Note über ein Eliminationsproblem.

Von H. Krey in Kiel.

Für manche algebraisch-geometrische Untersuchungen ist die Lösung folgender Aufgabe von Wichtigkeit:

Die Zahl der Paare von getrennt liegenden Punkten x, y einer gegebenen Curve $f=0$ anzugeben, welche gleichzeitig zwei Correspondenzen $\varphi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)=0$, $\varphi'(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)=0$ genügen. —

Wenn f keine Singularitäten besitzt, und die Correspondenzen keine besonderen Eigenschaften haben, ergiebt sich durch Elimination etwa der x aus $f(x)=0$, $\varphi=0$, $\varphi'=0$ sofort die fragliche Zahl $n^2(rs'+r's)$, wo r, r' die Ordnungen von φ, φ' in x, s, s' die Ordnungen in den y bedeuten.

Diese Zahl erfährt eine Reduction, wenn eine der Correspondenzen, oder beide, die Eigenschaft der „Werthigkeit" in $x=y$ haben, d. h. wenn von den $\alpha+\gamma$ vermöge $\varphi=0$ einem beliebigen y entsprechenden Punkten x stets γ in y fallen, und also auch γ der $\beta+\gamma$ zu einem beliebigen x gehörenden Punkte y in x liegen. In diesem Falle würde die Resultante aus $f=0$, $\varphi=0$, $\varphi'=0$ identisch verschwinden. Haben α', β', γ' dieselbe Bedeutung in Bezug auf die Correspondenz $\varphi'=0$, so gilt die von Brill (Math. Annalen Bd. VI) angegebene Zahl

$$(\varphi\varphi')=\alpha\beta'+\beta\alpha'-2p\gamma\gamma', \tag{1}$$

(wo, wie gewöhnlich, p das Geschlecht von f bezeichnet) zunächst mit der Einschränkung, dass f keine singulären Punkte besitzt, und dass auf f keine festen „Ausnahmepunkte" der Correspondenzen existiren, solche Punkte nämlich, durch welche *sämmtliche* Curven $\varphi(\overset{r}{x})=0$, $\varphi(\overset{s}{y})=0$ (eventuell auch $\varphi'(\overset{r'}{x})=0$, $\varphi'(\overset{s'}{y})$) hindurchgehen.

Gerade dieser Fall des Vorhandenseins von Ausnahmepunkten tritt jedoch bei den meisten Anwendungen der in Rede stehenden Correspondenzformel ein. Eine genauere Untersuchung desselben hat zu dem wichtigen Resultate geführt,*) dass die Zahl (1) gültig bleibt, so lange f keine weiteren Singularitäten als Doppelpunkte (keine Rückkehrpunkte) hat, wenn man nur unter $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$ die Anzahl der *beweglichen* vermöge $\varphi = 0$ zu y, bzw. zu x gehörenden Punkte versteht, wenn ferner sämmtliche Doppelpunkte von f für beide Correspondenzen zu den Ausnahmepunkten gehören; dass dagegen die Reduction $- 2\gamma\gamma'.\delta$ anzubringen ist, wenn δ der Doppelpunkte nicht sämmtlichen Curven der vier die Correspondenzen vermittelnden Systeme gemeinschaftlich sind. — Selbstverständlich sind hier nur die Paare von „freien“ (d. h. nicht in Ausnahmepunkte, oder in singuläre Punkte von f fallenden) Punkten x, y gemeint.

Die Punkte y (oder x) dieser Paare lassen sich nicht als die freien Verschwindungspunkte einer ganzen Function der y (bzw. der x) angeben, sondern nur als die des Quotienten der linken Seiten zweier Curvengleichungen. Dies ist jedoch auf verschiedene Arten zu erreichen. Das im Folgenden auseinandergesetzte Eliminationsverfahren gestattet, die zum Beweise erforderlichen Abzählungen in ziemlich einfacher Weise auszuführen. Vorausgesetzt ist dabei zunächst, dass die Curven *aller vier* Systeme einfach durch die Ausnahmepunkte gehen, welche Bedingung auch darin ihren Ausdruck findet, dass sämmtliche Coefficienten der Gleichung $\overset{r}{\varphi}(x) = 0$ unendlich klein von der ersten Ordnung werden, sobald y einem Ausnahmepunkte unendlich nahe rückt, und dass Aehnliches für die drei übrigen Curvensysteme stattfinden soll.

Unter den $d + \delta$ Doppelpunkten von f mögen d, ebenso wie σ einfache Punkte von f, Ausnahmepunkte sein. Die mit y beweglichen, nicht in y selbst fallenden Schnittpunkte von $\varphi(x) = 0$ mit $f(x) = 0$ seien $x^{(1)}, \ldots x^{(\alpha)}$ $(\alpha = nr - \sigma - 2d - \gamma)$, die Coordinaten der Ausnahmepunkte $a^{(1)}, \ldots a^{(\sigma)}$, $b^{(1)}, \ldots b^{(d)}$. Das Product

$$\varphi'(x^{(1)}, y) \ldots \varphi'(x^{(\alpha)}, y) = L(y)$$

eine symmetrische Function der α weiteren Schnittpunkte, welches bereits explicit die y im Grade $s'\alpha$ enthält, wird sich als rationale Function der y allein darstellen lassen**). Bezeichnet man für den Augenblick die Coefficienten von $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ mit b_{ikh}, b'_{ikh}, bedeutet ferner $\varphi''(x) = \Sigma b''_{ikh} x_1{}^i x_2{}^k x_3{}^h$ eine ganz beliebige Function derselben Ordnung wie $\varphi'(x)$, so bilde man zuerst das von den Coordinaten aller nr Schnittpunkte abhängende Product

$$R = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=nr} \left\{ \varphi'(x^{(\varrho)}) + \lambda \varphi''(x^{(\varrho)}) \right\},$$

*) Ausser den einschlägigen Arbeiten von Brill (Math. Ann. Bd. VI u. VII) vgl. noch Lindemann Vorl. v. Clebsch, Bd. 1, pag. 720 ff.

**) Ueber reducirte Resultanten vgl. Brill, Math. Annalen Bd. IV.

d. h. die (nicht identisch verschwindende) Resultante aus

$$f(x)=0,\quad \varphi(x)=0,\quad \varphi'(x)+\lambda\varphi''(x)=0.$$

Wegen $\varphi'(x^{(\alpha+1)})=\cdots=\varphi'(x^{(nr)})=0$, und mit Hilfe von $f(y)=0$ wird

$$R=\lambda^{nr-\alpha}\varphi''(a^{(1)})\cdots\varphi''(a^{(\sigma)})\,\varphi''(b^{(1)})^2\cdots\varphi''(y)^{\gamma}\left\{L+\lambda L_1+\lambda^2 L_2+\cdots\right\}.$$

Es ist also L proportional zu

$$L'(y)=\frac{M(y)}{\varphi''(a^{(1)})\cdots\varphi''(b^{(1)})^2\cdots\varphi''(y)^{\gamma}},$$

wo M den Coefficienten von $\lambda^{nr-\alpha}$ in der Entwicklung von R bedeutet. Die freien Verschwindungspunkte dieses Quotienten, der offenbar von den ganz willkürlichen b''_{ikh} nicht abhängen kann, werden zugleich Verschwindungspunkte von L sein, und umgekehrt. In den b'_{ikh} erreicht M den Grad α, in den b_{ikh} den Grad nr'; somit wird die Vielfachheit von $L'(y)=0$ in jedem Ausnahmepunkte

$$\alpha+nr',$$

der Grad von L' in den y_i

$$s'\alpha+snr'-\gamma r'.$$

Durch jeden der δ Doppelpunkte wird L' nur $\gamma\gamma'$-fach hindurchgehen.

Von Ausnahmepunkten und singulären Punkten von f abgesehen, wird ein Factor von $L(y)$ verschwinden

1. für die Punkte y der gesuchten Punktepaare;
2. für die Coincidenzpunkte der Correspondenz $\varphi(x,y)=0$, und zwar hat in jedem derselben $M(y)=0$ einen γ'-werthigen Schnittpunkt mit $f=0$;
3. für diejenigen Punkte y, deren zugehörige Curve $\varphi(x)=0$ entweder f in einem Ausnahmepunkte a berührt, oder in einem Ausnahmepunkte b einen Zweig von f berührt.

Hieraus ergiebt sich, welche Reductionen an der Zahl der freien Verschwindungspunkte von $L(y)$ anzubringen sind. Diese Zahl kann kleiner werden als

$$n(s'\alpha+snr'-\gamma r')-(\alpha+nr')(\sigma+2d)-2\gamma\gamma'\delta.$$

Wenn nämlich der Punkt y unendlich nahe an einen Punkt b rückt, so können von den zu y gehörenden Punkten $x^{(1)},\ldots x^{(\alpha)}$ einige, h, sich ebenfalls dem Doppelpunkt b unendlich nähern, und zwar auf dem anderen Zweige des Doppelpunktes. Ein Theil der $\alpha+nr'$ Zweige von $M(y)=0$ berührt dann den einen oder anderen Zweig des Doppelpunktes von f, so dass hier $2(\alpha+nr')+2h$ Schnittpunkte absorbirt werden.

Die Zahl der freien Coincidenzpunkte der Correspondenz

$$\varphi(x,y)=0 \text{ ist}$$

(2) $$C=\alpha+\beta+2\gamma\,.\,p.$$

Diese Formel darf hier vorausgesetzt werden; denn wenn man auch bei dem Beweise derselben für den einfacheren Fall, dass keine Ausnahmepunkte vorhanden sind, von der Betrachtung zweier simultanen Correspondenzen auszugehen pflegt, so ist doch der Nachweis ihrer Allgemeingültigkeit von einer derartigen Betrachtung nicht abhängig (vgl. z. B. Lindemann, l. c. pag. 680).

Die Bedingung $P(y) = 0$, welcher y genügen muss, damit die zu y gehörende Curve $\varphi(x) = 0$ f in einem bestimmten der einfachen Ausnahmepunkte a berühre, ist vom Grade s, nämlich

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_{x=a} = 0,$$

wenn man den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ in a, die Gerade $x_2 = 0$ in die Tangente von f legt. Man darf nun φ in der Form

$$\varphi = x_1 y_1 \varphi_1 + x_1 y_2 \varphi_2 + x_2 y_1 \varphi_3 + x_2 y_2 \varphi_4,$$

oder

$$\varphi = x_1 y_1 \psi_1 + x_1 y_2 \psi_2 + x_2 y_2 \psi_3 + (x_2 y_1 - x_1 y_2)\psi_4$$

voraussetzen, worin ψ_1, ψ_2, ψ_3 einzeln den Bedingungen der Werthigkeit γ werden zu genügen haben, während ψ_4 nur $(\gamma - 1)$werthig zu sein braucht, wo ferner $\psi_1, \ldots \psi_4$ die Ausnahmepunkte von $\varphi = 0$, bis auf den einen Punkt $x_1 = x_2 = 0$ einzeln zu Ausnahmepunkten haben müssen. Die Curve

$$P(y) = y_1 (\psi_1)_{x=a} + y_2 (\psi_2)_{x=a} - y_2 (\psi_4)_{x=a} = 0$$

geht $(\gamma + 1)$fach durch a, einfach durch die übrigen Ausnahmepunkte, was

$$ns - \sigma - 2d - \gamma = \beta$$

freie Punkte y giebt. Dieses ist auch von vornherein ersichtlich, da einem zu a benachbarten Punkte x immer noch β völlig bestimmte freie Punkte entsprechen.

Dagegen wird die Bedingung $Q(y) = 0$ dafür, dass $\varphi(x) = 0$ in einem bestimmten Doppelpunkt b einen Zweig von f berühre,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right]_{x=b} = 0.$$

Von den hieraus sich ergebenden 2β Punkten y sind nur $2\beta - 2h$ frei. (h ist $= \gamma - 1$ oder γ, je nachdem in φ das Glied mit ψ_4 fehlt oder nicht.)

Mit Berücksichtigung dieser Reductionen wird nun die Anzahl der Punkte y der gesuchten Punktepaare

$$\begin{aligned} & n(s'\alpha + snr' - \gamma r') - (\alpha + nr')(\sigma + 2d) - 2hd \\ & - 2\gamma\gamma'\delta - \gamma'(\alpha + \beta + 2p\gamma) - \sigma\beta - 2d\beta + 2hd \\ = {} & n(s'\alpha + snr' - \gamma r') - \gamma'(\alpha + \beta) - (\sigma + 2d)(\alpha + \beta + nr') \\ & \qquad - 2\gamma\gamma'(p + \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\,(ns' - \sigma - 2d - \gamma) - \beta\,(\sigma + 2d + \gamma') \\ &\quad + nr'\,(ns - \sigma - 2d - \gamma) - 2\gamma\gamma'\,(p + \delta) \\ &= \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma'\,(p + \delta). \end{aligned}$$

Es war nicht nothwendig, die Formel (2) vorauszusetzen. Dieselbe ergiebt sich auch aus dem Umstande, dass die rechte Seite der Gleichung

$$(\varphi\varphi') = n\,(s'\alpha + snr' - \gamma r') - (\alpha + \beta + nr')\,(\sigma + 2d) - \gamma' C$$

bei Vertauschung von r, s, γ mit r', s', γ' ungeändert bleiben muss. Man erhält so

$$\frac{C - \alpha - \beta}{\gamma} = \frac{C' - \alpha' - \beta'}{\gamma'},$$

d. h. dieser Quotient ist von der Natur der Correspondenz unabhängig. Bedeuten

$$\psi_1(x) = 0, \ldots\ldots, \psi_k(x) = 0$$

irgend $k = \sigma + d + 2$ linear unabhängige Curven der r^{ten}, genügend hohen Ordnung, so ist die Correspondenz

$$\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} \psi_1(a^{(1)}) & \psi_2(a^{(1)}) & \ldots & \psi_k(a^{(1)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(b^{(1)}) & \psi_2(b^{(1)}) & \ldots & \psi_k(b^{(1)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \ldots & \psi_k(x) \\ \psi_1(y) & \psi_2(y) & \ldots & \psi_k(y) \end{vmatrix} = 0,$$

für welche $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = nr - \sigma - 2d - 1$, geeignet, jenen Quotienten zu bestimmen. Die Gleichung der Coincidenzcurve ist

$$\Omega = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_3} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\,\partial y_2}\right\}_{y=x} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\,\partial y_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_3}\right\}_{y=x}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}\right\}_{y=x} = 0.$$

Für einen Punkt a sind, wie leicht nachzuweisen, die $\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}$ proportional den $\frac{\partial f}{\partial x_i}$; für einen Punkt b dagegen verschwinden die $\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}$, und die $\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\partial x_k}$ werden proportional den $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}$. Der gesuchte Quotient hat also den Werth

$$n(n + 2r - 3) - 2\sigma - 6d - 2\delta - 2\,(nr - \sigma - 2d - 1) = 2p.$$

Das zur Ableitung der Formel für $(\varphi\varphi')$ dienende Beweisverfahren erleidet keine wesentliche Aenderung, wenn die Systemcurven *mehrfach* durch die Ausnahmepunkte hindurchgehen. Nur werden dann die Functionen M, P, Q in diesen Punkten in höherer Ordnung verschwinden, als in dem behandelten einfacheren Falle.

Mai 1877.