Weitere Untersuchungen über des Ikosaeder.

Von Felix Klein in München.

In dem Aufsatze: „*Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst,*“ den ich im neunten Bande dieser Annalen p. 183—208 veröffentlicht habe, bin ich zu einem merkwürdigen Zusammenhange geführt worden, der zwischen dem Ikosaeder und der Theorie der Gleichungen fünften Grades besteht. Indem ich die letztere benutzte, gelang es mir, die Gleichung zwölften Grades, welche in dem dort erläuterten Sinne ein Ikosaeder vorstellt, in quadratische Factoren zu spalten und also zu lösen. Bemerkenswerth musste schon damals die Leichtigkeit erscheinen, mit der es gelang, gewisse in der Theorie der Gleichungen fünften Grades auftretende Resolventen sechsten und fünften Grades abzuleiten und in ihrem Zusammenhange zu erkennen. Aber ich bin erst durch Gordan, mit dem ich diese Gegenstände ausführlich besprach, veranlasst worden, die Frage umzukehren und zu versuchen, *geradezu die Theorie der Gleichungen fünften Grades aus der Betrachtung des Ikosaeders abzuleiten.* In der That gelang es mir — im steten Verkehre mit Gordan — nicht nur sämmtliche algebraische Sätze und Resultate, welche Kronecker*) und Brioschi**) in dieser Hinsicht — zum Theil ohne Beweis — publicirt haben, aus einer Quelle naturgemäss abzuleiten, sondern ihnen auch neue, und, wie ich glaube, wesentliche Beiträge hinzuzufügen. Ich

---

*) Die hier in Betracht kommenden Mittheilungen von Kronecker sind: Extrait d'une lettre à Mr. Hermite, Comptes Rendus 1858, 6. Juni, und: Ueber die Gleichungen fünften Grades, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1861, abgedruckt in Borchardt's Journal Bd. 59.

**) Brioschi's hierher gehörige Arbeiten sind folgende: Sulle equazioni del moltiplicatore per la transformazione delle funzioni ellitiche (Annali di Tortolini, I, 1858, p. 175); Sulla risoluzione dell' Equazioni di quinto grado (Ebenda p. 256, 326); Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado (Atti del Istituto Lombardo, I, 1858, p. 275); Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques (Comptes Rendus. 1858, 2. p. 337); Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado (Annali di Tartolini, V, 1863, p. 233); Sopra alcune nuove relazioni modulari (Atti della R. Accademia di Napoli, vol. III, 1866); La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado (Annali di Matematica, ser. II, t. I, p. 222, 1867); Sur l'équation du cinquième degré (Comptes Rendus, 1875, 1.); Sopra una classe di forme binarie (Annali di Matematica. ser. II, t. VIII, p. 24. (1876)). Brioschi wird binnen kurzem in diesen Annalen eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen geben.

veröffentlichte hierüber nach einander drei Noten in den Erlanger Berichten*) (Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder I, II, III, November 1876, Januar und Juli 1877), die ich in der gegenwärtigen Abhandlung in umgearbeiteter Form reproducire. Ich habe dabei vorab alles das ausgeschlossen, was auf die Definition der in Betracht kommenden fundamentalen Irrationalitäten durch elliptische Functionen Bezug hat**) und darum Hermite's Lösung der Gleichungen fünften Grades***) im Folgenden nur beiläufig erwähnt. Mich zwang dazu die Fülle des Stoffes und der Wunsch, dem Zusammenhange mit den elliptischen Functionen noch eine eingehendere Untersuchung zu widmen. So besteht das Folgende aus drei Abschnitten. In dem ersten desselben erläutere ich verschiedene Eigenschaften der Ikosaedergleichung, die mir von Interesse scheinen. In dem zweiten und dritten Abschnitte schliesse ich daran zwei Anwendungen. Die erste bezieht sich auf ein Problem, welches im Wesentlichen identisch ist mit der Lösung derjenigen Gleichungen sechsten Grades, die ich, einem Vorschlage Brioschi's folgend, als Jacobi'sche Gleichungen bezeichne. Die zweite beschäftigt sich mit den Gleichungen fünften Grades; es gelingt mir, diejenigen Gleichungen fünften Grades, bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwinden, explicite mit Hilfe einer Ikosaedergleichung zu lösen, und dadurch einen neuen Weg zur Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades zu finden.

Mit Rücksicht auf diesen letzten Abschnitt muss ich gleich hier ein Citat zufügen auf eine Note, welche Gordan neuerdings in den Erlanger Berichten veröffentlichte (Juli 1877. Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades) und die ausgeführt demnächst in diesen Annalen erscheinen soll. Einmal hat Gordan einen Theil der Resultate, welche ich in dem genannten Abschnitte zur Darstellung bringe, seinerseits gefunden und in geschicktere Form gebracht, andererseits dieselben in eigenartiger Weise mit der Invariantentheorie gewisser doppeltbinärer Formen verknüpft. Ohne hier näher darauf einzugehen will ich doch das allgemeine Princip bezeichnen, welches sich durch diese verschiedenartigen Arbeiten immer deutlicher herausstellt und das für die Theorie der algebraischen Gleichungen von weitreichender Bedeutung zu werden scheint, ein Princip, zu dem ich von anderer Seite kommend bereits im vierten Bande dieser Annalen geführt worden bin (p. 346—358,

*) Vergl. auch eine Mittheilung von Brioschi an die Accademia dei Lincei, December 1876.

**) Vergl. indess eine Notiz von mir in den Rendiconti des Istituto Lombardo vom April 1877.

***) Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; Comptes Rendus 1858, 1. Man vergl. zumal noch die zweite hierher gehörige Arbeit Hermite's: Sur l'équation du cinquième degré; Comptes Rendus 1866.

Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen). Beim Ikosaeder sind die 60 Vertauschungen der Wurzeln, welche die Galois'sche Gruppe ausmachen, dargestellt durch 60 lineare Substitutionen, denen eine beliebige der Wurzeln unterworfen wird. In Folge dessen stehen beim Ikosaeder die Theorie der Resolventen und die Theorie der Invarianten in der allerinnigsten Beziehung, und man kann jede derselben fördern, indem man von der anderen Gebrauch macht. *Aehnliche Vortheile stellen sich, wie man zeigen kann, jedesmal ein, wenn die Vertauschungen der Galois'schen Gruppe ersetzt sind durch lineare Substitutionen einer gewissen Zahl Veränderlicher.*

Diese Art, die Invariantentheorie zu verwerthen, ist verschieden von der sonst versuchten, statt der Coefficienten einer Gleichung n^{ten} Grades von vorneherein die Invarianten der entsprechenden binären Form n^{ter} Ordnung einzuführen. In der That scheint das letztere Verfahren im Allgemeinen nicht zweckmässig. Die Gleichungen fünften Grades z. B., wie sie im dritten Abschnitte der Untersuchung zu Grunde gelegt werden, sind in diesem Sinne von den allgemeinen Gleichungen fünften Grades nicht verschieden, und doch gestaltet sich ihre Auflösung wesentlich leichter als die der allgemeinen.

Abschnitt I.

Die Ikosaedergleichung.

§ 1.

Das Fundamentalproblem.

Unter einem *Ikosaeder* schlechthin verstehe ich, wie früher, eine gewisse binäre Form zwölfter Ordnung $f(\eta_1, \eta_2)$. Das volle System ihrer Covarianten besteht aus der Hesse'schen H und der Functionaldeterminante $(f, H) = T$, deren Quadrat sich linear aus f^5 und H^3 zusammensetzt. Als Fundamentalproblem mag dann das folgende hingestellt sein: *Es sind die numerischen Werthe gegeben, welche f, H, T für gewisse Werthe von η_1, η_2 annehmen; man soll η_1, η_2 berechnen.* Diess ist die allgemeinste Formulirung, an deren Stelle ich fast durchgängig, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, eine viel speciellere setze. Bei derselben ist $f(\eta_1, \eta_2)$ in einer *kanonischen Form* gegeben, also z. B. in derjenigen, welche Schwarz in der öfter zu citirenden Arbeit*) benutzt und die ich ebenfalls in meinem früheren Aufsatze verwandte:

$$f = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^{10} + 11 \eta_1^5 \eta_2^5 - \eta_2^{10}).$$

*) Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine *algebraische* Form ihres vierten Elementes darstellt. Borchardt's Journal, Bd. 75, p. 292—335.

Man hat dann für H, T:

$$12^2 H = -(\eta_1^{20} + \eta_2^{20}) + 228(\eta_1^{15}\eta_2^{15} - \eta_1^{5}\eta_2^{15}) - 494\eta_1^{10}\eta_2^{10}$$

$$12\,T = (\eta_1^{30} + \eta_2^{30}) + 522(\eta_1^{25}\eta_2^{5} - \eta_1^{5}\eta_2^{25}) - 10005(\eta_1^{20}\eta_2^{10} + \eta_1^{10}\eta_2^{20})$$

mit der Relation:

$$(1) \qquad T^2 = 12 f^5 - 12^4 H^3.$$

Es handelt sich wieder darum, *wenn die Zahlenwerthe von* f, H, T *gegeben sind (in Uebereinstimmung selbstverständlich mit der Bedingung* (1)), η_1 *und* η_2 *zu bestimmen.* Ich werde weiterhin zeigen (§ 5.), wie sich die allgemeinere Fragestellung auf diese speciellere zurückführen lässt.

Als *Ikosaedergleichung* (im weiteren oder specielleren Sinne) bezeichne ich dann diejenige Gleichung sechzigsten Grades, von der das *Verhältniss* $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ abhängt. Geht man von der kanonischen Darstellung aus, so lautet sie einfach

$$\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = \text{Const.},$$

oder, wie ich gewöhnlich schreibe:

$$(2) \qquad 1728 \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X.$$

Dabei nenne ich X den *Parameter* der Ikosaedergleichung. — In dem allgemeineren Falle hat man linker Hand nur einen invarianten Factor zuzusetzen, um Homogeneität in den Coefficienten herzustellen. Versteht man unter B die in meiner früheren Arbeit (p. 198) definirte Invariante, so hat man:

$$(2\text{a}) \qquad \frac{-5 \cdot 144 \cdot H^3(\eta_1, \eta_2)}{7 \cdot B \cdot f^5(\eta_1, \eta_2)} = X.$$

Man sieht: der Unterschied zwischen dem Fundamentalproblem und der Ikosaedergleichung ist dieser: bei dem ersteren handelt es sich um eine Frage aus der binären Formentheorie, bei der letzteren um eine Gleichung mit einer Unbekannten. Es ist vortheilhaft, zwischen diesen Fragestellungen zu wechseln. Die Ikosaedergleichung gewährt im Allgemeinen zur ersten Orientirung die bessere Uebersicht; aber gewisse tiefer liegende Fragen lassen sich nur mit Hilfe der binären Auffassung erledigen. Ganz ähnlich ist es bei den Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Integralen, die ich neuerdings in diesen Annalen veröffentlichte (XI, p. 115, XII, p. 167).

§ 2.

Die zur Ikosaedergleichung gehörigen linearen Substitutionen.

Die Haupteigenschaft der Ikosaedergleichung (2) *resp.* (2*a*) *ist die, dass alle* 60 *Wurzeln* $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ *sich aus einer beliebigen Wurzel durch lineare Substitutionen ableiten lassen, welche von X unabhängig sind.* Um dieses System linearer Substitutionen im Falle der kanonischen Form aufzustellen, beachte man, dass die Wurzeln von $f = 0$:

$$0,\ \infty,\ (\varepsilon + \varepsilon^4)\,\varepsilon^\nu,\ (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\,\varepsilon^\nu \qquad \left[\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right]$$

durch die Substitutionen in der Weise unter einander vertauscht werden müssen, dass die zusammengehörigen Wurzeln

$$0 \text{ und } \infty$$
$$(\varepsilon + \varepsilon^4)\,\varepsilon^\nu \text{ und } (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\,\varepsilon^\nu$$

zusammengehörig bleiben. Auf diese Weise findet man die 60 Substitutionen

$$(3)\quad \begin{cases} (\text{a}) & \eta' = \varepsilon^\nu\,\eta, \\ (\text{b}) & \eta' = -\dfrac{\varepsilon^\nu}{\eta}, \\ (\text{c}) & \eta' = \varepsilon^\mu\,\dfrac{(\varepsilon + \varepsilon^4)\,\eta + \varepsilon^\nu}{\eta - \varepsilon^\nu\,(\varepsilon + \varepsilon^4)} \\ (\text{d}) & \eta' = -\,\varepsilon^\mu\,\dfrac{\eta - \varepsilon^\nu\,(\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4)\,\eta + \varepsilon^\nu}, \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$$

die ich kurz als die 60 *Ikosaedersubstitutionen* bezeichne*). Eine derselben ($\eta' = \eta$) hat die Periode 1; 15 haben die Periode 2, nämlich die (b), und diejenigen (c), und (d), bei denen $\mu = \nu$; 20 haben die Periode 3: diejenigen (c), für welche $\mu = \nu + 2$, und die (d), bei denen $\mu = \nu + 1$; die 24 übrigen endlich haben die Periode 5; es sind die (a), bei denen $\nu = 1, 2, 3, 4$, die (c), bei denen $\mu = \nu + 1$ und die (d), bei denen $\mu = \nu + 2$. Man controlirt diese Angabe zweckmässig durch Berechnung der bei den einzelnen Substitutionen ungeändert bleibenden Werthe von η.

Legt man f, H, T in nicht kanonischer Form zu Grunde, so treten an Stelle der Substitutionen (3) in leicht verständlicher Weise solche, die sich darstellen lassen, wenn man in (3) statt η' und η bez. schreibt

$$\frac{\alpha\eta' + \beta}{\gamma\eta' + \delta},\quad \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},$$

wo $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ geeignet zu wählen sind.

---

*) Vergl. die Darstellung bei Gordan, diese Annalen XII, p. 45, 46.

§ 3.

Die Gruppe der 120 binären Substitutionen.

Schreibt man in (3) statt η $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, statt η' $\frac{\eta_1'}{\eta_2'}$ und sondert Zähler und Nenner in der Art, dass die entstehenden binären Substitutionen die Determinante $+1$ haben, so entstehen folgende Formeln, *in denen das Vorzeichen nothwendig willkürlich ist, so dass sie eine Gruppe von 120 binären linearen Substitutionen vorstellen.* Es werden η_1', η_2' bez. gleich:

$$(4)\quad \begin{cases} \pm\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_1, & \pm\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_2 \\ \mp\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2, & \pm\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1 \\ \pm\dfrac{\varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1+\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, & \pm\dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}}\left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1-(\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \\ \mp\dfrac{\varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1-(\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, & \pm\dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1+\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}. \end{cases}$$

Aus der Gruppe von 60 Substitutionen der einen Veränderlichen η wird also eine doppelt so zahlreiche Gruppe binärer Substitutionen. Durch dieselben gehen übrigens, wie man von vorneherein einsehen kann, f, H, T auch dem Vorzeichen nach in sich über.

Verzichtet man darauf, dass die Substitutionsderminante $=+1$ sein soll, sondern setzt sie nur (damit die Gruppe überhaupt aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen bestehe) einer Einheitswurzel gleich: $\sqrt[n]{1}$, so wird die Gesammtzahl der Substitutionen 120 n, indem η_1' *und* η_2' mit einer beliebigen Potenz von $\sqrt[2n]{1}$ simultan behaftet werden können. Es ist dies eine sehr selbstverständliche Bemerkung, die ich hier nur anführe, um das Verhalten der weiterhin zu gebrauchenden hypergeometrischea Reihen zu erklären. Bei ihnen ist $n=6$, η_1' und η_2' können immer simultan um zwölfte Einheitswurzeln geändert werden. Dabei bleibt f ungeändert, aber nicht H und T, sondern erst H^3 und T^2.

Die Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen findet natürlich auch hier Anwendung; man hat nur noch die Bedingung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ zuzufügen.

§ 4.

Charakterisirung der Ikosaedergleichung.

Nach den Untersuchungen, welche ich im neunten Annalenbande ausführte und die Gordan neuerdings auf dem Wege der Rechnung bestätigte *) (Bd. XII. p. 23—46), giebt es nur *dreierlei* Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen, welche 60 Substitutionen umfassen. Die eine derselben ist die *Ikosaedergruppe*, wie sie durch (3) in kanonischer Form dargestellt ist. Die zweite gehört dem *Kreistheilungstypus* an und kann in kanonischer Form geschrieben werden:

$$\eta, \; \alpha\eta, \; \alpha^2\eta, \cdots\cdots \alpha^{59}\eta,$$

wo $\alpha = \cos\frac{\pi}{30} + i \sin\frac{\pi}{30}$, die dritte dem *Doppelpyramidentypus*; sie kann, $\beta = \cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}$ gesetzt, in kanonischer Form folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccc} \eta, & \beta\eta, & \beta^{29}\eta, \\ -\frac{1}{\eta}, & -\frac{\beta}{\eta}, & -\frac{\beta^{29}}{\eta}. \end{array}$$

Unter diesen dreierlei Gruppen ist die Ikosaedergruppe durch mannigfache Kennzeichen zu charakterisiren. Das einfachste und von mir später verwandte ist dieses: *Die Ikosaedergruppe enthält im Gegensatze zu den beiden anderen keine Substitution, deren Periode grösser als 5 ist.*

In Folge dessen kann man den allgemeinen Satz aussprechen: *Wenn eine Grösse η durch eine Gleichung 60^{ten} Grades von gegebenen Grössen $a, b, c, \cdots$ in der Weise abhängt, dass sich jeder Werth von η aus einem beliebigen der 60 Werthe durch lineare Substitution mit numerischen Coëfficienten ergiebt, wenn ferner keine dieser Substitutionen eine Periode > 5 besitzt, so hängt η von einer Ikosaedergleichung ab:*

$$\frac{-5\cdot 144\, H^3(\eta)}{7Bf^5(\eta)} = \Phi(a, b, c, \cdots)\, **),$$

wo die Coëfficienten von f, H numerisch sind.

Führt man dann statt η durch geeignete lineare Substitution ein neues η ein, so erhält man in kanonischer Form:

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \Phi(a, b, c, \cdots)\cdot$$

Der hiermit ausgesprochene Satz wird weiterhin die allerwesentlichste Rolle spielen. In den Fällen, in denen er zur Anwendung kommt, ist die Wahl eines kanonischen η durch die Bedingungen der Aufgabe jedesmal von vorneherein ermöglicht, so dass eine Reduction der allgemeineren Ikosaedergleichung auf die kanonische, wie sie nun gelehrt werden soll, nicht noch nothwendig ist. Aber die folgende Auseinandersetzung muss hier ihre Stelle finden, damit der Zusammen-

---

*) Vergl. auch Camille Jordan in den Comptes Rendus. 1877.

**) Wenn $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, so schreibe ich künftig $\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}$ statt $\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)}$.

hang deutlich sei, welcher zwischen der Darstellung in meiner vorigen Arbeit (Annalen IX) und der nun eingehaltenen besteht.

§ 5.

Die allgemeine Ikosaedergleichung ist mit zwei kanonischen äquivalent.

Um die allgemeinere Ikosaedergleichung (die ich durch Indices bez. Accente auszeichnen will):

$$(5)\qquad \frac{-5\cdot 144\cdot H_1^3(\eta_1', \eta_2')}{7\cdot B\cdot f_1^5(\eta_1', \eta_2')} = X$$

auf die kanonische

$$(6)\qquad 1728\,\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X$$

zurückzuführen, muss man, wie bereits bemerkt, statt $\frac{\eta_1'}{\eta_2'}$ eine geeignete lineare Combination $\frac{\alpha\eta_1' + \beta\eta_2'}{\gamma\eta_1' + \delta\eta_2'}$ als neue Unbekannte einführen. Die Bestimmung von α, β, γ, δ verlangt, wie ich jetzt zeigen werde, eben wieder die Auflösung einer kanonischen Ikosaedergleichung.

Um nämlich die Substitution zu finden, welche (5) in (6) überführt, hat man nur diejenigen drei Werthe a, b, c von η zu suchen, welche drei beliebig angenommenen Werthen a', b', c' von η' vermöge der Substitution entsprechen. Nun ist aber die linke Seite von (5) — wenn der Ausdruck gestattet ist — eine *absolute* Covariante, die sich bei linearer Substitution nicht ändert. Daher hat man zur Bestimmung von a, b, c die Gleichungen:

$$1728\,\frac{H^3(a)}{f^5(a)} = -\frac{5\cdot 144\,H_1^3(a')}{7B_1 f_1^5(a')};\quad 1728\,\frac{H^3(b)}{f^5(b)} = -\frac{5\cdot 144\,H_1^3(b')}{7B_1 f_1^5(b')};$$
$$1728\,\frac{H^3(c)}{f^5(c)} = -\frac{5\cdot 144\,H_1^3(c')}{7B_1 f_1^5(c')}.$$

Diese drei Gleichungen sind „kanonische" Ikosaedergleichungen. Es genügt, eine derselben zu lösen, da man die drei Werthe a', b', c' consecutiv nehmen kann und sich dann aus den Wurzeln der einen Gleichung die zugehörigen Wurzeln der beiden anderen Gleichungen rational ergeben.

Die allgemeinere Ikosaedergleichung wird also dadurch gelöst, dass man nach einander zwei kanonische Ikosaedergleichungen erledigt.

Einen besonderen Fall nun der allgemeineren Gleichungen, der wieder mit den kanonischen Gleichungen auf derselben Stufe steht, hatte ich im neunten Annalenbande betrachtet. Es ist der Fall $X = \infty$, wo also die Gleichung

$$f_1(\eta_1', \eta_2') = 0$$

zur Lösung vorgelegt ist. Da die specielle Gleichung

$$f(\eta_1, \eta_2) = 0$$

gelöst ist (siehe oben § 2.), so verlangt das damals gestellte Problem im Sinne der hier gebrauchten Ausdrucksweise nur die Lösung *einer* kanonischen Ikosaedergleichung. Hierin ist die Uebereinstimmung begründet, welche zwischen den weiterhin abzuleitenden Eigenschaften der (kanonischen) Ikosaedergleichung und den damals gewonnenen Resultaten besteht.

§ 6.

Gruppe der Ikosaedergleichung. Conforme Abbildung.

Man kann jede Function der Wurzeln der Ikosaedergleichung vermöge der Formeln (3) als Function einer einzelnen Wurzel darstellen. Substituirt man nun für diese eine Wurzel eben wieder vermöge der Formeln (3) der Reihe nach jede andere und ändert sich dabei der Werth der Function nicht, so ist sie offenbar rational. Daher: *Die Galois'sche Gruppe der Ikosaedergleichung besteht aus* 60 *Permutationen. Man erhält dieselbe, wenn man die* 60 *Wurzeln als Functionen von einer unter ihnen auffasst und auf diese eine die Substitutionen* (3) *anwendet.* Die Structur dieser Gruppe lässt sich, wie ich auch Annalen IX, p. 208 angab, am besten folgendermassen charakterisiren. Es giebt, wie weiterhin noch ausführlich zu erläutern ist, fünfwerthige Functionen von η, welche bei jeder der 60 Substitutionen (3) eine Permutation erfahren. Nun lässt sich aus den 120 Vertauschungen von fünf Dingen nur eine Gruppe von 60 zusammensetzen, das ist die Gesammtheit der geraden Vertauschungen. Ihr also entspricht die hier vorliegende Gruppe der Ikosaedergleichung.

Aeusserst anschaulich werden die Beziehungen zwischen den Wurzeln durch die conforme Abbildung, welche Schwarz l. c. angiebt. Durch die Symmetrie-Ebenen des Ikosaeders wird die η-Kugel in 120 abwechselnd congruente und symmetrische Dreiecke mit den Eckenwinkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ zerlegt. *Die* 60 *Dreiecke der einen Art sind dann das Bild der positiven, die* 60 *Dreiecke der anderen Art das Bild der negativen Halbebene X. Die Ecken* $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ *entsprechen* $X = 0, \infty, 1$.*) Die 60 Wurzeln einer Ikosaedergleichung sind immer durch 60 homologe Punkte zusammengehöriger Dreiecke vorgestellt. Die Permutationen der Wurzeln, welche die Galois'sche Gruppe bilden, werden durch die 60 Drehungen erzeugt, welche das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen.

*) Beiläufig sei bemerkt: Aus dieser Abbildung gehen Sätze wie folgende hervor: *Für jedes X kann man die* 60 *Wurzeln* η *von vorneherein separiren, für reelles X sind immer* 4 *und nur* 4 *Wurzeln* η *reell.*

§ 7.

Lösung der Ikosaedergleichung resp. unseres Fundamentalproblem's durch hypergeometrische Reihen. *)

Der citirten Abhandlung von Schwarz kann man ferner unmittelbar entnehmen, dass sich die Ikosaedergleichung resp. unser Fundamentalproblem durch hypergeometrische Reihen lösen lässt. **) Dies lässt sich auf verschiedenartige Weise bewerkstelligen (vgl. § 9.), am einfachsten in der Weise, dass man $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ gleich setzt dem Quotienten zweier geeigneter Particularlösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{d^2y}{dX^2} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)X}{X \cdot 1 - X} \cdot \frac{dy}{dX} - \frac{\alpha \cdot \beta}{X \cdot 1 - X} \cdot y,$$

wo X den Parameter der Ikosaedergleichung selbst bedeutet und die Ausdrücke $(1-\gamma)^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $(\gamma-\alpha-\beta)^2$ in irgend einer Reihenfolge gleich zu setzen sind $\frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{4}$. Ich will diese Particularlösungen selbst mit η_1, η_2 bezeichnen; sie sind zunächst, wie selbstverständlich, nur bis auf einen gemeinsamen constanten Factor bestimmt. Ferner wähle ich:

$$1-\gamma = \frac{1}{3}, \quad \alpha - \beta = \frac{1}{5}, \quad \gamma - \alpha - \beta = \frac{1}{2}$$

und also:

$$\alpha = \frac{11}{60}, \quad \beta = -\frac{1}{60}, \quad \gamma = \frac{2}{3}. \tag{7}$$

Dann folgt durch Differentiation der Gleichung:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X$$

für $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, und durch Anwendung des bekannten Satzes:

$$\eta_1' \eta_2 - \eta_2' \eta_1 = C \cdot X^{-\gamma}(1-X)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

das einfache Resultat:

$$\eta_1 = \varrho \cdot \frac{\eta}{\sqrt[12]{f(\eta)}}, \quad \eta_2 = \varrho \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{f(\eta)}} \tag{8}$$

und also

$$f(\eta_1, \eta_2) = \varrho^{12},$$

wo ϱ einen constanten Factor bedeutet. ***)

---

*) Die Entwickelungen der § 7., 8., 9. stehen mit den übrigen Betrachtungen des Textes nur in losem Zusammenhange. In § 10. nehme ich die algebraische Untersuchung wieder auf.

**) Die gleiche Bemerkung macht Brioschi, Annali di Matematica, II, 8, l. c.

***) Vergl. Annalen XII. p. 178.

Handelt es sich jetzt um Auflösung des in § 1. aufgestellten Fundamentalproblems, so verfahre man folgendermassen. Man berechne zunächst die Grösse

$$X = 1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)},$$

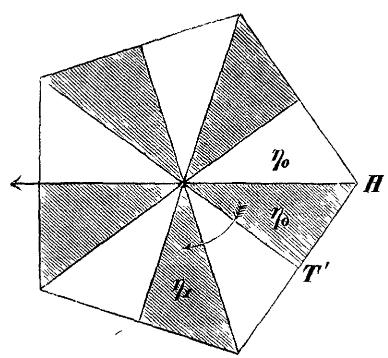
und dann aus ihr die sogleich noch näher zu bezeichnenden hypergeometrischen η_1, η_2, wobei man ϱ so wählen muss, dass es gleich ist der zwölften Wurzel aus dem vorgegebenen Werthe von f. Hierdurch sind η_1, η_2 bis auf zwölfte Einheitswurzeln bestimmt; diese letzteren gewinnt man, soweit sie überhaupt bestimmbar sind (nämlich bis auf's Vorzeichen) durch Vergleich der vorgegebenen Werthe von H und T.

In den Formeln, die ich nun aufstellen werde, ist ϱ der Einfachheit wegen gleich 1 gesetzt; man hat also die mitzutheilenden Werthe von η_1, η_2 im einzelnen Falle mit $\sqrt[12]{f(\eta_1, \eta_2)}$ zu multipliciren. Aus den Formeln (8) geht hervor, dass η_1, η_2, wenn sich X in der complexen Ebene bewegt, ein System von 720 binären linearen Substitutionen erfahren, wie es § 3. zu Schluss angegeben wurde.

§ 8.

Bestimmung der Particularlösungen η_1, η_2.

Da sich alle in Betracht kommenden Werthe von η_1, η_2 aus einem Werthepaare durch die 120 binären Ikosaedersubstitutionen (4) ergeben, so genügt es, *ein* Paar η_1, η_2 zu berechnen, und ich benutze die soeben genannte conforme Abbildung zur Berechnung dieses Paares. Um den Unendlichkeitspunkt der η-Kugel schaaren sich fünf der oben bezeichneten 60 Dreiecke, welche die Bilder der positiven Halbebene X sind; sie sind in der Figur, welche die Umgebung des Punktes $\eta = \infty$ schematisch darstellen soll, schraffirt.



Die Richtung des geradlinigen Pfeiles soll die Richtung des durch den Punkt $\eta = \infty$ in dem Sinne $-\infty$, 0, $+\infty$ hindurchgehenden Meridians der reellen Zahlen bedeuten. So wähle ich als Bild der positiven Halbebene X dasjenige schraffirte Dreieck, welches mit dem Buchstaben η_0 bezeichnet ist (und später als Bild der negativen Halbebene X das mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete, anliegende, nicht schraffirte Dreieck). Die beiden durch H' und T' bezeichneten Ecken dieses Dreiecks sind Wurzeln der quadratischen in H, T enthaltenen Factoren:*)

$$\eta^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\eta - 1 = 0$$

und

$$\varepsilon^2\eta^2 + (1+\sqrt{5})\,\eta - \varepsilon^3 = 0$$

und zwar sind sie diejenigen Wurzeln, welche dem positiven Vorzeichen der auftretenden Quadratwurzel entsprechen. Man findet so:

$$\eta_{H'} = 1 - \alpha\varepsilon - \alpha^2\varepsilon^4 = 1 + 2\cos\frac{\pi}{15} = 2{,}9563\cdots \quad \left(\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\eta_{T'} = \varepsilon^3\left((\varepsilon^2+\varepsilon^3) - i(\varepsilon - \varepsilon^4)\right) = 2\varepsilon^3\left(\cos\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5}\right) = -3{,}\,5201\cdots\varepsilon^3.$$

Lässt man jetzt X in positivem Sinne den Unendlichkeitspunkt (der X-Ebene) umkreisen, so bewegt sich η_0 im Sinne des in der Figur beigesetzten (gekrümmten) Pfeiles und verwandelt sich in η_1. Dies aber kommt einer positiven Drehung der η-Kugel durch $\frac{2\pi}{5}$ um den Durchmesser $0 - \infty$ gleich, d. h.

Der Functionszweig η_0 hat die Eigenschaft, wenn X den Unendlichkeitspunkt in positivem Sinne umkreist, den Factor ε zu erhalten.

Nun giebt es aber von constanten Factoren abgesehen nur zwei Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung, welche bei Umkreisung des Punktes $X = \infty$ in Multipla ihrer selbst übgehen; es sind im vorliegenden Falle (unter $\varkappa$, λ die constanten Factoren verstanden):

$$A = \varkappa\,(1-X)^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60},\ \frac{29}{60},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{1-X}\right),$$

$$B = \lambda\,(1-X)^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60},\ \frac{41}{60},\ \frac{6}{5},\ \frac{1}{1-X}\right),$$

oder, in anderer Darstellung:

$$A_1 = \varkappa_1\,X^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60},\ \frac{19}{60},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{X}\right),$$

$$B_1 = \lambda_1\,X^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60},\ \frac{31}{60},\ \frac{6}{5},\ \frac{1}{X}\right).$$

Setzen wir wieder $\eta_0 = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, so muss bei richtiger Wahl der $\varkappa$, λ bez. $\varkappa_1$, λ_1 das η_1 mit A und A_1, das η_2 mit B und B_1 übereinstimmen, weil $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ für $X = \infty$ selbst ∞ wird. Die Constanten $\varkappa$, λ berechnen

*) Vergl. Annalen IX, p. 205, 206.

sich aus den Werthen von $\eta_{II'}$ bez. $\eta_{I'}$ und der Forderung, die ich nun einführe, *dass* $f(\eta_1, \eta_2)$ *gleich Eins sein soll.* So findet man*) bis auf zwölfte Einheitswurzeln:

$$(9)\quad \begin{cases} \eta_1 = 1{,}13229\,(1-X)^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60}, \frac{29}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1-X}\right), \\ \eta_2 = 0{,}25495\,(1-X)^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60}, \frac{41}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{1-X}\right), \end{cases}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$(10)\quad \begin{cases} \eta_1 = (1{,}13074 - 0{,}05926\,i)\, X^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{X}\right) \\ \eta_2 = (0{,}21382 + 0{,}13885\,i)\, X^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{X}\right). \end{cases}$$

Von diesen Darstellungen convergirt die erste für alle Werthe von X, für welche der absolute Betrag $|1 - X| \geqq 1$, die zweite für diejenigen, deren absoluter Betrag $|X| \geqq 1$. Die sechzigsten Wurzeln sind so zu nehmen, dass die Amplitude zwischen 0 und 3 Grad liegt.

Um für die hierdurch noch ausgeschlossenen X ebenfalls eine Formel zu haben, benutze ich in bekannter Weise andere Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung**). Ist:

$$F_1 = F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{2}{3}, X\right)$$

$$F_2 = F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{1}{2}, 1-X\right),$$

so kommt

$$(11)\quad \begin{cases} \eta_1 = (0{,}09072 + 1{,}73116\,i)\, F_1 + (1{,}02130 - 1{,}76895\,i)\, F_2 \\ \eta_2 = (3{,}32355 - 5{,}11783\,i)\, F_1 + (-3{,}01928 + 5{,}22954\,i)\, F_2, \end{cases}$$

und diese Darstellung convergirt für alle bislang ausgeschlossene X, diejenigen nämlich, bei denen gleichzeitig $|X| \leqq 1$ und $|1 - X| \leqq 1$.

Die Formeln (9), (10), (11) *definiren die gewünschten* η_1, η_2 *für jedes* X *der positiven Halbebene.*

Um auch Formeln für die negative Halbebene zu haben, welche dem oben bezeichneten nicht schraffirten Dreiecke entsprechen, hat man (9) unverändert beizubehalten und in (10) und (11) das i der constanten Factoren in $-i$ zu verwandeln.

---

*) Bei diesen Rechnungen sowie bei vielen der im Folgenden ausgeführten hat mich Hr. stud. Gierster in dankenswerther Weise unterstützt. Die zahlentheoretische Definition der angegebenen Coefficienten werde ich bei der nächsten Gelegenheit zufügen.

**) Die conforme Abbildung zeigt immer unzweideutig, welche Werthe den vieldeutigen Wurzelzeichen beizulegen sind. Hierauf ist in den Darstellungen, welche ich kenne, nicht genügend Rücksicht genommen.

§ 9.

Anderweitige Lösungen der Ikosaedergleichung.

Neben die hier entwickelte Lösung der Ikosaedergleichung stellen sich unbegrenzt viele andere von ähnlichem Charakter. Schreibt man nämlich in

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X$$

statt X eine *rationale* Function einer neuen Veränderlichen x:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = R(x),$$

so kann η wieder (und noch auf unbegrenzt viele Weisen) dargestellt werden als Quotient zweier Particularlösungen einer linearen Differentialgleichung, bei der x die unabhängige Variable ist und die Coefficienten rational in x sind. Man kann dann $R(x)$ insbesondere so wählen, dass die Differentialgleichung selbst wieder eine hypergeometrische wird; derartige Werthe von $R(x)$ sind von Brioschi (diese Annalen Bd. XI, p. 410) und von mir (Bd. XII, p. 174) angegeben. Ich will hier nur den einen Werth von $R(x)$ herausgreifen, der dem Falle XIII der von Schwarz*) gegebenen Tabelle entspricht, insofern ich bei einer späteren Gelegenheit von diesen Formeln Gebrauch machen möchte:

$$R(x) = \frac{1}{108} \cdot \frac{(x^2+14x+1)^3}{x(1-x)^4}.$$

Für die entsprechende hypergeometrische Differentialgleichung hat man $(1-\gamma)^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $(\gamma-\alpha-\beta)^2$ in irgend einer Anordnung gleich zu setzen $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{16}{25}$, also etwa $\gamma = \frac{4}{5}$, $\alpha = \frac{1}{10}$, $\beta = -\frac{1}{10}$.

Setzt man wieder $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ und nimmt η_1, η_2 als Particularlösungen dieser Differentialgleichung, so kommt:

$$\eta_1 = \varrho \cdot \frac{x^{\frac{1}{60}}(1-x)^{\frac{1}{15}}\eta}{\sqrt[12]{f(\eta)}}, \quad \eta_2 = \varrho \cdot \frac{x^{\frac{1}{60}}(1-x)^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[12]{f(\eta)}}$$

und man hat also, für $\varrho = 1$, die Lösungen der *folgenden Aufgabe* vor sich, die ein besonderer Fall des Fundamentalproblems des § 1. ist:

$$(12)\qquad \begin{cases} f(\eta_1, \eta_2) = x(1-x)^4, \\ H(\eta_1, \eta_2) = x^2+14x+1, \\ T(\eta_1, \eta_2) = x^3-33x^2-33x+1. \end{cases}$$

Ich unterlasse es hier, die Particularlösungen η_1, η_2 explicite anzugeben.

---

*) p. 323 der citirten Arbeit.

§ 10.

Resolventen niederen Grades.

Wenn man auf eine ganze homogene Function gerader Ordnung von η_1, η_2 (und solche will ich allein betrachten) die 120 binären Ikosaedersubstitutionen (4) anwendet, so nimmt sie im Allgemeinen 60 Werthe an; sie kann, selbstverständlicherweise, im besonderen Falle weniger Werthe erhalten, deren Zahl ein Theiler von 60 ist.

Dann stellt sie, gleich Null gesetzt, eine solche Punktgruppe auf der η-Kugel dar, welche durch einige der 60 Drehungen, die das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, ungeändert bleibt. Umgekehrt, indem man die einfachsten solchen Punktgruppen aufsucht, gewinnt man die niedrigsten Functionen der gemeinten Art, welche als Wurzeln von Resolventen der Ikosaedergleichung verwandt werden können.

Aus den 60 Drehungen, welche das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, lassen sich Untergruppen von 2, 3, 5, 4, 6, 10, 12 Substitutionen bilden, von denen die drei ersten dem Kreistheilungstypus, die folgenden drei dem Doppelpyramidentypus, die letzte dem Tetraedertypus angehört. Entsprechend erhält man Resolventen vom Grade 30, 20, 12, 15, 10, 6, 5. Da es meine vorzügliche Absicht ist, vom Ikosaeder aus zu den Untersuchungen über die Gleichungen fünften Grades und über die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades zu gelangen, so werde ich mich auf die Herleitung einer Resolvente vom sechsten Grade und verschiedener Resolventen fünften Grades beschränken.

§ 11.

Eine Resolvente vom sechsten Grade.

Eine Resolvente vom sechsten Grade gewinnt man am einfachsten, wenn man beachtet, dass die Wurzelpunkte von $f=0$ in 6 Paare gegenüberstehender zerfallen. Sei $\varphi(\eta_1, \eta_2)=0$ ein solches Punktepaar. Durch eine lineare Substitution von der Determinante $+1$, welche $\varphi=0$ ungeändert lässt, geht bekanntlich $+\varphi$ in $+\varphi$ oder $-\varphi$ über, je nachdem bei der Substitution die Wurzeln von $\varphi=0$ einzeln ungeändert bleiben oder unter einander vertauscht werden. Nun giebt es unter den Drehungen, die das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, allerdings solche, welche gegenüberstehende Eckpunkte des Ikosaeders vertauschen. *Daher ist $\varphi(\eta_1, \eta_2)$ [mit bestimmter Determinante genommen] zwölfwerthige, φ^2 sechswerthige Function.*

Ich will $\varphi(\eta_1, \eta_2)$ mit der Determinante $+5$ annehmen. Dann hat man, bei willkürlich angenommenem Vorzeichen und auch sonst gebräuchlicher Indexbezeichnung (vergl. Annalen IX, p. 205):

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi_\infty = \sqrt{5}\cdot\eta_1, \eta_2, \\ \varphi_\nu = \varepsilon^{-\nu}\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 - \varepsilon^{+\nu}\eta_2^2, \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

und

$$\varphi_\infty\,\varphi_0\,\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4 = \sqrt{5}\cdot f.$$

Setzt man jetzt $z = \varphi^2$, also $z_\infty = \varphi_\infty^2$, $z_\nu = \varphi_\nu^2$, so erhält man die Gleichung, der z genügt, unmittelbar aus der Bemerkung: *dass die symmetrischen Functionen der sechs φ^2 jedenfalls ganze Functionen von f, H, T sind.* Daher kommt:

$$\sum z = 0,\quad \sum z^2 = 0,\quad \sum z^3 = \varkappa f,\quad \sum z^4 = 0,\quad \sum z^5 = \lambda H,$$

wo $\varkappa$, λ Zahlenfactoren bedeuten, die man durch ein einzelnes Glied bestimmt. *Auf diese Weise findet man:*

$$(14)\qquad z^6 - 10 f z^3 + 144 H z + 5 f^2 = 0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung:

$$\prod (\varphi_i^2 - \varphi_k^2)^2$$

hat eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft. Es ist

$$\varphi_i^2 - \varphi_k^2 = (\varphi_i + \varphi_k)\;(\varphi_i - \varphi_k)$$

und es stellt, wie ich früher bemerkte (Annalen IX, p. 205) sowohl $\varphi_i + \varphi_k = 0$ als $\varphi_i - \varphi_k = 0$ eins der 15 Punktepaare von T vor. *Daher ist die Discriminante bis auf einen Zahlenfactor gleich T^4.* Ist also die vorstehende Gleichung sechsten Grades, d. h. ist einfach f und H gegeben, so ist die Quadratwurzel aus der Discriminante rational bekannt; ist aber, wie beim Fundamentalprobleme in § 1. vorausgesetzt wird, von vornherein auch T gegeben, so kennt man sogar die vierte Wurzel.

§ 12.

Die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades.

Bekanntlich hat Jacobi*) als Eigenschaft der Multiplicatorgleichungen vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade, die bei Transformation n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen auftreten (n Primzahl), angegeben, dass sich die aus den $(n+1)$ Wurzeln gezogenen Quadratwurzeln aus $\frac{n+1}{2}$ Grössen $A_0, \cdots A_{\frac{n-1}{2}}$ in folgender Weise zusammensetzen lassen:

*) Crelle's Journal Bd. 3, p. 308.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{z_\infty} &= \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n\cdot A_0} \\
\sqrt{z_0} &= A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{\frac{n-1}{2}} \\
\sqrt{z_1} &= A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^4 A_2 + \cdots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\cdot A_{\frac{n-1}{2}} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sqrt{z_{n-1}} &= A_0 + \varepsilon^{n-1} A_1 + \varepsilon^{4(n-1)} A_2 + \cdots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2(n-1)}\cdot A_{\frac{n-1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

und es sind diese Gleichungen von Kronecker und Brioschi für $n=5$ *allgemein* untersucht worden*).

Die principielle Bedeutung dieser Gleichungen – ganz unabhängig von ihrem Zusammenhange mit den elliptischen Functionen – lässt sich unter den allgemeinen Gesichtspunkt der Einleitung subsumiren. *Die Vertauschungen der Grössen $\sqrt{z}$, welche die Galois'sche Gruppe der Jacobi'schen Gleichung ausmachen, sind durch lineare Substitutionen der Grössen $A_0 \cdots A_{\frac{n-1}{2}}$ vorgestellt.* Denn bestimmt man für eine vorgelegte Jacobi'sche Gleichung alle Systeme von Grössen $A_0, A_1, \cdots$, welche den zulässigen Anordnungen der Wurzeln entsprechen, so geht das einzelne System dieser Grössen aus einem beliebigen zu Grunde gelegten durch homogene lineare Substitution mit numerischen Coefficienten hervor. Ich werde diess weiter unten (Abschn. II, § 8.) für die Jacobi'schen Gleichungen vom sechsten Grade noch näher ausführen und dadurch zeigen, wesshalb zwischen ihnen und den Ikosaederproblemen der engste Zusammenhang bestehen *muss*. Hier begnüge ich mich, diesen Zusammenhang in dem zunächst vorliegenden Falle einfach aufzuweisen.

Für die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades hat man die Definitionsgleichungen:

$$(15)\qquad \sqrt{z_\infty} = \sqrt{5}\cdot A_0, \qquad \sqrt{z_\nu} = A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{-\nu} A_2$$
$$\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, 4\right)$$

und findet durch Ausrechnung:

$$(16)\quad (z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 - C(z-A) + 5B^2 - AC = 0$$

wo A, B, C die folgenden Ausdrücke bedeuten:

---

*) Vergl. die Citate der Einleitung sowie die Auseinandersetzungen des zweiten Abschnittes.

$$(17)\quad \begin{cases} A = A_0^2 + A_1 A_2 \\ B = 8A_0^4 A_1 A_2 - 2A_0^2 A_1^2 A_2^2 + A_1^3 A_2^3 - A_0(A_1^5 + A_2^5) \\ C = 320A_0^6 A_1^2 A_2^2 - 160A_0^4 A_1^3 A_2^3 + 20A_0^2 A_1^{\,1} A_2^4 + 6A_1^5 A_2^5 \\ \quad - 4A_0(A_1^5 + A_2^5)(32A_0^4 - 20A_0^2 A_1 A_2 + 5A_1^2 A_2^2) + A_1^{10} + A_2^{10}. \end{cases}$$

Setzt man nun insbesondere $A = 0$, wodurch man *specielle* Gleichungen erhält, die Kronecker seiner Lösung der Gleichungen fünften Grades zu Grunde legte, so kommt einfach:

$$(18)\qquad z^6 + 10Bz^3 - Cz + 5B^2 = 0.$$

Diese Gleichung aber wird mit der Gleichung (14) *des vorigen Paragraphen identisch, sobald man setzt:*

$$B = -f, \qquad C = -144H.$$

In der That stimmen auch die Definitionsgleichungen des vorigen Paragraphen für $\sqrt{z}$ mit den hier angewandten überein; man hat nur zu setzen:

$$A_0 = \eta_1\eta_2, \quad A_1 = +\eta_2^2, \quad A_2 = -\eta_1^2$$

und befriedigt dadurch zugleich in allgemeinster Weise die Bedingung $A = 0$.

Wird die Gleichung (18) gegeben und zugleich die vierte Wurzel aus ihrer Discriminante adjungirt, so hat man die Zahlwerthe von f, H, T. Alle Entwickelungen also, die hier an das Fundamentalproblem des § 1. angeknüpft werden, können auch so dargestellt werden, dass die specielle Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades den Ausgangspunkt bildet. Doch scheint das weniger naturgemäss.

§ 13.

Die Resolventen fünften Grades. Einleitung.

Dass die Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades*) nach Adjunction der vierten Wurzel ihrer Discriminante sehr einfache Resolventen fünften Grades besitzen, *bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelcuben gleich Null ist*, hat Brioschi zuerst gefunden. Seine hauptsächlichen Formeln, die ich später benutze, sind diese**). Setzt man:

$$(19)\qquad y_\nu = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\left((z_\infty - z_\nu)(z_{\nu+1} - z_{\nu-1})(z_{\nu+2} - z_{\nu-2})\right)^{1/2}$$

(eine Formel, die auf mannigfache Weise umgeschrieben werden kann), so drücken sich die y_ν folgendermassen durch die A_0, A_1, A_2 aus:

---

*) Richtiger wohl: die Gleichungen zwölften Grades, von der die $\sqrt{z}$ abhängen

**) Die Zahlencoefficienten sind im Texte so mitgetheilt, wie sie Joubert später berechnet hat (Comptes Rendus 1867, 1, p. 1237.)

(20) $$y_\nu = \varepsilon^\nu P_1 + \varepsilon^{2\nu} P_2 + \varepsilon^{3\nu} P_3 + \varepsilon^{4\nu} P_4,$$
wo

(21) $$\begin{cases} P_1 = - A_1 \, (4A_0^2 - A_1 A_2), \\ P_2 = \qquad (+ 2A_0 A_1^2 - A_2^3), \\ P_3 = \qquad (- 2A_0 A_2^2 + A_1^3), \\ P_4 = + A_2 \, (4A_0^2 - A_1 A_2), \end{cases}$$

und genügen der Gleichung fünften Grades:

(22) $$y^5 + 10By^3 + 5\,(9B^2 - AB)\,y - \sqrt[4]{\Pi} = 0,$$

wo Π die Discriminante der Jacobi'schen Gleichung und

(23) $$\sqrt{\Pi} = -1728B^5 + 720ACB^3 - 80A^2C^2B + 64A^3(5B^2 - AC)^2 + C^3$$

ist.

Wenn $A = 0$, so wird die Gleichung (22):

(24) $$y^5 + 10By^3 + 45B^2y - \sqrt[4]{\Pi} = 0$$

und, für $B = -f, \quad C = -144H$:

$$\sqrt{\Pi} = 1728f^5 - 144^3H^3 = 144T^2.$$

Um jetzt vom Ikosaeder aus zu dieser Resolvente fünften Grades und anderen desselben Grades zu gelangen, die später wichtig werden, stelle ich folgende Betrachtungen an.

§ 14.

Die Resolventen fünften Grades. Geometrische Orientirung.

Die Existenz der Resolventen fünften Grades beruht auf dem Umstande, dass sich aus den 60 Drehungen des Ikosaeders Untergruppen von 12 bilden lassen, und diese Untergruppen gehören, wie oben bemerkt, dem *Tetraedertypus* an. Es bleiben also bei solchen 12 Drehungen, geometrisch zu reden, ungeändert: zwei reguläre Tetraeder, τ_1 und τ_2, welche zusammen die Ecken eines Würfels W bilden, dann ein Oktaeder t, und übrigens Aggregate von je 12 zusammengehörigen Punkten. In unserem Falle ist der Würfel W unter den Ecken von H, das Oktaeder t unter den Ecken von T zu suchen. Die Ecken von f bilden eine Gruppe von zusammengehörigen 12 Punkten, ebenso die $\frac{H}{W}$, während die $\frac{T}{t}$ in zwei solche Gruppen zerfallen.

Betrachten wir jetzt die entsprechenden ganzen Functionen von η_1, η_2 und ersetzen die 12 Drehungen durch die entsprechenden 24 binären Ikosaedersubstitutionen von der Determinante $+1$. Man findet dann, dass nicht $\tau_1(\eta_1, \eta_2)$, $\tau_2(\eta_1, \eta_2)$ in sich übergeführt werden, sondern erst ihre dritten Potenzen. Unmittelbar ungeändert bleibt dagegen $t(\eta_1, \eta_2)$ (die Functionaldeterminante von τ_1 und τ_2) sowie das Product $\tau_1 \cdot \tau_2 = W(\eta_1, \eta_2)$ (welches sich zugleich als Hesse'sche von t auffassen lässt). Ungeändert bleiben ferner alle Functionen 12^{ten} Grades, welche gleich Null gesetzt zusammengehörige Punkte vorstellen, insbesondere also f *). Alle derartige Functionen kann man in der Form $\varkappa t^2 + \lambda f$ anschreiben.

Die einfachsten Functionen also, welche man als Wurzeln der Resolventen fünften Grades wählen kann, sind $t(\eta_1, \eta_2)$ und $W(\eta_1, \eta_2)$, und mit ihnen mögen wir uns zunächst beschäftigen. Wünschen wir später Functionen nullter Ordnung von η_1, η_2, d. h. Functionen von η, so ist die nächstliegende $\frac{t^2}{f}$ und durch sie drücken sich alle anderen rational aus (Annalen XII, p. 168, 169).

Ich will hier noch die 12 linearen Substitutionen zusammenstellen, welche im Sinne der sogleich einzuführenden Bezeichnung das Oktaeder t_0 resp. den Würfel W_0 ungeändert lassen. Es sind diese

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\text{1) Die Identität } \eta' = \eta} \\
\multicolumn{4}{l}{\text{2) Drei Substitutionen von der Periode 2:}} \\
\multicolumn{4}{l}{\eta' = -\frac{1}{\eta}, \quad \frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+1}{\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, \quad \frac{-\eta+(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+1},} \\
\multicolumn{4}{l}{\text{3) Acht Substitutionen von der Periode 3:}} \\
\eta' = & \varepsilon^2\,\frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon}{\varepsilon^4\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, & = & \varepsilon^2\,\frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^2}{\varepsilon^3\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, \\
= & \varepsilon^3\,\frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^3}{\varepsilon^2\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, & = & \varepsilon^3\,\frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^4}{\varepsilon\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, \\
= - & \varepsilon^3\,\frac{\varepsilon^4\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon}, & = - & \varepsilon^3\,\frac{\varepsilon^3\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^2}, \\
= - & \varepsilon^2\,\frac{\varepsilon^2\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^3}, & = - & \varepsilon^2\,\frac{\varepsilon\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^4}.
\end{array}\right.$$

Diese Formeln mögen dazu dienen, um einige Angaben, die ich später ohne Beweis mache, zu controliren.

§ 15.

Die Resolvente der t_ν.

Man berechnet für die fünf Oktaeder $t(\eta_1, \eta_2)$, die ich jetzt als t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 bezeichnen will, die folgenden Werthe (Annalen IX, p. 206):

$$(26)\quad t_\nu = -\varepsilon^\nu \cdot 5\eta_1^2\eta_2^4 + \varepsilon^{2\nu}(\eta_1^6 - 2\eta_1\eta_2^5) + \varepsilon^{3\nu}(\eta_2^6 + 2\eta_1^5\eta_2) - \varepsilon^{4\nu}\cdot 5\eta_1^4\eta_2^2.$$

Die symmetrischen Functionen der t_ν sind ganze Functionen von f, H, T. Zuvörderst kommt

$$t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 = 12\,T,$$

*) Diese Angaben stimmen überein mit den Formeln, die Annalen XII, p. 178 unter III mitgetheilt sind.

und dann hat man, unter $\varkappa$, λ Zahlenfactoren verstanden, den Ansatz:

$$\Sigma t = 0, \quad \Sigma t^2 = \varkappa f, \quad \Sigma t^3 = 0, \quad \Sigma t^4 = \lambda f$$

und findet so die Gleichung:

$$t^5 - 10 t^3 f + 45 t f^2 - 12 T = 0. \tag{27}$$

Dies ist eine Gleichung fünften Grades, welche durch die Relationen charakterisirt ist:

$$\Sigma t = 0, \quad \Sigma t^3 = 0, \quad 20 \Sigma t^4 = (\Sigma t^2)^2.$$

Sie ist der specielle Fall, der sich aus der Brioschi'schen Resolvente (22) ergiebt, wenn man $A = 0$ setzt. Zugleich gehen dann die Formeln (20), (21) in (26) über, nachdem für A_0, A_1, A_2 bez. gesetzt ist $\eta_1 \eta_2$, $+\eta_2^2$, $-\eta_1^2$. Vielleicht hat die Bemerkung Interesse, dass die Discriminante von (27) eine sechste Potenz ist. Denn man findet sie durch Ausrechnung bis auf einen Zahlenfactor gleich:

$$(T^2 - 12 f^5)^2 = 12^8 H^6.$$

Also stellt $t_i - t_k = 0$ ein Aggregat von drei zu H gehörigen Punktepaaren dar, was man durch unmittelbare Ueberlegung bestätigt.

§ 16.

Die Resolvente der W_ν.

Berechnet man W_ν als Hesse'sche Form von t_ν, so findet man bis auf einen Zahlenfactor, den ich durchgängig unterdrücke:

$$W_\nu = (\varepsilon^\nu \eta_1 - \varepsilon^{2\nu} \eta_2)(-\eta_1^7 + 7 \eta_1^2 \eta_2^5) + (\varepsilon^{3\nu} \eta_1 + \varepsilon^{4\nu} \eta_2)(-7 \eta_1^5 \eta_2^2 - \eta_2^7). \tag{28}$$

Man findet:

$$\Sigma W = 0, \quad \Sigma W^2 = 0, \quad \Sigma W^3 = -120 f^2, \quad \Sigma W^4 = 2880 f H,$$
$$\Sigma W^5 = 5 W_0 W_1 W_2 W_3 W_4 = -5 \cdot 12^4 H^2.$$

Also kommt:

$$W^5 + 40 f^2 \cdot W^2 - 720 f H \cdot W + 12^4 H^2 = 0, \tag{29}$$

eine Gleichung, die durch die Relationen

$$\Sigma W = 0, \quad \Sigma W^2 = 0, \quad \Sigma W^3 \cdot \Sigma W^5 = 6 (\Sigma W^4)^2$$

charakterisirt ist.

Ich notire noch die Beziehung

$$\frac{12^2 H}{W_\nu} = t_\nu^2 - 3 f. \tag{30}$$

§ 17.

Eine allgemeinere Resolvente fünften Grades.

Die Ueberlegungen, welche ich im dritten Abschnitte des Folgenden auseinandersetze, liessen es mir wünschenswerth erscheinen, eine allgemeinere Resolvente fünften Grades zu besitzen, welche nur den

Bedingungen $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ genügt (unter y die Wurzel verstanden). Ich bin dazu auf folgendem Wege gelangt. Eine Combination von f und t_ν, welche den genannten Bedingungen genügt, ist diese, wie man leicht controlirt:

$$\sigma_\nu = 24 f^2 - 7 f t_\nu^2 + t_\nu^4. \tag{31}$$

Nun ergiebt sich dieselbe durch Ausrechnung gleich:

$$(\varepsilon^\nu\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)(-46\eta_1^{20}\eta_2^3 + 1173\eta_1^{15}\eta_2^8 + 391\eta_1^{10}\eta_2^{13} + 207\eta_1^5\eta_2^{18} - \eta_2^{23})$$
$$+ (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)(\eta_1^{23} + 207\eta_1^{18}\eta_2^5 - 391\eta_1^{13}\eta_2^{10} + 1173\eta_1^8\eta_2^{15} + 46\eta_1^3\eta_2^{20}).$$

Sie hat also dieselbe Form

$$(\varepsilon^\nu\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2) R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2) S,$$

welche auch W_ν besitzt. Da umgekehrt aus dieser Form folgt, dass die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet, *so erhält man eine allgemeinere Function der gesuchten Eigenschaft, indem man W_ν und σ_ν mit einem Parameter zusammenfügt.* Ich setze also homogen machend:

$$y_\nu = \frac{\lambda f W_\nu}{H} + \frac{\mu \sigma_\nu}{f^2} \text{ *)}, \tag{32}$$

wo λ, μ beliebige Constante sind. Dann ergiebt sich eine Gleichung fünften Grades, die folgendermassen lautet:

$$y^5 + 5\mathsf{A} y^2 + 5\mathsf{B} y + \Gamma = 0, \tag{33}$$

wo A, B, Γ die Ausdrücke bezeichnen **):

---

*) Ich bemerkte im Gespräche mit Gordan, der seinerseits auf ganz anderem Wege zu eben diesen Ausdrücken geführt worden war (vergl. seine in der Einleitung citirte, in den Erlanger Berichten (Juli 1877) erschienene Note), dass sich unter ihnen insbesondere noch folgende einfache befinden:

$$\frac{t_\nu \cdot W_\nu \cdot T}{f^2 H} \text{ und } \frac{t_\nu (t_\nu^2 - 7f) T}{f^4}.$$

In der That ist

$$\frac{t_\nu W_\nu \cdot T}{f^2 H} = \frac{6 f W_\nu}{H} + \frac{12\sigma_\nu}{f^2},$$

$$\frac{t_\nu (t_\nu^2 - 7f) \cdot T}{f^4} = -X \cdot \frac{f W_\nu}{H} - \frac{2\sigma_\nu}{f^2},$$

wo

$$X = 1728 \frac{H^3}{f^5}.$$

**) Bestimmt man $\frac{\lambda}{\mu}$ aus den Gleichungen $\frac{\partial^2 \mathsf{A}}{\partial \lambda^2} = 0$ oder $\frac{\partial^3 \mathsf{B}}{\partial \lambda^3} = 0$, $\frac{\partial^4 \Gamma}{\partial \lambda^4} = 0$, und trägt die Werthe in (32) ein, so erhält man bis auf Factoren eben die beiden in der voranstehenden Note genannten Functionen $t_\nu W_\nu$ und $t_\nu (t_\nu^2 - 7f)$.

$$
(34)\begin{cases}
\mathsf{A} = 12^3\left(\frac{8\lambda^3}{X} - 12\lambda^2\mu + 6\lambda\mu^2 - (2-X)\mu^3\right),\\
\mathsf{B} = 9\cdot 12^3\left(\frac{-16\lambda^4+32\lambda^3\mu}{X} - 24\lambda^2\mu^2 + 8(2X-1)\lambda\mu^3 - (5X-4)\mu^4\right),\\
\Gamma = 12^3\left(\frac{12^4\lambda^5 - 30\cdot 12^3\lambda^4\mu}{X} + 10\cdot 12^3\left(1+\frac{2}{X}\right)\lambda^3\mu^2 - 10\cdot 12^2\cdot\lambda^2\mu^3\right.\\
\qquad\left. + 45\cdot 12^2 X\lambda\mu^4 - 72(12-27X+24X^2)\mu^5\right).
\end{cases}
$$

Ich habe in denselben statt $1728\,\frac{H^3}{f^5}$ wieder X geschrieben. *Macht man durch Wahl von* $\frac{\lambda}{\mu}$ $\mathsf{A}=0$, *so hat man die Jerrard'sche Form.*

§ 18.

Rationale Transformationen einer Ikosaedergleichung in eine zweite.

Ein Problem, welches um so interessanter ist, weil es eine sehr einfache Lösung gestattet, ist die Frage nach der rationalen Umformung einer Ikosaedergleichung in eine zweite. Ich suche solche rationale Functionen ζ von η, welche selbst wieder einer Ikosaedergleichung genügen. Wendet man auf η die 60 Substitutionen (3) an, so muss also auch ζ diese Substitutionen erfahren. Aber es ist nicht nöthig, dass ζ im Einzelnen dieselbe Substitution wie η erleidet; nur die Periode der Substitution muss beiderseits die gleiche sein. Die Reihe der hier vorliegenden Möglichkeiten reducirt sich inzwischen bedeutend. Lassen wir nämlich etwa η in $\varepsilon\eta$ übergehen. So wird unter den 60 Ausdrücken, welche aus ζ durch die Ikosaedersubstitutionen (3) entstehen, jedenfalls einer sein, der auch in ein Multiplum seiner selbst übergeht, und zwar muss der zutretende Factor, da die Periode der Substitution 5 ist, eine fünfte Einheitswurzel sein. Diesen einen Ausdruck nennen wir dann ζ und operiren mit ihm. Die zutretende fünfte Einheitswurzel kann noch ε oder ε^2, ε^3, ε^4 sein. Aber den dritten und vierten Fall führt man sofort auf den zweiten und ersten zurück, indem man ζ durch $-\frac{1}{\zeta}$ ersetzt (welches auch einer der 60 Ausdrücke ist). *Es bleiben also nur noch zwei Fälle:*

1) ζ *ändert sich durch dieselben Substitutionen wie* η;
2) *man erhält die Substitutionen, welche* ζ *erleidet, wenn man in derjenigen, die* η *erfährt,* ε *in* ε^2 *verwandelt.*

Im ersteren Falle setze ich

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -\frac{\varphi_2(\eta_1, \eta_2)}{\varphi_1(\eta_1, \eta_2)},$$

wo die φ ganze homogene Functionen vom Grade n sein mögen. Ich schreibe dann:

$$\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2 = 0$$

und entwickele die linke Seite in bekannter Weise (Clebsch, Theorie der binären Formen p. 15, Gordan, Math. Annalen Bd. III, p. 360) nach Polaren:

$$\left(\zeta_1 \frac{\partial P}{\partial \eta_1} + \zeta_2 \frac{\partial P}{\partial \eta_2}\right) + (\zeta_1 \eta_2 - \zeta_2 \eta_1)\, Q = 0,$$

wo P, Q zwei Functionen von η_1, η_2 vom Grade $n+1$, $n-1$ sind. Indem man jetzt $\zeta = \eta$ setzt, erschliesst man, dass P, Q solche Functionen von η_1, η_2 sind, welche sich bei den Ikosaedersubstitutionen reproduciren, d. h. es sind ganze Functionen von f, H, T. Umgekehrt, wenn man für P, Q ganze Functionen von f, H, T setzt, welche um zwei Einheiten im Grade differiren, so hat $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ die gewünschte Eigenschaft. *Diess also ist die allgemeine Lösung des Problems im ersten Falle**).

Man kann ihr noch eine viel einfachere Form geben, wenn man bemerkt, dass es genügt, nur einen Parameter in die Transformationsformel aufzunehmen, da die Ikosaedergleichung selbst nur einen Parameter besitzt. Man setze also etwa:

$$P = fH, \quad Q = \lambda T.$$

So wird

$$\zeta = \frac{\left(-f\frac{\partial H}{\partial \eta_2} - H\frac{\partial f}{\partial \eta_2}\right) + \lambda \eta_1 T}{\left(\ f\frac{\partial H}{\partial \eta_1} + H\frac{\partial f}{\partial \eta_1}\right) + \lambda \eta_2 T} \tag{35}$$

und diese Formel begreift für geeignete Werthe von λ in der That alle anderen unter sich.

Was den *zweiten* Fall unseres Problems betrifft, so wird er durch Betrachtung der fünfwerthigen Functionen des vorigen Paragraphen erledigt. Sei

$$(\varepsilon^{\nu}\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)\, R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu} y_2)\, S$$

die allgemeinste dort definirte Function, so ist einfach

---

*) Die einfachsten in Betracht kommenden Functionen sind diese:

$$\zeta = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial f}{\partial \eta_1}}, \quad = -\frac{\frac{\partial H}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial H}{\partial \eta_1}}, \quad = -\frac{\frac{\partial T}{\partial \eta_2}}{\frac{\partial T}{\partial \eta_1}},$$

Man zeigt leicht: Wenn sich $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ auf der η Kugel über eins der 120 Dreiecke (§ 6.) mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$ bewegt, so bewegen sich die drei Werthe von ζ über die drei anliegenden von denselben Kreisbögen begrenzten Dreiecke, welche die Winkel $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$, bez. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$, bez. $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}$ besitzen.

$$\zeta = \frac{R}{S}$$

die allgemeinste hier aufzustellende Transformationsformel. Der Beweis ergiebt sich am einfachsten aus den Entwickelungen des dritten Abschnittes, auf die ich hier verweisen muss (§ 4 Schluss).

Abschnitt II.

Das Ikosaeder und eine quadratische Form.

Dieser zweite Abschnitt bringt eine Theorie der allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen vom sechsten Grade (vergl. § 12. des Vorhergehenden). Aber ich gehe dabei zunächst wieder aus von einem Probleme, welches man beim Ikosaeder stellen kann und zeige erst hinterher die Beziehung zu den Jacobi'schen Gleichungen. Man kann das Fundamentalproblem des vorigen Abschnittes (§ 1.) so hinstellen: Es ist ein Ikosaeder $f(x_1 x_2)$ in kanonischer Form gegeben und es sind die Zahlwerthe gegeben, welche die *simultanen Invarianten* des Ikosaeders und einer unbekannten linearen Form

$$\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2$$

besitzen, man soll die Coefficienten η_2, η_1 der letzteren bestimmen.

Eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe ergiebt sich sofort, wenn man an Stelle der linearen Form eine von höherem Grade treten lässt. Ich beschränke mich hier auf die Betrachtung des Falles einer *quadratischen* Form, deren Untersuchung, wie man sofort sieht, dadurch besonders erleichtert wird, dass die Covarianten f, H, T des Ikosaeders alle eine *gerade* Ordnung besitzen.

§ 1.

Das simultane System eines Ikosaeders und einer quadratischen Form.

Es sollen f, H, T in der immer festgehaltenen kanonischen Form vorausgesetzt sein, aber, um Verwechselungen zu vermeiden, mit den Variabeln x_1, x_2 geschrieben werden. Der quadratischen Form ertheile ich, damit später in der Bezeichnung Uebereinstimmung herrscht mit der bei den Jacobi'schen Gleichungen üblichen, die Gestalt:

$$q = A_1 x_1^2 + 2\,A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2.$$

Man hat dann als Invarianten zunächst die Determinante:

(1) $$A = A_0^2 + A_1 A_2,$$

dann weiter die Ueberschiebungen

$$(f,\ q^6)_{12}, \quad (H,\ q^{10})_{20}, \quad (T,\ q^{15})_{30},$$

die ich mit B', C', D bezeichnen will und die ausgerechnet folgende Werthe darbieten:

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
21\,B' &= 16\,A_0^6 - 120\,A_0^4 A_1 A_2 + 90\,A_0^2 A_1^2 A_2^2 \\
&\qquad\qquad + 21\,A_0 (A_1^5 + A_2^5) - 5\,A_1^3 A_2^3, \\
11\cdot 17\cdot 144\,C' &= -512\,A_0^{10} + 11520\,A_0^8 A_1 A_2 - 40320\,A_0^6 A_1^2 A_2^2 \\
&\quad + 33600\,A_0^4 A_1^3 A_2^3 - 6300\,A_0^2 A_1^4 A_2^4 + 126\,A_1^5 A_2^5 \\
&\quad + A_0 (A_1^5 + A_2^5)(2464\,A_0^4 \;\; 16280\,A_0^2 A_1 A_2 + 1980\,A_1^2 A_2^2) \\
&\quad - 187\,(A_1^{10} + A_2^{10}), \\
12\,D &= (A_1^5 - A_2^5)\,(-1024\,A_0^{10} + 3840\,A_0^8 A_1 A_2 \\
&\qquad\qquad - 3840\,A_0^6 A_1^2 A_2^2 + 1200\,A_0^4 A_1^3 A_2^3 \\
&\qquad\qquad - \;100\,A_0^2 A_1^4 A_2^4 + A_1^5 A_2^5) \\
&\quad + A_0 (A_1^{10} - A_2^{10})(352\,A_0^4 - 160\,A_0^2 A_1 A_2 + 10\,A_1^2 A_2^2) \\
&\quad + (A_1^{15} - A_2^{15}).
\end{aligned}
\right.
$$

Mit diesen Formen ist das System der Invarianten bereits abgeschlossen, wie man nach Analogie ähnlicher Beweise folgendermassen zeigt. Wenn $A = 0$, also die quadratische Form das Quadrat einer linearen ist:

$$q = (\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2)^2,$$

so gehen B', C', D einfach über in $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ und andere simultane Invarianten giebt es dann nicht (Annalen Bd. IX, p. 200). Im allgemeinen Falle bestehen daher die gesuchten Invarianten aus B', C', D resp. aus Gliedern, welche aus ihnen zusammengesetzt sind, plus Gliedern, welche den Factor A enthalten. Diese Glieder müssen, nach Abtrennung des Factors A, für sich Invariantencharakter besitzen, für sie gilt also dasselbe Gesetz u. s. w.

Zwischen diesen vier Formen A, B', C', D besteht dann noch eine Relation entsprechend der früheren Bedingung:

$$T^2 = 12\,f^5 - 12^4\,H^3;$$

ich werde erst weiter unten diese Relation angeben (§ 4. Glch. (10)).

Das neue Problem aber, welches ich aufstelle, ist dieses: *Es sind, in Uebereinstimmung mit dieser Relation, die Zahlenwerthe gegeben, welche A, B', C', D für eine unbekannte quadratische Form $A_1 x_1^2 + 2\,A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2$ annehmen; man soll die Coefficienten A_1, A_0, A_2 bestimmen.*

Dies Problem hat 60 Lösungen resp. Lösungssysteme. Denn zunächst ergeben zwar die Gleichungen: A, B', C' = gegebenen Constanten $2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$ Lösungen, aber von diesen unterscheiden sich, da A, B', C' gerade Functionen von A_0, A_1, A_2 sind, je zwei immer nur durch die Vorzeichen der A_0, A_1, A_2, und D, welches eine ungerade Function ist, entscheidet, welche Vorzeichencombination zu nehmen ist.

§ 2.

Ableitung aller Lösungen aus einer derselben.

Wenn wir *eine* quadratische Form kennen:

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

welche dem gestellten Probleme genügt, so ergeben sich die 59 anderen, indem man auf x_1, x_2 die 120 binären Ikosaedersubstitutionen (4) des vorigen Abschnittes anwendet. Denn da es sich um simultane Invarianten von q und f handelt, $f(x_1, x_2)$ aber durch diese Substitutionen in sich übergeht und die Substitutionsdeterminante $+1$ ist, so werden die simultanen Invarianten der transformirten quadratischen Form und des ursprünglichen Ikosaeders die vorgeschriebenen Werthe behalten haben. In der That entstehen durch die 120 Substitutionen aus der einen quadratischen Form auch nur 60, da sich immer zwei Substitutionen nur durch gleichzeitige Vorzeichenänderung beider Variablen x_1, x_2 unterscheiden. Ich will diese 60 Formen mit

$$A_1' x_1^2 + 2 A_0' x_1 x_2 - A_2' x_2^2$$

bezeichnen. So findet man für die A_1', A_0', A_2' folgende Tabelle:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{c}
A_1' \\ \hline
\varepsilon^{-\nu} A_1 \\
-\varepsilon^{-\nu} A_2 \\
\frac{-\varepsilon^{-\mu}}{\sqrt{5}} \left((\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^{+\nu} A_1 + 2 A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} A_2\right) \\
\frac{+\varepsilon^{-\mu}}{\sqrt{5}} \left((\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} A_1 + 2 A_0 + (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^{+\nu} A_2\right) \\ \hline\hline
A_0' \\ \hline
A_0 \\
-A_0 \\
-\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varepsilon^{\nu} A_1 + A_0 + \varepsilon^{-\nu} A_2\right) \\
+\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varepsilon^{-\nu} A_1 + A_0 + \varepsilon^{+\nu} A_2\right) \\ \hline\hline
\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{c}
A_2' \\
\hline
\varepsilon^{+\nu} A_2 \\
-\varepsilon^{+\nu} A_1 \\
\dfrac{-\varepsilon^{\mu}}{\sqrt{5}}\left((\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{+\nu}A_1+2A_0+(\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{-\nu}A_2\right) \\
\dfrac{+\varepsilon^{\mu}}{\sqrt{5}}\left((\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{-\nu}A_1+2A_0+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^{+\nu}A_2\right) \\
\left(\sqrt{5}=\varepsilon+\varepsilon^4-\varepsilon^2-\varepsilon^3\right).
\end{array}\right.$$

Man hat also hier an Stelle der seither betrachteten Gruppe von 120 *binären Substitutionen eine Gruppe von* 60 *ternären. Die Determinante der einzelnen Substitution ist wiederum* $= +1$.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Gruppe von Substitutionen zugleich die Galois'sche Gruppe des neuen Problems ist. In der That, die rational bekannten Grössen A, B', C', D werden durch diese 60 Substitutionen in sich verwandelt und umgekehrt lässt sich zeigen, dass jede ganze Function von A_0, A_1, A_2, welche durch diese Substitutionen in sich verwandelt wird, eine ganze Function von A, B', C', D ist [sie hat also, wenn ungerade, nothwendig D zum Factor]. — Der Beweis ist derselbe, der soeben beim Nachweise der Vollständigkeit des Systems der Invarianten gebraucht wurde. Wenn $A = 0$, so ist die Behauptung richtig, wie ich Annalen Bd. IX, p. 194 ff. nachwies. Also bestehen die gesuchten Ausdrücke aus ganzen Functionen von B', C', D, plus Gliedern, welche A zum Factor haben. Diese Glieder behandelt man nach Abtrennung des Factors ebenso etc. *Also auch hier decken sich die rational bekannten Functionen mit den Invarianten.*

§ 3.

Verschiedene Arten der geometrischen Veranschaulichung.

Eine geometrische Veranschaulichung des neuen Problems erhält man sofort, wenn man die Wurzelwerthe der quadratischen Form als Punkte auf der $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$-Kugel deutet, und diese Interpretation leistet nach Seite der vollen Anschaulichkeit Alles, was man wünschen kann. Inzwischen werde ich fortan des kürzeren Ausdrucks wegen zumeist Gebrauch machen von der geläufigeren Deutung, *welche die Verhältnisse* $A_0 : A_1 : A_2$ *als trimetrische Coordinaten eines Punktes in der Ebene betrachtet.* Dieser Punkt wird durch die 60 ternären Substitutionen der vorigen Paragraphen, welche jetzt die Bedeutung von 60 Collineationen gewinnen, auf 60 Weisen versetzt, und unser Problem verlangt vor allen Dingen, die so entstehenden 60 Punkte zu bestimmen, hernach, die absoluten Werthe ihrer Coordinaten anzugeben. Die Curven $A = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$, $D = 0$ gehen bei den Collineationen in sich über, ebenso z. B. die Curven $B' - \lambda A^3 = 0$, $C' - \mu A^5 = 0$, als deren vollständiger Schnitt jedes System von 60 zusammengehörigen Punkten dargestellt werden kann.

Neben diese Interpretation in der Ebene stellt sich noch eine andere im Raume, die ich wenigstens anführen will, wenn ich sie auch nicht weiter benutze. Unter x, y, z rechtwinkelige Raumcoordinaten verstanden, setze ich:

$$A_0 = z, \quad A_1 = x + iy, \quad A_2 = x - iy.$$

So wird $A = A_0^2 + A_1 A_2 = x^2 + y^2 + z^2$, und die 60 gesuchten quadratischen Formen werden vorgestellt durch 60 auf der Kugel vom Radius $\sqrt{A}$ befindliche Raumpunkte. Die ternären Substitutionen (3) erhalten jetzt, in x, y, z geschrieben, reelle Coefficienten, und da sie $x^2 + y^2 + z^2$ in sich überführen, übrigens die Determinante 1 besitzen, so gewinnen sie die Bedeutung von 60 reellen Drehungen um den Anfangspunkt. *Es sind keine anderen als die 60 Drehungen, welche ein der Kugel eingeschriebenes Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen. Dies ist also ein ganz elementarer Weg, um den Zusammenhang zwischen den Jacobi'schen Gleichungen und dem Ikosaeder zu erkennen.*

Verbindet man den Punkt A_0, A_1, A_2 mit dem Anfangspunkte durch eine gerade Linie und betrachtet sie als Vertreterin der Verhältnissgrössen $A_0 : A_1 : A_2$, so hat man eine letzte Interpretation, die sich von der Interpretation in der Ebene nur dadurch unterscheidet, dass als Träger des ternären Gebietes der Kugelmittelpunkt mit den durch ihn hindurchgehenden Strahlen gedacht ist*). Ich werde weiterhin zeigen, dass die von uns in der Ebene zu studirenden Figuren auf das Genaueste zusammenhängen mit der ebenen Abbildung der von Clebsch so genannten *Diagonalfläche* dritter Ordnung (Annalen Bd. IV, p. 331). Clebsch spricht bei diesen Untersuchungen insbesondere von einem merkwürdigen durch die 6 Fundamentalpunkte der Abbildung gebildeten Sechsecke, welches die Eigenschaft besitzt, zehnfach Brianchon'sch zu sein. Betrachten wir statt der Ebene den vom Mittelpunkte des Ikosaeders ausgehenden Strahlenbündel, so erkennen wir, dass dieses Sechseck eine sehr bekannte Configuration ist. *Die sechs durch die Ecken des Ikosaeders hindurchlaufenden Durchmesser sind sein Gegenbild.* Denn in der That schneiden sich die fünfzehn

*) Leider sind bei dieser Interpretation die Kegel $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ durchaus imaginär.

durch zwei derselben hindurchgelegten Ebenen*) zehnmal zu drei in einer geraden Linie, nämlich längs der zehn Durchmesser, welche die Ecken des zugehörigen Pentagondodekaeders enthalten.

§ 4.

Orientirung in der Bildebene $A_0 : A_1 : A_2$.

Wenn die quadratische Form

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

wie zunächst angenommen sei, das Quadrat einer linearen wird:

$$q = (\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2)^2,$$

so rückt der Punkt $A_0 : A_1 : A_2$ der Ebene auf den Kegelschnitt $A = 0$, und dessen Punkte also repräsentiren die Grössensysteme $\eta_1 : \eta_2$. Insbesondere also befinden sich auf $A = 0$ Gruppen von bez. 12, 20, 30 ausgezeichneten Punkten, entsprechend $f(\eta_1, \eta_2) = 0$, $H(\eta_1, \eta_2) = 0$, $T(\eta_1, \eta_2) = 0$. Wichtig zumal ist die Beziehung eines Punktes $A_0 : A_1 : A_2$ der Ebene zu den beiden Berührungspunkten der von ihm an den Kegelschnitt A gelegten Tangenten. *Diese Berührungspunkte erhalten, wie man sofort zeigt, als Werthe von* $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ *die Wurzeln der quadratischen Gleichung*

$$q(\eta) = A_1 \eta_1^2 + 2 A_0 \eta_1 \eta_2 - A_2 \eta_2^2 = 0.$$

Fragen wir nach der Lage derjenigen Punkte der Ebene, welche der Zerlegung von f, H, T in quadratische Factoren entsprechen. So haben wir zunächst sechs Punkte mit den Coordinaten

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu}, \end{array} \right.$$

entsprechend der Zerlegung von f. Sie bilden das soeben erwähnte zehnfach Brianchon'sche Sechseck und sollen als die *Fundamentalpunkte* der Ebene bezeichnet werden. — Wir haben ferner, entsprechend der Zerlegung von H, zehn zusammengehörige Punkte:

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu} \end{array}$$

*) Diese Ebenen zusammen bilden den Kegel $D = 0$.

und fünfzehn zusammengehörige Punkte, welche den Factoren von T entsprechen:

$$(6)\quad \begin{cases} \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu} \\ 0 & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu}. \end{array} \end{cases}$$

Die fünfzehn Verbindungslinien der sechs Fundamentalpunkte (4) *schneiden sich zu je drei in den Punkten* (5), *zu je zwei in den Punkten* (6); *sie sind überdies die Polaren der Punkte* (6) *in Bezug auf den Kegelschnitt* $A=0$. *Ihre Schnittpunkte mit* A *bilden die* 30 *Punkte* $T(\eta_1, \eta_2)=0$.

Man entnimmt diese Angaben in bekannter Weise der Figur des Ikosaeders; übrigens mag man sie durch die Gleichungen der fünfzehn geraden Linien:

$$(7)\quad \begin{cases} (1\pm\sqrt{5})A_0+\varepsilon^{\nu}A_1+\varepsilon^{-\nu}A_2=0, \\ \qquad\qquad\quad \varepsilon^{\nu}A_1+\varepsilon^{-\nu}A_2=0 \end{cases}$$

controliren. Diese fünfzehn Geraden zusammengenommen stellen eine Curve fünfzehnter Ordnung vor, welche bei den 60 ternären linearen Substitutionen (3) ungeändert bleibt. Daher folgt aus § 2.:

Das Aggregat der 15 *Geraden ist dargestellt durch* $D=0$.

Für die Curven $B'=0$, $C'=0$ ergeben sich nicht gleich einfache Interpretationen. Ich will dieselben mit Hülfe von $A=0$ in der Weise modificiren, dass sie in den sechs Fundamentalpunkten möglichst hohe vielfache Punkte erhalten. Zu dem Zwecke hat man nur dafür zu sorgen, dass einer dieser Punkte, z. B.

$$A_1=0,\quad A_2=0$$

vielfacher Punkt wird, dann werden es die anderen Fundamentalpunkte von selbst, wegen der Eigenschaft der in Betracht kommenden Ausdrücke, bei den 60 ternären Substitutionen ungeändert zu bleiben. Das heisst also: wir müssen vermöge $A=A_0^2+A_1A_2$ die Ausdrücke B', C' so modificiren, dass möglichst die höchsten Potenzen von A_0 herausfallen. Auf diese Weise gewinnt man zwei Ausdrücke, die B und C heissen sollen:

$$(8)\quad \begin{cases} B=-B'+\frac{16}{21}A^3 \\ \quad =8A_0^4A_1A_2-2A_0^2A_1^2A_2^2+A_1^3A_2^3-A_0(A_1^5+A_2^5), \\ C=-144C'-\frac{160}{17}A^2B'+\frac{1024}{11\cdot 21}A^5 \\ \quad =320A_0^6A_1^2A_2^2-160A_0^4A_1^3A_2^3+20A_0^2A_1^4A_2^4+6A_1^5A_2^5 \\ \quad -4A_0(A_1^5+A_2^5)(32A_0^4-20A_0^2A_1A_2+5A_1^2A_2^2)+A_1^{10}+A_2^{10}. \end{cases}$$

Die Curve $B=0$ hat in den Fundamentalpunkten Doppelpunkte, ist übrigens vom Geschlechte 4. Die Curve $C=0$ zehnter Ordnung hat in den Fundamentalpunkten Spitzenpaare, d. h. vierfache Punkte; ihr Geschlecht ist Null. *Uebrigens sind jetzt B und C eben die Ausdrücke sechster resp. zehnter Ordnung geworden, welche wir oben* (I, § 12.) *bei den allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen so bezeichneten.* Dadurch also sind B, C in neuer Weise definirt: als gewisse simultane Invarianten des in kanonischer Form gegebenen Ikosaeders und einer zutretenden quadratischen Form*). Aber auch die Discriminante der Jacobi'schen Gleichung findet ihre volle Deutung: *die vierte Wurzel aus der Discriminante ist bis auf einen Zahlenfactor gleich D*:

$$\sqrt[4]{\Pi}=12\,D. \tag{9}$$

In der That findet man in Uebereinstimmung mit Gleichung (23) (Abschn. I.):

$$\begin{aligned}144D^2=-1728B^5+720ACB^3-80A^2C^2B\\+64A^3(5B^2-AC)^2+C^3,\end{aligned} \tag{10}$$

was zugleich die Relation zwischen den Invarianten A, B, C, D, resp. A, B', C', D ist, welche noch aufzustellen war (Abschn. II., § 1.).

§ 5.

Die allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen vom sechsten Grade.

Aus den letzten Bemerkungen geht hervor, dass sich unser neues Problem mit den allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen sechsten Grades deckt, sobald man bei der letzteren die vierte Wurzel aus der Discriminante adjungirt**). In der That berechnet sich die Jacobi'sche Gleichung als Resolvente unseres Problems nunmehr folgendermassen einfach. Die sechs Wurzeln der Jacobi'schen Gleichung:

$$\begin{aligned}z_\infty&=5\,A_0^2,\\z_\nu&=(A_0+\varepsilon^\nu A_1+\varepsilon^{-\nu}A_2)^2\end{aligned}$$

---

*) Eine andere Art, diese Ausdrücke zu definiren, erhält man, wenn man sie als *ternäre* Formen auffasst. Ich will hier nur ohne Beweis angeben: Betrachtet man C als Grundform; so lassen sich A, B, D als Covarianten derselben darstellen und zwar bilden sie das *volle* System der Covarianten.

**) Wenn man eine Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades nach Kronecker-Brioschi als Resolvente einer Gleichung fünften Grades aufstellt, so ist diese Adjunction von vornherein geleistet. Ich finde dies in dem citirten Kronecker'schen Aufsatze (Borchardt's Journ. Bd. 59) nicht explicite angegeben und doch beruhen, wie mir scheint, verschiedene Aussagen nur auf diesem Umstande und gelten nicht für Jacobi'sche Gleichungen sechsten Grades schlechthin.

stellen, gleich Null gesetzt, doppeltzählend die 6 Polaren dar, welche die 6 Fundamentalpunkte in Bezug auf den Kegelschnitt A besitzen. Es ist einfacher, statt ihrer die Aggregate

$$z_\infty - A, \quad z_\nu - A$$

zu betrachten. Sie repräsentiren, gleich Null gesetzt, diejenigen sechs Kegelschnitte, welche durch 5 der 6 Fundamentalpunkte hindurchgehen. In Folge dessen hat man nämlich folgenden Ansatz. Die in Betracht kommenden symmetrischen Functionen der $(z - A)$ sind [als gerade Functionen der A_0, A_1, A_2] ganze Functionen von A, B, C, die, gleich Null gesetzt, Curven vorstellen, *welche in den Fundamentalpunkten vielfache Punkte von bekannter Multiplicität besitzen.* Es ist daher unter $\varkappa$, λ, $\cdots$ numerische Factoren verstanden:

$$\Sigma(z_i - A) = \varkappa A,$$
$$\Sigma(z_i - A)(z_k - A) = 0,$$
$$\Sigma(z_i - A)(z_k - A)(z_l - A) = \lambda B, \text{ etc.}$$

Denn z. B. $\Sigma(z_i - A)(z_k - A)$ repräsentirt, gleich Null gesetzt, eine Curve vierter Ordnung, welche durch jeden Fundamentalpunkt einfach hindurchgeht. Eine solche Curve lässt sich aber aus A, B, C nicht zusammensetzen, also ist der Ausdruck identisch Null. — So kommt schliesslich die Jacobi'sche Gleichung in bekannter Form:

$$(12) \quad (z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 - C(z-A) + (5B^2 - AC) = 0,$$

wo nur die Zahlencoefficienten durch Vergleich einzelner Glieder haben bestimmt werden müssen.

§ 6.

Berechnung gewisser Ausdrücke.

Weiterhin bedarf ich gewisser Ausdrücke, die ich gleich hier, unter Benutzung des geometrischen Bildes, berechnen will.

Die erste Aufgabe sei: *das Aggregat der* 12, 20, 30 *geradlinigen Tangenten, welche* $A = 0$ *in den Punkten* $f(\eta_1, \eta_2) = 0$, $H(\eta_1, \eta_2) = 0$, $T(\eta_1, \eta_2) = 0$ *berühren, als ganze Functionen von* A, B, C *darzustellen.*

1) *Die* 12 *Tangenten in den Punkten* f. Ein Paar zusammengehöriger Tangenten heisst $A_1 A_2 = 0$, oder, wenn wir die Wurzeln z der Jacobi'schen Gleichung benutzen, $z_\infty - 5A = 0$. Daher erhält man den gesuchten Ausdruck (bis auf einen unbestimmt bleibenden Zahlenfactor), wenn man in die linke Seite der Jacobi'schen Gleichung $z = 5A$ einträgt. Auf diese Weise kommt:

$$(13) \quad L = B^2 - AC + 128 A^3 B.$$

2) *Die 20 Tangenten in den Punkten H.* Einen Punkt, der sich auf einer dieser Tangenten bewegt, kann man folgendermassen darstellen*):

$$A_0 = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\,(\lambda + (5 + 3\sqrt{5})),$$
$$A_1 = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\,(\lambda a - 4\sqrt{5}),$$
$$A_2 = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\,(\lambda b - 4\sqrt{5}),$$
$$\left[(a+b) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad ab = -1\right].$$

So wird für $\lambda^3 = 2^5 \cdot 5 \cdot \mu$:

$$A = -300,$$
$$B = 2^{10}5^8\,(\mu^2 + 10\mu - 2),$$
$$C = 2^{19} \cdot 3 \cdot 5^{10}\,(5\mu^3 - 2 \cdot 3 \cdot 5\mu^2 - 2).$$

Nun eliminire man μ zwischen $\frac{B}{A^3}$ und $\frac{C}{A^5}$. So gewinnt man, abgesehen von Zahlenfactoren, den Ausdruck:

$$(14) \quad M = C^2 + 2^6 \cdot 75\,AB^3 + 2^6 \cdot 35\,A^2BC + \frac{2^{11} \cdot 125}{9} A^4B^2 - 2^{12} \cdot 13\,A^5C - 2^{17} \cdot 5\,A^7B + 2^{20}A^{10}.$$

3) *Die 30 Tangenten in den Punkten T.* Man setze

$$A_0 = i\sqrt{1+2i} \cdot \lambda,$$
$$A_1 = \sqrt{1+2i} \cdot \lambda + \sqrt{-5},$$
$$A_2 = \sqrt{1+2i} \cdot \lambda - \sqrt{-5}.$$

Dann wird:

$$\frac{B}{A^3} = -\lambda^6 - 5\lambda^4 + 5\lambda^2 + 1,$$
$$\frac{C}{2A^5} = -6\lambda^{10} + 90\lambda^8 + 20\lambda^6 + 28\lambda^4 + 50\lambda^2 + 1,$$

und hieraus durch Elimination von λ^2:

$$(15) \quad N = R^3 + P^3S^2 + ARS(3PQ - 10P^2) + 5A^2R^2(7P - Q) + (A^3QS + 5A^4R)(5P^2 + 5PQ - Q^2),$$

wo

$$P = -6(B + 612A^3),$$
$$Q = 120(B + 240A^3),$$
$$R = \left(\frac{C}{2} - 610A^2B + 609A^5\right),$$
$$S = B - A^3.$$

*) Ich beschränke mich hier und im Folgenden der Kürze wegen darauf, ohne Beweis die zweckmässigste Form der Rechnung anzugeben; die Art des Ansatzes bedarf einer gewissen Erläuterung, die ich bei nächster Gelegenheit nachtragen werde.

Die zweite Aufgabe erwächst aus Folgendem. Jedesmal 60 Punkte des Kegelschnittes A werden durch die ternären Substitutionen (3) zusammengeordnet. Man construire in ihnen die Tangenten und bringe sie zum gegenseitigen Durchschnitte. Es handelt sich darum, *den geometrischen Ort dieser Durchschnittspunkte*, *resp. die verschiedenen Theile*, *aus denen er besteht*, *durch* A, B, C, D *darzustellen.*

Wenn ein Kegelschnitt durch lineare Transformation in sich verwandelt wird und man bringt die Tangenten zum Durchschnitt, welche in Punkten berühren, die durch die Collineation einander zugeordnet sind, so ist der geometrische Ort dieser Durchschnittspunkte bekanntlich ein Kegelschnitt, welcher den gegebenen in denjenigen beiden Punkten berührt, die bei der Collineation fest bleiben. Derselbe Kegelschnitt wird erhalten, wenn man die betr. lineare Substitution durch ihre inverse ersetzt.

Nun sind uns 60 lineare Substitutionen gegeben, von denen eine, die Identität, als mit der Problemstellung nicht verknüpft, von vornherein auszuschliessen ist. Unter den 59 anderen finden sich zunächst 15 von der Periode 2, welche je ein Punktepaar von T ungeändert lassen. Bei ihnen ist die anfängliche Substitution mit der inversen identisch. In Folge dessen artet der Ortskegelschnitt für jede derselben aus in die gerade Linie, welche das festbleibende Paar von Punkten verbindet. *Daher haben wir als ersten Bestandtheil der gesuchten Ortscurve die aus* 15 *geraden Linien bestehende Curve*

$$D = 0.$$

Betrachten wir ferner die 20 Substitutionen von der Periode 3. Sie lassen paarweise dasselbe Punktepaar von H ungeändert, und von zwei in dieser Weise zusammengehörigen Substitutionen ist die eine die inverse der anderen. *Daher erhalten wir zehn Ortskegelschnitte, welche* $A = 0$ *in den Punktepaaren von* H *berühren.* Ich finde für einen derselben:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} \cdot A - \left(- \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot A_0 + A_1 + A_2\right)^2 = 0.$$

Ein beliebiger Punkt desselben wird gewonnen, wenn man setzt:

$$A_0 = -\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon^4}\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\lambda\mu + \sqrt{2}\,(\lambda^2 + \mu^2)\right],$$

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon^4}\left[-4\,\lambda\mu + \sqrt{2}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}(\lambda^2 + \mu^2)\right],$$

$$A_1 A_2 = \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon^4)^2}\Big[3\,(5+\sqrt{5})\,\lambda^2\mu^2 - (3+\sqrt{5})\,\sqrt{2}\,(\lambda^3\mu + \lambda\mu^3) - 2\,(\lambda^4 + \mu^4)\Big].$$

Trägt man diese Werthe in A, B, C ein, so erhält man Formeln von folgender Gestalt:

$$\frac{B}{A^3} = \alpha + \beta\varrho + \gamma\varrho^2,$$
$$\frac{C}{A^5} = \alpha' + \beta'\varrho + \gamma'\varrho^2 + \delta'\varrho^3,$$

wo α, β, $\cdots$ reelle ganze Zahlen sind (die ich noch nicht berechnete) und $\varrho = \frac{\lambda^6 + \mu^6}{\lambda^3\mu^3}$ gesetzt ist. Die Elimination von ϱ giebt den gesuchten Ausdruck:

$$\mathsf{H} = C^2 + AR, \tag{16}$$

der, gleich Null gesetzt, das Aggregat der 10 Kegelschnitte darstellt. [R bedeutet dabei eine von mir noch nicht berechnete ganze Function von A, B, C.]

Die 24 Substitutionen von der Periode fünf, welche noch übrig sind, liefern noch zwei Bestandtheile. Die vier Substitutionen nämlich, welche ein Punktepaar von f ungeändert lassen, gehören paarweise wieder zusammen als directe und inverse Operation, und durch sie werden also zwei Kegelschnitte bestimmt. Ich finde für eins dieser Paare:

$$A + (5 \pm 2\sqrt{5})A_0^2 = 0$$

oder, unter Benutzung der Jacobi'schen z:

$$z_\infty = (5 \mp 2\sqrt{5})A.$$

Substituirt man diese Werthe in die Jacobi'sche Gleichung, so kommen die beiden noch fehlenden Ausdrücke:

$$(17)\quad \begin{cases} F_1 = 2^{11}(445 + 199\sqrt{5})A^6 - 5\cdot 2^7(9 + 4\sqrt{5})A^3B \\ \qquad\qquad + (5 + 2\sqrt{5})AC + 5B^2, \\ F_2 = 2^{11}(445 - 199\sqrt{5})A^6 - 5\cdot 2^7(9 - 4\sqrt{5})A^3B \\ \qquad\qquad + (5 - 2\sqrt{5})AC + 5B^2, \end{cases}$$

und die Ortscurve, welche wir suchten, hat also schliesslich diese Gleichung:

$$D \cdot \mathsf{H} \cdot F_1 \cdot F_2 = 0.$$

§ 7.

Zurückführung des neuen Problems auf das Fundamentalproblem des ersten Abschnitts.

Mit Hülfe dieser Rechnungen kann man nun die Bestimmung der A_0, A_1, A_2 aus A, B, C, D folgendermassen explicite auf das Fundamentalproblem des vorigen Abschnittes zurückführen*). Es seien $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ und $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = 0,$$

so werden $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ und $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, jedes für sich, durch die 60 Ikosaedersubstitutionen des vorigen Abschnittes transformirt, wenn A_0, A_1, A_2 durch die 60 ternären Substitutionen (3) umgewandelt werden. *Daher hängen* $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ *und* $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ *jedes von einer Ikosaedergleichung ab:*

$$(18) \qquad 1728 \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X_1, \qquad 1728 \frac{H^3(\zeta_1, \zeta_2)}{f^5(\zeta_1, \zeta_2)} = X_2,$$

wo die Parameter X_1, X_2 *rationale Functionen von* $\sqrt{A}$, B, C, D *vorstellen.*

Diese X_1, X_2 berechne ich nach einer Methode, die ich auch im folgenden Abschnitte bei ähnlichen Aufgaben noch anwende (obgleich ich ihr keinerlei principielle Bedeutung beilege). Ich setze vorab:

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = (\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2)(\zeta_2 x_1 - \zeta_1 x_2)$$

und betrachte nun die drei Resultanten:

$$(19) \qquad \begin{cases} 12^{\frac{2}{3}} f(\eta_1, \eta_2) \cdot f(\zeta_1, \zeta_2) = l, \\ 12^{\frac{8}{3}} H(\eta_1, \eta_2) \cdot H(\zeta_1, \zeta_2) = m, \\ \quad T(\eta_1, \eta_2) \cdot T(\zeta_1, \zeta_2) = n. \end{cases}$$

Diese drei Resultanten, gleich Null gesetzt, stellen im Sinne des vorigen Paragraphen die dort berechneten Aggregate der an A in den Punkten f, H, T construirbaren Tangenten vor. Denn wenn z. B. die Resultante von f und q verschwindet, so bedeutet das, für jene Interpretation, dass eine der beiden Tangenten, welche man von A_0, A_1, A_2 an A legen kann, in einem Punkte f berührt. — *Die Resultanten* l, m, n *sind daher, bis auf Zahlenfactoren, gleich den drei soeben berechneten Ausdrücken* L, M, N. Die Zahlenfactoren aber ergeben sich einfach, wenn man $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ setzt, wo denn $A = 0$, $B = -f$, $C = -144 H$ wird. Auf diese Weise kommt:

$$(20) \qquad \begin{cases} l = 12^{\frac{2}{3}} L, \\ m = 12^{-\frac{4}{3}} M, \\ n = \frac{N}{18}. \end{cases}$$

Aber es sind X_1, X_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

---

*) Vergl. dazu Brioschi, Annali di Matematica, Ser. II, t. I, p. 230.

$$f^5(\eta)\cdot f^5(\zeta)\cdot X^2 - 1728[f^5(\eta)\cdot H^3(\zeta)+f^5(\zeta)\cdot H^3(\eta)]\cdot X + 1728^2 H^3(\eta)\,H^3(\zeta)=0.$$

Hier ist der erste Coefficient $=\frac{l^5}{144}$, der dritte $=\frac{m^3}{144}$, und der mittlere berechnet sich wegen

$$T^2 = 12 f^5 - 12^4 H^3$$

gleich:

$$\frac{l^5+m^3-n^2}{144}.$$

Daher erhält man als Werthe der Parameter:

$$(21)\qquad \left\{\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \frac{l^5+m^3-n^2 \pm \sqrt{(l^5+m^3-n^2)^2-4\,l^5m^3}}{2\,l^5},$$

wo die l, m, n durch Formel (20) definirt sind.

Untersuchen wir noch den Werth der Discriminante. Es werden X_1 und X_2 zunächst einander gleich, wenn $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ mit $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ identisch ist. *Dies giebt für die Discriminante den Factor A.* X_1 und X_2 werden aber auch einander gleich, wenn $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ aus $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, oder, was dasselbe ist, $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ aus $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ durch eine der 59 nicht identischen Ikosaedersubstitutionen hervorgeht. *Die Discriminante enthält daher noch die im vorigen Paragraphen berechneten Ausdrücke D, H, F_1, F_2, jeden quadratisch.* Hiermit ist sie, da sie vom 120^{ten} Grade ist:

$$120 = 2 + 2\,(15+20+12+12),$$

erschöpft, man hat also, unter c einen Zahlenfactor verstanden:

$$(22)\qquad \pm\sqrt{(l^5+m^3-n^2)^2-4\,l^5m^3} = \pm\, c\, D\cdot \mathsf{H}\cdot F_1\cdot F_2\cdot \sqrt{A}.$$

Durch Vergleichung eines Gliedes beiderseits findet man:

$$(23)\qquad c = \tfrac{2}{5}.$$

§ 8.

Bestimmung der A_0, A_1, A_2.

Um jetzt A_0, A_1, A_2 zu bestimmen, berechne man zunächst η_1 und η_2, sowie ζ_1 und ζ_2 nach Anleitung des vorigen Abschnittes aus den hier aufgestellten Ikosaedergleichungen und bemesse ihre absoluten Werthe der Art, dass die Resultanten $f(\eta_1,\eta_2)\cdot f(\zeta_1,\zeta_2)$ etc. mit L, M, N übereinstimmen. Die Frage, welche Werthe η und ζ zusammengehören, beantwortet sich im Allgemeinen aus der Formel:

$$(24)\qquad \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 = \sqrt{A}.$$

Die zusammengehörigen Vorzeichen, welche man η_1, η_2 und ζ_1, ζ_2 zu ertheilen hat, folgen aus dem Werthe von D. Schliesslich ist:

$$(25)\quad A_1 = \eta_2\zeta_2\,, \qquad A_2 = -\eta_1\zeta_1\,, \qquad A_0 = -\frac{\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1}{2}\,.$$

Man kann verlangen, das ζ_1, ζ_2, welches zu einem η_1, η_2 gehört, rational durch dieses und bekannte Grössen auszudrücken. Nach einer Mittheilung, die ich Gordan verdanke, erreicht man dies folgendermassen. Man stelle

$$f(\eta_1, \eta_2)\cdot f(\zeta_1, \zeta_2) = L\,, \qquad H(\eta_1, \eta_2)\cdot H(\zeta_1, \zeta_2) = 12^{-4} M,$$
$$T(\eta_1, \eta_2)\cdot T(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{N}{18}\cdot$$

wie soeben geschehen, als Functionen von A, B, C dar und polarisire $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ nach $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$. So wird A_ζ $\left(\text{d. h. } \frac{\partial A}{\partial \eta_1}\cdot\zeta_1 + \frac{\partial A}{\partial \eta_2}\cdot\zeta_2\right)$ gleich Null und also:

$$12\; f(\eta)_\zeta\cdot f(\zeta) = \frac{\partial L}{\partial B}\cdot B_\eta + \frac{\partial L}{\partial C}\cdot C_\eta\,,$$
$$12^4\cdot 20\, H(\eta)_\zeta\cdot H(\zeta) = \frac{\partial M}{\partial B}\cdot B_\eta + \frac{\partial M}{\partial C}\cdot C_\eta\,,$$
$$18\cdot 30\; T(\eta)_\zeta\cdot T(\zeta) = \frac{\partial N}{\partial B}\cdot B_\eta + \frac{\partial N}{\partial C}\cdot C_\eta\,.$$

Daher:

$$(26)\quad 0 = \begin{vmatrix} 12\, L\,\frac{f(\eta)_\zeta}{f(\eta)} & 12^4\cdot 20\, M\,\frac{H(\eta)_\zeta}{H(\eta)} & 18\cdot 30\, N\,\frac{T(\eta)_\zeta}{T(\eta)} \\ \frac{\partial L}{\partial B} & \frac{\partial M}{\partial B} & \frac{\partial N}{\partial B} \\ \frac{\partial L}{\partial C} & \frac{\partial M}{\partial C} & \frac{\partial N}{\partial C} \end{vmatrix}\,.$$

Diese Formel ist in ζ_1, ζ_2 linear, liefert also $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ als rationale Function von $\frac{\eta_1}{\eta_2}$.

§ 9.

Ueber die Nothwendigkeit der bei der Auflösung benutzten Quadratwurzel*).

Die Quadratwurzel, welche die beiden Parameter X_1, X_2 scheidet, spielt eine bemerkenswerthe Rolle. Sie dient nicht dazu, die Galois'sche Gruppe des Problems zu reduciren. Denn die Galois'sche Gruppe umfasst vorher wie nachher (bei der Ikosaedergleichung) 60 Substitutionen. Trotzdem ist sie (oder eine äquivalente Irrationalität) bei der Zurückführung des Problems auf eine Ikosaedergleichung im Allgemeinen nothwendig. Es sei nämlich

$$\frac{\varphi(A_0, A_1, A_2)}{\psi(A_0, A_1, A_2)}\,,$$

*) Vergl. den letzten Paragraphen des dritten Abschnittes.

wo φ, ψ ganze rationale Functionen ohne gemeinsamen Theiler, von einer Ikosaedergleichung abhängig. Dann soll sich $\frac{\varphi}{\psi}$, sobald auf A_0, A_1, A_2 die 60 ternären Substitutionen (3) angewandt werden, durch die 60 Ikosaedersubstitutionen transformiren. Das ist bei durchaus willkürlichen A_0, A_1, A_2 nur möglich, wenn sich φ und ψ durch die *binären* Substitutionen (4) des vorigen Abschnittes umformen. Aber die Zahl dieser Substitutionen ist (mindestens) 120 und das ist mit der Zahl 60 der ternären Substitutionen unverträglich.

Dagegen giebt es selbstverständlich specielle Werthsysteme von A_0, A_1, A_2, bei denen die Quadratwurzel vermieden werden kann. Ein Beispiel ist dieses. Es giebt *rationale* Curven, welche durch die 60 ternären Substitutionen in sich übergeführt werden. So ist der Kegelschnitt $A = 0$ (bei dem unsere Behauptung selbstverständlich ist), so ist die Curve 10^{ter} Ordnung $C = 0$. Stellt man jetzt die Coordinaten A_0, A_1, A_2 eines Punktes einer solchen Curve in gewöhnlicher Weise rational durch einen Parameter λ dar, so wird λ, sobald man eine der 60 ternären Substitutionen macht, seinerseits eine (gebrochene) lineare Substitution erfahren, weil das ganze Gebiet der Curve eindeutig in sich transformirt wird. Daher hängt nach § 4. des ersten Abschnittes eine geeignete lineare Function von λ, d. h. eine rationale Function von A_0, A_1, A_2 von einer Ikosaedergleichung ab. — Eine ähnliche Ueberlegung war es, wie ich beiläufig bemerke, welche mich zuerst zu der Methode des § 7. geführt hat. Um das allgemeine Problem auf eine Ikosaedergleichung zurückzuführen, suchte ich dem Punkte A_0, A_1, A_2 in einer durch lineare Substitution unzerstörbaren Weise einen Punkt des Kegelschnittes A zuzuordnen, dessen Bestimmung dann von einer Ikosaedergleichung abhängen musste. Die Zuordnung, wie sie in § 7. verwandt wird, besteht, geometrisch zu reden, einfach darin, dass man von A_0, A_1, A_2 eine Tangente an A legt und nun den Berührungspunkt als zugeordnet ansieht. —

Ein anderes Beispiel von mehr particulärem Charakter giebt der Fall $B = 0$. Die sogleich aufzustellende (Brioschi'sche) Resolvente fünften Grades nimmt dann die Jerrard'sche Form an und diese subsumirt sich unter diejenigen Gleichungen fünften Grades, welche ich im dritten Abschnitte durch eine Ikosaedergleichung löse. Dem geht folgende Construction in der Ebene A_0, A_1, A_2 parallel, wie ich hier ohne Beweis angebe. Man kann um $A = 0$ unendlich viele Dreiecke beschreiben, deren Ecken auf B liegen. Jeder Punkt auf B ist Ecke eines solchen Dreiecks, während jede Tangente von A dreimal als Dreiecksseite benutzt wird. Ordnet man nun dem Punkte auf B den Berührungspunkt der gegenüberstehenden Seite mit A zu, so ist B auf A eindeutig (allerdings nicht umkehrbar eindeutig) bezogen.

Der Punkt auf A ist durch eine Ikosaedergleichung bestimmt, und von ihm geht man rational zu dem Punkte auf B zurück, indem man die Coefficienten der vorgelegten Jacobi'schen Gleichung benutzt.

§ 10.

Brioschi's Resolvente vom fünften Grade und die Diagonalfläche dritter Ordnung.

Ich betrachte zum Schlusse noch die Resolvente fünften Grades, welche Brioschi, wie in § 13. des ersten Abschnittes berichtet, bei den allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen aufgestellt hat. Dieselbe erwächst geometrisch aus dem Umstande, dass man die 15 Verbindungsgeraden der sechs Fundamentalpunkte der Ebene A_0, A_1, A_2 derart auf fünf Dreiecke vertheilen kann, dass die Seiten jedes Dreiecks alle Fundamentalpunkte enthalten*). In der That stellt der Ausdruck (Gleichung (20) des Abschn. I):

$$(27) \qquad y_\nu = \varepsilon^\nu P_1 + \varepsilon^{2\nu} P_2 + \varepsilon^{3\nu} P_3 + \varepsilon^{4\nu} P_4,$$

gleich Null gesetzt, für die verschiedenen Werthe von ν die fünf Dreiecke dar, wie leicht zu controliren. P_1, P_2, P_3, P_4 repräsentiren, gleich Null gesetzt, Curven dritter Ordnung, welche ebenfalls durch sämmtliche Fundamentalpunkte hindurchgehen. Die Gleichung fünften Grades selbst (Gleichung (22) des Abschn. I):

$$y^5 + 10\,By^3 + 5\,(9\,B^2 - AC)\,y - 12\,D = 0$$

berechnet man wieder mit Leichtigkeit aus dem Verhalten der Curven y_ν in den Fundamentalpunkten (vergl. § 5., Absch. II.). Zumal sieht man a priori ein, dass

$$(28) \qquad \Sigma y = 0, \quad \Sigma y^3 = 0$$

sein muss, weil es keine ganze Function von A, B, C, D giebt, welche den dritten oder neunten Grad besitzt.

Nun kann man diesen Formeln eine geometrische Deutung geben, durch welche der Zusammenhang dieser Betrachtungen hergestellt wird mit denjenigen, die Clebsch im vierten Annalenbande (p. 336 ff.) entwickelt hat. Die in A_0, A_1, A_2 rationalen Ausdrücke y_ν befriedigen in allgemeinster Weise die Bedingungen $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^3 = 0$. *Betrachtet man also (wie im folgenden Abschnitte durchgängig geschieht) die y als Pentaedercoordinaten im Raume, so vermitteln sie die eindeutige Abbildung der durch dieses Gleichungspaar dargestellten Diagonalfläche auf die Ebene A_0, A_1, A_2.* Es ist nützlich, sich zu orientiren, was die hauptsächlichen in der Ebene verlaufenden Curven für die Fläche bedeuten. Die sechs Fundamentalpunkte der Ebene sind in der

*) Diese fünf Dreiecke sind zugleich Polardreiecke für den Kegelschnitt $A = 0$.

That die Fundamentalpunkte der Abbildung; sie stellen sechs auf der Fläche verlaufende gerade Linien dar. Die sechs weiteren geraden Linien, welche mit ihnen die ausgezeichnete Doppelsechs bilden (Clebsch, Annalen Bd. IV, p. 336), sind durch die Kegelschnitte $z - A = 0$ des § 5. gegeben. Die Curve $D = 0$ repräsentirt die 15 übrigen geraden Linien der Diagonalfläche. $B = 0$ giebt den Schnitt der Diagonalfläche mit der Fläche zweiter Ordnung $\Sigma y^2 = 0$, und endlich $A = 0$ und $C = 0$ bilden gemeinsam den in zwei rationale Bestandtheile zerfallenden Schnitt der Diagonalfläche mit der Fläche vierter Ordnung $20\, \Sigma y^4 = (\Sigma y^2)^2$ (vergl. Abschn. I, § 15.).

Wenn man jetzt die y beliebig unter einander vertauscht, so erfährt die Diagonalfläche (räumliche) Collineationen, welche sie in sich überführen. Denselben entsprechen eindeutige Transformationen der Bildebene in sich. Den *geraden* Vertauschungen der y insbesondere entsprechen die 60 ternären Substitutionen des § 3. dieses Abschnittes. Die ungeraden Vertauschungen aber ergeben Umformungen, welche über den Kreis der bisher betrachteten Gegenstände hinausführen. *Es sind* 60 *Cremonatransformationen, welche die geraden Linien der Ebene in Curven fünfter Ordnung überführen, die in den Fundamentalpunkten Doppelpunkte haben*). Sie bilden mit den* 60 *Collineationen zusammen eine Gruppe von* 120 *Transformationen.* Bei ihnen bleiben die Curven $B = 0$, $D = 0$ ungeändert, die Curven $A = 0$ und $C = 0$ vertauschen sich, desgleichen die Fundamentalpunkte mit den Kegelschnitten, welche durch die 5 anderen Fundamentalpunkte hindurchgehen. Wendet man auf die ursprünglichen A_0, A_1, A_2 die ternären linearen Substitutionen an, so erfahren auch die transformirten A_0, A_1, A_2 derartige Substitutionen. *Aber* ε *ist dabei durch* ε^2 *ersetzt.* Wir finden also eine Umformung der allgemeinen Jacobi'schen Gleichung in eine zweite, analog der zweiten Classe von Umformungen, die wir beim Ikosaeder in § 18. des vorigen Abschnittes studirten. Eben diese Umformungen (und die anderen hier nicht berührten, welche ε ungeändert lassen) hat Brioschi im ersten Bande der Annali di Matematica, ser. 2., untersucht; ich gehe deshalb nicht näher auf sie ein; aber ich wollte wenigstens aussprechen, wie naturgemäss man zu ihnen gelangt, wenn man von den Collineationen ausgeht, welche die Diagonalfläche in sich überführen.

---

*) Z. B. unter ϱ einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$\varrho A_0' = -8\, A_0^3 A_1 A_2 + 6\, A_0 A_1^2 A_2^2 - (A_1^5 + A_2^5),$$
$$\varrho A_1' = 2\,(8\, A_0^3 A_2^2 - 4\, A_0^2 A_1^3 - 2\, A_0 A_1 A_2^3 + A_1^4 A_2),$$
$$\varrho A_2' = 2\,(8\, A_0^3 A_1^2 - 4\, A_0^2 A_2^3 - 2\, A_0 A_1^3 A_2 + A_1 A_2^4).$$

Abschnitt III.

Eine neue Lösung der Gleichungen fünften Grades.

In diesem dritten Abschnitte zeige ich, dass man die Gleichungen fünften Grades, bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet, explicite mit Hülfe einer Ikosaedergleichung lösen kann. Es ist das gewissermassen die Umkehr der Betrachtungen in § 16., 17. des ersten Abschnittes. Die Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades ist dadurch darauf zurückgeführt, die Gleichung vorab durch eine rationale Transformation auf die genannte einfache Form zu bringen. Ich würde gern eine ausgeführte Vergleichung dieser Lösungsmethode mit der Hermite'schen und der Kronecker'schen hinzugefügt haben, die alle unter einander enge verwandt sind. Aber es verlangt Das durchaus ein Eingehen auf die Eigenthümlichkeit der elliptischen Functionen und deshalb verschiebe ich noch diese Auseinandersetzung*).

§ 1.

Geometrischer Ansatz.

Es mögen die fünf Wurzeln y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 einer Gleichung fünften Grades an die Bedingung geknüpft sein: $\Sigma y = 0$ und übrigens nur die Verhältnisse der Wurzeln beachtet werden. Dann fasse ich die y auf als *Pentaeder-Coordinaten* eines Raumpunktes, der 120 im Allgemeinen verschiedene Lagen annimmt, wenn man die y auf beliebige Weise permutirt. *Diesen Permutationen gebe ich dann, und das ist für meine Anschauung das Wesentliche, die Bedeutung von Collineationen des Raumes* (Annalen Bd. IV, p. 353).

Ist nun insbesondere noch $\Sigma y^2 = 0$, so liegen die 120 Punkte alle auf der durch diese Gleichung dargestellten Fläche zweiten Grades, die ich als Fläche Ψ bezeichne. Aber eine Fläche zweiten Grades trägt zwei Schaaren geradliniger Erzeugender, und auch diese werden bei den 120 Collineationen transformirt. Man zeigt leicht: *Bei den 60 Collineationen, welche durch gerade Vertauschungen der y vorgestellt sind, wird jede Schaar der Erzeugenden in sich transformirt; bei den 60 übrigen Collineationen werden die Schaaren unter einander vertauscht.* Nun mache man denselben Schluss, der schon in § 9. des vorigen Abschnittes angewandt wurde. Die Erzeugenden einer Art der Fläche zweiten Grades bilden eine *rationale* Mannigfaltigkeit erster Dimension;

*) Vergl. die bereits genannte Note in den Rendiconti des Istituto Lombardo vom April 1877.

sie lassen sich rational durch einen Parameter λ darstellen, so dass zu jeder Erzeugenden nur ein Werth von λ gehört. Eine räumliche Collineation daher, welche die Erzeugendenschaar in sich transformirt, ist mit einer *linearen* Transformation von λ äquivalent (vergl. Annalen Bd. IX, p. 188). *Also sind, nach* § 4. *des ersten Abschnittes, die* 60 *Werthe von* λ, *welche* 60 *zusammengehörigen Erzeugenden entsprechen, von einer Ikosaedergleichung abhängig.*

Um jetzt die Gleichung fünften Grades zu lösen, bei der $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$, bestimme man vor Allem die 60 Erzeugenden der einen (ersten) Art, welche durch die 60 Punkte hindurchlaufen, die aus dem Punkte $y_0 y_1 y_2 y_3 y_4$ durch die geraden Vertauschungen der y entstehen. Die Parameter dieser Erzeugenden sind gebrochene lineare homogene Functionen der y; es wird in *erster* Linie darauf ankommen, die Parameter so zu wählen, dass die aufzustellende Ikosaedergleichung in kanonischer Form erscheint. Dann handelt es sich *zweitens* darum, die Ikosaedergleichung wirklich zu bilden. Und *drittens* sind die Wurzeln y als rationale Functionen der Wurzeln dieser Ikosaedergleichung, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als rationale Functionen *einer* Wurzel der Ikosaedergleichung darzustellen. Mit diesen drei Problemen werde ich mich der Reihe nach beschäftigen.

§ 2.

Nähere Betrachtung der Fläche Ψ.

Durch die 60 geraden Vertauschungen der y, — welche fortan allein in Betracht kommen sollen —, werden die Erzeugenden erster Art auf Ψ und ebenso die Erzeugenden zweiter Art in Gruppen von je 60 zusammengefasst. Unter diesen Gruppen muss es jedesmal eine geben — sie soll f_1, bez. f_2 heissen —, die nur aus 12 verschiedenen Linien besteht, eine zweite — H_1 oder H_2 — die nur 20, und eine dritte — T_1 oder T_2 —, die nur 30 verschiedene Linien umfasst. Ich werde hier zuvörderst diese ausgezeichneten Gruppen analytisch bestimmen.

Zu dem Zwecke bemerke man, dass man auf Ψ von vornherein gewisse Gruppen zusammengehöriger Punkte kennt, die weniger als 60 verschiedene Punkte umfassen. Es sind dies:

I. *Zwei Gruppen von je* 12 *Punkten.* Die Coordinaten dieser Punkte sind die fünften Einheitswurzeln. Man erhält die ersten zwölf, wenn man

$$1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon$$

auf gerade Weise vertauscht, und die zweiten zwölf entsprechend aus

$$1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^2.$$

II. *Eine Gruppe von* 20 *Punkten.* Unter α eine dritte Einheitswurzel verstanden, sind die Coordinaten dieser Punkte in wechselnder Anordnung:

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ 0,\ 0.$$

III. *Eine Gruppe von* 30 *Punkten.* Die Coordinaten dieser Punkte sind, abgesehen von der Reihenfolge:

$$1,\ \beta,\ \beta^2,\ \beta^3,\ 0,$$

wo β eine primitive vierte Einheitswurzel bedeutet.

In demselben Sinne, wie die Punkte, gruppiren sich die zugehörigen Tangentialebenen und die Erzeugenden erster Art oder zweiter Art, welche dieselben ausschneiden. Die Tangentialebene eines Punktes y' lautet:

$$\Sigma y_i' y_i = 0.$$

Es entsprechen also den Punkten I, II, III folgende Tangentialebenen (in den hingeschriebenen Gleichungen hat man die y immer vermöge der 60 geraden Vertauschungen umzusetzen):

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{I.} \begin{cases} y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4 = 0, \\ y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4 = 0, \end{cases} \\ \text{II.} \quad y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 = 0, \\ \text{III.} \quad y_0 + \beta y_1 + \beta^2 y_2 + \beta^3 y_3 = 0. \end{cases}$$

Dabei bemerke man, *dass die Erzeugenden, welche die* $2 \cdot 12$ *Ebenen* I *ausschneiden, paarweise identisch sind.* Denn man kann die $2 \cdot 12$ Ebenen in der Weise auf 6 Tetraeder vertheilen, dass immer vier Kanten des Tetraeders der Fläche Ψ angehören. Ein solches Tetraeder bilden z. B. die vier Ebenen:

$$(2)\qquad \begin{cases} p_1 = y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4, \\ p_2 = y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4, \\ p_3 = y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4, \\ p_4 = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4, \end{cases}$$

die in der Weise zusammengehören, dass alle aus einer hervorgehen, indem man statt ε schreibt ε^2, ε^3, ε^4 *). Man hat nämlich vermöge $\Sigma y = 0$:

---

*) Diese vier Ausdrücke, durch die sich die y_ν in der Form darstellen:

$$5\, y_\nu = \varepsilon^\nu p_1 + \varepsilon^{2\nu} p_2 + \varepsilon^{3\nu} p_3 + \varepsilon^{4\nu} p_4,$$

spielen von jeher in der Theorie der Gleichungen fünften Grades eine wichtige Rolle. Ich möchte hier nur daran erinnern, dass es eben diese Ausdrücke sind, welche oben (Abschn. I., § 13., Abschn. II., § 10.) bei der Brioschi'schen Resolvente fünften Grades mit P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnet sind.

$$\Psi = \Sigma y^2 = p_1 p_4 + p_2 p_3 ,$$

und die beiden Erzeugenden von $\Psi = 0$ also, die etwa durch $p_1 = 0$ ausgeschnitten werden, sind auch bez. enthalten in $p_2 = 0$, $p_3 = 0$.

Man erhält daher nur 24 Erzeugende I, dagegen 40 Erzeugende II, 60 Erzeugende III, die sich auf 12, 20, 30 Erzeugende der einen Art und ebensoviele der anderen Art vertheilen. Nun giebt es unter den Linien erster oder zweiter Art keine anderen Gruppen von 12, 20, 30 zusammengehörigen, als f_1, H_1, T_1 bez. f_2, H_2, T_2. *Daher also werden auf $\Psi = 0$ die 24 Geraden $f_1 f_2$, die 40 Geraden $H_1 H_2$, die 60 Geraden $T_1 T_2$ ausgeschnitten durch folgende Aggregate von Tangentenebenen:*

1) *die Geraden $f_1 f_2$ durch die 12 Ebenen:*

(3) $$\prod_{12} (y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4) = 0,$$

oder auch durch die 12 Ebenen:

(3ᵃ) $$\prod_{12} (y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4) = 0;$$

2) *die Geraden $H_1 H_2$ durch die 20 Ebenen:*

(4) $$\prod_{20} (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2) = 0,$$

3) *Die Geraden $T_1 T_2$ durch die 30 Ebenen:*

(5) $$\prod_{30} (y_0 + \beta y_1 + \beta^2 y_2 + \beta^3 y_3) = 0.$$

§ 3.

Berechnung gewisser symmetrischer Functionen.

Sei jetzt die Gleichung fünften Grades mit $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$, wie ich immer schreiben will, in der Gestalt gegeben:

(6) $$y^5 + 5\,\alpha y^2 + 5\,\beta y + \gamma = 0.$$

Ich stelle zunächst die Aufgabe, die unter (3), (3ᵃ), (4), (5) linker Hand vorkommenden symmetrischen Functionen der Wurzeln als Functionen von α, β, γ zu berechnen.

1) Ein Punkt, der auf einer Erzeugenden von f_1 oder f_2 gelegen ist, ist dargestellt durch:

$$y_i = \varrho\,(\varepsilon^i + \lambda\,\varepsilon^{2i}),$$

wo ϱ, λ wei Parameter. Die Gleichung (6), von der diese y_i abhängen, erhält als Coefficienten:

$$\alpha = -\varrho^3 \lambda^2, \quad \beta = -\varrho^4 \lambda, \quad \gamma = -\varrho^5 (1 + \lambda^5),$$

und also ist für sie:

$$\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3 = 0.$$

Daher ist die symmetrische Function (3), *oder, was auf dasselbe hinauskommt*, (3a), *bis auf einen nicht weiter in Betracht kommenden Zahlenfactor gleich dem Ausdrucke*

$$L = \alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3. \tag{7}$$

2) Analoger Weise findet man, dass die zweite symmetrische Function verschwindet, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} y_0 &= \varrho\,(2 + \lambda) \\ y_1 &= \varrho\,(2 + \lambda\alpha) \\ y_2 &= \varrho\,(2 + \lambda\alpha^2) \qquad \left(\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right). \\ y_3 &= \varrho\,(-3 + \sqrt{-15}) \\ y_4 &= \varrho\,(-3 - \sqrt{-15}). \end{aligned}$$

Die betr. Gleichung fünften Grades lautet:

$$y^5 - \varrho^3(80 + \lambda^3)\,y^2 + 6\varrho^4(40 - \lambda^3)\,y - 24\varrho^5(8 + \lambda^3) = 0$$

und *man erhält durch Elimination von* ϱ, λ *den gesuchten Ausdruck:*

$$M = -192\alpha^5\gamma + 640\alpha^4\beta^2 + 40\alpha^2\beta\gamma - 120\alpha\beta^3\gamma - 144\beta^5 + \gamma^4. \tag{8}$$

3) Endlich, um die dritte symmetrische Function zu berechnen, multiplicirt man am einfachsten zunächst die 6 Factoren, welche y_0 in ausgezeichneter Weise enthalten. So kommt, mit Unterdrückung des Index:

$$-5\alpha y^3 + 15\beta y^2 - 25\gamma y - 8x^2.$$

Sodann eliminire man zwischen diesem Ausdrucke und der linken Seite der Gleichung fünften Grades:

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma$$

das y. *So ergiebt sich:*

$$\begin{aligned} N = {} & 1728\alpha^{10} - 7200\alpha^7\beta\gamma + 2080\alpha^6\beta^3 - 576\alpha^5\gamma^3 + 2760\alpha^4\beta^2\gamma^2 \\ & - 9360\alpha^3\beta^4\gamma + 16200\alpha^2\beta^6 - 60\alpha^2\beta\gamma^4 + 180\alpha\beta^3\gamma^3 - 648\beta^5\gamma^2 - \gamma^6. \end{aligned} \tag{9}$$

§ 4.

Die kanonischen Parameter der Erzeugenden.

Ich will den Parameter, durch den die Erzeugenden erster Art dargestellt werden, mit $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, den Parameter für die Erzeugenden zweiter Art mit $\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ bezeichnen. Dieselben sind, damit die Ikosaedergleichung in kanonischer Form erscheint, in der Weise auszusuchen, dass den 12 Linien der Gruppe f_1 und ebenso den 12 Linien der Gruppe f_2 diejenigen 12 Parameterwerthe zukommen, welche Wurzeln der kanonischen Gleichung $f = 0$ sind, d. h.:

$$0,\ \infty,\ (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^\nu,\quad (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^\nu.$$

Man erreicht diess, indem man setzt:

$$(10)\qquad \begin{cases} \eta = -\dfrac{p_1}{p_2} = +\dfrac{p_4}{p_3}, \\ \zeta = +\dfrac{p_1}{p_3} = -\dfrac{p_2}{p_4}, \end{cases}$$

wo p_1, p_2, p_3, p_4 die schon wiederholt genannten Ausdrücke bezeichnen.

In der That

$$p_1 = -\lambda p_2,\quad p_1 = \mu p_3$$

stellen die Gleichungen zweier Ebenenbüschel dar, deren Axen der Fläche Ψ angehören, es ist also $-\frac{p_1}{p_2}$ ein Parameter für die Linien der einen Art, welche die erste heissen soll, $+\frac{p_1}{p_3}$ ein Parameter für die Linien der anderen Art. Trägt man sodann in $-\frac{p_1}{p_2}$ oder $+\frac{p_1}{p_3}$ die Coordinaten der Punkte I (§ 2.) ein, so entstehen genau die eben angegebenen Wurzelwerthe von f. Durch diese Punkte verlaufen aber die 12 Linien f_1 und die 12 Linien f_2, deren Parameter diese Werthe annehmen sollten.

Es ist auch nicht schwer, durch Rechnung zu verificiren, dass sich die Grössen η, ζ durch die 60 Ikosaedersubstitutionen (Abschn. I, Glch. (3)) transformiren, sobald man die y in gerader Weise vertauscht. Man braucht bei der Rechnung nur immer die Relationen $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ anzuwenden. Dabei zeigt sich das sehr bemerkenswerthe, ob auch selbstverständliche Verhalten, dass die linearen Substitutionen, denen η und ζ unterworfen werden, zwar in ihrer Gesammtheit identisch sind, im Einzelnen aber in der Weise unterschieden, dass immer, wo bei η die Wurzel ε steht, bei ζ zu setzen ist ε^2. Denn schreibt man in $\eta = -\frac{p_1}{p_2}$ statt ε ε^2, so kommt $-\frac{p_2}{p_4} = +\frac{p_1}{p_3} = \zeta$.

Ich füge hier zweckmässig *eine Ergänzung zu den Betrachtungen des ersten Abschnittes* ein. Bildet man für die Gleichungen fünften Grades, welche in § 17., 18. daselbst betrachtet wurden:

$$y_\nu = (\varepsilon^\nu \eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)\,R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)\,S$$

die Grössen p_i, so kommt:

$$p_1 = 5\eta_1 R,\qquad p_2 = -5\eta_2 R,$$
$$p_3 = 5\eta_1 S,\qquad p_4 = +5\eta_2 S.$$

Daher wird für diese Gleichungen der eine Parameter $-\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4}$ gleich dem ursprünglichen $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, von dem die Betrachtungen des ersten Abschnittes ausgehen; der zweite Parameter $\frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}$ wird gleich

$\frac{R}{S}$. Desshalb ist, wie in § 18. daselbst ohne Beweis angegeben wurde, $\frac{R}{S}$ eine Function von $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, die sich selbst ikosaedrisch transformirt, wenn $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ den Ikosaedersubstitutionen unterworfen wird, doch so, dass ε durch ε^2 ersetzt ist.

§ 5.

Aufstellung der Ikosaedergleichungen.

Um jetzt die Parameter X_1, X_2 der Gleichungen:

$$(11) \qquad 1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X_1, \qquad 1728\,\frac{H^3(\zeta)}{f^5(\zeta)} = X_2$$

zu berechnen, schlage ich denselben Weg ein, der in Abschnitt II, § 7. zum Ziele führte, indem ich vor allen Dingen die Producte $f(\eta)\,f(\zeta)$, $H(\eta)\,H(\zeta)$, $T(\eta)\,T(\zeta)$ betrachte.

Die Gleichung

$$f(\eta)\cdot f(\zeta) = 0$$

stellt, wenn man sie unter Wegschaffung der Nenner so schreibt:

$$p_2^{12}p_3^{12} f\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)\cdot f\left(+\frac{p_1}{p_3}\right) = f(-p_1, p_2)\cdot f(p_1, p_3) = 0$$

ein Aggregat von 24 Ebenen dar, von denen 12 durch die Axe $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ hindurchgehen und übrigens durch die 12 Erzeugenden (erster Art) der Gruppe f_1, während die 12 anderen durch die Axe $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ hindurchgelegt sind und die 12 Erzeugenden zweiter Art der Gruppe f_2 ausschneiden. Aber dieselben Erzeugenden werden in gleicher Multiplicität auf $\Psi = 0$ ausgeschnitten durch die Fläche

$$p_1^{12} L = 0,$$

wo L den in § 3. berechneten Ausdruck (7) bedeutet. Daher kann man setzen, unter λ einen numerischen Factor verstanden:

$$(12) \qquad f(\eta)\,f(\zeta) = \frac{\lambda p_1^{12}}{p_2^{12}p_3^{12}}\cdot L.$$

Dieselbe Ueberlegung liefert die ferneren Gleichungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} H(\eta)\,H(\zeta) = \dfrac{\mu p_1^{20}}{p_2^{20}p_3^{20}}\,M, \\[2ex] T(\eta)\,T(\zeta) = \dfrac{\nu p_1^{30}}{p_2^{30}p_3^{30}}\,N, \end{cases}$$

wo M, N die Ausdrücke (8), (9) sind.

Um die Zahlenfactoren λ, μ, ν zu bestimmen, betrachte ich besondere Werthe der $y_0 \cdots y_4$. Zunächst setze ich die y gleich 0, 1, i, $-i$, -1. Die Gleichung fünften Grades lautet dann:

$$(y^4-1)\,y=0,$$

und für sie ist also

$$\alpha=0, \quad \beta=-\frac{1}{5}, \quad \gamma=0,$$

und mithin

$$L=\frac{1}{5^3}, \quad M=\frac{144}{5^5}, \quad N=0.$$

Andererseits wird:

$$\eta=\zeta=-i, \quad p_2{}^2=p_3{}^2=(1+2i)\sqrt{5},$$

$$f(-i)=(1-2i)^3, \quad H(-i)=\frac{1}{12}(1-2i)^5, \quad T(-i)=0.$$

Somit kommt:

$$\lambda=5^{12}, \quad \mu=\frac{5^{20}}{144^2}. \tag{14}$$

Um ν zu finden, schreibe ich die betr. Gleichung (13) in der Form:

$$T(-p_1,p_2)\,T(p_1,p_3)=\nu p_1{}^{30}N$$

und setze jetzt die Wurzeln y gleich 1, ε, ε^2, ε^3, ε^4. So ist die Gleichung fünften Grades $y^5-1=0$, also $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=-1$, $N=-1$. Andererseits $p_1=5$, $p_2=0$, $p_3=0$, $T(\pm 5,0)=\frac{5^{30}}{12}$. Also ist:

$$\nu=-\frac{5^{30}}{144}. \tag{15}$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung, unter Weglassung sich weghebender Zahlenfactoren:

$$l=12^{\frac{2}{5}}\cdot L, \quad \text{(Glch. (7))}$$

$$m=12^{-\frac{4}{3}}\cdot M, \quad \text{(Glch. (8))}$$

$$n=-\frac{1}{144}\cdot N, \quad \text{(Glch. (9))}$$

so kommt, durch eine Rechnung, die der in Abschn. II, § 7. angewandten ganz ähnlich ist:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\frac{l^5+m^3-n^2\pm\sqrt{(l^5-m^3-n^2)^2-4l^5m^3}}{2l^5}. \tag{16}$$

§ 6.

Untersuchung der Discriminante.

Die hier auftretende Quadratwurzel lässt sich wieder zerlegen, nämlich in das Product aus der Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung fünften Grades und zweier rationaler Factoren. Indem man etwa $\zeta=+\frac{p_2}{p_3}$ der Reihe nach gleichsetzt den 60 Werthen von $\eta=-\frac{p_1}{p_2}$, findet man folgende Zerlegung:

$$(17)\qquad \sqrt{(l^5+m^3-n^2)^2-4l^5m^3}=kPQ\sqrt{\Delta},$$

wo k ein Zahlenfactor, P und Q die symmetrischen Functionen bedeuten

$$(18)\qquad P=\prod_{20}\left(y_0\cos\frac{2\pi}{5}-y_1\cos\frac{4\pi}{5}\right),$$

$$(19)\qquad Q=\prod_{30}\left(y_0+\cos\frac{2\pi}{5}(y_1+y_2)+\cos\frac{4\pi}{5}(y_3+y_4)\right),$$

und Δ die Discriminante der Gleichung fünften Grades bedeutet, die ich immer von dem vortretenden Zahlenfactor 3125 befreit denke, so dass ich schreibe:

$$(29)\qquad \Delta=108\alpha^5\gamma-135\alpha^4\beta^2+90\alpha^2\beta\gamma^2-320\alpha\beta^3\gamma+256\beta^5+\gamma^4.$$

Die Functionen P, Q findet man (bis auf Zahlenfactoren) gleich:

$$(21)\qquad P=8\alpha^5\gamma+40\alpha^4\beta^2-10\alpha^2\beta\gamma^2-45\alpha\beta^3\gamma+81\beta^5+\gamma^4,$$

$$(22)\qquad Q=64\alpha^{10}+40\alpha^7\beta\gamma-160\alpha^6\beta^3+\alpha^5\gamma^3-5\alpha^4\beta^2\gamma^2+5\alpha^3\beta^4\gamma \\ -25\alpha^2\beta^6-\beta^5\gamma^2,$$

und den dann eintretenden Werth von k durch Vergleich eines einzelnen Gliedes:

$$(23)\qquad k=\frac{1}{12}.$$

§ 7.

Rechnung für die Jerrard'sche Form.

Es hat Interesse, die hier entwickelten Formeln in der übersichtlichen Gestalt zu besitzen, welche sie für die Jerrard'sche Form annehmen. Ich will letztere in der Gestalt schreiben:

$$(24)\qquad y^5-y+\gamma=0,$$

wo also $\alpha=0$, $\beta=-\frac{1}{5}$. Dann kommt:

$$l=\frac{12^{\frac{2}{5}}}{5^3},\quad m=\frac{12^{-\frac{4}{3}}}{5^5}(5^5\gamma^4+144),\quad n=\frac{-\gamma^2}{144}\cdot\frac{648-5^5\gamma^4}{5^5}.$$

Ich schreibe zur Abkürzung

$$(25)\qquad 5^5\gamma^4=\Gamma.$$

So ergiebt sich weiter:

$$l^5+m^3-n^2=\frac{1}{5^{15}\cdot 144^2}\left\{144^3+(\Gamma+144)^3-\Gamma(\Gamma-648)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{5^{15}\cdot 12}\left\{\Gamma^2-9\cdot 23\,\Gamma+3456\right\}.$$

Also:

$$(l^5+m^3-n^2)^2-4l^5m^3=\frac{\Gamma(\Gamma-81)^2(\Gamma-256)}{5^{30}\cdot 144}.$$

In Uebereinstimmung hiermit findet man:

$$\Delta = \frac{\Gamma - 256}{5^5}, \quad P = \frac{\Gamma - 81}{5^5}, \quad Q = -\frac{\gamma^2}{5^5} = -\frac{\sqrt{\Gamma}}{5^5\sqrt{5^5}},$$

und schliesslich kommt

$$(26) \qquad \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\Gamma^2 - 9 \cdot 23\,\Gamma + 3456 \pm \sqrt{\Gamma}\,(\Gamma - 81)\sqrt{\Gamma - 256}}{3456}.$$

§ 8.

Berechnung der Wurzeln y*).

Um nunmehr die Wurzeln y rational durch das η (oder das ζ) auszudrücken, gehe ich von der Formel aus:

$$5y_\nu = \varepsilon^\nu p_1 + \varepsilon^{2\nu} p_2 + \varepsilon^{3\nu} p_3 + \varepsilon^{4\nu} p_4.$$

Es war $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2} = -\frac{p_1}{p_2} = +\frac{p_3}{p_4}$. Man kann daher setzen, unter R, S geeignete Grössen verstanden:

$$y_\nu = (\varepsilon^\nu \eta_1 - \varepsilon^{2\nu} \eta_2) R + (\varepsilon^{3\nu} \eta_1 + \varepsilon^{4\nu} \eta_2) S.$$

Aber in § 17. des ersten Abschnittes haben wir die allgemeinsten fünfwerthigen Functionen von η_1, η_2 construirt, welche diese Gestalt besitzen, und gesehen, dass sie in der Form

$$\lambda \cdot \frac{f W_\nu}{H} + \mu \cdot \frac{\sigma_\nu}{f^2}$$

enthalten sind **).

Daher kann man die Wurzeln y_ν unmittelbar in der Gestalt beschreiben:

$$(27) \qquad y_\nu = \lambda \cdot \frac{f W_\nu}{H} + \mu \cdot \frac{\sigma_\nu}{f^2}.$$

Es sind nur noch die von η freien Constanten λ, μ als rationale Functionen von α, β, γ, $\sqrt{\Delta}$ auszurechnen.

Ich erreiche diess durch Coefficientenvergleichung, indem ich umgekehrt $\frac{f W_\nu}{H}$ und $\frac{\sigma_\nu}{f^2}$ als rationale Functionen von y_ν darstelle. Setzt man (siehe § 16., 17. des ersten Abschnittes):

---

*) Vergl. hierzu die Darstellung bei Gordan in der wiederholt citirten Note (Erlanger Berichte, Juli 1877). Es sind dort die Rechnungen, welche ich im Texte ausführe, durch systematischen Formenbildungsprocess ersetzt.

**) Geometrisch: Alle Punkte, deren Coordinaten diese Form besitzen, gehören der Erzeugenden erster Art an, welche durch den gesuchten Punkt y hindurchläuft.

$$(28)\qquad \frac{t_\nu^2}{f} = \xi_\nu,$$

so ist

$$(29)\qquad \frac{f\,W_\nu}{12^2 H} = \frac{1}{\xi_\nu - 3}, \quad \frac{\sigma_\nu}{f^2} = \xi_\nu^2 - 7\,\xi_\nu + 24.$$

Ich werde daher zunächst ξ_ν rational durch y_ν ausdrücken.

§ 9.

Die Function $\xi_\nu = \frac{t_\nu^2}{f}$.

Zu dem Zwecke stelle ich noch einmal ähnliche Ueberlegungen an, wie in § 7. des vorigen und in § 5. des gegenwärtigen Abschnittes. Ich betrachte vor allen Dingen die Producte:

$$f(\eta)\,f(\zeta), \quad t_\nu(\eta)\,t_\nu(\zeta), \quad \frac{H(\eta)\cdot H(\zeta)}{W_1(\eta)\cdot W_1(\zeta)}.$$

Für das erstere fanden wir bereits

$$f(\eta)\,f(\zeta) = \frac{5^{12}p_1^{12}}{p_2^{12}p_3^{12}}(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3).$$

Für die anderen beiden berechnet sich in ähnlicher Weise, indem wir unter den Factoren der Producte (5) und (4) die geeigneten zusammenfassen:

$$(30)\qquad t_\nu(\eta)\,t_\nu(\zeta) = \frac{5^6 p_1^6}{p_2^6 p_3^6}(-\alpha y_\nu^3 + 3\beta y_\nu^2 - \gamma y_\nu + 8\alpha^2),$$

$$(31)\qquad \frac{12^4 H(\eta)\,H(\zeta)}{W_\nu(\eta)\,W_\nu(\zeta)} = \frac{5^{12}p_1^{12}}{p_2^{12}p_3^{12}}\Big(-(\alpha\gamma - 3\beta^2)\,y_\nu^4 + (8\alpha^3 - 3\beta\gamma)y_\nu^3$$
$$- (8\alpha^2\beta - \gamma^2)y_\nu^2 + (3\alpha^2\gamma - 9\alpha\beta^2)\,y_\nu$$
$$+ (40\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma - 9\beta^3)\Big).$$

Nun ist das gesuchte ξ_ν Wurzel der folgenden quadratischen Gleichung, in der ich die Indices ν unterdrückt und die Buchstaben η, ζ durch 1, 2 ersetzt habe:

$$(32)\qquad f_1 f_2\cdot\xi^2 - (t_1^2 f_2 + t_2^2 f_1)\,\xi + t_1^2 t_2^2 = 0.$$

Benutzt man hier, dass

$$12^4\,\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2} = (t_1^2 - 3f_1)\,(t_2^2 - 3f_1),$$

so folgt:

$$(33)\qquad \xi = \frac{\left(t_1^2 t_2^2 + 9f_1 f_2 - 12^4\,\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}\right) \pm \sqrt{\left(t_1^2 t_2^2 + 9f_1 f_2 - 12^4\,\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}\right)^2 - 36 t_1^2 t_2^2 f_1 f_2}}{6 f_1 f_2}.$$

Die Quadratwurzel zerlegt sich wieder. Die beiden Werthe $\frac{t_1^2}{f_1} = \frac{t_\nu^2(\eta)}{f(\eta)}$ und $\frac{t_2^2}{f_2} = \frac{t_\nu^2(\xi)}{f(\xi)}$ werden einander gleich, wenn η aus ξ hervorgeht durch eine derjenigen 12 Ikosaedersubstitutionen, welche das Oktaeder t_ν ungeändert lassen. Ich habe diese Substitutionen in § 14. des ersten Abschnittes für das Oktaeder t_0 angegeben. Man findet, dass zunächst als Factor auftritt das Product der Quadrate der Differenzen der vier von y_ν verschiedenen y. Dasselbe lautet, nachdem man es durch 125 dividirt hat:

$$(34)\quad \Delta_\nu = \{(-6\alpha\gamma + 48\beta^2)y_\nu^4 + (-27\alpha^3 - 8\beta\gamma)y_\nu^3 + (27\alpha^2\beta + \gamma^2)y_\nu^2 + (-27\alpha^2\gamma + 216\alpha\beta^2)y_\nu + (-135\alpha^4 - 72\alpha\beta\gamma + 256\beta^3)\}.$$

Ausserdem tritt quadratisch das Product der 6 Ebenen auf:

$$y_\nu + \cos\frac{2\pi}{5}(y_i + y_k) + \cos\frac{4\pi}{5}(y_h + y_l)$$

(wo für i, k, h, l die von ν verschiedenen Indices zu setzen sind).

Dieses Product ist bis auf einen Zahlenfactor gleich:

$$(35)\qquad \alpha y_\nu^3 + \beta y_\nu^2 + \alpha^2.$$

So wird der Werth der Quadratwurzel einfach:

$$(\alpha y_\nu^3 + \beta y_\nu^2 + \alpha^2)\sqrt{\Delta_\nu}.$$

Es ist zweckmässig, statt Δ_ν die (durch 3125 dividirte) Discriminante der Gleichung fünften Grades, Δ, (Glch. (20)), einzuführen, die mit Δ_ν durch die Formel verknüpft ist:

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm(y_\nu^4 + 2\alpha y_\nu + \beta)\sqrt{\Delta_\nu}.$$

So ergiebt sich, wenn wir in die Formel (33) jetzt die Werthe von $t_1 t_2$, $f_1 f_2$, $\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}$ eintragen:

$$(36)\quad \xi_\nu = \frac{(\alpha\gamma + 2\beta^2)y_\nu^4 + (\alpha^3 - \beta\gamma)y_\nu^3 - 5\alpha^2\beta y_\nu^2 + (4\alpha^2\gamma + 13\alpha\beta^2)y_\nu + (11\alpha^4 + 9\alpha\beta\gamma) \pm D}{2(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3)}.$$

wo D den Ausdruck bedeutet:

$$(37)\qquad D = \frac{(y^4 + 2\alpha y + \beta)(\alpha y^3 + \beta y^2 + \alpha^2)\Delta_\nu}{\sqrt{\Delta}}.$$

Setzt man hier $\gamma = 0$, $y_\nu = 0$, also

$$\xi_\nu = \frac{11\alpha^4 \pm \alpha^2\sqrt{-135\alpha^4 + 256\beta^3}}{2(\alpha^4 - \beta^3)}$$

so erhält man nach der Formel (vergl. Annalen XII, p. 169):

$$1728(1 - X) = \xi(\xi^2 - 10\xi + 45)^2$$

für X einen Ausdruck, dessen irrationaler Bestandtheil dieser ist:

$$\pm\sqrt{\frac{-135\,\alpha^4+256\,\beta^3}{2\cdot 1728\,(\alpha^4-\beta^3)}}\,(2560\,\alpha^{14}\beta^2-1216\,\alpha^{10}\beta^5-13960\,\alpha^6\beta^8-2025\,\alpha^2\beta^{11})\,.$$

Derselbe Ausdruck ergiebt sich mit demselben Vorzeichen, wenn man in die allgemeine Formel (16) resp. (17) $\gamma=0$ setzt. *Es folgt daraus, dass das obere und untere Vorzeichen der Quadratwurzel aus der Discriminante, sowie dasselbe hier in* (37) *auftritt, dem oberen und unteren Vorzeichen derselben Quadratwurzel in* (17) *entspricht.*

§ 10.

Fertige Formeln für die y_ν.

Trägt man diesen Werth von ξ_ν ein in die Formeln (29) des § 8., so erhält man nach ziemlich langer Rechnung, unter L, M die früher so bezeichneten Grössen verstanden:

$$(38)\quad \frac{fW_\nu}{H}=\frac{\pm 72}{M\sqrt{\Delta}}\Big\{\Big[y_\nu^4\,(144\,\alpha^7\gamma-720\,\alpha^6\beta^2+125\,\alpha^4\beta\gamma^2-595\,\alpha^3\beta^3\gamma$$
$$+808\,\alpha^2\beta^5+3\,\alpha^2\gamma^4-15\,\alpha\beta^2\gamma^3+40\,\beta^4\gamma^2)$$
$$+y_\nu^3\,(24\alpha^6\beta\gamma+240\alpha^5\beta^3+10\alpha^4\gamma^3+25\alpha^3\beta^2\gamma^2-370\alpha^2\beta^4\gamma$$
$$+288\,\alpha\beta^6+3\,\alpha\beta\gamma^4-10\beta^3\gamma^3)$$
$$+y_\nu^2\,(-48\,\alpha^6\gamma^2+208\,\alpha^5\beta^2\gamma-320\,\alpha^4\beta^4-55\,\alpha^3\beta\gamma^3$$
$$+165\alpha^2\beta^3\gamma^2+224\alpha\beta^5\gamma-\alpha\gamma^5-384\beta^7+\beta^2\gamma^4$$
$$+y_\nu\,(1296\,\alpha^8\gamma-4320\,\alpha^7\beta^2+1017\,\alpha^5\beta\gamma^2-5075\alpha^4\beta^3\gamma$$
$$+6102\,\alpha^3\beta^5+17\,\alpha^3\gamma^4-130\,\alpha^2\beta^2\gamma^3+350\,\alpha\beta^4\gamma$$
$$-96\,\beta^6\gamma-\beta\gamma^5)$$
$$+\quad(648\,\alpha^7\beta\gamma-2160\,\alpha^6\beta^3+30\,\alpha^5\gamma^3+575\,\alpha^4\beta^2\gamma^2$$
$$-3490\,\alpha^3\beta^4\gamma+21\,\alpha^2\beta\gamma^4+4096\alpha^2\beta^6-90\alpha\beta^3\gamma$$
$$+160\beta^5\gamma^2)\Big]\,.$$

$$\mp\sqrt{\Delta}\;\Big[y_\nu^4\,(-16\alpha^4\beta-3\,\alpha^2\gamma^2+7\,\alpha\beta^2\gamma+24\,\beta^4)$$
$$+y_\nu^3\,(-8\,\alpha^4\gamma+48\,\alpha^3\beta^2-\alpha\beta\gamma^2-6\,\beta^3\gamma)$$
$$+y_\nu^2\,(16\,\alpha^3\beta\gamma-64\,\alpha^2\beta^3+\alpha\gamma^3-\beta^2\gamma^2)$$
$$+y_\nu\,\;(-19\,\alpha^3\gamma^2+11\,\alpha^2\beta^2\gamma+162\,\alpha\beta^4-\beta\gamma^3)$$
$$+\quad(-24\alpha^5\gamma+80\alpha^4\beta^2-15\alpha^2\beta\gamma^2+10\alpha\beta^3\gamma+96\beta^5)\Big]\Big\}$$

$$=\Sigma\,\Big(\pm\frac{A_i}{\sqrt{\Delta}}+B_i\Big)\,y_\nu^{\,i}.$$

$$(39)\quad \frac{\sigma_\nu}{f^2}=\frac{\pm 1}{2L^2\sqrt{\Delta}}\Big\{\big[y_\nu^4(-216\alpha^{10}-87\alpha^7\beta\gamma+265\alpha^6\beta^3-9\alpha^5\gamma^3+35\alpha^4\beta^2\gamma^2$$
$$-465\alpha^3\beta^4\gamma+556\alpha^2\beta^6-4\alpha^2\beta\gamma^4+5\alpha\beta^3\gamma^3+4\beta^5\gamma^2)$$
$$+y_\nu^3(108\alpha^9\beta+66\alpha^7\gamma^2+122\alpha^6\beta^2\gamma-327\alpha^5\beta^4+49\alpha^4\beta\gamma^3$$
$$-75\alpha^3\beta^3\gamma^2+119\alpha^2\beta^5\gamma+\alpha^2\gamma^5-144\alpha\beta^7$$
$$-2\alpha\beta^2\gamma^4-\beta^4\gamma^3)$$
$$+y_\nu^2(72\alpha^9\gamma-144\alpha^8\beta^2-59\alpha^6\beta\gamma^2-251\alpha^5\beta^3\gamma+436\alpha^4\beta^5$$
$$+3\alpha^4\gamma^4-77\alpha^3\beta^2\gamma^3+255\alpha^2\beta^4\gamma^2-344\alpha\beta^6\gamma$$
$$+192\beta^8+\beta^3\gamma^4)$$
$$+y_\nu(-1080\alpha^{11}-1071\alpha^8\beta\gamma+2147\alpha^7\beta^3-31\alpha^6\gamma^3$$
$$-432\alpha^5\beta^2\gamma^2-55\alpha^4\beta^4\gamma+869\alpha^3\beta^6-15\alpha^3\beta\gamma^4$$
$$-104\alpha^2\beta^3\gamma^3+349\alpha\beta^5\gamma^2-240\beta^7\gamma-\beta^2\gamma^5$$
$$+(-540\alpha^{10}\beta+198\alpha^8\gamma^2+18\alpha^7\beta^2\gamma+79\alpha^6\beta^4$$
$$+111\alpha^5\beta\gamma^3-85\alpha^4\beta^3\gamma^2-1503\alpha^3\beta^5\gamma+3\alpha^3\gamma^5$$
$$+1792\alpha^2\beta^7-22\alpha^2\beta^2\gamma^4+17\alpha\beta^4\gamma^3+16\beta^6\gamma^2)\big]$$
$$\pm\sqrt{\Delta}\big[y_\nu^4(9\alpha^5\gamma+43\alpha^4\beta^2+4\alpha^2\beta\gamma^2-11\alpha\beta^3\gamma+12\beta^5)$$
$$+y_\nu^3(-12\alpha^7-4\alpha^4\beta\gamma-21\alpha^3\beta^3-\alpha^2\gamma^3+2\alpha\beta^2\gamma^2-3\beta^4\gamma)$$
$$+y_\nu^2(16\alpha^6\beta-3\alpha^4\gamma^2-9\alpha^3\beta^2\gamma+28\alpha^2\beta^4+\beta^3\gamma^2)$$
$$+y_\nu(29\alpha^6\gamma+185\alpha^5\beta^2+11\alpha^3\beta\gamma^2+\alpha^2\beta^3\gamma-9\alpha\beta^5-\beta^2\gamma^3)$$
$$+(-36\alpha^8+24\alpha^5\beta\gamma+109\alpha^4\beta^3-3\alpha^3\gamma^3+22\alpha^2\beta^2\gamma^2$$
$$-53\alpha\beta^4\gamma-48\beta^6)\big]\Big\},$$
$$=\Sigma\Big(\pm\frac{A_i'}{\sqrt{\Delta}}+B_i'\Big)y_\nu^i.$$

In diesen beiden Ausdrücken sind nun in der That die Coefficienten von y_ν^4, y_ν^3, y_ν^2, y_ν^0 proportionirt. Man erhält daher übereinstimmend für $i=4, 3, 2, 0$:

$$(40)\quad y_\nu=\pm\sqrt{\Delta}\,\frac{(A_i'\pm B_i'\sqrt{\Delta})\cdot\dfrac{fW_\nu}{H^2}-(A_i\pm B_i\sqrt{\Delta})\cdot\dfrac{\sigma_\nu}{f^2}}{[(A_1A_i'-A_1'A_i)+(B_1B_i'-B_1'B_i)]\pm\sqrt{\Delta}[(A_1B_i'-A_1'B_i)+(A_i'B_1-A_1B_i')]}.$$

§ 11.

Die allgemeinen Gleichungen fünften Grades.

Um eine beliebige Gleichung fünften Grades zu lösen, bietet sich jetzt naturgemäss der Weg, dieselbe durch rationale Transformation in eine solche, bei der $\Sigma y=0$, $\Sigma y^2=0$, zu verwandeln. Dies kann auf sehr mannigfache Weise geschehen, aber jedesmal benöthigt man eine Quadratwurzel, welche keinen Einfluss hat auf die Zahl der Substitutionen der Galois'schen Gruppe der Gleichung. Das Gleiche galt von der Quadratwurzel, die nöthig war, um eine allgemeine Jacobi'sche Gleichung sechsten Grades auf eine Ikosaedergleichung zu reduciren (Abschnitt II, § 9.), und in der That zeigt man hier genau wie damals: *Es giebt bei der allgemeinen Gleichung keine rationale Function der Wurzeln, welche einer Ikosaedergleichung genügt.*

Aus dieser negativen Proposition ergiebt sich nun auch der Beweis eines Satzes, den Kronecker 1861 ohne Beweis mittheilte und den man etwa so formuliren kann: *Es ist unmöglich, bei durchaus willkürlichen* $y_0 \cdots y_4$ *eine rationale Function* $\varphi(y)$ *zu finden, die von einer Gleichung abhängt, in der (wie in der Ikosaedergleichung) nur ein Parameter auftritt.* Wenn nämlich eine solche Resolvente existirte, so könnte man sie auf rationalem Wege in eine Ikosaedergleichung verwandeln, wie folgende Betrachtung zeigt.

Die verschiedenen Werthe, die φ bei Permutation der y annimmt, seien in bestimmter Anordnung:

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n.$$

Vertauscht man die y durch die 60 (hier immer allein gemeinten) geraden Permutationen, so erscheinen die $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ in anderer Anordnung wieder, und man betrachte die 60 *Anordnungen* der φ, welche auf diese Weise entstehen. Da die φ nur von einem Parameter abhängen, so durchlaufen die Anordnungen $\varphi_1 \cdots \varphi_n$, wenn sich die y beliebig ändern, ein irreducibeles Werthgebiet von nur *einer* Dimension. Dieses Werthgebiet ist rational durch einen Parameter darstellbar. Denn man kann die y jedenfalls solchen rationalen Functionen einer Grösse λ gleichsetzen, dass die φ nicht constant bleiben; dann durchlaufen die $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ als rationale Functionen von λ das ganze ihnen gestattete Werthgebiet. Nun kann man statt λ allemal (wenn es nöthig sein sollte) einen anderen Parameter μ in der Weise einführen, dass die φ nicht nur rationale Functionen des μ sind, sondern auch μ eine rationale Function der φ und also der y (vergl. einen Aufsatz von Lüroth im IX. Bd. der Math. Annalen p. 163). *Eine geeignete lineare Function dieses* μ, $\frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}$ *muss dann von einer Ikosaedergleichung abhängen.* Denn bei Permutation der y verwandelt sich das μ in ein μ', welches eindeutig dem μ zugeordnet ist, und umgekehrt entspricht dem μ' nur das eine μ, wie man sieht, wenn man die Permutation der y rückgängig macht. Es hängen also μ und μ' von einander *linear* ab, und also sind, da keine der 60 Permutationen der y eine Periode > 5 besitzt, die Vorbedingungen des § 4. des ersten Abschnittes gegeben. Es ist das derselbe Schluss, der in mehr particulären Fällen in § 9. des zweiten Abschnittes und in § 1. dieses Abschnittes bereits angewandt wurde.

Zugleich sieht man, dass ein Satz ähnlich dem nun für Gleichungen fünften Grades bewiesenen bei Gleichungen höheren Grades aus einem viel einfacheren Grunde gilt. Denn es giebt keine endlichen Gruppen linearer Substitutionen *einer* Veränderlichen, welche den Vertauschungen von sechs oder mehr Dingen entsprächen, und darum kann bei den allgemeinen Gleichungen sechsten und höheren Grades von einer Resolvente, die nur von einem Parameter abhängt, von vorneherein nicht die Rede sein.

München, den 20. August 1877.