII},11) \qquad \frac{a_{18}}{a_{48}} = \frac{8^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 148^2}\ (\mathrm{IX},7) \qquad \frac{a_{14}}{a_{48}} = \frac{4^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 148^2}\ (\mathrm{VII},12)$$

$$\frac{a_{38}}{a_{28}} = \frac{8^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 238^2}\ (\mathrm{IX},5) \qquad \frac{a_{23}}{a_{28}} = \frac{2^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 238^2}\ (\mathrm{VII},13) \qquad \frac{a_{38}}{a_{08}} = \frac{8^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 038^2}\ (\mathrm{IX},6) \qquad \frac{a_{03}}{a_{08}} = \frac{0^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 038^2}\ (\mathrm{VII},14)$$

$$\frac{a_{18}}{a_{28}} = \frac{8^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 128^2}\ (\mathrm{IX},8) \qquad \frac{a_{12}}{a_{28}} = \frac{2^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 128^2}\ (\mathrm{VII},15) \qquad \frac{a_{18}}{a_{08}} = \frac{8^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 018^2}\ (\mathrm{IX},9) \qquad \frac{a_{01}}{a_{08}} = \frac{0^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 018^2}\ (\mathrm{VII},16)$$

$$\frac{a_{67}}{a_{46}} = \frac{6^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 467^2}\ (\mathrm{VII}\ 1,2,17) \qquad \frac{a_{47}}{a_{46}} = \frac{4^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 467^2}\ (\mathrm{VII},17) \qquad \frac{a_{67}}{a_{26}} = \frac{6^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 267^2}\ (\mathrm{VII},1,3,18) \qquad \frac{a_{27}}{a_{26}} = \frac{2^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 267^2}\ (\mathrm{VII},18)$$

$$\frac{a_{67}}{a_{06}} = \frac{6^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 067^2}\ (\mathrm{VII},1,4,19) \qquad \frac{a_{07}}{a_{06}} = \frac{0^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 067^2}\ (\mathrm{VII},19) \qquad \frac{a_{47}}{a_{24}} = \frac{4^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 247^2}\ (\mathrm{VII},2,3,20) \qquad \frac{a_{27}}{a_{24}} = \frac{2^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 247^2}\ (\mathrm{VII},20)$$

$$\frac{a_{47}}{a_{04}} = \frac{4^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 047^2}\ (\mathrm{VII},2,4,21) \qquad \frac{a_{07}}{a_{04}} = \frac{0^2\cdot 47^2}{0^2\cdot 047^2}\ (\mathrm{VII},21) \qquad \frac{a_{27}}{a_{02}} = \frac{2^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 027^2}\ (\mathrm{VII},3,4,22) \qquad \frac{a_{07}}{a_{02}} = \frac{0^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 027^2}\ (\mathrm{VII},22)$$

$$\frac{a_{56}}{a_{46}} = \frac{6^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 456^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,2,17\\ \mathrm{IX},10\end{pmatrix} \frac{a_{45}}{a_{46}} = \frac{4^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 456^2}\ (\mathrm{VII},23) \qquad \frac{a_{56}}{a_{26}} = \frac{6^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 256^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,3,18\\ \mathrm{IX},11\end{pmatrix} \frac{a_{25}}{a_{26}} = \frac{2^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 256^2}\ (\mathrm{VII},24)$$

$$\frac{a_{56}}{a_{06}} = \frac{6^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 056^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,4,19\\ \mathrm{IX},12\end{pmatrix} \frac{a_{05}}{a_{06}} = \frac{0^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 056^2}\ (\mathrm{VII},25) \qquad \frac{a_{36}}{a_{46}} = \frac{6^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 346^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,2,17\\ \mathrm{IX},13\end{pmatrix} \frac{a_{34}}{a_{46}} = \frac{4^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 346^2}\ (\mathrm{VII},26)$$

$$\frac{a_{16}}{a_{46}} = \frac{6^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 146^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,2,17\\ \mathrm{IX},14\end{pmatrix} \frac{a_{14}}{a_{46}} = \frac{4^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 146^2}\ (\mathrm{VII},27) \qquad \frac{a_{36}}{a_{26}} = \frac{6^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 236^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,3,18\\ \mathrm{IX},15\end{pmatrix} \frac{a_{23}}{a_{26}} = \frac{2^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 236^2}\ (\mathrm{VII},28)$$

$$\frac{a_{36}}{a_{06}} = \frac{6^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 036^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,4,19\\ \mathrm{IX},16\end{pmatrix} \frac{a_{03}}{a_{06}} = \frac{0^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 036^2}\ (\mathrm{VII},29) \qquad \frac{a_{16}}{a_{26}} = \frac{6^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 126^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,3,18\\ \mathrm{IX},17\end{pmatrix} \frac{a_{12}}{a_{26}} = \frac{2^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 126^2}\ (\mathrm{VII},30)$$

$$\frac{a_{16}}{a_{06}} = \frac{6^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 016^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},1,4,19\\ \mathrm{IX},18\end{pmatrix} \frac{a_{01}}{a_{06}} = \frac{0^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 016^2}\ (\mathrm{VII},31) \qquad \frac{a_{45}}{a_{24}} = \frac{4^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 245^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,3,20\\ \mathrm{IX},19\end{pmatrix} \frac{a_{25}}{a_{24}} = \frac{2^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 245^2}\ (\mathrm{VII},32)$$

$$\frac{a_{45}}{a_{04}} = \frac{4^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 045^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,4,21\\ \mathrm{IX},20\end{pmatrix} \frac{a_{05}}{a_{04}} = \frac{0^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 045^2}\ (\mathrm{VII},33) \qquad \frac{a_{25}}{a_{02}} = \frac{2^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 025^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},3,4,22\\ \mathrm{IX},25\end{pmatrix} \frac{a_{05}}{a_{02}} = \frac{0^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 025^2}\ (\mathrm{VII},34)$$

$$\frac{a_{34}}{a_{24}} = \frac{4^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 234^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,3,20\\ \mathrm{IX},21\end{pmatrix} \frac{a_{23}}{a_{24}} = \frac{2^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 234^2}\ (\mathrm{VII},35) \qquad \frac{a_{34}}{a_{04}} = \frac{4^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 034^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,4,21\\ \mathrm{IX},22\end{pmatrix} \frac{a_{03}}{a_{04}} = \frac{0^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 034^2}\ (\mathrm{VII},36)$$

$$\frac{a_{14}}{a_{24}} = \frac{4^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 124^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,3,20\\ \mathrm{IX},23\end{pmatrix} \frac{a_{12}}{a_{24}} = \frac{2^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 124^2}\ (\mathrm{VII},37) \qquad \frac{a_{14}}{a_{04}} = \frac{4^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 014^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},2,4,21\\ \mathrm{IX},24\end{pmatrix} \frac{a_{01}}{a_{04}} = \frac{0^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 014^2}\ (\mathrm{VII},38)$$

$$\frac{a_{23}}{a_{02}} = \frac{2^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 023^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},3,4,22\\ \mathrm{IX},26\end{pmatrix} \frac{a_{03}}{a_{02}} = \frac{0^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 023^2}\ (\mathrm{VII},39) \qquad \frac{a_{12}}{a_{02}} = \frac{2^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 012^2}\begin{pmatrix}\mathrm{VII},3,4,22\\ \mathrm{IX},27\end{pmatrix} \frac{a_{01}}{a_{02}} = \frac{0^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 012^2}\ (\mathrm{VII},40)$$

$$\frac{a_{78}}{a_{67}} = \frac{67^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 5678^2} \qquad \frac{a_{58}}{a_{57}} = \frac{56^2\cdot 678^2}{6^2\cdot 5678^2}\ (\mathrm{VIII},1) \qquad \frac{a_{78}}{a_{37}} = \frac{67^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 3678^2} \qquad \frac{a_{38}}{a_{37}} = \frac{36^2\cdot 678^2}{6^2\cdot 3678^2}\ (\mathrm{VIII},3)$$

$$\frac{a_{78}}{a_{17}} = \frac{67^2\ 168^2}{6^2\cdot 1678^2} \qquad \frac{a_{18}}{a_{17}} = \frac{16^2\cdot 678^2}{6^2\cdot 1678^2}\ (\mathrm{VIII},5) \qquad \frac{a_{58}}{a_{35}} = \frac{56^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 3678^2}\ (\mathrm{VIII},25) \qquad \frac{a_{38}}{a_{35}} = \frac{36^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 3568^2}\ (\mathrm{VIII},25)$$

$$\frac{a_{58}}{a_{15}} = \frac{56^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1568^2}\ (\mathrm{VIII},27) \qquad \frac{a_{18}}{a_{15}} = \frac{16^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 1568^2}\ (\mathrm{VIII},27) \qquad \frac{a_{38}}{a_{13}} = \frac{36^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1368^2}\ (\mathrm{VIII},29) \qquad \frac{a_{18}}{a_{13}} = \frac{16^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 1368^2}\ (\mathrm{VIII},29)$$

$$\frac{a_{62}}{a_{57}} = \frac{78^2\cdot 568^2}{8^2\cdot 5678^2} \qquad \frac{a_{56}}{a_{57}} = \frac{58^2\cdot 678^2}{8^2\cdot 5678^2}\ (\mathrm{VIII},2) \qquad \frac{a_{67}}{a_{37}} = \frac{78^2\cdot 368^2}{8^2\cdot 3678^2} \qquad \frac{a_{36}}{a_{37}} = \frac{38^2\cdot 678^2}{8^2\cdot 3678^2}\ (\mathrm{VIII},4)$$

$$\frac{a_{67}}{a_{17}} = \frac{78^2\cdot 168^2}{8^2\cdot 1678^2} \qquad \frac{a_{16}}{a_{17}} = \frac{18^2\cdot 678^2}{8^2. 1678^2}\ (\mathrm{VIII},6) \qquad \frac{a_{47}}{a_{57}} = \frac{78^2\cdot 458^2}{8^2\cdot 4578^2}\ (\mathrm{VIII},7) \qquad \frac{a_{45}}{a_{57}} = \frac{58^2\cdot 478^2}{8^2\cdot 4578^2}\ (\mathrm{VIII},8)$$

$$\frac{a_{27}}{a_{57}} = \frac{78^2\cdot 258^2}{8^2\cdot 2578^2}\ (\mathrm{VIII},9) \qquad \frac{a_{25}}{a_{57}} = \frac{58^2\cdot 278^2}{8^2\cdot 2578^2}\ (\mathrm{VIII},6) \qquad \frac{a_{67}}{a_{57}} = \frac{78^2\ 058^2}{8^2\cdot 0578^2}\ (\mathrm{VIII},11) \qquad \frac{a_{05}}{a_{57}} = \frac{58^2\cdot 078^5}{8^2\cdot 0578^2}\ (\mathrm{VIII},12)$$

$$\frac{a_{17}}{a_{37}} = \frac{78^2\cdot 348^2}{8^2\cdot 3478^2}\ (\mathrm{VIII},13) \qquad \frac{a_{34}}{a_{37}} = \frac{38^2\cdot 478^2}{8^2\cdot 3478^2}\ (\mathrm{VIII},14) \qquad \frac{a_{47}}{a_{17}} = \frac{78^2\cdot 148^2}{8^2\cdot 1478^2}\ (\mathrm{VIII},15) \qquad \frac{a_{14}}{a_{17}} = \frac{18^2\cdot 478^2}{8^2\cdot 1478^2}\ (\mathrm{VIII},16)$$

$$\frac{a_{27}}{a_{37}} = \frac{78^2\cdot 238^2}{8^2\cdot 2378^2}\ (\mathrm{VIII},17) \qquad \frac{a_{23}}{a_{37}} = \frac{38^2\cdot 278^2}{8^2\cdot 2378^2}\ (\mathrm{VIII},18) \qquad \frac{a_{07}}{a_{37}} = \frac{78^2\cdot 038^2}{8^2\cdot 0378^2}\ (\mathrm{VIII},19) \qquad \frac{a_{03}}{a_{37}} = \frac{38^2\cdot 078^2}{8^2\cdot 0378^2}\ (\mathrm{VIII},20)$$

$$\frac{a_{27}}{a_{17}} = \frac{78^2\cdot 128^2}{8^2\cdot 1278^2}\ (\mathrm{VIII},21) \qquad \frac{a_{12}}{a_{17}} = \frac{18^2\cdot 278^2}{8^2\cdot 1278^2}\ (\mathrm{VIII},22) \qquad \frac{a_{07}}{a_{17}} = \frac{78^2\cdot 018^2}{8^2\cdot 0178^2}\ (\mathrm{VIII},23) \qquad \frac{a_{01}}{a_{17}} = \frac{18^2\cdot 078^2}{8^2\cdot 0178^2}\ (\mathrm{VIII},24)$$

$$\frac{a_{56}}{a_{35}} = \frac{58^2\cdot 368^2}{8^2\cdot 3568^2}\ (\mathrm{VIII},25) \qquad \frac{a_{3}}{a_{35}} = \frac{38^2\cdot 568^2}{8^2\cdot 3568^2}\ (\mathrm{VIII},26) \qquad \frac{a_{56}}{a_{15}} = \frac{58^2\cdot 168^2}{8^2\cdot 1568^2}\ (\mathrm{VIII},27) \qquad \frac{a_{16}}{a_{15}} = \frac{18^2\cdot 568^2}{8^2\cdot 1568^2}\ (\mathrm{VIII},28)$$

$$\frac{a_{36}}{a_{13}} = \frac{38^2\cdot 168^2}{8^2\cdot 1368^2}\ (\mathrm{VIII},29) \qquad \frac{a_{16}}{a_{13}} = \frac{18^2\ 368^2}{8^2\cdot 1368^2}\ (\mathrm{VIII},30) \qquad \frac{a_{45}}{a_{35}} = \frac{58^2\cdot 348^2}{8^2\cdot 3458^2}\ (\mathrm{VIII},31) \qquad \frac{a_{34}}{a_{35}} = \frac{38^2\cdot 458^2}{8^2\cdot 3458^2}\ (\mathrm{VIII},32)$$

$$\frac{a_{45}}{a_{15}} = \frac{58^2\cdot 148^2}{8^2\cdot 1458^2}\ (\mathrm{VIII},33) \qquad \frac{a_{14}}{a_{15}} = \frac{18^2\cdot 458^2}{8^2\ 1458^2}\ (\mathrm{VIII},34) \qquad \frac{a_{25}}{a_{35}} = \frac{58^2\cdot 238^2}{8^2\cdot 2358^2}\ (\mathrm{VIII},35) \qquad \frac{a_{23}}{a_{35}} = \frac{38^2\cdot 258^2}{8^2\cdot 2358^2}\ (\mathrm{VIII},36)$$

Hiermit sind alle ϑ-Functionen mit dreifachem Index, welche für die Nullargumente nicht verschwinden, erschöpft.

Das zweite zu entwickelnde System von Relationen giebt eine Beziehung zwischen ϑ-Functionen mit vierfachem Index und solchen mit ein-, zwei- und dreifachem Index. Ich brauche hier nicht alle Theta's zu betrachten, sondern nur diejenigen, welche einen Index, z. B. 8 gemeinschaftlich haben. Für jede dieser Functionen entwickle ich zwei Relationen mit Hilfe der Formel (C, 2) (S. 442) und eine dritte als Eliminationsresultat dieser beiden. Setzen wir in (C, 2) die Argumente gleich Null, so wird

$$\text{(F)} \qquad \vartheta_\eta^2 \vartheta_\varkappa^2 = \sum^\gamma (-1)^{\varkappa|\gamma+\gamma|\eta} \vartheta_{\eta\gamma}^2 \vartheta_{\gamma\varkappa}^2$$

und hieraus ergiebt sich, wenn $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$, δ, $\varkappa$ die jedesmal angegebenen Werthe erhalten, eine Reihe von Beziehungen, welche auf der Tabelle am Ende dieser Abhandlung (VIII) und (VIIIa) zusammengestellt sind.

Die dritte Classe der zu entwickelnden Formeln für die ϑ-Functionen mit Nullargumenten, soll eine Beziehung zwischen je zwei Producten von 4 solchen Theta's liefern.

Setzt man in Gleichung (D, 1) (S. 447) die Argumente sämmtlich gleich Null, so wird

$$\text{(G)} \qquad \vartheta_\eta \vartheta_{\eta\alpha\beta} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta = \sum_\gamma (-1)^{\sigma_\gamma} \vartheta_\gamma \vartheta_{\gamma\alpha\beta}\, \vartheta_{\eta\gamma\alpha} \vartheta_{\eta\gamma\beta}$$

und es ergeben sich, wenn $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$, α, β, δ die jedesmal beigefügten Werthe erhalten, und die resultirende Gleichung noch in's Quadrat erhoben wird, die folgenden Beziehungen:

$$\text{(IX)} \left\{ \begin{array}{ccccccclr}
\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \alpha & \beta & \delta & \qquad \eta\gamma \quad \eta \qquad\quad \eta\gamma\alpha \;\; \eta\gamma\beta \;\; \gamma \;\; \gamma\alpha\beta & \\
0 & 2 & 6 & 5 & 47 & 56 & 8 & \cdots 47^2 \cdot 56^2 \cdot 458^2 \cdot 678^2 = 45^2 \cdot 67^2 \cdot 568^2 \cdot 478^2 \cdots & (1) \\
0 & 4 & 6 & 5 & 27 & 56 & 8 & \cdots 27^2 \cdot 56^2 \cdot 258^2 \cdot 678^2 = 25^2 \cdot 67^2 \cdot 568^2 \cdot 278^2 \cdots & (2) \\
2 & 4 & 6 & 5 & 07 & 56 & 8 & \cdots 07^2 \cdot 56^2 \cdot 058^2 \cdot 678^2 = 05^2 \cdot 67^2 \cdot 568^2 \cdot 078^2 \cdots & (3) \\
0 & 2 & 6 & 3 & 47 & 36 & 8 & \cdots 47^2 \cdot 36^2 \cdot 348^2 \cdot 678^2 = 34^2 \cdot 67^2 \cdot 368^2 \cdot 478^2 \cdots & (4) \\
0 & 4 & 6 & 3 & 27 & 36 & 8 & \cdots 27^2 \cdot 36^2 \cdot 238^2 \cdot 678^2 = 23^2 \cdot 67^2 \cdot 368^2 \cdot 278^2 \cdots & (5) \\
2 & 4 & 6 & 3 & 07 & 36 & 8 & \cdots 07^2 \cdot 36^2 \cdot 038^2 \cdot 678^2 = 03^2 \cdot 67^2 \cdot 368^2 \cdot 078^2 \cdots & (6) \\
0 & 2 & 6 & 1 & 47 & 16 & 8 & \cdots 47^2 \cdot 16^2 \cdot 148^2 \cdot 678^2 = 14^2 \cdot 67^2 \cdot 168^2 \cdot 478^2 \cdots & (7) \\
0 & 4 & 6 & 1 & 27 & 16 & 8 & \cdots 27^2 \cdot 16^2 \cdot 128^2 \cdot 678^2 = 12^2\ 67^2 \cdot 168^2 \cdot 278^2 \cdots & (8) \\
2 & 4 & 6 & 1 & 07 & 16 & 8 & \cdots 07^2 \cdot 16^2 \cdot 018^2 \cdot 678^2 = 01^2 \cdot 67^2 \cdot 168^2 \cdot 078^2 \cdots & (9) \\
0 & 2 & 8 & 5 & 47 & 58 & 6 & \cdots 47^2 \cdot 58^2 \cdot 456^2 \cdot 678^2 = 45^2 \cdot 78^2 \cdot 568^2 \cdot 478^2 \cdots & (10) \\
0 & 4 & 8 & 5 & 27 & 58 & 6 & \cdots 27^2 \cdot 58^2 \cdot 256^2 \cdot 678^2 = 25^2 \cdot 78^2 \cdot 568^2 \cdot 278^2 \cdots & (11) \\
2 & 4 & 8 & 5 & 07 & 58 & 6 & \cdots 07^2 \cdot 58^2 \cdot 056^2 \cdot 678^2 = 05^2 \cdot 78^2 \cdot 568^2 \cdot 078^2 \cdots & (12) \\
0 & 2 & 8 & 3 & 47 & 38 & 6 & \cdots 47^2 \cdot 38^2 \cdot 346^2 \cdot 678^2 = 34^2 \cdot 78^2 \cdot 368^2 \cdot 467^2 \cdots & (13) \\
0 & 4 & 8 & 3 & 27 & 38 & 6 & \cdots 27^2 \cdot 38^2 \cdot 236^2 \cdot 678^2 = 23^2 \cdot 78^2 \cdot 368^2 \cdot 267^2 \cdots & (14) \\
2 & 4 & 8 & 3 & 07 & 38 & 6 & \cdots 07^2 \cdot 38^2 \cdot 036^2 \cdot 678^2 = 03^2 \cdot 78^2 \cdot 368^2 \cdot 067^2 \cdots & (15)
\end{array} \right.$$

$$
(\mathrm{IX})\left\{\begin{array}{ccccccclr}
\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \alpha & \beta & \delta & & \\
0 & 2 & 8 & 1 & 47 & 18 & 6 & \cdots 47^2\cdot 18^2\cdot 146^2\cdot 678^2 = 14^2\cdot 78^2\cdot 168^2\cdot 467^2 & \cdots (16)\\
0 & 4 & 8 & 1 & 27 & 18 & 6 & \cdots 27^2\cdot 18^2\cdot 126^2\cdot 678^2 = 12^2\cdot 78^2\cdot 168^2\cdot 267^2 & \cdots (17)\\
2 & 4 & 8 & 1 & 07 & 18 & 6 & \cdots 07^2\cdot 18^2\cdot 016^2\cdot 678^2 = 01^2\cdot 78^2\cdot 168^2\cdot 067^2 & \cdots (18)\\
0 & 6 & 8 & 5 & 27 & 58 & 4 & \cdots 27^2\cdot 58^2\cdot 245^2\cdot 478^2 = 25^2\cdot 78^2\cdot 458^2\cdot 247^2 & \cdots (19)\\
2 & 6 & 8 & 5 & 07 & 58 & 4 & \cdots 07^2\cdot 58^2\cdot 045^2\cdot 478^2 = 05^2\cdot 78^2\cdot 458^2\cdot 047^2 & \cdots (20)\\
0 & 6 & 8 & 3 & 27 & 38 & 4 & \cdots 27^2\cdot 38^2\cdot 234^2\ 478^2 = 23^2\cdot 78^2\cdot 348^2\cdot 247^2 & \cdots (21)\\
2 & 6 & 8 & 3 & 07 & 38 & 4 & \cdots 07^2\cdot 38^2\cdot 034^2\cdot 478^2 = 03^2\cdot 78^2\cdot 348^2\cdot 047^2 & \cdots (22)\\
0 & 6 & 8 & 1 & 27 & 18 & 4 & \cdots 27^2\cdot 18^2\cdot 124^2\cdot 478^2 = 12^2\cdot 78^2\cdot 148^2\cdot 247^2 & \cdots (23)\\
2 & 6 & 8 & 1 & 07 & 18 & 4 & \cdots 07^2\cdot 18^2\cdot 014^2\cdot 478^2 = 01^2\cdot 78^2\cdot 148^2\cdot 047^2 & \cdots (24)\\
4 & 6 & 8 & 5 & 07 & 58 & 2 & \cdots 07^2\cdot 58^2\cdot 025^2\cdot 278^2 = 05^2\cdot 78^2\cdot 258^2\cdot 027^2 & \cdots (25)\\
4 & 6 & 8 & 3 & 07 & 38 & 2 & \cdots 07^2\cdot 38^2\cdot 023^2\cdot 278^2 = 03^2\cdot 78^2\cdot 238^2\cdot 027^2 & \cdots (26)\\
4 & 6 & 8 & 1 & 07 & 18 & 2 & \cdots 07^2\cdot 18^2\cdot 012^2\cdot 278^2 = 01^2\cdot 78^2\cdot 128^2\cdot 027^2 & \cdots (27)
\end{array}\right.
$$

und eine grosse Anzahl ähnlicher, deren Bildungsweise ich späterhin, wo sie für die Rechnung nothwendig sind, angeben werde. —

Es lässt sich nun zeigen, dass vermöge dieser Relationen zwischen den Theta's mit Nullargumenten alle möglichen Quotienten dieser Theta's sich durch irgend 7 von ihnen ausdrücken lassen. Hierzu greife ich die Gleichungen 1, 2, 3, 4 des System's (VII) und 1, 3, 5 des System's (VIII) heraus und bringe sie zunächst auf die Form $b^2 + b'^2 = 1$, also

$$\frac{(8)^2\cdot(67)^2}{(9)^2\cdot(678)^2} + \frac{(6)^2\cdot(78)^2}{(9)^2\cdot(678)^2} = 1$$

$$\frac{(8)^2\cdot(47)^2}{(9)^2\cdot(478)^2} + \frac{(4)^2\cdot(78)^2}{(9)^2\cdot(478)^2} = 1$$

$$\frac{(8)^2\cdot(27)^2}{(9)^2\cdot(278)^2} + \frac{(2)^2\cdot(78)^2}{(9)^2\cdot(278)^2} = 1$$

$$\frac{(8)^2\cdot(07)^2}{(9)^2\cdot(078)^2} + \frac{(0)^2\cdot(78)^2}{(9)^2\cdot(078)^2} = 1$$

$$\frac{(67)^2\cdot(568)^2}{(56)^2\cdot(678)^2} + \frac{(6)^2\cdot(5678)^2}{(56)^2\cdot(678)^2} = 1$$

$$\frac{(67)^2\cdot(368)^2}{(36)^2\cdot(678)^2} + \frac{(6)^2\cdot(3678)^2}{(36)^2\cdot(678)^2} = 1$$

$$\frac{(67)^2\cdot(168)^2}{(16)^2\cdot(678)^2} + \frac{(6)^2\cdot(1678)^2}{(16)^2\cdot(678)^2} = 1\,.$$

Ich führe nun für die in jeder dieser Gleichungen zuerst stehenden 7 ϑ-Quotienten Constanten ein, zu deren Bezeichnung ich mich einer Reihe von 9 Grössen $a_0, a_1 \cdots a_8$ in der Weise bediene, dass nur die Quotienten der Differenzen je zweier von ihnen in den Definitionsgleichungen vorkommen. Setze ich ausserdem noch zur Abkürzung

$$a_\varkappa - a_\lambda = a_{\varkappa\lambda},$$

so soll sein:

$$
\frac{a_{78}}{a_{68}} = \frac{8^2 \cdot 67^2}{9^2 \cdot 678^2}, \quad \frac{a_{78}}{a_{48}} = \frac{8^2 \cdot 47^2}{9^2 \cdot 478^2}, \quad \frac{a_{78}}{a_{28}} = \frac{8^2 \cdot 27^2}{9^2 \cdot 278^2}, \quad \frac{a_{78}}{a_{08}} = \frac{8^2 \cdot 07^2}{9^2 \cdot 078^2}
$$

$$
\frac{a_{78}}{a_{58}} = \frac{67^2 \cdot 568^2}{56^2 \cdot 678^2}, \quad \frac{a_{78}}{a_{38}} = \frac{67^2 \cdot 368^2}{36^2 \cdot 678^2}, \quad \frac{a_{78}}{a_{18}} = \frac{67^2 \cdot 168^2}{16^2 \cdot 678^2}
$$

(X) sodass sich vermöge der obigen Gleichungen zunächst noch ergiebt:

$$
\frac{a_{67}}{a_{68}} = \frac{6^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 678^2}, \quad \frac{a_{47}}{a_{48}} = \frac{4^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 478^2}, \quad \frac{a_{27}}{a_{28}} = \frac{2^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 278^2}, \quad \frac{a_{07}}{a_{08}} = \frac{0^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 078^2}
$$

$$
\frac{a_{57}}{a_{58}} = \frac{6^2 \cdot 5678^2}{56^2 \cdot 678^2}, \quad \frac{a_{37}}{a_{38}} = \frac{67^2 \; 3678^2}{36^2 \cdot 678^2}, \quad \frac{a_{17}}{a_{18}} = \frac{67^2 \cdot 1678^2}{16^2 \cdot 678^2}
$$

Ich nehme nun an, die Moduln des betrachteten Theta-Systems seien rein imaginär. Dann sind die Theta's mit Nullargumenten sämmtlich reell, folglich ihre Quadrate positiv. Daraus folgt, dass, wenn nun $a_7 > a_8$ und $a_8 > 0$ genommen wird (worüber ja willkürlich verfügt werden kann, da durch die Gleichungen (X) nur 7 von den Constanten $a_\varkappa$ bestimmt sind), auch $a_0, a_1, \cdots a_6, a_7$ positiv sind und es ergiebt sich ferner aus den Gleichungen (X) und einer Anzahl ähnlicher, die sogleich noch entwickelt werden sollen, dass alsdann

$$
a_0 > a_1 > \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot > a_7 > a_8 > 0
$$

und dass also

$$
a_{\varkappa\lambda} > 0 \text{ sobald } \lambda > \varkappa
$$

ist. — Man kann nun vermöge der Beziehung

$$
\frac{a_{\varkappa\lambda}}{a_{\mu\nu}} = \frac{a_{\varkappa 8} - a_{\lambda 8}}{a_{\mu 8} - a_{\nu 8}}
$$

offenbar jeden beliebigen Quotienten dieser Form mit Hilfe des System's (X) durch ϑ-Functionen ausdrücken — und es werden sich dann umgekehrt alle möglichen ϑ-Quotienten, durch die Constanten $a_{\varkappa\lambda}$ ausdrücken lassen. Um dies schliesslich zu bewerkstelligen bilde ich zunächst eine Reihe von Quotienten der Grössen $a_{\varkappa\lambda}$, nämlich alle möglichen von der Form

$$
\frac{a_{\varkappa\lambda}}{a_{\iota\lambda}}
$$

wo:

$$
\left.\begin{aligned} \lambda &= 0, 2, \cdots 8 \\ \iota &= 0, 2, \cdots 8 \end{aligned}\right\} \iota \lessgtr \lambda
$$
$$
\varkappa = 1, 3, \cdots 7
$$

oder:

$$
\left.\begin{aligned} \lambda &= 1, 3, \cdots 7 \\ \iota &= 1, 3, \cdots 7 \end{aligned}\right\} \iota \lessgtr \lambda
$$
$$
\varkappa = 0, 2, \cdots 8
$$

von denen die ersteren den Relationen des System's (VII), die letzteren denen von (VIII) in derselben Weise entsprechen, wie die unter (X) gegebenen den zu ihrer Definition herbeigezogenen ϑ-Relationen. (Die Relationen IX dienen hierbei zur Vereinfachung gewisser resultirender Ausdrücke.)

Die betreffenden Ausdrücke finden sich auf der Tabelle am Ende unter (XI) zusammengestellt.

Ich bilde jetzt das folgende Product von Quotienten:

$$\frac{a_{01}}{a_{02}} \cdot \frac{a_{03}}{a_{04}} \cdot \frac{a_{05}}{a_{06}} \cdot \frac{a_{07}}{a_{08}} = \frac{0^8 \cdot\ 12^2 \cdot\ 34^2 \cdot\ 56^2 \cdot\ 78^2}{9^8 \cdot 012^2 \cdot 034^2 \cdot 056^2 \cdot 078^2}.$$

Nun folgt aus der Formel (G) (S. 455),

wenn $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, \alpha\ \ \beta\ \ \delta$

die Werthe 1 5 7 4 0 12 9 erhält: $0^2.12^2.34^2.5678^2 = 9^2.012^2.034^2.1234^2$

1 3 5 8 0 56 9 — $0^2.56^2.78^2.1234^2 = 9^2.056^2.078^2.5678^2$

und durch Multiplication dieser beiden Gleichungen:

$$0^4.12^2.34^2.56^2.78^2 = 9^4.012^2.034^2.056^2.078^2$$

Es geht somit die obige Relation über in:

$$\text{(XII)} \qquad (1)\ \frac{0^4}{9^4} = \frac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}}.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich vermöge der Beziehungen:

$\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, \alpha\ \ \beta\ \ \delta$

1 5 7 4 2 01 9 — $2^2.01^2.34^2.5678^2 = 9^2.012^2.234^2.0134^2$

1 3 5 8 2 56 9 — $2^2.56^2.78^2.0134^2 = 9^2.256^2.278^2.5678^2$

1 5 7 2 4 01 9 — $4^2.01^2.23^2.5678^2 = 9^2.014^2.234^2.0123^2$

1 3 5 8 4 56 9 — $4^2.56^2.78^2.0123^2 = 9^2.456^2.478^2.5678^2$

1 5 7 2 6 01 9 — $6^2.01^2.23^2.4578^2 = 9^2.016^2.236^2.0123^2$

1 3 5 8 6 45 9 — $6^2.45^2.78^2.0123^2 = 9^2.456^2.678^2.4578^2$

1 5 7 2 8 01 9 — $8^2.01^2.23^2.4567^2 = 9^2.018^2.238^2.0133^2$

1 3 5 6 8 45 9 — $8^2.45^2.67^2.0123^2 = 9^2.458^2.678^2.4567^2$

für die übrigen ϑ-Function mit einfachem geraden Index die Ausdrücke

$$\text{(XII)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} (2)\ \dfrac{2^4}{9^4} = \dfrac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}} & (3)\ \dfrac{4^4}{9^4} = \dfrac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{47}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}} \\ (4)\ \dfrac{6^4}{9^4} = \dfrac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}} & (5)\ \dfrac{8^4}{9^4} = \dfrac{a_{18}a_{38}a_{58}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}} \end{array} \right.$$

Wir bilden ferner das Product:

$$\frac{a_{12}}{a_{02}} \cdot \frac{a_{14}}{a_{04}} \cdot \frac{a_{16}}{a_{06}} \cdot \frac{a_{18}}{a_{08}} \cdot \frac{a_{03}}{a_{13}} \cdot \frac{a_{05}}{a_{15}} \cdot \frac{a_{07}}{a_{17}} = \frac{01^8 \cdot 018^4 \cdot\ 2^2 \cdot\ 4^2 \cdot\ 6^2 \cdot\ 38^2 \cdot\ 58^2 \cdot\ 78^2}{9^8.\ \ 8^4 \cdot 012^2 \cdot 014^2 \cdot 016^2 \cdot 0138^2 \cdot 0158^2 \cdot 0178^2}$$

und leiten jetzt zur Vereinfachung dieses Ausdruckes aus der Formel (G) die folgenden Beziehungen her:

$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4\ \alpha\ \ \beta\ \ \delta$		
1 5 7 8 2 01 9	—	$2^2.01^2.38^2.4567^2 = 9^2.012^2.238^2.0138^2$
1 3 7 8 4 01 9	—	$4^2.01^2.58^2.2367^2 = 9^2.014^2.458^2.0158^2$
1 3 5 8 6 01 9	—	$6^2.01^2.78^2.2345^2 = 9^2.016^2.678^2.0178^2$
1 3 5 6 8 01 9	—	$8^2.01^2.67^2.2345^2 = 9^2.018^2.678^2.0167^2$

Multiplicirt man jetzt die ersten dieser drei Gleichungen mit einander und dann noch kreuzweise mit der vierten, so ergiebt sich:

$$01^4 \cdot 018^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 38^2 \cdot 58^2 \cdot 78^2 \cdot 0167^2 \cdot 2367^2 \cdot 4567^2$$
$$= 9^4 \cdot 8^2 \cdot 012^2 \cdot 014^2 \cdot 016^2 \cdot 0138^2 \cdot 0158^2 \cdot 0178^2 \cdot 67^2 \cdot 238^2 \cdot 458^2$$

und es geht daher der obige Ausdruck zunächst über in:

$$\frac{a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}a_{03}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{13}a_{15}a_{17}} = \frac{01^4 \cdot 67^2 \cdot 018^2 \cdot 238^2 \cdot 458^2}{9^4 \cdot 8^2 \cdot 0167^2 \cdot 2367^2 \cdot 4567^2}.$$

Nun folgt aber noch aus Formel (G)

für $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4\ \alpha\ \ \beta\ \ \delta$
$= 0\ 4\ 6\ 3\ 67\ 018\ 8\ - 67^2 \cdot 018^2 \cdot 238^2 \cdot 458^2 = 8^2 \cdot 0167^2 \cdot 2367^2 \cdot 4567^2,$
mithin wird:

$$\text{(XIII, 1)} \qquad \frac{01^4}{9^4} = \frac{a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}a_{03}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{13}a_{15}a_{17}}.$$

In durchaus analoger Weise ergeben sich für die sämmtlichen übrigen ϑ-Functionen mit zweifachem Index, welche für die Nullargumente nicht verschwinden, die folgenden Ausdrücke:

$$\text{(XIII)} \left\{ \begin{array}{ll}
(2)\ \dfrac{03^4}{9^4} = \dfrac{a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}a_{01}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{13}a_{35}a_{37}} & (3)\ \dfrac{05^4}{9^4} = \dfrac{a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}a_{01}a_{03}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(4)\ \dfrac{07^4}{9^4} = \dfrac{\cancel{a_{17}}a_{47}a_{67}a_{78}a_{01}a_{03}a_{05}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{17}a_{37}a_{57}} & (5)\ \dfrac{12^4}{9^4} = \dfrac{a_{01}a_{14}a_{16}a_{18}a_{23}a_{25}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(6)\ \dfrac{14^4}{9^4} = \dfrac{a_{01}a_{12}a_{16}a_{18}a_{34}a_{45}a_{47}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} & (7)\ \dfrac{16^4}{9^4} = \dfrac{a_{01}a_{12}a_{14}a_{18}a_{36}a_{56}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(8)\ \dfrac{18^4}{9^4} = \dfrac{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}a_{38}a_{58}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} & (9)\ \dfrac{23^4}{9^4} = \dfrac{a_{03}a_{34}a_{36}a_{38}a_{12}a_{25}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(10)\ \dfrac{25^4}{9^4} = \dfrac{a_{05}a_{45}a_{56}a_{58}a_{12}a_{23}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}a_{15}a_{35}a_{57}} & (11)\ \dfrac{27^4}{9^4} = \dfrac{a_{07}a_{47}a_{67}a_{78}a_{12}a_{23}a_{25}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(12)\ \dfrac{34^4}{9^4} = \dfrac{a_{03}a_{23}a_{36}a_{38}a_{14}a_{45}a_{47}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} & (13)\ \dfrac{36^4}{9^4} = \dfrac{a_{03}a_{23}a_{34}a_{38}a_{16}a_{56}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(14)\ \dfrac{38^4}{9^4} = \dfrac{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}a_{18}a_{58}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (15)\ \dfrac{45^4}{9^4} = \dfrac{a_{05}a_{25}a_{56}a_{58}a_{14}a_{34}a_{47}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(16)\ \dfrac{47^4}{9^4} = \dfrac{a_{07}a_{27}a_{67}a_{78}a_{14}a_{34}a_{45}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} & (17)\ \dfrac{56^4}{9^4} = \dfrac{a_{05}a_{25}a_{45}a_{58}a_{16}a_{36}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(18)\ \dfrac{58^4}{9^4} = \dfrac{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}a_{18}a_{38}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (19)\ \dfrac{67^4}{9^4} = \dfrac{a_{07}a_{27}a_{47}a_{78}a_{16}a_{36}a_{56}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
\multicolumn{2}{c}{(20)\ \dfrac{78^4}{9^4} = \dfrac{a_{07}a_{27}a_{47}a_{67}a_{18}a_{38}a_{58}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}}.}
\end{array} \right.$$

/a.

Die entsprechenden Ausdrücke für die ϑ-Functionen mit dreifachem Index ergeben sich nunmehr unmittelbar mit Hülfe der Relationen (VII). Man erhält aus diesen:

$$
\text{(XIV)}\left\{\begin{array}{ll}
(1)\ \dfrac{678^4}{9^4}=\dfrac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{18}a_{38}a_{58}a_{07}a_{27}a_{47}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} & (2)\ \dfrac{478^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{18}a_{38}a_{58}a_{07}a_{27}a_{67}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(3)\ \dfrac{278^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{18}a_{38}a_{58}a_{07}a_{47}a_{67}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} & (4)\ \dfrac{078^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{18}a_{38}a_{58}a_{27}a_{47}a_{67}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(5)\ \dfrac{568^4}{9^4}=\dfrac{a_{16}a_{36}a_{67}a_{18}a_{38}a_{78}a_{05}a_{25}a_{45}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} & (6)\ \dfrac{368^4}{9^4}=\dfrac{a_{16}a_{56}a_{67}a_{18}a_{58}a_{78}a_{03}a_{23}a_{34}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(7)\ \dfrac{468^4}{9^4}=\dfrac{a_{36}a_{56}a_{67}a_{38}a_{58}a_{78}a_{01}a_{12}a_{14}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} & (8)\ \dfrac{458^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{34}a_{47}a_{18}a_{38}a_{78}a_{05}a_{25}a_{56}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(9)\ \dfrac{258^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{18}a_{38}a_{78}a_{05}a_{45}a_{56}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (10)\ \dfrac{058^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{18}a_{28}a_{78}a_{25}a_{45}a_{56}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(11)\ \dfrac{348^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{45}a_{47}a_{18}a_{58}a_{78}a_{03}a_{23}a_{36}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (12)\ \dfrac{148^4}{9^4}=\dfrac{a_{34}a_{45}a_{47}a_{38}a_{58}a_{78}a_{01}a_{12}a_{16}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(13)\ \dfrac{238^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{18}a_{58}a_{78}a_{03}a_{34}a_{36}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (14)\ \dfrac{038^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{18}a_{58}a_{78}a_{12}a_{14}a_{16}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(15)\ \dfrac{128^4}{9^4}=\dfrac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{38}a_{58}a_{78}a_{01}a_{14}a_{16}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} & (16)\ \dfrac{018^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{38}a_{58}a_{78}a_{12}a_{14}a_{16}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(17)\ \dfrac{467^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{16}a_{36}a_{56}a_{07}a_{27}a_{78}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} & (18)\ \dfrac{267^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{16}a_{36}a_{56}a_{07}a_{47}a_{78}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(19)\ \dfrac{067^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{16}a_{36}a_{56}a_{27}a_{47}a_{78}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} & (20)\ \dfrac{247^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{14}a_{34}a_{45}a_{07}a_{67}a_{78}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(21)\ \dfrac{047^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{14}a_{34}a_{45}a_{27}a_{67}a_{78}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} & (22)\ \dfrac{027^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{12}a_{23}a_{25}a_{47}a_{67}a_{78}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(23)\ \dfrac{456^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{34}a_{47}a_{16}a_{36}a_{67}a_{05}a_{25}a_{58}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (24)\ \dfrac{256^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{16}a_{36}a_{67}a_{05}a_{45}a_{58}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(25)\ \dfrac{056^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{16}a_{36}a_{67}a_{25}a_{45}a_{58}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (26)\ \dfrac{346^4}{9^4}=\dfrac{a_{14}a_{45}a_{47}a_{16}a_{56}a_{67}a_{03}a_{23}a_{38}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(27)\ \dfrac{146^4}{9^4}=\dfrac{a_{34}a_{45}a_{47}a_{36}a_{56}a_{67}a_{01}a_{12}a_{18}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} & (28)\ \dfrac{236^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{16}a_{56}a_{67}a_{03}a_{34}a_{38}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(29)\ \dfrac{036^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{16}a_{56}a_{67}a_{23}a_{34}a_{38}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (30)\ \dfrac{126^4}{9^4}=\dfrac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{36}a_{56}a_{67}a_{01}a_{14}a_{18}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(31)\ \dfrac{016^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{36}a_{56}a_{67}a_{12}a_{14}a_{18}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} & (32)\ \dfrac{245^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{14}a_{34}a_{47}a_{05}a_{56}a_{58}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(33)\ \dfrac{045^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{14}a_{34}a_{47}a_{25}a_{56}a_{58}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} & (34)\ \dfrac{025^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{12}a_{23}a_{27}a_{45}a_{56}a_{58}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(35)\ \dfrac{234^4}{9^4}=\dfrac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{14}a_{45}a_{47}a_{03}a_{36}a_{38}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} & (36)\ \dfrac{034^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{14}a_{45}a_{47}a_{23}a_{36}a_{38}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(37)\ \dfrac{124^4}{9^4}=\dfrac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{34}a_{45}a_{47}a_{03}a_{36}a_{38}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} & (38)\ \dfrac{014^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{34}a_{45}a_{47}a_{12}a_{16}a_{18}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(39)\ \dfrac{023^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{12}a_{25}a_{27}a_{34}a_{36}a_{38}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{35}a_{37}} & (40)\ \dfrac{012^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{23}a_{25}a_{27}a_{14}a_{16}a_{18}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{15}a_{17}}
\end{array}\right.
$$

Endlich bestimmen sich die ϑ-Functionen mit vierfachem Index am bequemsten mit Hülfe von Relationen, wie sie unter (VIII) gegeben worden sind; z. B.

$$\frac{5678^4}{9^4} = \frac{a_{05}\,a_{25}\,a_{45}\,a_{07}\,a_{27}\,a_{47}\,a_{16}\,a_{36}\,a_{18}\,a_{38}}{a_{06}\,a_{26}\,a_{46}\,a_{08}\,a_{28}\,a_{48}\,a_{15}\,a_{35}\,a_{17}\,a_{37}}.$$

Ich gehe indessen auf diese Ausdrücke hier nicht weiter ein, da sie für das Folgende nicht nothwendig sind.

Ich wende mich nun zu den fünf Relationen zurück, welche ich unter (VI) (S. 453) für die 10 ϑ-Functionen mit einfachem Index und beliebigen Argumenten $v_1 \cdots v_4$ entwickelt habe und zwar setze ich dieselben zunächst in die Form:

$$1 = \frac{(0)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(2)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \frac{(4)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} + \frac{(6)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} + \frac{(8)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[8]^2}{[9]^2}$$

$$1 = \frac{(018)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[1]^2}{[9]^2} - \frac{(128)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} - \frac{(148)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \frac{(168)^2}{(\cancel{9})^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}$$

$$1 = \frac{(038)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(238)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[3]^2}{[9]^2} - \frac{(348)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \frac{(368)^2}{(\cancel{9})^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}$$

$$1 = \frac{(058)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(258)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \frac{(458)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \frac{(\cancel{4}8)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[5]^2}{[9]^2} - \frac{(568)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}$$

$$1 = \frac{(078)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(278)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \frac{(478)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} + \frac{(678)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(\cancel{58})^2}\cdot\frac{[7]^2}{[9]^2}.$$

Oder, wenn man jetzt für die ϑ-Quotienten mit Nullargumenten die Constanten-Ausdrücke aus (XII), (XIII), (XIV) einsetzt:

$$(\mathrm{XV})\left\{\begin{aligned}
1 &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{47}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2}\\
&\qquad + \sqrt{\frac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{18}a_{38}a_{58}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}}}\cdot\frac{[8]^2}{[9]^2}\\
1 &= \sqrt{\frac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{08}}{a_{01}a_{02}a_{04}a_{06}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}a_{18}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}}}\cdot\frac{[1]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{28}}{a_{02}a_{12}a_{24}a_{26}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2}\\
&\qquad - \sqrt{\frac{a_{34}a_{45}a_{47}a_{48}}{a_{04}a_{14}a_{24}a_{46}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{36}a_{56}a_{67}a_{68}}{a_{06}a_{16}a_{26}a_{46}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}\\
1 &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{08}}{a_{02}a_{03}a_{04}a_{06}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{28}}{a_{02}a_{23}a_{24}a_{26}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{13}a_{35}a_{37}a_{38}}{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}}}\cdot\frac{[3]^2}{[9]^2}\\
&\qquad - \sqrt{\frac{a_{14}a_{45}a_{47}a_{48}}{a_{04}a_{24}a_{34}a_{46}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{16}a_{56}a_{67}a_{68}}{a_{06}a_{26}a_{56}a_{46}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}\\
1 &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{08}}{a_{02}a_{04}a_{05}a_{06}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{28}}{a_{02}a_{24}a_{25}a_{26}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{14}a_{34}a_{47}a_{48}}{a_{04}a_{24}a_{45}a_{46}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2}\\
&\qquad - \sqrt{\frac{a_{15}a_{35}a_{57}a_{58}}{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}}}\cdot\frac{[5]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{16}a_{36}a_{67}a_{68}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{56}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}\\
1 &= \sqrt{\frac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{08}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{07}}}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{28}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{27}}}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \sqrt{\frac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{48}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{47}}}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2}\\
&\qquad + \sqrt{\frac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{68}}{a_{06}a_{28}a_{46}a_{67}}}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} - \sqrt{\frac{a_{17}a_{37}a_{57}a_{78}}{a_{02}a_{24}a_{47}a_{67}}}\cdot\frac{[\cancel{6}]^2}{[9]^2}
\end{aligned}\right.$$

Hierbei sind die Wurzelausdrücke, welche die Coëfficienten diese Gleichungen bilden, sämmtlich positiv zu nehmen, da ja in Folge de oben gemachten Annahme die ϑ-Quadrate für die Nullargument sämmtlich positiv zu nehmen sind. (NB. Auch wenn man diese Annahme fallen lässt, so ist das Vorzeichen jedes dieser Wurzelausdrücke durch den entsprechenden quadratischen ϑ-Quotienten eindeutig definirt.)

Aus diesen fünf Gleichungen zwischen den neun ϑ-Quotienten $\frac{\vartheta_0(v_1\cdots)}{\vartheta_9(v_1\cdots)}\;\cdots\;\frac{\vartheta_8(v_1\cdots)}{\vartheta_9(v_1\cdots)}$ lassen sich je fünf dieser Quotienten durch die anderen vier ausdrücken. Statt dessen kann man aber offenbar alle 9 Quotienten durch 4 neue unabhängige Variablen $x_1\cdots x_4$ darstellen. Wir setzen:

$$
(\mathrm{XVI})\left\{
\begin{aligned}
\frac{\vartheta_0^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} &= \frac{(a_0-x_1)(a_0-x_2)(a_0-x_3)(a_0-x_4)}{\sqrt{a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}a_{05}a_{06}a_{07}a_{08}}}\\
\frac{\vartheta_1^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} &= \frac{(a_1-x_1)(a_1-x_2)(a_1-x_3)(a_1-x_4)}{\sqrt{a_{01}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}a_{18}}}\\
\frac{\vartheta_2^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} &= -\frac{(a_2-x_1)(a_2-x_2)(a_2-x_3)(a_2-x_4)}{\sqrt{a_{02}a_{12}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}a_{27}a_{28}}}\\
\frac{\vartheta_3^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} &= -\frac{(a_3-x_1)(a_3-x_2)(a_3-x_3)(a_3-x_4)}{\sqrt{a_{03}a_{13}a_{23}a_{34}a_{35}a_{36}a_{37}a_{38}}}\\
\frac{\vartheta_4^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} &= \frac{(a_4-x_1)(a_4-x_2)(a_4-x_3)(a_4-x_4)}{\sqrt{a_{04}a_{14}a_{24}a_{34}a_{45}a_{46}a_{47}a_{48}}}\\
\frac{\vartheta_5^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} &= \frac{(a_5-x_1)(a_5-x_2)(a_5-x_3)(a_5-x_4)}{\sqrt{a_{05}a_{15}a_{25}a_{35}a_{45}a_{56}a_{57}a_{58}}}\\
\frac{\vartheta_6^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} &= -\frac{(a_6-x_1)(a_6-x_2)(a_6-x_3)(a_6-x_4)}{\sqrt{a_{06}a_{16}a_{26}a_{36}a_{46}a_{56}a_{67}a_{68}}}\\
\frac{\vartheta_7^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} &= -\frac{(a_7-x_1)(a_7-x_2)(a_7-x_3)(a_7-x_4)}{\sqrt{a_{07}a_{17}a_{27}a_{37}a_{47}a_{57}a_{67}a_{78}}}\\
\frac{\vartheta_8^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)} &= \frac{(a_8-x_1)(a_8-x_2)(a_8-x_3)(a_8-x_4)}{\sqrt{a_{08}a_{18}a_{28}a_{38}a_{48}a_{58}a_{68}a_{78}}}
\end{aligned}\right.
$$

Die Wurzelzeichen in den Nennern dieser Ausdrücke sind wiederum sämmtlich positiv zu nehmen, da für $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$ — wo dann x_1, x_2, x_3, x_4 in Folge der Relationen (XII) die Werthe a_1, a_3, a_5, a_7 annehmen müssen — in Folge der gemachten Annahme die betreffenden Ausdrücke wiederum positiv werden müssen.

Durch Einsetzen der Ausdrücke (XVI) gehen nun die Gleichungen (XV) in die folgenden über:

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{(a_0-x_1)\cdots(a_0-x_4)}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}} - \frac{(a_2-x_1)\cdots(a_2-x_4)}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}} + \frac{(a_4-x_1)\cdots(a_4-x_4)}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}}\\
- \frac{(a_6-x_1)\cdots(a_6-x_4)}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{\cancel{46}\,68}} + \frac{(a_8-x_1)\cdots(a_8-x_4)}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{(a_0-x_1)\cdots(a_0-x_4)}{a_{01}a_{02}a_{04}a_{06}} - \frac{(a_1-x_1)\cdots(a_1\cdots x_4)}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}} + \frac{(a_2-x_1)\cdots(a_2-x_4)}{a_{02}a_{12}a_{24}a_{26}}\\
- \frac{(a_4-x_1)\cdots(a_4-x_4)}{a_{04}a_{14}a_{24}a_{46}} + \frac{(a_6-x_1)\cdots(a_6-x_4)}{a_{06}a_{16}a_{26}a_{46}}
\end{aligned}
$$

$$1=\frac{(a_0-x_1)\cdots(a_0-x_4)}{a_{02}a_{03}a_{04}a_{06}}-\frac{(a_2-x_1)\cdots(a_2-x_4)}{a_{02}a_{23}a_{24}a_{26}}+\frac{(a_3-x_1)\cdots(a_3-x_4)}{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}}$$
$$-\frac{(a_4-x_1)\cdots(a_4-x_4)}{a_{04}a_{24}a_{34}a_{46}}+\frac{(a_6-x_1)\cdots(a_6-x_4)}{a_{06}a_{26}a_{36}a_{46}}$$

$$1=\frac{(a_0-x_1)\cdots(a_0-x_4)}{a_{02}a_{04}a_{05}a_{06}}-\frac{(a_2-x_1)\cdots(a_2-x_4)}{a_{02}a_{24}a_{25}a_{26}}+\frac{(a_4-x_1)\cdots(a_4-x_4)}{a_{04}a_{24}a_{45}a_{46}}$$
$$-\frac{(a_5-x_1)\cdots(a_5-x_4)}{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}}+\frac{(a_6-x_1)\cdots(a_6-x_4)}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{56}}.$$

$$1=\frac{(a_0-x_1)\cdots(a_0-x_4)}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{07}}-\frac{(a_2-x_1)\cdots(a_2-x_4)}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{27}}+\frac{(a_4-x_1)\cdots(a_4-x_4)}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{47}}$$
$$-\frac{(a_6-x_1)\cdots(a_6-x_4)}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{67}}+\frac{(a_7-x_1)\cdots(a_7-x_4)}{a_{07}a_{27}a_{47}a_{67}}$$

welche, wie man sich leicht überzeugt, identisch befriedigt werden. Setzt man nämlich

$$\varphi(z)=(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-x_4)$$

$$Q(z)=(z-a_0)(z-a_2)(z-a_4)(z-a_6)(z-a_8)\cdot\left(\frac{dQ(z)}{dz}\right)_{z=a_\alpha}=Q'(a_\alpha),$$

so lässt sich die erste der obigen Gleichungen auf die Form bringen:

$$1=\frac{\varphi(a_0)}{Q'(a_0)}+\frac{\varphi(a_2)}{Q'(a_2)}+\frac{\varphi(a_4)}{Q'(a_4)}+\frac{\varphi(a_6)}{Q'(a_6)}+\frac{\varphi(a_8)}{Q'(a_8)}$$

und dass diese Gleichung identisch befriedigt wird, folgt unmittelbar aus der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\varphi(z)}{Q(z)}=\frac{\varphi(a_0)}{Q'(a_0)}\cdot\frac{1}{z-a_0}+\frac{\varphi(a_2)}{Q'(a_2)}\cdot\frac{1}{z-a_2}+\cdots+\frac{\varphi(a_8)}{Q'(a_8)}\,\frac{1}{z-a_8}$$

durch Multiplication mit $Q(z)$ und Aufsuchung des Coëfficienten von z^5. Die Identität der übrigen Gleichungen ergiebt sich alsdann unmittelbar, wenn man an Stelle von a_8 der Reihe nach a_1, a_3, a_5, a_7 setzt. — Daraus folgt dann die Berechtigung, die Ausdrücke der 15 einfachen ϑ-Quotienten durch $x_1\cdots x_4$ in der Form (XVI) anzusetzen.

Man kann nun auch alle möglichen anderen ϑ-Quotienten durch $x_1\cdots x_4$ ausdrücken.

Ich will allgemein zeigen, in welcher Weise dies für die ϑ-Quotienten, welche aus einer ϑ-Function mit zweifachem Index und $\vartheta_9(v_1\cdots v_4)$ gebildet sind, zu bewerkstelligen ist, da diese späterhin in den ersten Ableitungen der Functionen (XVI) auftreten werden. Hierzu setze ich zunächst in der Formel (D, 2) — S. 447 — statt $u_\alpha\cdots v_\alpha$ und bezeichne analog den bisher gebrauchten Abkürzungen $\vartheta_\mu(v_1\cdots v_4)$ mit $[\mu]$, $\vartheta_\mu(0, 0, 0, 0)$ mit (μ) — dann wird

$$\text{(H)}\qquad (\eta)(\eta\alpha\beta)\,[\alpha]\,[\beta]=\sum_\gamma(-1)^{c_\gamma}(\eta\gamma\alpha)\,(\eta\gamma\beta)\,[\gamma]\,[\gamma\alpha\beta].$$

Ich bezeichne ferner mit

$$r_0\; r_1\; r_2\; r_3\; r_4$$

die Reihe der geraden Zahlen 0, 2, 4, 6, 8 in irgend einer Reihenfolge, desgleichen mit

$$s_1\ s_2\ s_3\ s_4$$

die der ungeraden 1, 3, 5, 7. Dann wird zunächst — wenn ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 gleich r_1, r_2, r_3, r_4 gewählt werden:

$$\eta = (1,\ 3,\ 5,\ 7,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4) = r_0.$$

Ausserdem werde noch gesetzt:

$$\alpha = s_1 \quad \beta = (r_0 s_1) \quad \delta = (r_1 r_2 r_3 r_4).$$

Dann nimmt γ die folgende Werthe an:

$$\begin{array}{lllllll}
(r_1 r_2 r_3 r_4) & - & - & - & - & & (1)\\
(r_2 r_3 r_4) & (r_1 r_3 r_4) & (r_1 r_2 r_4) & (r_1 r_2 r_3) & - & & (2)\\
(r_3 r_4) & (r_2 r_4) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & (r_1 r_2) & & (3)\\
r_4\quad r_3\quad r_2\quad r_1 & - & - & - & - & & (4)\\
9 & - & - & - & - & - & (5).
\end{array}$$

Mithin erhält $\eta\gamma\beta$ für die γ der ersten, zweiten und fünften Zeile die Werthe:

$$\begin{array}{l}
(s_1 s_2 s_3 s_4 r_0 s_1)\\
(s_1 s_2 s_3 s_4 r_0 r_1 s_1) \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (s_1 s_2 s_3 s_4 r_0 r_4 s_1)\\
s_1
\end{array}$$

und $\eta\gamma\alpha$ für die γ der dritten Zeile die Werthe:

$$(s_1 s_2 s_3 s_4 r_1 r_2 s_1)\ (s_1 s_2 s_3 s_4 r_1 r_3 s_1) \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (s_1 s_2 s_3 s_4 r_3 r_4 s_1),$$

so dass die betreffenden Glieder sämmtlich verschwinden müssen, und nur diejenigen mit den γ der vierten Zeile übrig bleiben, für welche

$$\begin{aligned}
\eta\gamma\alpha &= (r_0 r_4 s_1),\ (r_0 r_3 s_1),\ (r_0 r_2 s_1),\ (r_0 r_1 s_1)\\
\eta\gamma\beta &= \ (r_4 s_1),\quad (r_3 s_1),\quad (r_2 s_1),\quad (r_1 s_1)\\
\gamma\alpha\beta &= \ (r_0 r_4),\quad (r_0 r_3),\quad (r_0 r_2),\quad (r_0 r_1).
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir daher noch mit $c_1, \cdot\cdot\, c_4$ den Factor ± 1, so liefert die Formel (H) nunmehr die folgende Beziehung:

$$(\mathrm{J}) \begin{cases} (9)(r_0)[s_1][r_0 s_1] + c_1 (r_1 s_1)(r_0 r_1 s_1)[r_1][r_0 r_1] + c_2 (r_2 s_1)(r_0 r_2 s_1)[r_2][r_0 r_2] \\ \qquad + c_3 (r_3 s_1)(r_0 r_3 s_1)[r_3][r_0 r_3] + c_4 (r_4 s_1)(r_0 r_4 s_1)[r_4][r_0 r_4] = 0. \end{cases}$$

Nun müssen ferner lineare homogene Relationen — (wie allgemein gezeigt wurde) — zwischen folgenden ϑ-Quadraten stattfinden:

$$\begin{array}{l}
[9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_2]\ [r_3]\ [s_1]\\
[9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_2]\ [r_4]\ [s_1]\\
[9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_3]\ [r_4]\ [s_1]\\
[9]\ [r_0]\ [r_2]\ [r_3]\ [r_4]\ [s_1],
\end{array}$$

folglich, wenn man auf die Argumente in den betreffenden Gleichungen diejenigen Substitutionen halber Perioden angewendet denkt, welche durch den Index r_0 charakterisirt werden, auch zwischen folgenden ϑ-Quadraten:

$$[r_0]\ [9]\ [r_0 r_1]\ [r_0 r_2]\ [r_0 r_3]\ [r_0 s_1]$$
$$[r_0]\ [9]\ [r_0 r_1]\ [r_0 r_2]\ [r_0 r_4]\ [r_0 s_1]$$
$$[r_0]\ [9]\ [r_0 r_1]\ [r_0 r_3]\ [r_0 r_4]\ [r_0 s_1]$$
$$[r_0]\ [9]\ [r_0 r_2]\ [r_0 r_3]\ [r_0 r_4]\ [r_0 s_1].$$

Aus diesen vier Gleichungen in Verbindung mit Gl. (J) kann man nun irgend vier der 5 Grössen $[r_0 r_1] \cdots [r_0 r_4]$, $[r_0 s_1]$ eliminiren und erhält dann schliesslich eine Gleichung, in welcher ausser *einer* solchen ϑ-Function mit den Argumenten $(v_1 \cdots v_4)$ nur noch solche mit einfachen Indices, und ausserdem ϑ-Functionen mit Nullargumenten enthalten sind, und aus der man also vermöge der Ausdrücke (XVI) und (XII), (XIII), (XIV) die Quotienten von der Form $\frac{[r_0 r_1]^2}{[9]^2} \cdots$ und $\frac{[r_0 s_1]^2}{[9]^2}$ als Functionen von $x_1 \cdots x_4$ und der Constanten $a_0 \cdots a_8$ darstellen kann. Hierbei bedeuten r_0, r_1 beliebige gerade, s_1 eine beliebige ungerade Zahl der Reihe $0, 1, \cdots 8$. Es bleibt also noch der Fall zu betrachten übrig, dass beide Ziffern des zusammengesetzten Index ungerade Zahlen sind, der betreffende Quotient also die Form hat $\frac{[s_1 s_2]^2}{[9]^2}$.

Nun muss eine homogene Linear-Relation zwischen den ϑ-Quadraten:

$$[s_1]\ [s_2]\ [9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_2]$$

bestehen, folglich auch — vermöge der Substitution (s_1) — zwischen:

$$[9]\ [s_1 s_2]\ [s_1]\ [r_0 s_1]\ [r_1 s_1]\ [r_2 s_1]$$

und da diese Gleichung ausser $[s_1 s_2]$ nur solche ϑ-Functionen enthält, wis sie bereits oben betrachtet worden sind, so ergiebt sich, dass man jetzt auch die Quotienten von der Form $\frac{[s_1 s_2]^2}{[9]^2}$ als Functionen von $x_1, \cdots x_4$, $a_0 \cdots a_8$ darstellen kann.

Setzt man

$$(z - a_0)(z - a_1) \cdots (z - a_7)(z - a_8) = R(z)$$
$$(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - x_4) = \varphi(z)$$

und

$$\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)_{z=a_\alpha} = R'(a_\alpha)$$

$$\left(\frac{d\varphi(z)}{dz}\right)_{z=x_\alpha} = \varphi'(x_\alpha),$$

so ergeben sich auf diese Weise — wenn man die zweideutigen Wurzelvorzeichen so wählt, dass die Endausdrücke mit denjenigen übereinstimmen, wie sie späterhin in den Ableitungen der Functionen mit einfachem Index auftreten werden — Beziehungen von der Form:

$$\text{(XVII)}\quad \frac{\vartheta_{\lambda\mu}(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9(v_1\cdots v_4)}=\frac{\sqrt{(-1)^{\bar\lambda+\bar\mu}\,a_{\lambda\mu}\,\varphi(a_\lambda)\,\varphi(a_\mu)}}{\sqrt[4]{(-1)^{\lambda+\mu}R'(a_\lambda)R'(a_\mu)}}\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_\lambda)(x_{\mathfrak{a}}-a_\mu)\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}\right\}$$

wo $\bar\lambda$ und $\bar\mu$ die grösste in $\frac{\lambda}{2}$ resp. $\frac{\mu}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnen und $a_\lambda > a_\mu$, also $a_{\lambda\mu}$ positiv zu nehmen ist.

Es handelt sich jetzt darum, den Beweis zu führen, dass der durch die Gleichungen (XVI) und (XVII) statuirte Zusammenhang zwischen den Variablen v_1, v_2, v_3, v_4 und x_1, x_2, x_3, x_4 wirklich ein derartiger ist, dass sich die Differentialien $dv_1 \cdots dv_4$ als hyperelliptische Differentialausdrücke in $x_1 \cdots x_4$ darstellen, dass also Gleichungen bestehen von der Form:

$$dv_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(x_{\mathfrak{b}}, \sqrt{R(x_{\mathfrak{b}})})\,dx_{\mathfrak{b}}.$$

Zu diesem Behufe führen wir vier neue Variablen $u_1 \cdots u_4$ ein, welche wir durch hyperelliptische Differentialgleichungen von ganz bestimmter Form definiren: alsdann wird sich zeigen lassen, dass sich jede der Grössen $dv_{\mathfrak{a}}$ in der Form

$$dv_{\mathfrak{a}} = A_{\mathfrak{a}}du_1 + B_{\mathfrak{a}}du_2 + C_{\mathfrak{a}}du_3 + D_{\mathfrak{a}}du_4$$

darstellen lässt, wo $A_{\mathfrak{a}} \cdots D_{\mathfrak{a}}$, welche offenbar vermöge der identischen Relation

$$dv_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial v_{\mathfrak{a}}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial v_{\mathfrak{a}}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial v_{\mathfrak{a}}}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial v_{\mathfrak{a}}}{\partial u_4}du_4$$

nichts anderes sind als die partiellen Ableitungen von $v_{\mathfrak{a}}$ nach $u_1 \cdots u_4$, sich als fest bestimmte Constanten ergeben.

Ich setze

$$(z-a_1)(z-a_3)(z-a_5)(z-a_7) = P(z),\ \left(\frac{dP(z)}{dz}\right)_{z=a_{\mathfrak{a}}} = P'(a_{\mathfrak{a}}),$$

dann sollen $u_1 \cdots u_4$ durch die folgenden Differentialgleichungen definirt werden:

$$\text{(XVIII)}\quad \begin{cases} du_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_1)}{x_1-a_1}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_2)}{x_2-a_1}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \qquad + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_3)}{x_3-a_1}\cdot\frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_4)}{x_4-a_1}\cdot\frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \\ du_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_1)}{x_1-a_3}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_2)}{x_2-a_3}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \qquad + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_3)}{x_3-a_3}\cdot\frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_4)}{x_4-a_3}\cdot\frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \\ du_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_1)}{x_1-a_5}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_2)}{x_2-a_5}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \qquad + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_3)}{x_3-a_5}\cdot\frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_4)}{x_4-a_5}\cdot\frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \end{cases}$$

$$\text{(XVIII)} \quad \begin{cases} du_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_1)}{x_1 - a_7} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_2)}{x_2 - a_7} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_3)}{x_3 - a_7} \cdot \frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_4)}{x_4 - a_7} \cdot \frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesem System dx_2, dx_3, dx_4, und beachtet, dass:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x_1}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial x_1}{\partial u_4} du_4,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} = - \frac{(x_4 - a_1)(x_3 - a_1)(x_2 - a_1) 2\sqrt{R(x_1)}}{a_{13} a_{15} a_{17} (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)} = \frac{2\varphi(a_1)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_1)(a_1 - x_1)\varphi'(x_1)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_2} = \frac{(x_4 - a_3)(x_3 - a_3)(x_2 - a_3) 2\sqrt{R(x_1)}}{a_{13} a_{35} a_{37} (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)} = \frac{2\varphi(a_3)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_3)(a_3 - x_1)\varphi'(x_1)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_3} = - \frac{(x_4 - a_5)(x_3 - a_5)(x_2 - a_5) 2\sqrt{R(x_1)}}{a_{15} a_{35} a_{57} (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)} = \frac{2\varphi(a_5)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_5)(a_5 - x_1)\varphi'(x_1)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_4} = \frac{(x_4 - a_7)(x_3 - a_7)(x_2 - a_7) 2\sqrt{R(x_1)}}{a_{17} a_{37} a_{57} (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)} = \frac{2\varphi(a_7)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_7)(a_7 - x_1)\varphi'(x_1)}$$

und analoge Ausdrücke für x_2, x_3, x_4, so dass allgemein:

$$\text{(XIX)} \qquad \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \frac{2\varphi(a_{2\mathfrak{b}-1})\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{P'(a_{2\mathfrak{b}-1})(a_{2\mathfrak{b}-1} - x_{\mathfrak{a}})\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}.$$

Ich bezeichne ferner

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1 \cdots v_4)}{\vartheta_9(v_1 \cdots v_4)} \text{ mit } f_\alpha(v_1 \cdots v_4)$$

und bilde zunächst

$$\frac{\partial f_0(v \cdots v_4)}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}\left\{\frac{\sqrt{\varphi(a_0)}}{\sqrt[4]{R'(a_0)}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{R'(a_0)}}\left\{\frac{\partial\sqrt{\varphi(a_0)}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial\sqrt{\varphi(a_0)}}{\partial x_4} \cdot \frac{\partial x_4}{\partial u_1}\right\}$$

$$= - \frac{\varphi(a_1)\sqrt{\varphi(a_0)}}{\sqrt[4]{R'(a_0)} \cdot P'(a_1)} \sum_{1}^{4}{}_{\mathfrak{a}} \frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(a_0 - x_{\mathfrak{a}})(a_1 - x_{\mathfrak{a}})\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}$$

$$\text{(XXa)} \quad \begin{cases} = -\sqrt{\frac{a_{12} a_{14} a_{16} a_{18}}{a_{13} a_{15} a_{17}}} \cdot f_1(v_1 \cdots v_4) f_{01}(v_1 \cdots v_4) \\ \text{Ebenso:} \\ \frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial u_2} = -\sqrt{\frac{a_{23} a_{34} a_{36} a_{38}}{a_{13} a_{35} a_{37}}} \cdot f_3(v_1 \cdots v_4) f_{03}(v_1 \cdots v_4) \\ \frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial u_3} = -\sqrt{\frac{a_{25} a_{45} a_{56} a_{58}}{a_{15} a_{35} a_{57}}} \cdot f_5(v_1 \cdots v_4) f_{05}(v_1 \cdots v_4) \\ \frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial u_4} = -\sqrt{\frac{a_{27} a_{47} a_{67} a_{78}}{a_{17} a_{37} a_{57}}} \cdot f_7(v_1 \cdots v_4) f_{07}(v_1 \cdots v_4) \end{cases}$$

und in ähnlicher Weise, wenn wiederum:

$$(z-a_0)(z-a_2)(z-a_4)(z-a_6)(z-a_8)=Q(z)$$

gesetzt wird, allgemein:

$$\text{(XXb)}\quad \frac{\partial f_{2\mathfrak{a}}(v_1\cdots v_4)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}=-\sqrt{\pm\frac{1}{(a_{2\mathfrak{b}-1}-a_{\mathfrak{a}})}\cdot\frac{-Q(a_{2\mathfrak{b}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{b}-1})}}f_{2\mathfrak{b}-1}(v_1\cdots v_4)f_{2\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(v_1\cdots v_4)$$

wo das Vorzeichen von $\pm(a_{2\mathfrak{b}-1}-a_{\mathfrak{a}})$ so zu wählen ist, dass diese Grösse — und damit, wie leicht ersichtlich, der ganze Ausdruck unter der Wurzel positiv wird.

Es sollen jetzt diese Ausdrücke für die partiellen Ableitungen von $f_{2\mathfrak{a}}(v_1\cdots v_4)$ nach $u_1\cdots u_4$ mit den entsprechenden Ableitungen nach $v_1\cdots v_4$ verglichen werden. Um diese letzteren herzuleiten, entwickle ich eine Formel, vermöge deren gewisse ϑ-Producte, deren Argumente aus Summen und Differenzen zweier Systeme von Variablen bestehen, sich durch Aggregate von ϑ-Functionen mit den betreffenden einfachen Variablen ausdrücken.

Aus der allgemeinen Additionsformel (D, 1) — S. 447 — folgt, wenn man $w_{\mathfrak{a}}=0$ setzt und ausserdem $v_{\mathfrak{a}}$ statt $u_{\mathfrak{a}}$, $w_{\mathfrak{a}}$ statt $v_{\mathfrak{a}}$ schreibt:

$$\text{(K)}\quad \vartheta_\eta\vartheta_{\eta\alpha\beta}\vartheta_\alpha(v_1+w_1,\cdots v_4+w_4)\,\vartheta_\beta(v_1-w_1,\cdots v_4-w_4)$$
$$=\sum_\gamma(-1)^{c_\gamma}\vartheta_\gamma(v_1\cdots v_4)\,\vartheta_{\gamma\alpha\beta}(v_1\cdots v_4)\,\vartheta_{\eta\gamma\alpha}(w_1\cdots w_4)\,\vartheta_{\eta\gamma\beta}(w_1\cdots w_4)\cdot$$

Wählt man jetzt

$$\eta=(1,3,5,7,1,3,5,7)=9\quad \delta=9\quad \alpha=0\quad \beta=9$$

und bezeichnet zur Abkürzung

$$\begin{array}{ll}
\vartheta_\lambda(v_1+w_1,\cdots v_4+w_4) & \text{mit } P_\lambda\\
\vartheta_\lambda(v_1-w_1,\cdots v_4-w_4) & \text{mit } Q_\lambda\\
\vartheta_\lambda(v_1\cdots v_4) & \text{mit } p_\lambda\\
\vartheta_\lambda(w_1\cdots w_4) & \text{mit } q_\lambda\\
\vartheta_\lambda(0\cdots 0)\ \text{wie früher} & \text{mit } \lambda,
\end{array}$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\text{(XXI)}\quad 0\cdot 9\cdot P_0\cdot Q_9 = {} & p_9p_0q_9q_0+p_1p_{01}q_1q_{01}+p_3p_{03}q_3q_{03}+p_5p_{05}q_5q_{05}\\
&+p_7p_{07}q_7q_{07}+p_{13}p_{013}q_{13}q_{013}+p_{15}p_{015}q_{15}q_{015}\\
&+p_{17}p_{017}q_{17}q_{017}+p_{35}p_{035}q_{35}q_{035}+p_{37}p_{037}q_{37}q_{037}\\
&+p_{57}p_{057}q_{57}q_{057}+p_{135}p_{0135}q_{135}q_{0135}+p_{137}p_{0137}q_{137}q_{0137}\\
&+p_{157}p_{0157}q_{157}q_{0157}+p_{357}p_{0357}q_{357}q_{0357}\\
&+p_{1357}p_{2468}q_{1357}q_{2468}\cdot\end{aligned}$$

(Ich bemerke beiläufig, dass sich ganz analoge Relationen für die noch übrigen P_λ mit einfachem geraden Index ergeben, wenn man in Gl. (K) mit Beibehaltung der übrigen Bestimmungen α der Reihe nach die Werthe 2, 4, 6, 8 annehmen lässt. — Giebt man ferner α die

Werthe 1, 3, 5, 7, so erhält man ähnliche Beziehungen für die P_λ mit ungeradem Index; nur darf in diesen Fällen η nicht den Werth 9 erhalten, weil sonst $\vartheta_{\eta\alpha\beta}$ und somit die linke Seite verschwinden würde. Man hat vielmehr dann für η irgend einen geraden Index z. B. $\eta = (1, 3, 5, 7, 0, 2, 4, 6) = 8$ zu wählen und man erhält z. B. auf diese Weise für $\alpha = 1$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 18 \cdot P_1 \cdot Q_9 = & p_9 p_1 q_8 q_{18} + p_0 p_{01} q_{08} q_{018} - p_2 p_{12} p_{28} p_{128} - p_4 p_{14} p_{18} p_{148} \\ & p_6 p_{16} q_{68} q_{168} - p_{02} p_{012} q_{028} q_{0128} - p_{04} p_{014} q_{048} q_{0148} \\ & - p_{06} p_{016} q_{068} q_{0168} + p_{24} p_{124} q_{248} q_{1248} + p_{26} p_{126} q_{268} p_{1268} \\ & + p_{46} p_{146} q_{468} q_{1468} + p_{024} p_{0124} q_{0248} q_{3567} + p_{026} p_{0126} q_{0268} q_{3457} \\ & + p_{046}' p_{0146} q_{0468} q_{2357} - p_{246} p_{1246} q_{2468} q_{0357} \\ & - p_{0246} p_{3578} q_{1357} q_{357} \cdot) \end{aligned}$$

Ich differenzire jetzt Gl. (XXI) nach $w_\mathfrak{a}$ (für $\mathfrak{a} = 1, 2, 3, 4$) und setze dann $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$. Dabei ist zu beachten, dass wenn F eine beliebige Function von ϱ Variablen darstellt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial y_\mathfrak{a}} & = \frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial (x_\mathfrak{a} \pm y_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\partial (x_\mathfrak{a} \pm y_\mathfrak{a})}{\partial y_\mathfrak{a}} \\ & = \pm \frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial (x_\mathfrak{a} \pm y_\mathfrak{a})}, \end{aligned}$$

mithin

$$\left(\frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial y_\mathfrak{a}}\right)_{y_1 \ldots y_\varrho = 0} = \pm \frac{\partial F(x_1 \cdots x_\varrho')}{\partial x_\mathfrak{a}}.$$

Es wird daher bei jener Differentiation die linke Seite der Gleichung (XXI) die Form annehmen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial (P_0 Q_9)}{\partial w_\mathfrak{a}}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0} & = \left(Q_9 \frac{\partial P_0}{\partial (v_\mathfrak{a} + w_\mathfrak{a})} - P_0 \frac{\partial Q_9}{\partial (v_\mathfrak{a} - w_\mathfrak{a})}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0} \\ & = p_9 \frac{\partial p_0}{\partial v_\mathfrak{a}} - p_0 \frac{\partial p_9}{\partial v_\mathfrak{a}} \\ & = p_9^2 \frac{\partial \frac{p_0}{p_9}}{\partial v_\mathfrak{a}} \end{aligned}$$

oder mit Anwendung der bereits früher gebrauchten Bezeichnungen:

$$\left(\frac{\partial (P_0 Q_9)}{\partial w_\mathfrak{a}}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0} = [9]^2 \frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial v_\mathfrak{a}}.$$

Auf der rechten Seite der Gl. (XXI) sind die p von $w_\mathfrak{a}$ unabhängig; ferner müssen die Ausdrücke von der Form

$$\frac{\partial (q_\alpha q_\beta)}{\partial w_\mathfrak{a}} = q_\alpha \frac{\partial q_\beta}{\partial w_\mathfrak{a}} + q_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial w_\mathfrak{a}}$$

für $w_1 \cdots w_4 = 0$ verschwinden, sobald α und β *gleichzeitig* Indices gerader oder Indices ungerader Theta's sind (weil im ersten Falle

$\frac{\partial q_\alpha}{\partial w_{\mathfrak{a}}}$ und $\frac{\partial q_\beta}{\partial w_{\mathfrak{a}}}$ als erste Ableitungen gerader Function, im zweiten q_α und q_β für die Nullargumente verschwinden müssen. Ist α der Index einer geraden, β der einer ungeraden ϑ-Function — oder umgekehrt, so nehmen jene Ausdrücke die Form

$$\left(q_\alpha \frac{\partial q_\beta}{\partial w_{\mathfrak{a}}}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0} \text{ resp. } \left(q_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial w_{\mathfrak{a}}}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0}$$

an, und müssen in Folge der für die hier betrachteten hyperelliptischen Theta's geltenden Bedingungen auch diese noch verschwinden, sobald α resp. β einen Index aus der Reihe

$$135,\ 137,\ 157,\ 357,\ 0246,\ 0248,\ 0268,\ 0468,\ 2468,\ 1357$$

bezeichnet. Beachtet man schliesslich noch, dass

$$(q_\alpha)_{w_1 \ldots w_4 = 0} = (p_\alpha)_{v_1 \ldots v_4 = 0},$$

wofür wir wiederum wie früher einfach α schreiben können, und dass

$$\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial w_{\mathfrak{a}}}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0} = \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial v_{\mathfrak{a}}}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0},$$

wofür wir zur Abkürzung der Bezeichnung $(\alpha)'_{v_{\mathfrak{a}}}$ einführen wollen, so ergiebt sich in Folge der bezeichneten Differentiation aus Gl. (XXI) die folgende Relation:

$$\text{(XXII)} \qquad 0.9.\frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial v_{\mathfrak{a}}} = 01.(1)'_{v_{\mathfrak{a}}} f_1(v_1 \ldots) f_{01}(v_1 \ldots)$$
$$+ 03(3)'_{v_{\mathfrak{a}}} f_3(v_1 \ldots) f_{03}(v_1 \ldots) + 05.(5)'.f_5(v_1 \ldots) f_{05}(v_1 \ldots) + 07(7)'_{v_{\mathfrak{a}}}.f_7(v_1 \ldots) f_{07}(v_1 \ldots)$$

und wenn man diese jetzt mit den unter (XX, a) gegebenen Ausdrücken vergleicht, so folgt:

$$\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial v_{\mathfrak{a}}} = -\frac{01\cdot(1)'_{v_{\mathfrak{a}}}}{0\cdot 9}\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}}}\cdot\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_1} - \frac{03\cdot(3)'_{v_{\mathfrak{a}}}}{0\cdot 9}\sqrt{\frac{a_{13}a_{35}a_{37}}{a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}}}\cdot\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_2}$$
$$-\frac{05\cdot(5)'_{v_{\mathfrak{a}}}}{0\cdot 9}\sqrt{\frac{a_{15}a_{35}a_{57}}{a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}}}\cdot\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_3} - \frac{07\cdot(7)'_{v_{\mathfrak{a}}}}{0\cdot 9}\sqrt{\frac{a_{17}a_{37}a_{57}}{a_{27}a_{47}a_{67}a_{78}}}\cdot\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_4}$$

und weil

$$\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial v_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial v_{\mathfrak{a}}} + \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial v_{\mathfrak{a}}} + \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial v_{\mathfrak{a}}} + \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial v_4}\cdot\frac{\partial u_4}{\partial v_{\mathfrak{a}}}$$

so ergiebt sich:

$$\text{(XXIII)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial v_{\mathfrak{a}}} = -\sqrt{\dfrac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}}}\cdot\dfrac{01\cdot(1)'_{v_{\mathfrak{a}}}}{0\cdot 9} = -\sqrt[4]{\dfrac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}}}\cdot\dfrac{(1)'_{v_{\mathfrak{a}}}}{9} \\ \qquad = -\sqrt[4]{-\dfrac{P'(a_1)}{Q(a_1)}}\cdot\dfrac{(1)'_{v_{\mathfrak{a}}}}{9} \end{cases}$$

$$
\text{(XXIII)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_2}{\partial v_\alpha} = -\sqrt{\dfrac{a_{13}a_{35}a_{37}}{a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}}}\cdot\dfrac{03\cdot(3)'_{v_\alpha}}{0\cdot 9} = -\sqrt[4]{\dfrac{a_{13}a_{35}a_{37}}{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}}}\cdot\dfrac{(3)'_{v_\alpha}}{9} \\[2ex]
\qquad = -\sqrt[4]{-\dfrac{P'(a_3)}{Q(a_3)}}\cdot\dfrac{(3)'_{v_\alpha}}{9} \\[2ex]
\dfrac{\partial u_3}{\partial v_\alpha} = -\sqrt{\dfrac{a_{15}a_{35}a_{57}}{a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}}}\cdot\dfrac{05\cdot(5)'_{v_\alpha}}{0\cdot 9} = -\sqrt[4]{\dfrac{a_{15}a_{35}a_{57}}{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}}}\cdot\dfrac{(5)'_{v_\alpha}}{9} \\[2ex]
\qquad = -\sqrt[4]{-\dfrac{P'(a_5)}{Q(a_5)}}\cdot\dfrac{(5)'_{v_\alpha}}{9} \\[2ex]
\dfrac{\partial u_4}{\partial v_\alpha} = -\sqrt{\dfrac{a_{17}a_{37}a_{57}}{a_{27}a_{47}a_{67}a_{78}}}\cdot\dfrac{07\cdot(7)'_{v_\alpha}}{0\cdot 9} = -\sqrt[4]{\dfrac{a_{17}a_{37}a_{57}}{a_{07}a_{27}a_{47}a_{67}a_{78}}}\cdot\dfrac{(7)'_{v_\alpha}}{9} \\[2ex]
\qquad = -\sqrt[4]{-\dfrac{P'(a_7)}{Q(a_7)}}\cdot\dfrac{(7)'_{v_\alpha}}{9}
\end{cases}
$$

(NB. Würde man statt des bei der vorangehenden Rechnung als charakteristisch auftretenden Index 0 irgend einen der anderen geraden Indices 2, 4, 6, 8 gewählt haben, so hätte man in ganz analoger Weise erhalten:

$$
\frac{\partial u_1}{\partial v_\alpha} = -\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{14}a_{16}a_{18}}}\cdot\frac{12(1)'_{v_\alpha}}{2\cdot 9} = -\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{16}a_{18}}}\cdot\frac{14(1)'_{v_\alpha}}{4\cdot 9}
$$
$$
= -\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{18}}}\cdot\frac{16(1)'_{v_\alpha}}{6\cdot 9} = -\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}}}\cdot\frac{18(1)'_{v_\alpha}}{8\cdot 9} \quad \text{etc.}
$$

Ausdrücke, welche, wie man sich leicht überzeugt, in Folge der Beziehungen (XII) u. (XIII) (S. 458, 459) sowohl unter einander als mit dem unter (XXIII) gegebenen identisch sind.)

Es sind hiermit die Coëfficienten des Systems

$$
\text{(XXIV)}\quad
\begin{cases}
du_1 = \mathsf{A}_1 dv_1 + \mathsf{B}_1 dv_2 + \Gamma_1 dv_3 + \Delta_1 dv_4 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
du_4 = \mathsf{A}_4 dv_4 + \mathsf{B}_4 dv_2 + \Gamma_4 dv_3 + \Delta_4 dv_4
\end{cases}
$$

bestimmt und folglich auch diejenigen des reciproken Systems

$$
\text{(XXV)}\quad
\begin{cases}
dv_1 = A_1 du_1 + B_1 du_2 + C_1 du_3 + D_1 du_4 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
dv_4 = A_4 du_1 + B_4 du_2 + C_4 du_3 + D_4 du_4
\end{cases}
$$

d. h. es sind $dv_1 \cdots dv_4$ als hyperelliptische Differentiale der

$$
x_1 \cdots x_4,\ \sqrt{R(x_1)} \cdots \sqrt{R(x_4)}
$$

dargestellt. — Die als Nenner der Coëfficienten $A_\alpha \cdots D_\alpha$ auftretende Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} (1)'_{v_1} & (1)'_{v_2} & (1)'_{v_3} & (1)'_{v_4} \\ (3)'_{v_1} & (3)'_{v_2} & (3)'_{v_3} & (3)'_{v_4} \\ (5)'_{v_1} & (5)'_{v_2} & (5)'_{v_3} & (5)'_{v_4} \\ (7)'_{v_1} & (7)'_{v_2} & (7)'_{v_3} & (7)'_{v_4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \vartheta_1(v_1 \cdots)}{\partial v_1}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial \vartheta_1(v_1 \cdots)}{\partial v_4}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \left(\frac{\partial \vartheta_7(v_1 \cdots)}{\partial v_1}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial \vartheta_7(v_1 \cdots)}{\partial v_1}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} \end{vmatrix} = \Delta(1, 3, 5, 7).$$

lässt sich durch ein Product gerader ϑ-Functionen mit Nullargumenten darstellen, nämlich

$$\Delta(1, 3, 5, 7) = \pi^4 \cdot \vartheta_9 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_4 \vartheta_6 \vartheta_8$$

und es existiren ähnliche Beziehungen für alle möglichen Determinanten von der Form $\Delta(s_1, s_2, s_3, s_4)$ — wenn $s_1 \cdots s_4$ irgend 4 Indices ungerader ϑ-Functionen bezeichnen. —

Nachdem nun gezeigt, dass zwischen $du_1 \cdots du_4$ und $dv_1 \cdots dv_4$ lineare homogene Relationen mit constanten Coefficienten bestehen, lassen sich diese Coefficienten auch noch in der von Herrn Weierstrass gegebenen Form, durch die sog. reellen Periodicitätsmoduln der Functionen $f_\alpha(v_1 \cdots v_4)$ ausdrücken. Man hat dann nur die Gleichungen (XXIV), nachdem man für $du_1 \cdots du_4$ die hyperelliptischen Differentialausdrücke (XVIII) eingesetzt hat, für entsprechende Werthsysteme von $(v_1 \cdots v_4)$ und $(x_1 \cdots x_4)$ zu integriren — wobei hinsichtlich der Integrationswege und des Vorzeichens von $\sqrt{R(x)}$ die Bestimmungen maassgebend sind, welche Herr Weierstrass in seiner Abhandlung über Abel'sche Functionen — Crelle's Journal, Bd. 47, § 5 — gegeben hat.

Man erhält durch Integration der Gleichungen (XXIV) von dem Werthsystem

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1, a_3, a_5, a_7)$$

(welches wie unmittelbar ersichtlich den Bedingungen (XVI) genügt) bis zu je einem der folgenden 4 Werthsysteme:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3, v_4) &= (\tfrac{1}{2}, 0, 0, 0) & (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (a_2, a_3, a_5, a_7) \\ & (0, \tfrac{1}{2}, 0, 0) & & (a_1, a_4, a_5, a_7) \\ & (0, 0, \tfrac{1}{2}, 0) & & (a_1, a_3, a_6, a_7) \\ & (0, 0, 0, \tfrac{1}{2}) & & (a_1, a_3, a_5, a_8) \end{aligned}$$

(welche wiederum die Beziehungen (XVI) befriedigen) — wenn

$$\text{(XXVI)}\qquad \int_{a_{2\mathfrak{b}-1}}^{a_{2\mathfrak{b}}} \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x)}{x-a_{2\mathfrak{a}-1}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

gesetzt wird, die vier Gleichungen

$$K_{\mathfrak{a},1} = \tfrac{1}{2}\mathsf{A}_\mathfrak{a} \quad K_{\mathfrak{a},2} = \tfrac{1}{2}\mathsf{B}_\mathfrak{a} \quad K_{\mathfrak{a},3} = \tfrac{1}{2}\Gamma_\mathfrak{a} \quad K_{\mathfrak{a},4} = \tfrac{1}{2}\Delta_\mathfrak{a}$$

und somit

$$\text{(XXVII)}\left\{\begin{array}{l} du_1 = 2K_{11}\,dv_1 + 2K_{12}\,dv_2 + 2K_{13}\,dv_3 + 2K_{14}\,dv_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ du_4 = 2K_{41}\,dv_1 + 2K_{42}\,dv_2 + 2K_{43}\,dv_3 + 2K_{44}\,dv_4 \end{array}\right.$$

woraus wiederum

$$\text{(XXVIII)}\left\{\begin{array}{l} dv_1 = G_{11}\,du_1 + G_{21}\,du_2 + G_{31}\,du_3 + G_{41}\,du_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dv_4 = G_{14}\,du_1 + G_{24}\,du_2 + G_{34}\,du_3 + G_{44}\,du_4 \end{array}\right.$$

wenn $G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ die Quotienten der Determinante

$$\begin{vmatrix} 2K_{11} & 2K_{12} & 2K_{13} & 2K_{14} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 2K_{41} & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & 2K_{41} \end{vmatrix} = D$$

in deren Unterdeterminanten bezeichnen.

Die Vergleichung der Coefficienten in Gl. (XXVII) mit den vorher gefundenen liefert Beziehungen von der Form

$$\text{(XXIX)}\qquad 2K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = -\sqrt[4]{\frac{-P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}}\cdot\frac{\left(\dfrac{\partial\vartheta_{2\mathfrak{a}-1}(v_1\cdots v_4)}{\partial v_\mathfrak{b}}\right)_{v_1\ldots v_4=0}}{\vartheta_9}$$

welche der aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Relation

$$2K = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}$$

entsprechen. Ferner ergiebt sich

$$D = \begin{vmatrix} 2K_{11} \cdots 2K_{14} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2K_{41} \cdots 2K_{44} \end{vmatrix} = \sqrt[4]{\frac{P'(a_1)P'(a_3)P'(a_5)P'(a_7)}{Q(a_1)\,Q(a_3)\,Q(a_5)\,Q(a_7)}} \cdot \frac{\Delta(1,3,5,7)}{\vartheta_9{}^1}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{P'(a_1)P'(a_3)P'(a_5)P'(a_7)}{Q(a_1)\,Q(a_3)\,Q(a_5)\,Q(a_7)}} \cdot \pi^4 \cdot \frac{\vartheta_0}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_2}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_4}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_6}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_8}{\vartheta_9} \cdot \vartheta_9{}^2$$

$$= \sqrt[4]{\frac{P'(a_1)\,P'(a_3)\,P'(a_5)\,P'(a_7)}{Q'(a_0)\,Q'(a_2)\,Q'(a_4)\,Q'(a_6)\,Q'(a_8)}} \cdot \pi^4 \cdot \vartheta_9{}^2$$

woraus

$$\text{(XXX)} \qquad \vartheta_9 = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{M \cdot D} \quad \text{wo } M = \sqrt[4]{\frac{Q'(a_0) \cdots Q'(a_8)}{P'(a_1) \cdots P'(a_7)}}$$

und da sich in Folge der Beziehungen (XII) (XIII) (XIV) jede für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwindende ϑ-Function in die Form setzen lässt

$\vartheta_\alpha = \sqrt[4]{\varphi(a_0, a_1, \cdots a_8)} \cdot \vartheta_9$ — (wo φ eine rationale Function von $a_0 \cdots a_8$) so erhält man auch für alle diese Theta's Ausdrücke, welche demjenigen in Nr. (XXX) analog sind — entsprechend den drei Beziehungen, welche in der Theorie der elliptischen Functionen folgendermassen lauten:

$$\vartheta_3 = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \quad \vartheta_0 = \sqrt{\frac{2\varkappa K}{\pi}} \quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{2\varkappa_1 K}{\pi}}.$$

Ferner kann man nun auch noch die ϑ-Moduln durch die Periodicitätsmoduln ausdrücken, indem man die Gleichungen (XXVIII) von dem Werthe-Systeme

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1, a_3, a_5, a_7)$$

bis zu je einem der folgenden vier — nach Nr. (XVI) wiederum einander entsprechenden — Werthesysteme:

$$\begin{array}{ll} (v_1, v_2, v_3, v_4) & \\ = (-\tfrac{1}{2}\tau_{11}, -\tfrac{1}{2}\tau_{21}, -\tfrac{1}{2}\tau_{31}, -\tfrac{1}{2}\tau_{41}) & (x_1,x_2,x_3,x_4) = (a_0,a_3,a_5,a_7) \\ (\tfrac{1}{2}\tau_{11}-\tfrac{1}{2}\tau_{12}, \tfrac{1}{2}\tau_{21}-\tfrac{1}{2}\tau_{22}, \tfrac{1}{2}\tau_{31}-\tfrac{1}{2}\tau_{32}, \tfrac{1}{2}\tau_{41}-\tfrac{1}{2}\tau_{42}) & (a_1,a_2,a_5,a_7) \\ (\tfrac{1}{2}\tau_{12}-\tfrac{1}{2}\tau_{13}, \tfrac{1}{2}\tau_{22}-\tfrac{1}{2}\tau_{23}, \tfrac{1}{2}\tau_{32}-\tfrac{1}{2}\tau_{33}, \tfrac{1}{2}\tau_{42}-\tfrac{1}{2}\tau_{43}) & (a_1,a_3,a_4,a_7) \\ (\tfrac{1}{2}\tau_{13}-\tfrac{1}{2}\tau_{14}, \tfrac{1}{2}\tau_{23}-\tfrac{1}{2}\tau_{24}, \tfrac{1}{2}\tau_{33}-\tfrac{1}{2}\tau_{34}, \tfrac{1}{2}\tau_{43}-\tfrac{1}{2}\tau_{44}) & (a_1,a_3,a_5,a_6) \end{array}$$

integrirt, wobei wiederum hinsichtlich der Integrationswege und Wurzelbestimmungen das oben Bemerkte gilt. Setzt man hierbei

$$\text{(XXXI)} \qquad \int_{a_{2\mathfrak{b}-2}}^{a_{2\mathfrak{b}-1}} \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x)}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = i\,\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\tau_{1a} = iG_{1a}\overline{K}_{11} + iG_{2a}\overline{K}_{21} + iG_{3a}\overline{K}_{31} + iG_{4a}\overline{K}_{41}$$
$$-\tfrac{1}{2}\tau_{a1} + \tfrac{1}{2}\tau_{a2} = iG_{1a}\overline{K}_{12} + iG_{2a}\overline{K}_{22} + iG_{3a}\overline{K}_{32} + iG_{4a}\overline{K}_{42}$$
$$-\tfrac{1}{2}\tau_{a2} + \tfrac{1}{2}\tau_{a3} = iG_{1a}\overline{K}_{13} + iG_{2a}\overline{K}_{23} + iG_{3a}\overline{K}_{33} + iG_{4a}\overline{K}_{43}$$
$$-\tfrac{1}{2}\tau_{a3} + \tfrac{1}{2}\tau_{a4} = iG_{1a}\overline{K}_{14} + iG_{2a}\overline{K}_{24} + iG_{3a}\overline{K}_{34} + iG_{4a}\overline{K}_{44}$$

woraus, wenn noch

(XXXII) $$\sum_{1}^{b}{}_{\nu}\overline{K}_{a,\nu} = K'_{a,b}$$

gesetzt wird, folgt:

(XXXIII) $$\tau_{ab} = 2iG_{1a}K'_{1b} + 2iG_{2a}K'_{2b} + 2iG_{3a}K'_{3b} + 2iG_{4a}K'_{4b}$$

ein Ausdruck, welcher in Folge der Identität $\tau_{ab} = \tau_{ba}$ die bekannten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln liefert. —

Schliesslich kann man auch noch die oben gemachte Einschränkung, dass die ϑ-Moduln sämmtlich rein imaginär, also die Grössen $a_0, \ldots a_9$ reell sein sollen, fallen lassen — in derselben Weise wie dies durch Herrn Weierstrass in seiner zweiten Abhandlung über Abel'sche Functionen (Crelle's Journal, Bd. 52) geschehen ist. —

Berlin, im März 1877.