Note über den Operationskreis des Logikcalculs.

Von

Ernst Schröder in Karlsruhe.

Bereits Leibniz hatte eingehende Bestrebungen gerichtet sowohl auf die Schöpfung eines *calculus philosophicus* oder *calc. ratiocinator*, als auch auf die Gründung einer allgemeinen Zeichensprache, einer *lingua characteristica universalis* (sive *realis*), gewissermassen eines Alphabets der menschlichen Begriffe — *diese* bestimmt, das Object oder reale Substrat zu bilden zu *jener* Disciplin, durch welche das Wesen der menschlichen Geistesoperationen blosgelegt, nach seiner Gesetzmässigkeit erfasst und in adäquatester Weise zum Ausdruck gebracht werden sollte. In Bezug auf das zweite Ziel — auf die Idee der Ausbildung einer allgemeinen Charakteristik — hatte Leibniz allerdings schon Cartesius, und andere, zu Vorgängern.

Soferne nicht in den zahlreichen noch unedirten Manuscripten aus dem Nachlasse Leibniz'ens, die in dem Archive zu Hannover liegen, weiteres Material verborgen ist, das für die Frage vielleicht von Belang werden könnte, möchten alle nur wünschbaren historischen Belege und Nachweise aus früherer Zeit über die erwähnten zwiefältigen Bestrebungen zu finden sein in den 62 ersten Seiten des III. Bandes von Adolf Trendelenburg's „Historische Beiträge zur Philosophie (Berlin 1867)", auf welche Herr Hermann Lotze die Güte hatte, mich aufmerksam zu machen.

Von den genannten beiden Idealen hat nun wenigstens das erste in neuerer Zeit eine Verwirklichung gefunden durch den verdienstvollen, auch auf anderen Gebieten durch seine mathematischen Leistungen rühmlichst bekannten Engländer George Boole, durch welchen in der That eine Disciplin geschaffen ist, mittelst deren aus gegebenen Prämissen die Schlussfolgerungen in allen rein deductiven Richtungen auch *mit erwiesener Vollständigkeit* in rechnender Weise gezogen werden können.

Die Ergebnisse seiner einschlägigen Forschungen hat derselbe ausführlich niedergelegt in der Schrift: „An investigation of the *law's of thought*, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, London 1854" (424 Seiten). Ich bin erst anlässlich der in meinem „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende, Leipzig, 1873" ausgeführten logischen Untersuchungen, von der Existenz dieses grundlegenden und, wie mir scheint, lange nicht gebührend beachteten Werkes in Kenntniss gesetzt worden.

Obwohl in der That von der Aufgabe, die er sich darin gestellt, Boole selbst sagt, „that he never doubted that it was worthy of his best efforts," hat doch dieses Feld seitdem nur eine spärliche Bearbeitung von seiten anderer Autoren gefunden, als welche meines Wissens nur Cayley, A. J. Ellis und vornehmlich Robert Grassmann*) angeführt werden können.

Das Studium des Boole'schen Werkes liess mich nun den Grund dieses Brachliegens wenigstens theilweise erblicken in gewissen Unvollkommenheiten, an welchen noch die Boole'sche Methode leidet, und veranlasste mich zu der Veröffentlichung einer soeben bei Teubner erschienenen Schrift, betitelt: „Der Operationskreis des Logikkalkuls", in welcher, wie ich glaube, die Begründung und Technik des Calculs nun zur thunlichsten Vollendung gebracht ist. Auf den Inhalt dieser Schrift das mathematische Publicum aufmerksam zu machen, ist der eine Hauptzweck der gegenwärtigen Note.

Im Vergleich mit dem Umfang des Boole'schen Werkes, dessen Kenntniss in meiner Schrift *nicht* vorausgesetzt wird, stelle ich auf dem so sehr viel kleineren Raum von nur 37 Seiten alle wesentlichen Methoden, den ganzen Kern des Logikcalculs dar, und dürften die darin gemachten Fortschritte wesentlich in Folgendem zu erblicken sein.

1) Die Methode findet sich gereinigt von allen der Sache eigentlich fremden Beimengungen; durchaus beseitigt sind nämlich die bei Boole noch eine grosse Rolle spielenden algebraischen Zahlen, welche in der That im Gebiet des Logikcalculs eine vernünftige Deutung nicht zulassen. In meiner Schrift wird lediglich mit den der Sache durchaus adäquaten „*Classensymbolen*" gerechnet, zu welchen übrigens die 0 und 1 auch noch gehören. Die Disciplin wird so zu einer völlig *elementaren* gestaltet, die — im Gegensatz zum Boole'schen Lehrgebäude, welches die Kenntniss der Algebra bis einschliesslich der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten voraussetzen musste — nun keinerlei mathematischer Vorkenntnisse mehr bedarf. Damit ist eine nicht unwesentliche Vereinfachung des bei Boole noch ziemlich complicirten Rechenapparates verbunden. Wegen der vielen für alle Mathematikverständigen geläufigen Kunstausdrücke, die in *beiden* Disciplinen gleichmässig Verwendung finden und die nochmals zu erklären

*) Betreffs der genaueren Angaben vergl. meine weiter unten angeführte Schrift.

weitläufig gewesen wäre, habe ich allerdings ein einigermassen mathematisch gebildetes Publicum in meiner Schrift vorausgesetzt.

In der geschilderten Richtung hat schon Robert, resp. haben die Gebrüder Grassmann, die übrigens Boole nicht zu kennen schienen, ganz den richtigen Weg betreten. Dieselben sind jedoch darauf nicht weit genug fortgeschritten, nämlich jedenfalls nicht so weit gegangen um die allgemeine Aufgabe, die Boole sich stellt, lösen und den beschwerlichen arithmetisch-logischen Rechenapparat desselben ganz ersetzen zu können.

2) Es wird in meiner Schrift ein vollkommener *Dualismus* zwischen den Operationen der ersten Stufe (Addition und Subtraction) und denen der zweiten (Multiplication und Division) nachgewiesen, zufolge dessen das ganze Gebäude eine Symmetrie erhält, die der Arithmetik abgeht. Um hierob eines speciell hervorzuheben, so liefern die logische Addition und Multiplication das merkwürdige Beispiel zweier commutativen und associativen Operationen, die sich *gegenseitig* distributiv zu einander verhalten, für die nämlich nicht nur:

$(b+c).a=(b.a)+(c.a)$, sondern auch $(b.c)+a=(b+a).(c+a)$ ganz allgemein ist*).

3) Neben diesen beiden Operationen ($+$ und $\cdot$), die auch *Collection* und *Determination* anderwärts heissen, ist es eine dritte, die *Negation*, deren Heranziehung als zur Lösung der allgemeinsten Aufgabe des Logikcalculs ausreichend nachgewiesen wird.

In Bezug auf diese letztere mag als besonders nützlich erwähnt sein der von mir aufgestellte Satz: dass die Negation eines nach mehreren Argumenten entwickelten Functionsausdruckes gefunden wird durch Negiren seiner sämmtlichen Coefficienten, wogegen die schönen Sätze vom Negiren von Product und Summe wohl zuerst von Grassmann aufgestellt worden sind.

---

*) Auch auf dem Gebiet der *Substitutionen* gelingt es leicht, dergleichen gegenseitig distributive Operationen zu entdecken, denen aber dann die Commutativität und Associativität abgeht. Definirt man hier als „symbolisches" Product resp. Summe:

$$a.b=a^{\alpha}\,b\,a^{-\alpha},\quad a+b=a^{\beta}\,b^{\gamma}\,a^{-\beta},$$

wobei eben diese mit dem Malzeichen angedeutete Multiplication als eine symbolische schon hinlänglich in Gegensatz tritt zu der „eigentlichen" Multiplication der Substitutionen, welche durch blosses Nebeneinanderstellen der Factoren ausgedrückt bleibt, so gilt das Distributionsgesetz *der Arithmetik:*

$$a.(b+c)=(a.b)+(a.c),$$

indem beide Seiten dieser Gleichung denselben Ausdruck $a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\,b^{-\beta}\,a^{-\alpha}$ vorstellen, und die Beziehung wird gegenseitig, d. h. es tritt auch noch die Geltung von $a+(b.c)=(a+b).(a+c)$ hinzu, bei der Annahme $\gamma=1$.

Es ist zu verwundern, dass auf dem sonst so weit ausgebauten Felde der Substitutionentheorie *distributive* Beziehungen bislang noch gar nicht in Betracht gezogen wurden.

4) Zum Ueberfluss wird schliesslich eine exacte Theorie der beiden inversen Operationen Subtraction oder *Exception* und Division oder *Abstraction* aufgestellt, und damit das vordem besonders über der letzteren schwebende Dunkel aufgehellt.

Von diesen beiden durch die des Negirens im Grunde entbehrlich gemachten inversen Operationen wird die Negation als ein gemeinsamer Specialfall nachgewiesen und gezeigt, dass die Negation von a darstellbar sei durch

$$1 - a = \frac{0}{a} \cdot$$

Nebenbei erweist sich die, diese Aequivalenz constatirende Gleichung zugleich als die einzige Gleichung des Logikcalculs, welche zu sich selbst dual ist, woferne nämlich abgesehen wird von Gleichungen wie diese:

$$1 - (1 - a) = 0 : (0 : a), \quad 1 - \frac{0}{a} = \frac{0}{1 - a}$$

etc., die durch wiederholte Anwendung der vorigen auf sich selbst entstehen.

Die Rechnungsregeln fallen hier, wie man sieht, nur theilweise mit denen der Arithmetik zusammen.

In Bezug auf das Weitere, so namentlich bezüglich der Anwendungen des Calculs, möge auf meine Schrift selbst verwiesen sein.

Zum Schlusse sei übrigens bemerkt, dass es auch *metrische* Operationen giebt, welche mit den logischen gewisse Analogien nothwendig darbieten. Wie nämlich z. B. in einer Schrift von Otto Boeddicker*) zu sehen ist, lässt sich die Grösse $A\,(\cdot)\,B$ des Gebietes, welches zwei begrenzten räumlichen oder Flächengebieten A und B gemeinsam ist, ausdrücken durch mehrfache theils über die letzteren Gebiete selbst, theils über deren Begrenzungen erstreckte Integrale, und darnach würde auch die Masszahl $A\,(+)\,B$ des Gebietes, zu welchem beide sich gegenseitig ergänzen, nach dem Schema:

$$A\,(+)\,B = A + B - A\,(\cdot)\,B$$

sich leicht zusammensetzen lassen. —

Auf diesen Umstand, sowie auf das in der Anmerkung oben über die Substitutionen Gesagte, vorläufig aufmerksam zu machen, galt mir als der andere Zweck dieser Note.

Karlsruhe, 7. Juli 1877.

---

*) Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen mit Anwendungen in der Elektrodynamik, Stuttgart 1876.