Sur la distribution des tangentes doubles sur les divers systèmes de coniques ayant un contact quadruple avec une courbe du quatrième ordre.

Par C. Crone à Copenhague.

Le lecteur trouvera dans les „Higher plane curves" par M. Salmon, Dublin 1873, p. 214 et suiv., tous les renseignements sur les divers systèmes de coniques ayant avec une quartique un contact quadruple nécessaires pour comprendre le mémoire suivant. Notre article ne donne qu'une explication très courte sur la distribution des coniques composées soit de 2 tangentes doubles réelles soit de 2 tangentes doubles imaginaires conjuguées sur les divers systèmes, suivie d'une recherche sur les nombres des systèmes contenant des coniques réelles pour les différentes formes des quartiques. Un développement de la même matière avec des démonstrations plus détaillées a été donné dans le journal danois „Tidsskrift for Mathematik" cah. V, 1875. Quant aux différentes formes de la quartique ordinaire, et à la situation des branches par rapport aux tangentes doubles, on est renvoyé à un mémoire de M. le docteur H. G. Zeuthen dans les „Mathematische Annalen" t. VII.

I.

Il suffira d'examiner la distribution des tangentes doubles réelles sur les divers systèmes pour la quartique composée de 4 branches réelles; car en prenant celle-ci pour point de départ on pourra obtenir toute quartique ordinaire à 3 ou 2 branches, si d'abord on reserre 1 ou 2 branches à des points isolés et puis les fait disparaître; les coniques composées des tangentes doubles qui ne sont pas devenues imaginaires seront alors distribuées sur les systèmes comme auparavant. Quant aux quartiques à 1 ou 0 branches réelles et aux quartiques annulaires, les 4 tangentes doubles de première espèce qui sont leurs seules tangentes doubles réelles forment de 3 manières différentes 2 coniques appartenant au même système.

Comme toutes les coniques réelles d'un système se présentent pendant la variation continue d'une conique variable à l'équation:

$$l^2 U + 2 l V + W = 0,$$

$U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ étant les équations de 3 coniques, l un paramètre variable, on comprend immédiatement les lemmes suivants:

La conique variable d'un système décompose le plan en deux parties, et les branches de la courbe en deux groupes dont un situé dans chaque partie; ces deux groupes doivent rester les mêmes pendant toute la variation de la conique. Quand pendant la variation la conique variable devient un couple de droites c'est à dire si elle se décompose en deux tangentes doubles réelles, les branches qui étaient auparavant au dedans d'elle seront au dehors après la décomposition et vice-versa.

Les points de contact de la conique variable avec la courbe ne pourront devenir imaginaires qu'en se confondant deux à deux. Le nombre de points de contact avec la même branche doit donc être constamment pair pendant toute la variation, ou constamment impair.

On en conclut:

Tous les couples de droites d'un système décomposent les branches de la courbe de la même manière en deux groupes.

Les nombres de points de contact d'une même branche avec les différents couples de droites d'un système sont ou tous pairs, ou tous impairs.

2 tangentes communes à 2 branches qui renferment ces branches dans une même paire d'angles opposés s'appelleront tangentes communes *de même genre*; elles renferment nécessairement les autres branches de la courbe dans l'autre paire d'angles opposés. L'une de ces tangentes de même genre est „permutée" contre l'autre, quand en se tournant autour de leur point d'intersection elle passe sur les deux branches dont elle est une tangente commune, mais sur aucune autre branche de la courbe. 2 tangentes communes à 2 branches qui renferment ces branches dans différentes paires d'angles opposés s'appelleront tangentes communes *de différent genre*; l'une pourra être permutée contre l'autre, quand en touchant toujours l'une des deux branches elle passe sur l'autre. Les tangentes seront dites *opposées* à l'égard de cette dernière branche. On voit bien, que deux tangentes communes de genre différent ne renferment que la branche, à l'égard de laquelle elles sont opposées, dans l'une paire d'angles opposés, tandis que toutes les autres branches de la courbe sont situées dans l'autre. Le mémoire de M. H. G. Zeuthen dans „Mathematische Annalen" t. VII. démontre, que 2 tangentes doubles quelconques de première espèce d'une quartique à 4 branches réelles renferment toujours 2 branches dans chaque paire d'angles opposés; de deux telles tangentes l'une pourra donc être permutée contre l'autre, quand en se tournant autour de leur point d'intersection elle passe sur deux branches de la courbe.

II.

On pourra maintenant, en s'appuyant à la différente situation des branches par rapport aux tangentes doubles, diviser les systèmes d'une quartique à 4 branches réelles en 4 classes:

1. La conique variable a un nombre pair de points de contact avec chaque branche qu'elle touche, et 2 branches sont au dedans, 2 au dehors de sa concavité. Un tel système ne peut contenir d'autres coniques composées de deux tangentes doubles que les 4 coniques dont chacune est composée de deux tangentes communes de même genre à 2 branches toutes les deux situées du même côté de la conique variable et les 2 coniques dont chacune est composée de 2 tangentes doubles de première espèce. Comme le système doit contenir 6 coniques composées de 2 tangentes doubles, elle contiendra toutes les coniques nommées. Il y a 3 systèmes dans cette classe, car on peut de 3 manières différentes décomposer les 4 branches en deux groupes, chacun contenant deux branches.

2. La conique variable a un nombre pair de points de contact avec chaque branche qu'elle touche, et 1 branche est au dedans, 3 branches sont au dehors de sa concavité, ou vice versa. Tous les couples de droites d'un tel système sont composés de deux tangentes doubles de différent genre opposées à l'égard de la branche qui est séparée des 3 autres branches de la courbe par la conique variable. Toutes les 6 couples de droites qu'on peut composer de cette manière appartiennent donc au système. Il y a en tout 4 systèmes dans cette classe.

Note. Il n'existe pas des systèmes dont la conique variable a un nombre pair de points de contact avec chaque branche qu'elle touche, pendant qu'elle renferme toutes les 4 branches dans l'une des parties dans lesquelles elle décompose le plan, car nulle conique composée de deux tangentes doubles réelles ne pourra satisfaire à ces deux conditions.

3. La conique variable a un nombre impair de points de contact avec deux branches différentes. G_1 et G_2 étant ces deux branches, et G_3 et G_4 les deux autres branches de la courbe, le système pourra contenir 1 conique composée d'une tangente commune de $G_1 G_3$ et d'une tangente commune de $G_2 G_3$, et 1 conique composée des deux tangentes communes de $G_1 G_3$ et de $G_2 G_3$ opposées aux deux premières à l'égard de G_3; car en permutant les tangentes doubles de la première conique contre celles de la seconde on ne changera pas la distribution des branches sur les deux paires d'angles opposées, ce qui aura lieu, si d'une manière différente on permute les tangentes doubles du première couple de droites contre d'autres tangentes communes de $G_1 G_3$ et de $G_2 G_3$. Le système pourra de même contenir deux coniques dont chacune est composée d'une tangente commune de $G_1 G_4$ et d'une tangente commune de $G_2 G_4$. Le système pourra enfin contenir des coniques composées d'une tangente double de première espèce et d'une tangente commune de $G_1 G_2$; si dans une telle conique on permute la tangente double de première espèce contre une autre de même espèce,

deux branches passeront dans une autre paire d'angles opposés, et il faut donc permuter la tangente commune de $G_1 G_2$ contre la tangente commune de même genre, ce qui fera passer encore deux branches dans une autre paire d'angles opposés, afin que la distribution des branches sur les deux paires d'angles opposés ne soit pas changée. Le système ne contient donc que 2 coniques composées de cette manière. Les 6 couples de droites énumerés sont les seuls qui peuvent appartenir au système, et ils y appartiennent tous. Il y a 8 systèmes dont la conique variable a un nombre impair de points de contact et avec G_1 et avec G_2, car on pourra de 8 manières différentes diviser les 4 branches de la courbe en deux groupes, et à chaque division répondra un système dont la conique variable (et chacun des couples de droites) sépare les deux groupes. On peut choisir les branches G_1 et G_2 de 6 manières différentes; il y a donc 48 systèmes dans cette classe.

4 La conique variable a 1 point de contact avec chacune des 4 branches. Si un tel système contient une conique composée d'une tangente commune de $G_1 G_2$ et d'une tangente commune de $G_3 G_1$, on aura un autre couple de droites, qui peut appartenir au système en permutant les deux tangentes communes contre deux autres de même genre, car par cette permutation on fera passer chacune des 4 branches dans une autre paire d'angles opposés, tandis que toute autre permutation changera la distribution des branches sur les deux paires d'angles opposés. Le système pourra de même contenir 2 coniques composées d'une tangente commune de $G_1 G_3$ et d'une tangente commune de $G_2 G_1$, et 2 coniques composées d'une tangente commune de $G_1 G_4$ et d'une tangente commune de $G_2 G_3$. Ces 6 couples de droites sont les seules qui peuvent appartenir au système; ils y appartiennent donc tous. Il y a 8 systèmes dans cette classe.

Si l'on se souvient de ce qu'une tangente commune à 2 branches devient imaginaire, quand l'une des deux branches disparaît, on comprendra facilement l'énumération suivante des systèmes contenant des coniques composées de deux tangentes doubles réelles à une quartique ordinaire à 3 branches réelles:

3 systèmes de la première classe contenant chacun 4 couples de droites réels, dont 2 composés de 2 tangentes communes de même genre, et 2 composés de 2 tangentes doubles de première espèce.

3 systèmes de la seconde classe contenant chacun 4 couples de droites réels.

24 systèmes de la troisième classe contenant chacun 4 couples de droites réels, dont 2 composés de 2 tangentes communes à 2 paires de branches différentes, et 2 composés d'une tangente double de première et d'une de seconde espèce.

On voit de même, que pour les quartiques à deux branches réelles les systèmes contenant des coniques composées de deux tangentes doubles réelles seront:

3 systèmes de la première classe: 1 système contenant 4 couples de droites réels, dont 2 composés de tangentes communes de même genre, et 2 composés de tangentes doubles de première espèce; 2 systèmes contenant chacun 2 couples de droites réels composés de 2 tangentes doubles de première espèce.

2 systèmes de la seconde classe contenant chacun 2 couples de droites réels composés de 2 tangentes communes de différent genre.

8 systèmes de la troisième classe contenant chacun 2 couples de droites réels composés d'une tangente double de première et d'une tangente double de seconde espèce.

Les quartiques composées d'une seule branche, les quartiques qui n'ont aucun point réel et les quartiques annulaires n'ont d'autres tangentes doubles réelles que celles de première espèce. Ces tangentes déterminent 3 systèmes, dont chacun contient deux coniques composées de deux tangentes doubles réelles.

III.

Toute quartique representée par une équation réelle et contenant des branches réelles décompose le plan en plusieurs parties: la partie contenant les tangentes doubles réelles et toute partie laquelle on ne pourra atteindre, en sortant d'un point d'une tangente double réelle, qu'en passant la courbe un nombre pair de fois sera dite située *au dehors* de la courbe; toutes les autres parties du plan sont *au dedans* de la courbe. $V^2 - UW = 0$ *) étant l'équation de la courbe, on voit, que le premier membre de cette équation a le même signe pour toutes valeurs des coordonnées correspondantes aux points au dehors de la courbe, mais le signe contraire pour toutes valeurs correspondantes aux points au-dedans de la courbe. Soit:

$$l^2 U + 2 l V + W = 0$$

l'équation commune de toutes les coniques d'un système. Par un point quelconque du plan passeront évidemment deux coniques du système correspondantes aux valeurs

$$\frac{-V \pm \sqrt{V^2 - UW}}{U}$$

de l, où les coordonnées du point sont substituées dans V, U et W. Ces valeurs de l sont réelles ou imaginaires selon que $V^2 - UW \gtrless 0$;

*) $l^2 U + 2 l V + W = 0$ étant l'équation de la conique variable d'un système, l'équation de la courbe aura cette forme.

donc les coniques réelles du système sont toutes au dehors ou toutes au dedans de la courbe, et on appelle selon leur situation le système *extérieur* ou *intérieur*. Un système intérieur a des coniques réelles dans toutes les parties du plan au dedans de la courbe. Ce ne sont que les systèmes extérieurs qui contiennent des tangentes doubles réelles; toutes les deux espèces de systèmes peuvent contenir des coniques composées de deux tangentes doubles imaginaires conjuguées. Les coniques ainsi composées ont des équations de la forme

$$L^2 + M^2 = 0,$$

$L = 0$ et $M = 0$ étant les équations de deux droites réelles, et leur partie réelle est réduite à un seul point. Dans ce qui suit, nous les appellerons *points isolés extérieurs* ou *intérieurs*, selon que le système, auquel ils appartiennent, est extérieur ou intérieur.

Si l'on fait varier l d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, l'équation

$$l^2 U + 2\,l\,V + W = 0$$

représentera toutes les coniques réelles c'est à dire toutes les coniques à équation réelle du système; quand l prend une valeur corréspondante à un point isolé, il est évident, que là on passe de coniques contenant des points réels à des coniques qui n'ont aucun point réel. Comme une telle transition doit nécessairement s'accomplir un nombre pair de fois pendant la variation de l, le système doit contenir un nombre pair de points isolés.

Soient l_1 et l_2 deux valeurs de l corréspondantes à deux points isolés telles, que pour toutes les valeurs de $l > l_1$ et $< l_2$ on a des coniques à points réels, dont aucune n'est réduite à un point isolé. Les coniques remplissent une certaine partie A du plan, nécessairement comprise dans une des parties, dans lesquelles le plan est décomposé par la courbe; car les coniques se succèdent consécutivement, et aucune d'eux ne peut couper la courbe. La limitation de A doit être touchée dans chaque point par une des coniques; elle est donc formée ou par l'enveloppe des coniques c'est à dire par la quartique, ou par quelques-unes des coniques. Supposons qu'un arc d'une conique K corréspondante à $l = l'$, $l_1 < l' < l_2$ forme une partie de la limitation, et choisissons un point p au dehors de A, mais dans la même partie du plan limitée par la quartique que A. On aura deux valeurs réelles de l corréspondantesà p, dont on pourra toujours rapprocher l'une de l'autre autant qu'on voudra, en choisissant p suffisament près de K; on pourra donc toujours avoir cette valeur $> l_1$ et $< l_2$. Il faut donc, que toute la limitation soit formée par la quartique. Si celle-ci ne contient aucun point réel, les coniques, dont le paramètre l est $> l_1$ et $< l_2$, doivent remplir tout le plan.

Si les coniques corréspondantes à des valeurs de $l > l_1$ et $< l_2$ sont situées au dedans d'une des branches de la quartique, elles doivent remplir tout l'intérieur de cette branche. On voit facilement, que deux coniques doivent passer par un point quelconque p au dedans de la branche, car p est évidemment situé au dedans de quelques unes des coniques, parce que celles-ci remplissent tout l'intérieur de la branche, mais au dehors des deux points isolés, corréspondants à $l = l_1$ et à $l = l_2$. Il s'ensuit, que la conique variable, dont l'équation est:

$$l^2 U + 2 l V + W = 0,$$

doit passer deux fois par p. Comme aucune autre conique du système peut passer par p, il faut, que toutes les coniques corréspondantes à des valeurs de $l < l_1$ ou $> l_2$ soient situées au dehors de la branche. On voit donc, qu'un système ne peut avoir plus de deux points isolés au dedans d'une des branches de la courbe.

Si un système a des coniques réelles au dedans d'une branche G qui n'enferme aucune autre branche de la courbe on peut démontrer, qu'il doit se trouver deux points isolés parmi ces coniques. Chacune des coniques réelles doit avoir 4, 2 ou 0 points réels de contact avec G. Une conique K ayant 4 points réels de contact a, b, c, d décompose l'intérieur de la branche en 5 parties: l'intérieur de K et 4 segments limités par un arc de K et par un arc de G. La conique consécutive K', ne pouvant avoir plus de 4 points d'intersection avec K, ne peut traverser que 2 des 4 segments, et ses points de contact $a'\, b'\, c'\, d'$, étant consécutifs à $a\, b\, c\, d$, doivent être ainsi situés, que a' et b' p. ex. se trouvent sur l'arc $a\, b$, et c' et d' sur l'arc $c\, d$. Si de K' on passe à la conique consécutive K'', de K'' à la conique consécutive etc. on voit, que les points de contact se rapprochent deux à deux l'un de l'autre, et qu'ils finissent par se confondre. 2 points de contact après s'être confondus deviennent imaginaires; si non, ils s'éloigneraient l'un de l'autre, et alors il y aurait des points dans lesquels la quartique fut touchée par plus d'une conique du même système, ce qui est impossible. On voit donc, qu'il existera des coniques avec 2 points réels de contact. Une telle conique ne doit avoir que 2 points d'intersection avec la conique consécutive, et on verra par un raisonnement tout-à-fait analogue, qu'il existera des coniques, dont tous les points de contact sont imaginaires. Mais un système contenant une conique K avec 4 points de contact imaginaires, qui n'enferme aucune branche de la courbe, doit contenir un point isolé dans l'intérieur de cette conique. Car K doit enfermer une conique consécutive, celle-ci doit de même enfermer une conique consécutive etc., et à la fin on parviendra à une conique réduite à un point isolé. Si en sortant de ce point on parcourt la série de coniques consécutives du système, on voit bien, qu'on doit passer encore un point isolé dans l'intérieur de G. Donc nous avons le théorème:

I. *Si un système a des coniques réelles dans l'intérieur d'une branche, qui n'enferme aucune autre branche de la courbe, il doit se trouver 2 et pas plus de 2 points isolés parmi ces coniques.*

On peut démontrer, que les points de contact d'un point isolé extérieur et ceux d'une tangente double réelle quelconque se trouvent toujours sur une même conique. Choisissons un système de coordonnées triangulaires tel, que le point $x = 0$, $y = 0$ est un point isolé extérieur, et $z = 0$ une tangente double réelle de la courbe. Alors l'équation de la courbe pourra s'écrire:

$$(x^2 + y^2)\, V = U^2,$$

$V = 0$ et $U = 0$ étant les équations de deux coniques. Supposons, que

$$V \equiv ax^2 + by^2 + cxy + zA,$$
$$U \equiv \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + zB,$$

A et B étant deux fonctions linéaires des coordonnées. Si $z = 0$ est une tangente double, on aura:

$$(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy)^2 - (x^2 + y^2)(ax^2 + by^2 + cxy) \equiv \pm (mx^2 + ny^2 + lxy)^2.$$

Ici il faut rejeter le signe négatif dans le second membre, car on pourra démontrer, que les coefficients $\alpha^2 - a$ et $\beta^2 - b$ de x^4 et y^4 dans le premier membre sont positifs. Comme en allant du point $x = 0$, $y = 0$ à un point quelconque de $z = 0$ on doit passer la courbe un nombre pair de fois, $(x^2 + y^2)\, V - U^2$ aura le même signe, quand on y substitue $x = 0$, $y = 0$; $y = 0$, $z = 0$; $z = 0$, $x = 0$. Les résultats de ces substitutions sont:

$$-U^2, \quad x^4(a - \alpha^2), \quad y^4(b - \beta^2)\,;$$

comme $-U^2$ est négatif, on aura $a - \alpha^2 < 0$ et $b - \beta^2 < 0$. Alors l'équation identique peut s'écrire de la manière suivante:

$$[(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy) + (mx^2 + ny^2 + lxy)]\,[(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy) - (mx^2 + ny^2 + lxy)]$$
$$\equiv [x^2 + y^2]\,[ax^2 + by^2 + cxy].$$

$x^2 + y^2$ étant composé de deux facteurs imaginaires doit être identique à un des facteurs du premier membre; supposons que:

$$(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy) + (mx^2 + ny^2 + lxy) \equiv x^2 + y^2.$$

L'équation de la courbe peut donc être mise sous la forme:

$$(x^2 + y^2) zA = (mx^2 + ny^2 + lxy)^2 + z^2B^2 + 2zB\,[x^2 + y^2 - (mx^2 + ny^2 + lxy)]$$

ou

$$(x^2 + y^2) z (A - 2B) = (mx^2 + ny^2 + lxy - Bz)^2.$$

On a donc démontré, que les points de contact de $x^2 + y^2 = 0$ et ceux de $z = 0$ se trouvent sur une même conique. Il est de même démontré, que les coordonnées de tout point réel de la quartique doit rendre $z(A-2B)>0$: tous les points réels de la quartique sont situés dans la même paire d'angles opposés formée par les deux tangentes doubles réelles, dont les équations sont $z=0$ et $A-2B=0$.

II. *Les points de contact d'un point isolé extérieur et ceux d'une tangente double réelle se trouvent toujours sur une même conique*; 2 *tangentes doubles réelles, dont les points de contact se trouvent sur une même conique avec ceux d'un point isolé extérieur, renferment toujours tous les points réels de la quartique dans la même paire d'angles opposés.*

Un système doit contenir un nombre infini de coniques réelles, s'il en contient une seule K; car on pourra faire passer par les points de contact de K un nombre infini de coniques et les points d'intersection de chacune de ces coniques avec la courbe seront les points de contact d'une conique réelle du système. Soit

$$l^2 U + 2lV + W = 0$$

l'équation commune des coniques d'un tel système réel. L'équation exprimant, qu'une conique se décompose en deux tangentes doubles, sera du sixième degré en l et aura des coefficients réels. A une racine réelle de l'équation répondra une conique composée de deux tangentes doubles réelles ou imaginaires conjuguées; à une racine imaginaire répondra une conique composée de deux tangentes imaginaires mais non conjuguées, dont l'équation aura la forme:

$$(A+B\sqrt{-1})(C+D\sqrt{-1})=0$$

ou

$$AC-BD+(AD+BC)\sqrt{-1}=0$$

A, B, C, D étant des fonctions linéaires des coordonnées. La racine imaginaire conjuguée doit donc répondre à une conique dont l'équation est:

$$AC-BD-(AD+BC)\sqrt{-1}=0$$

c'est à dire les tangentes doubles $A-B\sqrt{-1}=0$ et $C-D\sqrt{-1}=0$ forment une conique du système. 2 tangentes doubles, dont l'une est imaginaire, l'autre réelle, ne pourront former une conique du système, car si dans la démonstration que nous venons de donner on pose B identiquement $=0$, on verra, que la tangente double réelle $A=0$ doit alors faire partie de deux coniques différentes du système. 4 tangentes doubles imaginaires seront dites *former un groupe*, quand elles composent deux coniques imaginaires conjuguées d'un système. De 4 tangentes doubles, qui sont deux à deux imaginaires conjuguées et dont les points de contact se trouvent sur une même conique, on pourra donc former deux groupes différents. Comme nous venons de démontrer, qu'un système réel doit toujours contenir un nombre pair de coniques composées de 2 tangentes imaginaires conjuguées, on voit bien, que celles des tangentes doubles imaginaires d'un système qui ne forment pas des points isolés pourront être divisées en groupes.

Soient $A \pm B\sqrt{-1} = 0$ et $C \pm D\sqrt{-1} = 0$ les équations des tangentes d'un groupe. Alors l'équation de la quartique peut s'écrire:

$$\pm (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2.$$

Les 3 systèmes contenant les 4 tangentes sont représentés par les équations:

$$\pm (A^2 + B^2) l^2 + 2lV + C^2 + D^2 = 0$$

$$(AC - BD)(\pm l^2 + 1) + 2lV + \sqrt{-1}(AD + BC)(\pm l^2 - 1) = 0$$

$$(AC + BD)(\pm l^2 + 1) + 2lV + \sqrt{-1}(BC - AD)(\pm l^2 - 1) = 0,$$

Si, en prenant le signe positif, on pose dans les deux dernières équations $l = \pm 1$, on voit, que les deux derniers systèmes contiennent des coniques à des équations réelles. Par le point d'intersection réel de $A + B\sqrt{-1} = 0$ et $A - B\sqrt{-1} = 0$ passent deux coniques réelles du premier système et deux coniques imaginaires conjuguées de chacun des deux derniers systèmes; les deux derniers systèmes sont donc intérieurs ou extérieurs suivant que le premier système est extérieur ou intérieur. L'équation

$$+ (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$$

peut en premier lieu répondre à chaque courbe à points réels, dont les tangentes doubles ne sont pas toutes réelles; mais puis on peut démontrer, qu'elle pourra répondre à des courbes sans points réels. Car si l'on considère une équation de la forme:

$$k (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$$

k étant un constant et la conique $V = 0$ ne contenant des points réels, la fraction $\frac{V^2}{(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)}$ ne pourra devenir $= 0$ pour des valeurs réelles des coordonnées. Le numérateur ne peut devenir $= 0$, et le *dénominateur ne devient pas infini*, que si les coordonnées sont infinies; mais si l'on divise et le numérateur et le dénominateur par x^4 et qu'alors on pose les coordonnées $= \infty$, le numérateur ne deviendra pas $= 0$, car alors la conique $V = 0$ devait contenir des points réels à l'infini.

$$\frac{V^2}{(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)}$$

ne pourra donc devenir plus petit qu'une certaine valeur positive p pour des valeurs réelles des coordonnées, et si l'on prend $k < p$ et > 0, l'équation

$$k (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$$

répondra à une courbe sans points réels.

Si dans les équations des 3 systèmes contenant les 4 tangentes doubles $A \pm B\sqrt{-1} = 0$ et $C \pm D\sqrt{-1} = 0$ on prend le signe négatif, chacune des deux dernières équations aura la forme:

$$M(-l^2+1) + V\cdot 2l + N(-l^2-1)\sqrt{-1} = 0,$$

$M = 0$ et $N = 0$ étant les équations de deux coniques réelles. Cette équation ne répondra à une conique réelle pour aucune valeur de l. Car si l'on pose $l = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, α et β étant des quantités réelles, l'équation peut s'écrire:

$$M(-\alpha^2+\beta^2+1) + V\cdot 2\alpha + N\cdot 2\alpha\beta$$
$$+ [-M\cdot 2\alpha\beta + V\cdot 2\beta + N(-\alpha^2+\beta^2-1)]\sqrt{-1} = 0.$$

La partie réelle du premier membre ainsi que le facteur multipliant $\sqrt{-1}$ ne peut devenir identiquement $= 0$, à moins que les coniques $M = 0$, $N = 0$, $V = 0$ n'aient 4 points communs; mais dans ce cas la quartique, dont l'équation est

$$M^2 + N^2 + V^2 = 0,$$

se décompose en deux coniques. L'équation ne peut donc répondre à une conique réelle que si la partie réelle du premier membre et le facteur multipliant $\sqrt{-1}$ sont identiques. Alors il faut que:

$$\frac{-\alpha^2+\beta^2+1}{-2\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\alpha\beta}{-\alpha^2+\beta^2-1};$$

mais ces équations se réduisent à une seule:

$$\alpha^2+\beta^2+1 = 0$$

qui ne peut être satisfaite pour des valeurs réelles de α et β. On pourra cependant démontrer, que deux coniques imaginaires conjuguées du système

$$M(-l^2+1) + V\cdot 2l + N(-l^2-1)\sqrt{-1} = 0$$

passent par un point quelconque du plan. L'équation peut s'écrire:

$$M\cdot\alpha + V\cdot\beta + N\sqrt{-1} = 0$$

en posant $\alpha = \frac{-l^2+1}{-l^2-1}$ et $\beta = \frac{2l}{-l^2-1}$, d'où $\alpha^2+\beta^2 = 1$. Si en substituant les coordonnées d'un point réel m on a $M = p$, $N = q$, $V = r$, on tirera des équations:

$$p\alpha + r\beta = -q\sqrt{-1} \text{ et } \alpha^2+\beta^2 = 1$$

les valeurs:

$$\alpha = \frac{-pq\sqrt{-1} \pm r\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{r^2+p^2}, \quad \beta = \frac{-rq\sqrt{-1} \mp p\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{r^2+p^2}.$$

Les équations des deux coniques passant par m sont donc:

$$\sqrt{-1}[-pqM - rqV + (r^2+p^2)N] \pm \sqrt{p^2+q^2+r^2}\,[rM - pV] = 0$$

représentant deux coniques imaginaires conjuguées. Si une conique

$$M \cdot \alpha' + V \cdot \beta' + N\sqrt{-1} = 0$$

appartient au système, la conique imaginaire conjuguée y appartiendra aussi; car si l'équation $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ est satisfaite pour $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, elle sera encore satisfaite pour $\alpha = -\alpha'$, $\beta = -\beta'$.

III. *Celles des tangentes doubles imaginaires d'un système réel qui ne forment pas des points isolées peuvent être divisées en groupes contenant chacun 4 tangentes conjuguées deux à deux, dont les points de contact se trouvent sur une même conique.* La quartique ayant des branches réelles, tout système contenant un tel groupe sera réel. Si l'on considère un système contenant deux points isolés et les deux systèmes contenant les deux groupes formés par les 4 tangentes doubles composant les deux points isolés, les deux derniers systèmes seront extérieurs ou intérieurs, suivant que le premier système est intérieur ou extérieur. Si la quartique n'a point des branches réelles, tout système contenant 1 groupe en contiendra 2 autres; le système contiendra des coniques réelles ou non, suivant que l'équation de la courbe a la forme

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = + V^2 \text{ ou } = - V^2,$$

$A^2 + B^2 = 0$, $C^2 + D^2 = 0$ et $V = 0$ étant les équations de deux points isolés composés des tangentes doubles d'un groupe du système et de la conique passant par leurs points de contact.

IV.

Maintenant on pourra trouver et le nombre des systèmes réels d'une quartique ordinaire et la distribution des coniques composées de deux tangentes doubles imaginaires conjuguées sur ces systèmes.

Une quartique composée de 4 branches réelles n'a que des systèmes réels et toutes ses tangentes doubles sont réelles.

Une quartique composée de 3 branches réelles a 12 tangentes doubles imaginaires qui forment 6 points isolés, dont aucun ne peut être extérieur; car un point isolé extérieur devrait avoir ses points de contact sur une même conique avec chacune des 16 tangentes doubles réelles. Il faut donc, qu'il existe un système intérieur qui a 2 points isolés dans l'intérieur de chaque branche (I). Les tangentes doubles imaginaires forment 30 groupes appartenant chacun à l'un des 30 systèmes qui contiennent les tangentes doubles réelles (III). La quartique a donc 31 systèmes réels.

Une quartique composée de 2 branches réelles l'une au dehors de l'autre a 20 tangentes doubles imaginaires, qui forment 10 points isolés, dont 0,4 ou 8 doivent être intérieurs (I). Chaque point isolé extérieur appartient au système contenant toutes les tangentes doubles réelles

(II), d'où l'on conclut, qu'il n'y a plus de 2 points isolés extérieurs. On aura donc 8 points isolés intérieurs, 4 dans l'intérieur de chaque branche. Ces 8 points isolés appartiennent à deux systèmes intérieurs, dont chacun a deux points isolés dans l'intérieur de chaque branche. Les tangentes doubles imaginaires des systèmes intérieurs forment 24 groupes dans les 12 systèmes, dont chacun contient 4 tangentes doubles réelles. *Les tangentes doubles qui composent les 2 points isolés extérieurs* forment 2 groupes appartenant aux 2 systèmes intérieurs (III). Il y a donc en tout 15 systèmes réels.

Une quartique qui ne contient qu'une seule branche réelle a 24 tangentes doubles imaginaires formant 12 points isolés. Supposons, qu'il y ait q systèmes extérieurs outre les 3 contenant les 4 tangentes doubles de la première espèce, r systèmes intérieurs et par conséquent $2r$ points intérieurs (I); il y a donc $2r$ groupes appartenant à des systèmes extérieurs et $12 - 2r$ points isolés extérieurs. Alors on aura, $6 + 3q$ étant le nombre total de paires de points isolés et de groupes, que demandent les systèmes extérieurs:

$$2r + 6 - r = 6 + 3q: \quad r = 3q.$$

Comme $r \leqq 6$, il faut, que q soit $= 0$, $= 1$ ou $= 2$. $q = 0$ donne $r = 0$, ce qui est impossible, car s'il y a des points extérieurs, il y a aussi des systèmes intérieurs (III) et par conséquent des points intérieurs (I). $q = 2$ donne $r = 6$: 6 systèmes intérieurs, dont chacun contient 2 points isolés, tandis que tous les groupes formés par les tangentes doubles imaginaires appartiennent à des systèmes extérieurs, ce qui est impossible aussi. On aura donc $q = 1$, $r = 3$. Chacun des 3 systèmes contenant les 4 tangentes doubles réelles doit contenir 2 points isolés; car si un de ces systèmes en contenait 4, on aurait 14 groupes appartenant aux 3 systèmes intérieurs, ce qui est impossible. Il y a donc en tout 7 systèmes réels: 3 systèmes intérieurs, dont chacun contient 2 points isolés, 3 systèmes extérieurs, dont chacun contient deux points isolés et 4 tangentes doubles réelles, et 1 système extérieur contenant ni des points isolés ni des tangentes doubles réelles.

Une quartique sans points réels a 24 tangentes doubles imaginaires et par conséquent 12 points isolés, dont chacun des 3 systèmes, auxquels appartiennent les tangentes doubles réelles, contient 4. Il y a 36 groupes appartenant à 12 autres systèmes (III). Ces systèmes ne contiendront jamais des coniques réelles à points réels, car on doit considérer tout le plan comme étant au dehors de la courbe, et les 12 systèmes comme intérieurs.

A moyen de III. on peut trouver le nombre des systèmes parmi les 12, qui contiennent des coniques à points réels. Soit $l^2 U + 2l V + W = 0$ l'équation de la conique variable d'un système contenant 4 points isolés corréspondants aux valeurs l_1, l_2, l_3, l_4 de l ($l_1 < l_2 < l_3 < l_4$). Supposons, que les coniques corréspondantes à des valeurs de $l > l_1$ et $< l_2$ contiennent des points réels; il en sera de même pour les coniques corréspondantes à $l > l_3$ et $< l_4$, tandis que toutes les autres valeurs de l répondront à des coniques sans points réels. Chacun de ces deux groupes de coniques contenant des points réels remplit complètement le plan; les deux coniques passant par un point quelconque appartiennent donc chacune à un des deux groupes. Si nous substituons les coordonnées d'un point p dans $l^2 U + 2lV + W$, cette expression ne s'annulera que pour deux valeurs l' et l'' de l, et l'on doit avoir $l_1 < l' < l_2$ et $l_3 < l'' < l_4$; $l^2 U + 2lV + W$ a donc le même signe pour $l = l_2$ et $l = l_3$, le signe contraire pour $l = l_1$ et $l = l_4$. Si dans l'équation de la courbe:

$$(l_r^2 U + 2l_r V + W)(l_s^2 U + 2l_s V + W) = (l_r l_s U + (l_r + l_s) V + W)^2$$

nous choisissons toujours pour r et s deux différentes des valeurs 1, 2, 3, 4, alors nous aurons 2 équations de la forme $+ (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$ et 4 équations de la forme $- (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = V^2$. Comme les 12 groupes qu'on peut former des tangentes doubles du système appartiennent chacun à l'un des 12 systèmes (si non, deux systèmes auraient plus de 4 tangentes doubles en commun) on voit, que 4 systèmes seulement des 12 contiendront des coniques à équations réelles.

Une quartique annulaire a 12 points isolés, et l'on pourra démontrer, qu'ils sont tous extérieurs. Chacun des 3 systèmes contenant les 4 tangentes doubles réelles doit contenir 4 points isolés; car si dans l'équation commune de toutes les coniques d'un tel système l parcourt toutes les valeurs réelles, on doit passer des valeurs de l correspondantes à des coniques situées dans l'intérieur de la branche interne. Ces valeurs de l doivent être séparées de celles qui répondent à des coniques au dehors de la branche externe par des valeurs correspondantes à des coniques sans points réels. On doit donc passer 4 fois de coniques contenant des points réels à des coniques sans points réels c'est à dire on doit avoir 4 points isolés, dont 2 situés au dehors et 2 au dedans des deux branches. Les tangentes doubles imaginaires forment 36 groupes; il y a donc 12 systèmes intérieurs qui ne contiennent aucun point isolé, ou en tout 15 systèmes réels.

La plupart des résultats obtenus ici à l'égard du nombre des systèmes réels ont été déduits d'une manière différente par Mr. le professeur Klein dans les „Mathematische Annalen“ vol. X.

M. le docteur Geiser a démontré, au premier volume des „Mathematische Annalen“, qu'en projetant une surface du troisième ordre d'un de ces points sur un plan on aura une quartique, dont les tangentes doubles sont les projections des 27 droites de la surface et la ligne