Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1877
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0012
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0012

LOG Id: LOG_0030
LOG Titel: Ueber die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Ueber die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen.

Von A. Voss in Darmstadt.

Bei der Untersuchung von windschiefen Flächen kann es, wie bereits bei einer anderen Gelegenheit hervorgehoben wurde, vortheilhaft sein, die sechs Liniencoordinaten x_i der Erzeugenden der Fläche als Functionen φ_i eines Parameters λ aufzufassen, zwischen denen die quadratische Identität $\Sigma\varphi_i^2=0$ besteht *). Insbesondere erlangt dadurch die Darstellung der *rationalen* Flächen eine Bequemlichkeit, wie sie wohl durch keine andere Coordinatenbestimmung erreicht werden dürfte.

In der folgenden Lösung des Problems der Haupttangentencurven der windschiefen Flächen ist von dieser Darstellung Gebrauch gemacht obwohl die auf einem von Herrn Lie zuerst ausgesprochenen Satze beruhende Methode zur *Bildung der erforderlichen Differentialgleichung, durch welche die* ∞^2 *Haupttangenten in* ∞^1 *developpabele Flächen zusammengefasst werden,* ohne Weiteres verwendbar bleibt auch für ganz beliebige Linien-Flächen, welche durch den Schnitt dreier Complexe z. B. erzeugt werden. Wir haben nur desshalb die Parameterdarstellung vorgezogen, weil in jenem allgemeineren Falle die wirkliche Integration noch die Ausführung jener Elimination höherer homogener Differentiale nöthig macht, welche in der genannten Arbeit erledigt ist. **)

Auch ist in § 2. jene Differentialgleichung in einer solchen Form gegeben, dass die sämmtlichen Coëfficienten derselben eine von jener Parameterdarstellung unabhängige invariante Form besitzen. Besonders betrachtet ist dann der Fall rationaler Linienflächen, die einem linearen Complexe angehören. Die Bestimmung der Haupttangentencurven lässt sich hier auf eine einzige Quadratur zurückführen***), welche auf hyper-

---

*) Vgl. hier und im Folgenden überhaupt meine Arbeit: *Zur Theorie der windschiefen Flächen,* Math. Ann. VIII. p. 54–135, namentl. p. 101–135.

**) Es ist mir seitdem gelungen, jene Eliminationen noch soweit durchzuführen, dass unter anderem auch die damals nicht völlig begründete Angabe über die Anzahl der fünfpunktigen Tangenten der Fläche bestätigt werden kann. Auch Herrn Schubert's Principien (Schubert, Beiträge zur abzählenden Geometrie, diese Annalen X, 1) lassen sich ohne besondere Schwierigkeit auf den Fall einer beliebigen windschiefen Fläche anwenden, wie ich dies auch Herrn S. bereits vor einem Jahre mitgetheilt habe.

***) Dies ist auch schon von Herrn Clebsch bemerkt worden. Crelle 68, p. 151.

elliptische Integrale führt. Von Interesse erscheint dabei namentlich der Fall, wo jene Integrale entweder rein algebraisch oder rein logarithmisch werden. Ich bin dabei um so lieber auf eine etwas genauere Betrachtung des hyperelliptischen Integrales eingegangen, als die einschlägigen Arbeiten des Herrn Königsberger über Reduction hyperelliptischer Integrale, in Verbindung mit einer von Herrn Liouville herrührenden Methode, hier eine ziemlich anschauliche geometrische Interpretation gestatteten. — Zum Schlusse sind noch die Modificationen erörtert, welche durch das Verschwinden der invarianten Coëfficienten der Differentialgleichung entstehen.

§ 1.

Bildung der Differentialgleichung.

Jede Erzeugende x der Fläche bestimmt mit ihren drei consecutiven ein *Büschel linearer Complexe*; unter diesen befinden sich im Allgemeinen zwei specielle, deren Axen die beiden vierpunktigen Tangenten der Fläche bilden, welche zu jener Erzeugenden gehören. Bezeichnen wir die Coordinaten jener Geraden durch γ_i', γ_i'', so ist die Gleichung des genannten Büschels:

(1) $$\gamma_x' - \mu\gamma_x'' = 0.$$

Nun ist nach Herrn Lie's Bemerkung*) eine windschiefe Fläche, die einem linearen Complexe angehört, durch eine algebraische Haupttangentencurve ausgezeichnet, die jener ausschneidet. Jeder Complex des Büschels (1) wird daher zwei auf einander folgende Tangenten y, und $y + dy$ einer solchen Curve bestimmen (genau genommen ein Paar solcher). Geht man zu der nächsten Erzeugenden über, so ändern sich γ' und γ''. Aber auch μ ändert sich, wenn man denjenigen Complex im consecutiven Büschel betrachtet, welcher die begonnene Haupttangentencurve weiter ausschneidet.

Indem man ausdrückt, dass der Complex:

(2) $$(\gamma' + \delta\gamma')_x - (\mu + d\mu)\cdot(\gamma'' + \delta\gamma'')_x = 0$$

mit

$$\gamma_x' - \mu\gamma_x'' = 0$$

das Element $y + dy$ gemein hat, *entsteht eine Differentialgleichung für* μ, *welche die Lösung des genannten Problems vermittelt*, weil die Aufgabe sämmtliche Haupttangentencurven zu bestimmen, nach Integration der Gleichung für μ auf eine blosse Elimination hinaus kommt. **)

---

*) Math. Annalen V, p. 179.

**) Es darf hier vielleicht noch darauf hingewiesen werden, dass eine ähnliche Methode zur *Aufstellung der Differentialgleichung der Krümmungslinien* auf

Wir werden die Bildung jener Differentialgleichung genauer erörtern. Wenn die Erzeugenden der Fläche in der Form:

(3) $$x_\iota = \varphi_i$$

gegeben sind, wo die φ_i Functionen von λ sind, für welche

(4) $$\sum \varphi_i^2 = 0,$$

so sind die beiden Geraden γ', γ'' gegeben durch die Gleichungen:

(5) $$\sum \gamma_i \varphi_i = 0 \quad \sum \gamma_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} = 0 \quad \sum \gamma_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} = 0 \quad \sum \gamma_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} = 0.$$
$$\sum \gamma_i^2 = 0.$$

Die Discriminante des Systemes (5) bezeichnen wir durch Δ,

(6) $$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \varphi_i^2 & \sum \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} & \sum \varphi_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}. & \sum \varphi_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} \\ \sum \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} & \sum \left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\right)^2 & \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} & \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} \\ \sum \varphi_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} & \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} & \sum \left(\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}\right)^2 & \sum \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} \\ \sum \varphi_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} & \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} & \sum \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} & \sum \left(\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\right)^2 \end{vmatrix}$$

Die Haupttangente y, welche dem Complexe (1) angehört, ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$\sum y_i \varphi_i = 0 \quad \sum y_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} = 0 \quad \sum y \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} = 0 \quad \gamma_y' - \mu \gamma_y'' = 0$$
$$\sum y_i^2 = 0$$

und ihre Coordinaten y_i lassen sich in der Form:

(7) $$y_i = \gamma_i' + \mu \gamma_i'' + \varkappa \frac{d\Pi}{d\varrho_i} \text{*)}$$

darstellen; wo:

$$\Pi = \left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \gamma' \gamma'' \varrho\right),$$

d. h. die 6reihige Determinante der eingeklammerten Grössen bedeutet. Dabei ist:

---

windschiefen Flächen führt. Je drei consecutive Erzeugende bestimmen ein Hyperboloid, dessen Krümmungslinien die Krümmungslinien der Fläche osculiren. Da die Krümmungslinien durch die von dem Parameter μ abhängige Schaar confocaler Flächen ausgeschnitten werden, so erhält man auf analoge Weise eine Differentialgleichung für μ, welche die der Krümmungslinien ist. Vgl. ausserdem die nächstfolgende Anmerkung.

*) Die Gleichungen (7) sind die des *ganzen Systems der Developpabelen Flächen der Haupttangenten*. Da auch die γ', γ'' im Folgenden explicit dargestellt werden, *so ist die Elimination*, von der oben geredet wurde, *als völlig erledigt zu betrachten.*

$$\sum\left(\frac{d\Pi}{d\varrho_i}\right)^2 = -\Delta'\left(\sum\gamma_i'\gamma_i''\right)^2,$$

wo Δ' die Unterdeterminante nach $\sum\left(\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\right)^2$ in Δ (6) oder:

(8) $$\Delta' = -\left[\sum\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\right)^2\right]^3 \text{*)}.$$

Zugleich mag $\sum\gamma_i'\gamma_i''$ durch Γ bezeichnet werden. Die Bedingung $\sum y_i^2 = 0$ liefert dann:

$$\varkappa^2\Delta'\Gamma = 2\mu,$$

oder:

(9) $$\left.\begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{2\mu}{\Delta'\Gamma}}.$$

Ferner hat man aus den Gleichungen:

$$\sum(y_i + dy_i)[\gamma_i' + \delta\gamma_i' - (\mu + d\mu)(\gamma_i'' + \delta\gamma_i'')] = 0$$

$$\gamma_y' - \mu\gamma_y'' = 0$$

$$\gamma_{dy}' - \mu\gamma_{dy}'' = 0$$

(10) $$\sum y_i\delta\gamma_i' - \mu\sum y_i\delta\gamma_i'' - d\mu\,\gamma_y'' = 0,$$

und nach (7) und wegen $\sum\gamma_i'd\gamma_i' = 0$ $\sum\gamma_i''\delta\gamma_i'' = 0$ ist:

$$\gamma_y'' = \Gamma$$

(11) $$\begin{aligned}\sum y_i\delta\gamma_i' &= \mu\sum\gamma_i''\delta\gamma_i' + \varkappa_1\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\;\gamma'\gamma''\delta\gamma'\right)\\ \sum y_i\delta\gamma_i'' &= \sum\gamma_i'\delta\gamma_i'' + \varkappa_2\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\;\gamma'\gamma''\delta\gamma''\right).\end{aligned}$$

Aber auch die in (11) vorkommenden Determinanten lassen sich einfacher ausdrücken. Man hat zunächst

(12) $$\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\gamma'\gamma''\right) = \Gamma\sqrt{-\Delta}.$$

Multiplicirt man die letztere Determinante mit den beiden in (11) auftretenden, so ergiebt sich:

$$\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\gamma'\gamma''\delta\gamma'\right) = -\frac{\Gamma\Delta'}{\sqrt{-\Delta}}\sum\delta\gamma_i'\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}.$$

$$\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\gamma'\gamma''\delta\gamma''\right) = -\frac{\Gamma\Delta'}{\sqrt{-\Delta}}\sum\delta\gamma_i''\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}.$$

Berücksichtigt man noch die Gleichungen:

$$\sum\delta\gamma_i'\frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda^3} + d\lambda\sum\gamma_i'\frac{\partial^4\varphi_i}{\partial\lambda^4} = 0,$$

$$\sum\delta\gamma_i''\frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda^4} + d\lambda\sum\gamma_i''\frac{\partial^4\varphi_i}{\partial\lambda^4} = 0;$$

*) Math. Ann. VIII, p. 111.

so nimmt (10) die Form an:

$$(13)\ \mu\,\Sigma(\gamma_i''\,\delta\gamma_i'-\gamma_i'\,\delta\gamma_i'')+d\lambda\sqrt{\frac{2\mu\Gamma\Delta'}{-\Delta}}\;\Sigma\left(\gamma_i'\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}-\mu\gamma_i''\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}\right)-\Gamma\,d\mu=0.$$

Diese Differentialgleichung für μ ist ihrer Form nach dieselbe, auf welche auch Herr Clebsch *) geführt wurde, als er die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen vermöge einer Abbildung der letzteren auf die Ebene untersuchte. Sie ist ohne Weiteres integrabel, sobald man ein particuläres Integral derselben kennt. **) Aber man kann die Gleichung (13) in eine sehr bemerkenswerthe neue Form bringen, in welcher der hauptsächlichste Vortheil der hier gewählten Darstellung liegen dürfte, zu deren Herleitung wir nunmehr übergehen.

§ 2.

Weitere Ausführung.

Die völlige Darstellung von (13) verlangt die Bildung der Differentiale von γ', γ'' sowie dieser Grössen selbst. Nun sind γ', γ'' Lösungen des Systemes (5) und als solche zunächst von sehr complicirter Form, wenn man die üblichen Methoden zur Auflösung desselben verwendet. ***)

Um diese zu vermeiden, bezeichnen wir die Coordinaten des linearen Complexes, welcher die Erzeugende x und ihre vier consecutiven enthält, durch z_i; dann ist:

---

*) Clebsch, Ueber die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen Crelle 68. p. 151.

**) Die Differentialgleichung ist von der Form

$$\frac{dy}{dx}+fy^2+\varphi y+\psi=0\cdot$$

Ist y_0 ein particuläres Integral derselben, und setzt man $y=y_0+\mu$, so ist:

$$\frac{-d\,\frac{1}{\mu}}{dx}+\frac{1}{\mu}(\varphi+2y_0f)+f=0\cdot$$

Irgend drei Integrale der letzteren Gleichung, μ_1, μ_2, μ_3, befriedigen die Identität

$$\frac{a_1}{\mu_1}+\frac{a_2}{\mu_2}+\frac{a_3}{\mu_3}=0\,,\ \text{wo}\ a_1+a_2+a_3=0\cdot$$

Daher hat man folgende Beziehung zwischen je 4 Integralen der ursprüngliche[n] Gleichung:

$$\frac{a_1}{y_1-y_0}+\frac{a_2}{y_2-y_0}+\frac{a_3}{y_3-y_0}=0\quad a_1+a_2+a_3=0\,,$$

in welcher man leicht den Ausdruck für den bekannten geometrischen Satz e[r]kennt, dass alle Erzeugenden der Fläche von je vier Haupttangentencurven pr[o]jectivisch geschnitten werden.

***) Math. Ann. VIII, p. 106.

$$\sum z_i\varphi_i=0\ \sum z_i\frac{d\varphi_i}{d\lambda}=0\ \sum z_i\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}=0\sum z_i\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}=0\ \sum z_i\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}=0;$$

also sind die z_i den Unterdeterminanten von $\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\varrho\right)$ proportional zu setzen, und Σz_i^2 wird im Allgemeinen von Null verschieden sein. Setzt man ferner:

(1) $$\Omega=\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ z\ \varrho\right),$$

so ist:

(2) $$\gamma_i=z_i+\nu\frac{d\Omega}{d\varrho_i},$$

also wegen $\sum\gamma_i^2=0$ und $\sum\left(\frac{d\Omega}{d\varrho_i}\right)^2=\Delta\sum z^2$

(3) $$\nu=\pm\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}.$$

Demnach ist:

(4) $$\gamma_i'=z_i+\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{d\Omega}{d\varrho_i}$$

$$\gamma_i''=z_i-\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{d\Omega}{d\varrho_i}$$

und:

(5) $$\begin{cases}\Gamma=2\sum z^2\\ \sum\gamma_i'\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}=-\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\left[\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ z\right]\\ \sum\gamma_i''\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}=+\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\left[\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ z\right]\end{cases}$$

und:

(6) $$\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ z\right)^2=\Delta''\sum z_i^2,$$

wo Δ'' die den Determinanten Δ, Δ' analog gebildete fünfreihige Determinante.

Wir haben jetzt noch $\delta\gamma_i'$, $\delta\gamma_i''$ zu bilden. Da nach (4)

$$\delta\gamma_i'=\delta z_i+\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\delta\frac{d\Omega}{d\varrho_i}+\frac{d\Omega}{d\varrho_i}\delta\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$$

$$\delta\gamma_i''=\delta z_i-\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\delta\frac{d\Omega}{d\varrho_i}-\frac{d\Omega}{d\varrho_i}\delta\frac{1}{\sqrt{-\Delta}},$$

so hat man:

$$\sum\gamma_i''\delta\gamma_i'-\gamma_i'\delta\gamma_i''=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left[\sum z_i\,\delta\left(\frac{d\Omega}{d\varrho_i}\right)-\sum\frac{d\Omega}{d\varrho_i}\delta z_i\right].$$

Da ferner:

$$\delta\left(\frac{d\Omega}{d\varrho_i}\right)=\left(\varphi\frac{d\varphi}{\partial\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ z\ \varrho\right)d\lambda+\left(\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ dz\ \varrho\right),$$

so ergiebt sich endlich:

(7) $$\sum \gamma_i''\delta\gamma_i' - \gamma_i'\delta\gamma_i' = \frac{4}{\sqrt{-\Delta}}\left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ dz\ z\right).$$

Um hier noch die Differentiale von z zu entfernen, bilde man das Product der Determinanten:

$$\left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ z\ dz\right) \text{ und } \left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ z\right),$$

welches wegen:

$$d\lambda \sum z_i \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5} + \sum dz_i \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} = 0$$

gleich $d\lambda\,\Delta \sum z_i \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5} \sum z_i^2$ ist. Setzt man die z_i geradezu gleich den ersten Unterdeterminanten der obigen Determinante, so ist

$$\left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ z\right) = -\sum z^2 = -\Delta''$$

und

$$\sum z_i \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5} = -\left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5}\right) = -\Delta'''.$$

Demnach hat man:

(8) $$\frac{\Sigma\gamma_i'\,\frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} - \mu\gamma_i''\,\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}}{\Gamma} = \frac{(1+\mu)}{2\sqrt{-\Delta}}$$

$$\frac{\Sigma\gamma_i''\,\delta\gamma_i' - \gamma_i'\,\delta\,\gamma_i''}{\Gamma} = 2\,d\lambda\sqrt{-\Delta}\,\frac{\Delta'''}{\Delta''}$$

und hieraus für die Differentialgleichung I, 13:

(9) $$d\mu = d\lambda\left[2\mu\,\frac{\Delta'''}{\Delta''}\sqrt{-\Delta} + (1+\mu)\sqrt{\mu}\,\frac{\sqrt{\Delta'\Delta''}}{\Delta}\right].$$

Die Form dieser Gleichung ist dadurch merkwürdig, dass die in derselben auftretenden *Functionen* Δ, Δ', Δ'', Δ''' *sämmtlich invariante Bedeutung für die Fläche* haben. $\Delta = 0$ *liefert die Erzeugenden, welche von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden,* $\Delta' = 0$ *bestimmt die singulären Erzeugenden,* $\Delta'' = 0$ *diejenigen, welche zu fünfpunktig berührenden Tangenten gehören, endlich* $\Delta''' = 0$ *solche, für welche ein linearer Complex existirt, welcher diese selbst und ihre fünf consecutiven enthält.* *)

Die Gleichung (9) wird ohne Weiteres integrabel **), wenn $\Delta''' = 0$,

---

*) Vgl. meine Arbeit Math. Ann. VIII. a. a. O.

**) Die Gleichung würde auch integrabel sein, wenn zwischen den Invarianten die Bezeichnung:

$$\text{const} = \left(\frac{\Delta''}{\Delta}\right)^3 \frac{\Delta'}{\Delta'''^2}$$

stattfände. Da aber für algebraische Functionen n^{ter} Ordnung φ_i diese Gleichung schon vom Grade $4(9n-33)$ ist, während im Ganzen nur $6(n+1)$ homogene durch $2n+1$ Bedingungen ($\Sigma\varphi_i^2 = 0$) beschränkte Coefficienten in den φ_i vorkommen, so ist dieser Fall als ein ganz specieller zu betrachten.

d. h. *wenn die Fläche einem linearen Complexe angehört.* Die z sind dann Constanten a, und man kann setzen:

$$\sqrt{\Delta''} = \frac{\left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ a\right)}{\sqrt{\Sigma a^2}},$$

so dass die Gleichung (9) wird:

$$(10) \qquad \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\,1+\mu} = d\lambda\,\frac{\sqrt{\Delta'}}{\Delta}\,\frac{\left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ a\right)}{\sqrt{\Sigma a^2}},$$

in welcher die Irrationalität einzig durch $\sqrt{\Delta'}$ *bedingt ist.*

Wir betrachten insbesondere den Fall, wo *die* φ_i *rationale ganze Functionen* n^{ter} *Ordnung* sind. Man kann dann statt der Determinante $\left(\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ a\right)$ eine solche substituiren, in welcher nur vierte Differentialquotienten vorkommen, ebenso kommen dann in Δ nur dritte vor, etc.*)

Es werden alsdann $\Delta' = -\left[\sum\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2\right]^3$, Δ, Δ'', ganze Functionen von den Graden $6(n-2)$, $8(n-3)$, $5(n-4)$. Die Integration nach μ führt auf einen Logarithmus, die nach λ im Allgemeinen auf hyperelliptische Integrale erster, zweiter und dritter Gattung.

Die Haupttangentencurven werden daher logarithmisch-algebraisch, wenn jene Integrale sich auf logarithmisch-algebraische Functionen reduciren lassen. Herr Königsberger hat neuerdings für diese Reduction die erforderlichen Kriterien angegeben.**)

Indem wir davon absehen, die Königsberger'schen Kriterien in ihrer ganzen Allgemeinheit für den vorliegenden Fall geometrisch zu interpretiren, wollen wir uns darauf beschränken, die Frage genauer zu erörtern, *wann die Haupttangentencurven algebraisch werden.* Es ist dazu erforderlich, dass die hyperelliptischen Integrale auf *rein logarithmische Functionen* führen.

Es findet das zunächst statt, wenn das Polynom $\Sigma\left(\frac{d\varphi}{\partial\lambda}\right)^2$ *zwei Wurzelfactoren gerader Multiplicität besitzt und zugleich der Nenner* Δ *in* (10) *nach Aufhebung etwaiger gemeinsamer Factoren nur einfache Wurzelfactoren hat.****) In diesem Falle handelt es sich nämlich nur

*) Math. Ann. VIII, p. 102—106.

**) Vgl. hier und im Folgenden Königsberger, Reihenentwickelung der hyperell. Integrale, Math. Ann. IX, p. 487; Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen, daselbst XI, p. 119.

***) Damit das Integral einer rationalen Function Fz nur auf logarithmische Glieder führe, ist *nothwendig*, *dass der Nenner von* F *keine vielfachen Factoren besitzt.* Denn setzt man:

noch um die Integration einer rationalen ächt gebrochenen Function, die überall nur erster Ordnung unendlich wird.

Es möge nun weiter $\Sigma\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2$ sich in die Factoren

$$H_r^2\, B_{2(n-2-r)}$$

zerlegen lassen, wo die Indices die Grade der Functionen bedeuten; B enthält dann nur einfache Factoren, so dass $\sqrt{B}$ irreducibel ist. Setzt man entsprechend:

$$\Delta'' = C_{5(n-4)} \qquad \Delta = D_{8(n-3)}\,,$$

so ist das hyperelliptische Integral in (10)

$$(11) \qquad \int \frac{H_r^3\, B^2_{2(n-2-r)}\, C_{5(n-4)}}{D_{8(n-3)}\sqrt{B_{2(n-2-r)}}}\, d\lambda\,.$$

Man kann dasselbe durch eine Substitution von der Form*):

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$$

auf ein solches reduciren, in welchem das Radical von ungerader Ordnung $2p + 1$ ist, wo:

$$2p + 1 = 2(n - r - 3) + 1\,,\; p = n - r - 3.$$

Dadurch erhalten Zähler und Nenner den Factor

$$(\gamma + \delta z)^{9n-26-r}\,,$$

so dass keine wesentliche Aenderung eintritt, und an Stelle des Integrales:

$$(12) \qquad \mathfrak{J} = \int \frac{Fz\, dz}{\sqrt{R(z)}}$$

eintritt, in welchem F eine rationale Function vom Grade $n - 6 - r$ mit dem Nenner $D - \Delta$ ist, $R(z)$ ein ganzes Polynom vom Grade $2p + 1$ mit lauter einfachen Factoren **)

$$\int F(z)\, dz = \sum A_i \log \frac{p_i}{q_i}\,,$$

wo p_i, q_i rationale Functionen von z, welche zu einander prim sind, so liefert die Differentiation:

$$Fz = \sum A_i \frac{q_i p_i' \quad p_i q_i'}{p_i q_i}\,,$$

wo rechter Hand nur einfache Wurzelfactoren vorkommen können. Das Gleiche muss also bei Fz stattfinden. Dieser einfache Satz scheint anderswo noch nicht bemerkt zu sein.

*) Hermite, Cours d'analyse, p. 15.

**) Man hätte übrigens von vornherein voraussetzen können, dass dem Werthe $\lambda = \infty$ eine singuläre Erzeugende entspricht, womit $\Sigma\left(\frac{d\varphi}{\partial\lambda}\right)^2$ vom Grade $2n - 5$ wird.

Nach Herrn Königsberger hat man nun folgende Reduction des hyperelliptischen Differentials *):

$$\frac{Fz\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \frac{\sqrt{Rz_i}\,dz}{(z-z_i)\sqrt{Rz}} + \sum_{r=0}^{r=p-1} l^r \frac{z^{2p-(r+1)}\,dz}{\sqrt{Rz}}$$
$$+ \sum_{s=p}^{s=2p-1} k^s \frac{z^{2p-(s+1)}\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{d}{dz}\left[fz\sqrt{R(z)}\right] dz\,.$$

Dabei ist:

$$l^r = \sum_{i=1}^{i=n} (l_i^r) - l_0^r$$

$$k^r = \sum_{i=1}^{i=n} (k_i^r) - k_0^r$$

$$fz = \sum_{i=1}^{i=n} (f_i z) - f_0 z$$

und die z_i sind die N Werthe, für welche der Nenner von F verschwindet.

Insbesondere verschwinden alle k_i^r, l_i^r, $f_i z$, wenn die Ordnung des Verschwindens von D überall gleich eins ist, ausserdem alle k_0^r, wenn F ächt gebrochen ist, alle l_0^r, wenn der Grad von $F(z)$ kleiner als p, und endlich auch $f_0(z)$, wenn jener Grad kleiner als $2p$ ist.

Diese Kriterien sind im Allgemeinen nicht mehr gültig, wenn für einen Verzweigungspunkt von $\sqrt{R(z)}$ auch zugleich $F(z)$ unendlich wird. Nun zerfallen die Verzweigungspunkte von $\sqrt{B}$ in zwei Classen, je nachdem sie zugleich Wurzeln von $H = 0$ sind oder nicht. Wir weisen daher zunächst nach, dass D und $\sqrt{R(z)}$ *oder was dasselbe ist, dass Δ und B für Verzweigungspunkte der zweiten Classe nie gleichzeitig verschwinden können.*

Setzt man zur Abkürzung:

$$\sum\left(\frac{d^2\varphi}{d\lambda}\right)^2 = f_1 \quad \sum \varphi \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} = f_2 \quad \sum\left(\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\right)^2 = f_3 \quad \sum \frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = -\frac{1}{3} f_2$$
$$\sum\left(\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\right)^2 = f_4 \quad \sum \frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} = f_5 \quad \sum \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} = f_6$$

so ist:

$$\Delta = f_2^2\left[f_1 f_3 + \frac{1}{9} f_2^2\right] - 2 f_1 f_2 \left[f_1 f_6 - \frac{1}{3} f_2 f_3\right] + f_1^2\left[f_1 f_4 + f_5^2\right].$$

Verschwindet also Δ mit $f_1 = 0$, so muss auch f_2 gleich Null sein. Aber $f_2 = -3\sum \frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}$ kann nur verschwinden, wenn f_1 eine viel-

*) Königsberger, Math. Ann. IX, 492.

fache Wurzel besitzt, d. h. nicht für die Verzweigungspunkte zweiter Classe.

Man kann noch bemerken, dass wenn H im Grade s, d. h. f_1 im Grade $2s$ verschwindet, auch Δ gleich Null ist. Denn f_2 verschwindet dann im Grade $2s-1$, und die 6 Terme von Δ haben im Allgemeinen den nämlichen Wurzelfactor im Grade:

$$6s-2,\ 8s-4,\ 6s-1,\ 6s-2,\ 6s,\ 4s$$

d. h. Δ verschwindet im Allgemeinen im $4s^{\text{ten}}$ Grade, wenn nicht auch $f_5=0$, so dass $F(z)$ für solche Werthe von der s^{ten} Ordnung unendlich wird. Verschwindet also H einfach, so wird $F(z)$ wieder von der ersten Ordnung unendlich. — Würde aber jene Wurzel von $H=0$ zugleich Verzweigungspunkt von $\sqrt{B}$ sein, so würde $F(z)$ auch noch von der ersten Ordnung unendlich sein.

Dagegen wird C im allgemeinen mit H noch nicht verschwinden*) und ebenso wird im Allgemeinen $\Delta=0$ weder $H=0$ noch $C=0$ nach sich ziehen.

Soll nun das hyperelliptische Integral sich auf rein logarithmische Glieder reduciren, so muss nach einem bekannten Abel'schen Satze die Identität stattfinden:

$$\int\frac{F(z)dr}{\sqrt{R(z)}}=\sum A_i\log\frac{\alpha_i+\beta_i\sqrt{R(z)}}{\alpha_i-\beta_i\sqrt{R(z)}}=\sum A_i\log\Psi_i$$

Es ist dann:

$$F(z)=\sqrt{R(z)}\sum A_i\frac{\Psi_i'}{\Psi_i}. \tag{13}$$

Man kann aber zeigen, wie dies Herr Liouville gelegentlich einer anderen Untersuchung ausgeführt hat,**) dass der Ausdruck:

$$\sqrt{R(z)}\ \frac{\Psi_i'}{\Psi_i}$$

sich auf die Form:

$$\frac{PM'-MP'}{NP}$$

bringen lässt, in welcher sämmtliche Zeichen P, M, N ganze Polynome, P', M' ihre entsprechenden Derivirten bedeuten, N prim zu P ist und ohne Rest in den Zähler aufgeht, so dass der Nenner desselben nur einfache Wurzelfactoren besitzt. Demnach ist der Ausdruck rechts in (13) gleich dem Quotienten zweier ganzer Polynome

$$F(z)=\frac{U}{V}$$

wo V nur einfache Wurzelfactoren hat. *Es kann also in dem Falle,*

---

*) C^3 wird für $f_1=0$ $f_2=0$ gleich $-\sum(\varphi d^4\varphi)^2 f_3^3$.

**) Liouville sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce. Journ. de l'École polytechnique Cahier XXIII, p. 65.

wo das hyperelliptische Integral auf algebraisch logarithmische Functionen sich reducirt, der logarithmische Theil nur dann verschwinden, wenn die Wurzelfactoren des Nenners von $F(z)$ sämmtlich einfach sind, d. h. F nur in der ersten Ordnung unendlich wird.

Wir untersuchen jetzt, inwieweit diese Bedingung hinreichend ist. In der That verschwinden schon alle $f_i z$, l_i^r, k_i^r, soweit sie nicht zu Verzweigungspunkten von $\sqrt{B}$ gehören. Aber das Verschwinden der l^r, d. h. der l_0^r ist nach Herrn Königsberger nothwendig*). Wir nehmen daher an, dass wenn Verzweigungspunkte erster Classe vorhanden sind, dieselben keinen Einfluss haben, oder was im Interesse der geometrischen Auffassung besonders einfach ist, dass sie nicht vorhanden sind.

Dann verschwinden die $f_i z$, l_i^r, k_i^r überhaupt. Auch $f_0 z$ verschwindet, denn der Grad von $F(z)$ ist ersichtlich kleiner als $2p$, weil die Bedingung:

$$n - 6 - r < 2n - 2r - 6$$

auf $n > r$ führt, was selbstverständlich stattfindet.

Zweitens verschwinden auch die l_0^r, weil:

$$n - 6 - r < n - r - 3.$$

Nur die k_0^r werden im Allgemeinen nicht fortfallen. Sie liefern dann die weiteren Bedingungen, welche von Herrn Königsberger explicite angegeben sind**).

Man kann daher, von ganz speciellen Fällen abgesehen, sagen:

Wenn auf einer rationalen Linienfläche, die einem linearen Complexe angehört, singuläre Erzeugende von höherer ungerader Multiplicität als der ersten nicht vorhanden sind, wenn die von gerader höchstens doppelt und so zählen, dass für sie Δ nur höchstens im vierten Grade verschwindet, wenn ferner die weiteren Erzeugenden, für welche die beiden vierpunktigen Tangenten der Fläche zusammenfallen, überall einfach zählen, wenn endlich jene Königsberger'schen Gleichungen erfüllt sind, so sind sämmtliche Haupttangentencurven algebraisch.

Wir heben noch einen besonders einfachen Fall hervor. Auch die k_0^r werden verschwinden, wenn $F(z)$ ächt gebrochen ist; d. h. wenn:

$$n - 6 - r < 0, \quad r > n - 6$$

ist. Der Fall $n - 2 = r$ ist schon oben besprochen. Für die Linienflächen vierter und fünfter Ordnung reducirt sich also unter den obigen Voraussetzungen das Integral $\mathfrak{J}$ auf eine Summe von Integralen dritter Gattung. Im Allgemeinen wird dies aber nur dann stattfinden, wenn unter den singulären Erzeugenden sich nicht mindestens $n - 5$ doppelt

---

*) Math. Ann. XI. p. 135.

**) Math. Ann. XI. p. 135.

zählende befinden. Dann reduciren sich die Königsberger'schen Gleichungen aber auf:*)

$$\sum m_i d_{i0} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots p$$

$$\vdots$$

$$\sum m_i d_{i\,p-1} = 0$$

wenn noch:

$$\sum_{r=1}^{r=k} M_{ri} = m_i$$

gesetzt wird, oder, da die Determinante der d_{ik} nicht verschwindet, auf:

$$m_i = 0 \qquad i = 1 \ldots p.$$

Die vorigen Betrachtungen gelten insbesondere, wenn $r = n - 3$, d. h. wenn nur zwei einfach zählende singuläre Erzeugende, alle übrigen in gerader Multiplicität 2 vorhanden sind. In diesem Falle lässt sich aber das Integral $\mathfrak{J}$ direct betrachten. Ist nämlich überhaupt $r = n - 3$ und sind die Wurzelfactoren des Nenners der (ächt gebrochenen) Function $F(z)$ sämmtlich einfach, so zerfällt $\mathfrak{J}$ durch Partialbruchzerlegung ohne Weiteres in eine Summe logarithmischer Glieder,

*Die algebraische Haupttangentencurve der Fläche***) *ist zugleich vom Geschlechte Null, wenn* $r = n - 3$.

Man hat daher folgenden Satz:

Wenn auf einer rationalen Linienfläche n^{ter} *Ordnung, die einem linearen Complexe angehört,* $4(n-3)$ *getrennte Erzeugende vorhanden sind, die von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden, wenn ferner* $n - 3$ *doppelte singuläre Erzeugende vorhanden sind, welche zugleich für diese Curve in dem oben beschriebenen Sinne vierfach zählen, so sind alle Haupttangentencurven algebraisch.*

Das letztere findet auch dann statt, wenn nur doppelte singuläre Erzeugende dieser Art vorhanden sind, und wenn ausserdem noch $4(n-4)$ *getrennte Erzeugende von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden.****)

Die vorhergehenden Betrachtungen finden zunächst auf alle ratio-

*) Königsberger a. a. O.

**) Vgl. meine Arbeit Math. Ann. VIII, p. 107. Die algebraische Haupttangentencurve entsteht in (10) für $\mu = -1$, d. h. wenn man der Integrationsconstanten einen unendlich grossen Werth ertheilt.

***) Der Satz ist im Interesse eines geometrisch anschaulichen Resultates in einer specielleren Form ausgesprochen, als die vorigen Betrachtungen verlangen. Nothwendig ist nur, dass der irreducibele Nenner von F in einfache Factoren zerfällt.

nalen Linienflächen vierter Ordnung Anwendung, da diese immer einem linearen Complexe angehören.*) (Die nicht rationalen Flächen dieser Art enthalten überdies nur algebraische Haupttangentencurven.) Die Integration wird hier durch den Umstand noch besonders einfach, dass die Determinante Δ'' eine Constante ist,**) doch unterlassen wir, dieses Beispiel im Speciellen hier weiter auszuführen, da die Gruppirung sämmtlicher Fälle eine Reihe von zwar an sich sehr einfachen aber doch umfangreichen Rechnungen erfordern würde.

§ 3.

Specielle Fälle.

Die Umformungen des § 2. werden ungültig für den Fall, dass die Fläche einem *speciellen* linearen Complexe angehört, d. h. dass Σz^2 verschwindet. Es erhellt unmittelbar, dass überhaupt nur in dem Falle, wo die z_i Constanten proportional sind, überall $\Sigma z^2 = 0$ sein kann. Ebenso verlieren die bisher benutzten Gleichungen ihre Bedeutung, wenn $\Delta = 0$ sein sollte. Wir werden diese Fälle daher noch gesondert zu betrachten haben.

Gehört die Fläche überhaupt einem linearen Complexe an, so muss die sechsreihige Determinante:

$$\left[\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3} \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4} \frac{d^5\varphi}{d\lambda^5}\right]$$

verschwinden. Ihre fünfreihigen Unterdeterminanten sind dann Constanten proportional, den Coefficienten jenes linearen Complexes. *Derselbe ist ein specieller, wenn auch die Determinante Δ'' verschwindet.* Bezeichnet man eine Reihe von Unterdeterminanten der letzteren durch:

$$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5,$$

so lässt sich zeigen, dass die Coordinaten:

$$z_i = k_1\varphi_i + k_2 \frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_3 \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_4 \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} + k_5 \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}$$

gerade denen des genannten Complexes proportional sein müssen. Man hat daher die Identität:

$$(1) \qquad M a_i = k_1\varphi_i + k_2 \frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_3 \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_4 \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} + k_5 \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}$$

---

*) Math. Ann. VIII. p. 134. Ein hiermit verwandter Satz ist, wie ich jetzt bemerke, wohl schon etwas früher als von mir, von Herrn Tognoli ausgesprochen worden. Vgl. Alcune considerazione sulla geometria delle superficie e curve gobbe di genere zero. Battaglini, Giornale XI, 181.

**) Hierin liegt zugleich die Berechtigung, C als *im Allgemeinen* mit H nicht verschwindend vorauszusetzen, ausgedrückt. Uebrigens kann man sich an den im nächsten § für Δ'', Δ' gegebenen Werthen überzeugen, dass C auch dann noch nicht verschwindet, wenn $r = n - 3$ u. s. w. ist.

wo

$$k_5 = \Delta$$

und

(2) $$M \sum a_i \gamma_i'' = \Delta \sum \left(\gamma_i'' \frac{d^4 \varphi_i}{d\lambda^4}\right).$$

In diesem Falle kann man $\gamma_i' = a_i$ setzen. Die Differentialgleichung I, 10 wird dann:

(3) $$\frac{\mu\, \Sigma \alpha_i \delta \gamma_i'' + d\mu \Sigma \alpha_i \gamma_i''}{(\mu\, \Sigma \alpha_i \gamma_i'')^{3/2}} + i d\lambda \sqrt{2}\, \frac{M}{\Delta^{3/2}} \sqrt{\Delta'} = 0,$$

oder, wenn $\mu \Sigma \alpha_i \gamma_i'' = x$ gesetzt wird:

(4) $$\frac{dx}{x^{3/2}} = i d\lambda \frac{\sqrt{2}}{\Delta^{3/2}} M \sqrt{\Delta'}.$$

Auch hier wird durch den Nenner $\Delta^{3/2}$ keine Irrationalität eingeführt, weil Δ selbst als Quadrat eines rationalen Ausdruckes dargestellt werden kann.*) Sollen die Haupttangentencurven algebraisch werden, so muss demnach die Integration nach λ rechterhand lediglich auf algebraische Functionen führen.**) Aus den Gleichungen (4) und § II, 10 ergiebt sich der allgemeinere Satz:

*Auf den rationalen Regelflächen, welche einem linearen allgemeinen oder speciellen Complex angehören, lassen sich die Haupttangentencurven immer durch Gleichungen bestimmen, welche nur logarithmische und algebraische Functionen enthalten, sobald nicht mehr als zwei singuläre Erzeugende von ungerader Multiplicität vorhanden sind.****)

Wenn die rationale Fläche vierter Ordnung durch die Gleichungen:

$$\varrho \alpha_i = a_i + b_i \lambda + c_i \lambda^2 + d_i \lambda^3 + e_i \lambda^4 = \varphi_i$$

dargestellt ist, in denen die Coefficienten a, b, c, d, e den Gleichungen:

$$(a^2) = 0 \;\; (b^2) = 0 \;\; (d^2) = 0 \;\; (e^2) = 0,$$
$$(ab) = 0 \;\; (ac) = 0 \;\; (de) = 0 \;\; (ce) = 0,$$
$$(ad) + (bc) = 0 \quad (be) + (cd) = 0,$$
$$2(ae) + (c^2) + 2(bd) = 0 \dagger)$$

*) Vgl. Math. Ann. VII. p. 107.

**) Auch hierfür hat Herr Königsberger die erforderlichen Kriterien angegeben, doch ergeben sich, da der Nenner von F im Allgemeinen in der dritten Ordnung überall verschwindet, nicht ohne Weiteres geometrisch anschauliche Kennzeichen.

***) Eine gewöhnliche singuläre Erzeugende wird von $n-3$ anderen Erzeugenden getroffen, während eine doppelte nur von $n-4$ anderen geschnitten wird. Eine Gerade, welche in der singulären Tangentialebene durch den singulären Punkt geht, osculirt im ersteren Falle, berührt dagegen vierpunktig, wenn die singuläre Erzeugende doppelt ist.

†) Zur Abkürzung ist $\Sigma a_i b_i = (ab)$ gesetzt.

genügen müssen, so wird dieselbe einem speciellen linearen Complexe angehören, wenn das Product:

$$(bd)\,[(bd)\,(ae) - (ad)\,(be)]\;[2\,(ad)\,(be) + (c^2)\,ae]$$

verschwindet.*)

Die Coordinaten desselben sind:

(6) $$z_i = k_1 a_i + k_2 b_i + k_3 c_i + k_4 d_i + k_5 e_i$$

wo:

$$k_1 = (cd)^2,\ k_2 = (ae)(cd),\ k_3 = (ad)\,(be) - (bd)\,(ae),\ k_4 = (ae)(bc),$$
$$k_5 = (bc)\,(cd)$$

Ferner ist:

(7) $$\Delta' = -\lambda^3\,[2\,(ad) + [4\,(ae) + (bd)]\,\lambda + 2\,(be)\,\lambda^2]^3$$

und:

$$-\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (ad) & (ae) & \lambda^4 \\ 0 & 0 & (bc) & (bd) & (be) & -4\lambda^3 \\ 0 & (bc) & (c^2) & (cd) & (ce) & 6\lambda^2 \\ (ad) & (db) & (cd) & 0 & 0 & -4\lambda \\ (ae) & (be) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda^4 & -4\lambda^3 & 6\lambda^2 & -4\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(9) $$-\Delta = [k_5 - 4k_4\lambda + 6k_3\lambda^2 - 4k_2\lambda^3 + k_1\lambda^4]^2 = \mathrm{P}^2.$$

Endlich sind die Coordinaten der vierpunktig berührenden Tangente γ'' dargestellt durch:

$$(\gamma'' a) = \lambda^4,\ (\gamma'' b) = -4\lambda^3,\ (\gamma'' c) = 6\lambda^2,\ (\gamma'' d) = -4\lambda,\ (\gamma'' e) = 1$$
$$(\gamma''^2) = 0.$$

wonach:

(9) $$\sum \gamma'' z = P,\qquad \sum\left(\gamma_i''\,\frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}\right) = 24.$$

und die Gleichung (4) wird:

(10) $$\int \frac{dx}{x^{3/2}} = \sqrt{2}\;24\int \frac{d\lambda\sqrt{\Delta'}}{P^3}.$$

Die vorigen Methoden sind gänzlich unanwendbar, wenn die vierreihige Determinante Δ verschwindet. Aber man kann zeigen, *dass in diesem Falle die Fläche immer zwei unendlich nahe Leitgeraden und demgemäss lauter algebraische Haupttangentencurven besitzt, welche durch blosse Elimination bestimmt werden können.***)

---

*) Vgl. Math. Ann. VIII. 127—130.

**) In meiner Arbeit (Math. Ann. VIII, p. 91) ist die Invariante Δ für den allgemeinsten Fall einer windschiefen Fläche dargestellt, aber ich hatte damals die Bedeutung von $\Delta = 0$ noch nicht vollständig erkannt.

Bezeichnen wir durch k_1, k_2, k_3, k_4 Zahlen, welche den Unterdeterminanten von Δ proportional sind, so gelten die folgenden Identitäten:

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
&k_1 \sum \varphi_i^2 + k_2 \sum \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_3 \sum \varphi_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_4 \sum \varphi_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} = 0\\
&k_1 \sum \varphi_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_2 \sum \left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\right)^2 + k_3 \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_4 \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} = 0\\
&k_1 \sum \varphi_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_2 \sum \frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_3 \sum \left(\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}\right)^2 + k_4 \sum \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} = 0\\
&k_1 \sum \varphi_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} + k_2 \sum \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_3 \sum \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_4 \sum \left(\frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\right)^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Eine Gerade, welche 4 consecutive Erzeugende schneidet, hat daher zu Coordinaten:

$$y_i = k_1 \varphi_i + k_2 \frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_3 \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_4 \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}.$$

Um zu zeigen, dass auch $\Sigma y_i \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4} = 0$ ist, differentiire man die Identitäten (11), multiplicire die so entstandenen 4 Gleichungen mit den k_1, k_2, k_3, k_4 und addire sie, so entsteht:

$$2k_4 \sum y_i \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4} = 0.$$

Wofern k_4 also nicht auch Null ist*), folgt $\Sigma y_i \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4} = 0$, d. h. die Gerade y trifft fünf consecutive Erzeugende. Folglich sind die y *Constanten proportional*, so dass:

$$(13)\qquad N a_i = k_1 \varphi_i + k_2 \frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_3 \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_4 \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}.$$

Die Gerade a ist eine Leitgerade der Fläche. Andererseits ist aber $\Delta = 0$ die Bedingung für die Coincidenz der beiden vierpunktigen Tangenten, die zu *einer* Erzeugenden gehören, und wir zeigen jetzt, dass die Fläche noch einem zweiten linearen Complexe angehört, der mit a in Involution liegt.

Sei nämlich γ ein linearer Complex, welcher die vier consecutiven Erzeugenden enthält, also:

$$\sum \gamma_i \varphi_i = 0 \quad \sum \gamma_i \frac{d\varphi_i}{d\lambda} = 0 \quad \sum \gamma_i \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} = 0 \quad \sum \gamma_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} = 0$$

so ist nach (13) $\qquad \sum \gamma_i a_i = 0.$

Betrachtet man einen der analogen Complexe $\gamma + \delta\gamma$, welcher sich auf das benachbarte System von vier consecutiven Erzeugenden bezieht, so ist:

$$\sum a_i \delta\gamma_i = 0 \quad \sum \left(\delta\gamma_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} + \gamma_i \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4}\right) = 0.$$

---

*) k_4 ist gleich Δ', $k_4 = 0$ würde also die Fläche als *Developpabele* charakterisiren.

Die Determinante:

$$\left(\delta\gamma\ \gamma\ \varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\right)$$

muss also verschwinden. Aber das Quadrat derselben ist gleich

$$\Delta' \cdot \sum \gamma_i^2 \cdot \sum \delta\gamma_i \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}.$$

Hieraus folgt, weil Δ' und $\Sigma\gamma_i^2$ nicht verschwinden:

$$\sum \gamma_i \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4} = 0$$

d. h. jeder lineare Complex, welcher vier consecutive Erzeugende enthält, enthält auch noch eine fünfte: d. h. die γ *sind ebenfalls Constanten proportional.*

In der That kann man auch leicht noch zeigen, *dass die sämmtlichen Unterdeterminanten nach* ϱ *der Determinante:*

$$\left[\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ \frac{d^4\varphi}{d\lambda^4}\ \varrho\right] \tag{14}$$

verschwinden. Denn nach (13) ist:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{d\lambda} a_i = k_1 \frac{d\varphi_i}{d\lambda} + k_2 \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} + k_3 \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3} + k_4 \frac{d^4\varphi_i}{d\lambda^4} \\ + \varphi_i \frac{dk_1}{d\lambda} + \frac{d\varphi_i}{d\lambda}\frac{dk_2}{d\lambda} + \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2}\frac{dk_3}{d\lambda} + \frac{d^3\varphi_i}{d\lambda^3}\frac{dk_4}{d\lambda}.\end{aligned} \tag{15}$$

Die Determinante:

$$\left(\varphi\ \frac{d\varphi}{d\lambda}\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2}\ \frac{d^3\varphi}{d\lambda^3}\ a\ \varrho\right)$$

verschwindet aber identisch, weil sie gleich $(a\varrho)\sqrt{-\Delta}$ ist. Aus ihr entsteht die Determinante (14), wenn man an Stelle der a_i ihre Werthe aus (15) einträgt. Wir kommen also auch hier zu dem Schlusse, dass ein Büschel linearer Complexe existirt, welche fünf consecutive Erzeugende enthalten. Jenes Büschel würde, wenn *nur* die Determinante (14) verschwindet, zwei getrennte Directricen haben, da aber im vorliegenden Falle auch Δ selbst verschwindet, müssen dieselben zusammenfallen; d. h. die Fläche enthält zwei unendlich nahe Leitgerade.

Darmstadt im Juni 1877.