Sur les formes quadratiques binaires indéfinies.

Von

A. Markoff in St. Petersburg.

Dans le mémoire „Sur les formes quadratiques" de M. M. A. Korkine et G. Zolotareff*) a été mentionné que la limite précise des minima pour l'ensemble des formes binaires

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

dont le déterminant $b^2 - ac = D$ est positif, est égal à $\sqrt{\frac{4}{5}D}$. Cette quantité est le minimum des formes équivalentes à

$$f_0 = \sqrt{\frac{4}{5}D}\,(x^2 - xy - y^2);$$

pour toutes les autres formes f la limite précise de leurs minima est

$$\sqrt{\frac{1}{2}D}.$$

La démonstration de ces théorèmes m'étant communiquée par M. A. Korkine, ainsi que la forme

$$f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}D}\,(x^2 - 2xy - y^2)$$

dont les équivalentes ont $\sqrt{\frac{1}{2}D}$ pour leur minimum, je me suis proposé d'abord de trouver la quantité qui doit remplacer $\sqrt{\frac{1}{2}D}$ pour toutes les formes non équivalentes à f_0 et f_1. Il résulte de mes recherches que cette quantité $\sqrt{\frac{100}{221}D}$ est le minimum des formes équivalentes à

$$f_2 = \sqrt{\frac{4D}{221}}\,(5x^2 - 11xy - 5y^2).$$

Pour ne pas nous occuper des cas particuliers, abordons les questions générales et proposons nous de trouver les formes f, dont les valeurs ne puissent être inférieures à $l\sqrt{D}$. Nous allons démontrer, que pour

*) Mathematische Annalen, Band VI, S. 366.

$l > \frac{2}{3}$ le nombre de différentes classes de telles formes f est toujours fini, le déterminant D et le coëfficient l étant donnés.

Ce nombre croit indéfiniment, si l approche de plus en plus à $\frac{2}{3}$.

Quant aux formes qui satisfont à notre condition pour $l > \frac{2}{3}$, chacune d'elles devient égale (numériquement) à son minimum pour quelques valeurs finies de x et y et les rapports entre ses coëfficients sont des nombres rationelles. Il résulte de là que, si les nombres $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ sont irrationelles, la différence

$$(f) - \frac{2}{3}\sqrt{D},$$

(f) étant la valeur numérique de f*), peut être faite négative ou, si elle est toujours positive, parmi ses valeurs on trouvera aussi petites, qu'on voudra.

Nous allons voir encore qu'il existe un nombre infini des formes non équivalentes entre elles de même déterminant D, dont le minimum est pour toutes la même quantité $\frac{2}{3}\sqrt{D}$. Comme exemple peut servir la forme

$$\frac{2}{3}\sqrt{D}\,(x^2 - \sqrt{5}\,xy - y^2).$$

Avant de commencer la démonstration des théorèmes mentionées faisons quelques remarques sur la transformation des formes.

Soit

(1) $$\varphi_0 = (a_0, b_0, c_0) = a_0 x_0^2 + 2b_0 x_0 y_0 + c_0 y_0^2$$

une forme donnée de déterminant positif.

L'équation correspondante

(2) $$a_0 \xi^2 + 2b_0 \xi + c_0 = 0$$

a deux racines réelles.

Développons l'une d'elles ξ_0 en fraction continue, de sorte que

(3) $$\pm \xi_0 = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} + \cfrac{1}{\xi_n}}}},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}$ étant des nombres entiers positifs (α_0 peut être égal à zéro).

*) Dans la suite nous allons représenter en général la valeur absolue d'une quantité quelconque A par (A).

La quantité ξ_n est une racine de l'équation

$$a_n \xi^2 + 2 b_n \xi + c_n = 0, \tag{4}$$

qui s'obtient de la manière connue.

Comme le déterminant $D = b_0^2 - a_0 c_0$ est positif, les racines de l'équation (2) sont différentes et quelque soit leur différence, on peut toujours donner à n une valeur assez grande, pour que l'équation (4) ait une seule racine positive.

Dans ce cas a_n et c_n auront des signes contraires.

Considérons les subsitutions

$$\left\{\begin{array}{llll} x_0 = \pm(\alpha_0 x_1 + y_1) & , & y_0 = x_1 & , \\ x_1 = \alpha_1 x_2 + y_2 & , & y_1 = x_2 & , \\ x_2 = \alpha_2 x_3 + y_3 & , & y_2 = x_3 & , \\ \cdots & & \cdots & \\ \cdots & & \cdots & \\ x_{n-2} = \alpha_{n-2} x_{n-1} + y_{n-1} & , & y_{n-2} = x_{n-1} & , \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1} x_n + y_n & , & y_{n-1} = x_n & , \end{array}\right. \tag{5}$$

qui correspondent à la fraction continue ξ_0; la forme (a_0, b_0, c_0) se transformera en

$$(a_n, b_n, c_n) = a_n x_n^2 + 2 b_n x_n y_n + c_n y_n^2$$

où a_n, b_n, c_n sont les mêmes que dans l'équation (4). Ainsi toute forme (a_0, b_0, c_0) peut être transformée en une autre (a_n, b_n, c_n) dans laquelle a_n et c_n ont des signes contraires.

Soit h le plus grand nombre entier contenu dans la valeur absolue de la racine négative de l'équation (4). En faisant

$$x_n = X - hY, \quad y_n = Y$$

la forme (a_n, b_n, c_n) se change en une autre

$$(A, B, C) = AX^2 + 2BXY + CY^2 \tag{6}$$

La racine positive de l'équation correspondante

$$A\xi^2 + 2B\xi + C = 0$$

sera plus grande que l'unité et la valeur numérique de la racine négative en est moindre. —

Supposons donc que les racines de l'équation

$$a_0 \xi^2 + 2 b_0 \xi + c_0 = 0 \tag{2}$$

satisfont à cette dernière condition; car dans le cas contraire on peut remplacer la forme (a_0, b_0, c_0) par son équivalente (A, B, C).

Soit

$$\xi_0 = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} + \cfrac{1}{\xi_n}}}} \tag{7}$$

la racine positive de l'équation (2) et

$$-\frac{1}{\eta_0} = -\cfrac{1}{\alpha_{-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-2} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{-m} + \cfrac{1}{\eta_{-m}}}}} \tag{8}$$

la racine négative de la même équation.

Les substitutions

$$\left\{\begin{array}{ll} x_0 = \alpha_0 x_1 + y_1, & y_0 = x_1, \\ x_1 = \alpha_1 x_2 + y_2, & y_1 = x_2, \\ x_2 = \alpha_2 x_3 + y_3, & y_2 = x_3, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1} x_n + y_n, & y_{n-1} = x_n, \end{array}\right. \tag{9}$$

donnent la série des formes transformées

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \cdots (a_n, b_n, c_n).$$

En désignant par $\frac{-1}{\eta_n}$ la racine négative de l'équation

$$a_n \xi^2 + 2 b_n \xi + c_n = 0 \tag{10}$$

il est clair, qu'on aura

$$\eta_n = \alpha_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_{n-2} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_0 + \cfrac{1}{\eta_0}}} \tag{11}$$

et ξ_n sera la racine positive de la même équation.

Les substitutions

$$\left\{\begin{array}{ll} x_0 = y_{-1}, & y_0 = -\alpha_{-1} y_{-1} + x_{-1}, \\ x_{-1} = y_{-2}, & y_{-1} = -\alpha_{-2} y_{-2} + x_{-2}, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_{-m+1} = y_{-m}, & y_{-m+1} = -\alpha_{-m} y_{-m} + x_{-m} \end{array}\right. \tag{12}$$

donnent la série des formes transformées

$$(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}), \ (a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}), \cdots, (a_{-m}, b_{-m}, c_{-m}).$$

Dans ce cas la racine négative de l'équation

$$(13)\qquad a_{-m}\xi^2 + 2b_{-m}\xi + c_{-m} = 0$$

est égale à $\frac{-1}{\eta_{-m}}$ et la racine positive de la même équation étant designée par ξ_{-m} donne le developpement

$$(14)\qquad \xi_{-m} = \alpha_{-m} + \cfrac{1}{\alpha_{-m+1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{-1} + \cfrac{1}{\xi_0}}}.$$

Remarquons enfin que les substitutions (9) et (12) peuvent être en général représentées par les formules

$$(15)\qquad \begin{cases} x_\mu = \alpha_\mu x_{\mu+1} + y_{\mu+1}, \\ y_\mu = x_{\mu+1}, \end{cases}$$

μ étant un entier quelconque positif ou négatif.

Donc si nous considérons une forme quelconque $(a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa)$ de la série

(F) $\cdots (a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}), (a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}), (a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \cdots$

qui provient de la forme (a_0, b_0, c_0) par les transformations (15), la racine positive de l'équation

$$a_\varkappa \xi^2 + 2b_\varkappa \xi + c_\varkappa = 0$$

est égale à

$$\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \cdots}}$$

et la racine négative à

$$-\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-3} + \cdots}}}$$

La différence de ces racines, c'est à dire la quantité $2\frac{\sqrt{D}}{(a_\varkappa)}$ est égale à

$$\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \cdots}} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \cdots}}$$

Il n'est pas difficile de démontrer que la valeur absolue de (a_0, b_0, c_0) ne peut s'abaisser au dessous du plus petit des nombres

$$\cdots, (a_{-3}), (a_{-2}), (a_{-1}), (a_0), (a_1), (a_2), (a_3), \cdots$$

dont la suite doit être prolongée indéfiniment dans les deux directions.

Pour le démontrer remarquons d'abord que parmi les racines

$$\cdots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots$$

relatives à l'ensemble des formes (F) il existera toujours au moins une qui surpasse 2, si la forme (a_0, b_0, c_0) n'est pas équivalente à

$$\sqrt{\frac{4}{5}D}\left(x-y-\cfrac{y}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}\right)\left(x+\cfrac{y}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}\right)$$

c'est à dire à la forme

$$\sqrt{\frac{4}{5}D}\,(x^2-xy-y^2).$$

Nous omettons cette forme parce qu'on voit facilement que son minimum est $\sqrt{\frac{4}{5}D}$.

Toutes les formes (F) sont équivalentes entre elles et chacune d'elles se transforme dans les autres au moyen des substitutions mentionnées.

Cela étant nous pouvons supposer

$$\xi_0 > 2.$$

Nous excluons encore les cas $y_0 = 0$ et $a_0 = 0$; car dans le cas $y_0 = 0$ la valeur absolue de la forme (a_0, b_0, c_0) ne peut être moindre que (a_0), et, si $a_0 = 0$, le minimum de la forme (a_0, b_0, c_0) est égal à zéro.

En vertu de nos notations on peut écrire

$$\text{(16)}\qquad \frac{\varphi_0}{a_0 y_0^2} = \frac{(a_0, b_0, c_0)}{a_0 y_0^2} = \left(\frac{x_0}{y_0} - \xi_0\right)\left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0}\right)$$

Quant à $\frac{x_0}{y_0}$ on peut faire trois suppositions

$$\frac{x_0}{y_0} = 0, \quad \frac{x_0}{y_0} > 0, \quad \frac{x_0}{y_0} < 0$$

que nous discuterons séparement.

(I) $\frac{x_0}{y_0} = 0$.

En remarquant, que

$$c_0 = a_{-1}$$

notre forme $\varphi_0 = (a_0, b_0, c_0)$ devient

$$a_{-1} y_0^2;$$

donc

$$(\varphi_0) \geqq (a_{-1}).$$

(II) $\frac{x_0}{y_0} > 0$.

Comme on a

$$\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0} \geqq \frac{1}{(y_0)},$$

on déduit de la formule (16), que l'inégalité

$$(\varphi_0) \leqq (a_0)$$

est possible seulement sous la condition

$$\left(\frac{x_0}{y_0} - \xi_0\right) \leqq \frac{1}{(y_0)}.$$

Comme nous avons supposé $\xi_0 > 2$, il résultera de l'inégalité

$$\left(\frac{x_0}{y_0} - \xi_0\right) \leqq \frac{1}{(y_0)}$$

la suivante

$$\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0} \geqq 2.$$

Donc, si l'on a

$$(\varphi_0) \leqq (a_0),$$

il viendra de là

$$\left(\frac{x_0}{y_0} - \xi_0\right) \leqq \frac{1}{2y_0^2}.$$

Cette inégalité montre, que la valeur de $\frac{x_0}{y_0}$ est égale à une des fractions convergentes à ξ_0.

En posant

$$\frac{x_0}{y_0} = \alpha_0, \quad \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, \cdots$$

les valeurs correspondantes de la forme φ_0 sont

$$a_1 i^2, \ a_2 i^2, \ a_3 i^2, \ \cdots$$

i étant le plus grand commun diviseur de x_0 et y_0.

Donc si $\frac{x_0}{y_0}$ est positif, la valeur numérique de (a_0, b_0, c_0) ne peut être moindre que le plus petit des nombres

$$(a_0), \ (a_1), \ a_2), \ (a_3), \ \cdots$$

(III) $\frac{x_0}{y_0} < 0.$

On conclue de la formule (16) que l'inégalité

$$(\varphi_0) \leqq (a_0)$$

est possible seulement sous la condition

$$\left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0}\right) < \frac{1}{2y_0^2},$$

car évidemment on a

$$-\frac{x_0}{y_0} + \xi_0 > 2.$$

Quant à la condition

$$\left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\eta_0}\right) < \frac{1}{2y_0^2},$$

il en résulte que $\frac{-x_0}{y_0}$ est égal à une des fractions convergentes à $\frac{1}{\eta_0}$.

Si l'on attribue à $\frac{-x_0}{y_0}$ successivement les valeurs

$$\frac{1}{\alpha_{-1}}, \quad \frac{1}{\alpha_{-1}+\frac{1}{\alpha_{-2}}}, \quad \frac{1}{\alpha_{-1}+\frac{1}{\alpha_{-2}+\frac{1}{\alpha_{-3}}}}, \ldots$$

les valeurs correspondantes de φ_0 sont respectivement

$$c_{-1}i^2 = a_{-2}i^2, \quad a_{-3}i^2, \quad a_{-4}i^2, \cdots$$

i étant le plus grand commun diviseur de x_0 et y_0.

Donc dans le cas $\frac{x_0}{y_0} < 0$ la valeur absolue de (a_0, b_0, c_0) ne peut s'abaisser au dessous du plus petit des nombres

$$(a_0), \ (a_{-2}), \ (a_{-3}), \ (a_{-4}), \cdots$$

Il résulte de tout ce que nous avons dit, qu'il suffira pour la recherche du minimum de la forme (a_0, b_0, c_0) de considérer la suite

$$\text{(J)} \qquad \cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$$

dont la liaison avec la forme (a_0, b_0, c_0) a été expliquée, et de chercher le minimum $\frac{2}{L}$ de la somme

$$(17) \qquad \alpha_\varkappa + \frac{1}{\alpha_{\varkappa+1}+\frac{1}{\alpha_{\varkappa+2}+\cdot_{\cdot_\cdot}}} + \frac{1}{\alpha_{\varkappa-1}+\frac{1}{\alpha_{\varkappa-2}+\cdot_{\cdot_\cdot}}} = \frac{2}{L_\varkappa}.$$

Le minimum de (a_0, b_0, c_0) est égal à $L\sqrt{D}$ et pour chaque valeur de l'indice $\varkappa$ correspond une valeur de la forme (a_0, b_0, c_0)

$$a_\varkappa = L_\varkappa \sqrt{D}.$$

Comme la suite (F) est complétement déterminée par la suite (J) nous discuterons dans ce, qui va suivre, seulement la suite (J) et la formule (17) qui lui correspond.

Remarquons de plus, que, si les coefficients a' et c' d'une forme quelconque

$$(a', b', c') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

ont des signes contraires et la racine positive ξ' de l'équation correspondante

$$a'\xi^2 + 2b'\xi + c' = 0$$

surpasse l'unité tandisque la valeur absolue $\frac{1}{\eta'}$ de la racine négative en est moindre*), les formes (a', b', c') et (a_0, b_0, c_0) ne sont équivalentes entre elles que sous les conditions exprimées par les équations

---

*) Toute forme (a', b', c') qui satisfait à ces conditions nous appellerons *réduite*. —

$$\xi' = \alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \ddots}},$$

$$\eta' = \alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-3} + \ddots}},$$

ou par les suivantes

$$\xi' = \alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-3} + \ddots}},$$

$$\eta' = \alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \ddots}}$$

$\varkappa$ étant un indice quelconque

En effet soit

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

la substitution par laquelle la forme (a_0, b_0, c_0) peut être transformée en (a', b', c'); $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers et satisfont à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

qui exprime l'équivalence des formes (a_0, b_0, c_0) et (a', b', c').

On aura par conséquent

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha \dfrac{x'}{y'} + \beta'}{\gamma \dfrac{x'}{y'} + \delta'}$$

et

(18) $$\pm \frac{x}{y} = \frac{(\alpha) \cdot \dfrac{\pm x'}{y'} + (\beta)}{(\gamma) \cdot \dfrac{\pm x'}{y'} + (\delta)}$$

les signes $\pm$ dans le premier et le second terme de cette équation étant choisies convenablement.

En développant $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ et $\left(\frac{\beta}{\delta}\right)$ en fraction continue, il résulte de la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

qu'on trouvera

$$\left(\frac{\beta}{\delta}\right) = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \ddots + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-1} + \cfrac{1}{\varepsilon_h}}},$$

et

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)=\varepsilon_0+\cfrac{1}{\varepsilon_1+\cdots+\cfrac{1}{\varepsilon_{h-1}}},$$

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_{h-1}, \varepsilon_h$ étant des entiers positifs (ε_0 et ε_h peuvent être égaux à zéro*).

Au moyen de ces developpements la formule (18) peut être remplacée par la suivante

$$\pm\frac{x}{y}=\varepsilon_0+\cfrac{1}{\varepsilon_1+\cdots+\cfrac{1}{\varepsilon_{h-1}+\cfrac{1}{\varepsilon_h\pm\frac{x'}{y'}}}} \tag{19}$$

Quant aux valeurs de ε_0 et ε_h, on peut faire quatre suppositions

1) $\varepsilon_0>0,\ \varepsilon_h=0$; 2) $\varepsilon_0=0,\ \varepsilon_h=0$; 3) $\varepsilon_0>0,\ \varepsilon_h>0$; 4) $\varepsilon_0=0,\ \varepsilon_h>0$.

Discutons ces cas séparement.

1) $\varepsilon_0>0,\ \varepsilon_h=0$.

En combinant de différentes manières les racines des équations

$$a_0\xi^2+2b_0\xi+c_0=0,$$
$$a'\xi^2+2b'\xi+c'=0$$

pour les substituer à la place de $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ dans la formule (19) et choisissant convenablement les signes $\pm$ dans les deux termes de cette formule, on verra facilement, qu'avec les conditions

$$\xi_0>1,\quad \eta_0>1,\quad \xi'>1,\ \eta'>1$$

n'est compertible que la combinaison

$$\xi_0=\varepsilon_0+\cfrac{1}{\varepsilon_1+\cfrac{1}{\varepsilon_2+\cdots+\cfrac{1}{\varepsilon_{h-1}+\cfrac{1}{\xi'}}}},\qquad -\frac{1}{\eta_0}=\varepsilon_0+\cfrac{1}{\varepsilon_1+\cfrac{1}{\varepsilon_2+\cdots\cfrac{1}{\varepsilon_{h-1}-\eta'}}}.$$

Par conséquent

$$\eta'=\varepsilon_{h-1}+\cfrac{1}{\varepsilon_{h-2}+\cdots+\cfrac{1}{\varepsilon_0+\cfrac{1}{\eta_0}}}$$

Si l'on compare ces formules et les équations (7) et (8), on aura

*) Dans le cas $\varepsilon_h=0$ an aura

$$\left(\frac{\beta}{\delta}\right)=\varepsilon_0+\cfrac{1}{\varepsilon_1+\cdots+\cfrac{1}{\varepsilon_{h-2}}}.$$

$$\varepsilon_0 = \alpha_0, \; \varepsilon_1 = \alpha_1, \; \cdots \; \varepsilon_{h-1} = \alpha_{h-1},$$

$$\xi' = \alpha_h + \cfrac{1}{\alpha_{h+1} + \cfrac{1}{\alpha_{h+2} + \cdots}}, \quad \eta' = \alpha_{h-1} + \cfrac{1}{\alpha_{h-2} + \cdots}$$

2) $\varepsilon_0 = 0, \; \varepsilon_h = 0.$

De la même manière que dans le cas précédent on aura

$$-\xi_0 = \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-1} - \eta'}}}, \qquad \eta_0 = \varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-1} + \cfrac{1}{\xi'}}}$$

$$\eta' = \varepsilon_{h-1} + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-2} + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cfrac{1}{\xi_0}}},$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_{-1}, \; \varepsilon_2 = \alpha_{-2}, \; \cdots, \; \varepsilon_{h-1} = \alpha_{-(h-1)},$$

$$\xi' = \alpha_{-h} + \cfrac{1}{\alpha_{-h-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-h-2} + \cdots}}, \quad \eta' = \alpha_{-h+1} + \cfrac{1}{\alpha_{-h+2} + \cfrac{1}{\alpha_{-h+3} + \cdots}}$$

3) $\varepsilon_0 > 0, \; \varepsilon_h > 0.$

On aura

$$\xi_0 = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_h + \cfrac{1}{\eta'}}}, \qquad -\frac{1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_h - \xi'}}$$

$$\xi' = \varepsilon_h + \cfrac{1}{\varepsilon_{h-1} + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_0 + \cfrac{1}{\eta_0}}},$$

$$\varepsilon_0 = \alpha_0, \; \varepsilon_1 = \alpha_1, \; \cdots, \; \varepsilon_h = \alpha_h,$$

$$\xi' = \alpha_h + \cfrac{1}{\alpha_{h-1} + \cfrac{1}{\alpha_{h-2} + \cdots}}, \quad \eta' = \alpha_{h+1} + \cfrac{1}{\alpha_{h+2} + \cfrac{1}{\alpha_{h+3} + \cdots}}$$

4) $\varepsilon_0 = 0, \; \varepsilon_h > 0.$

On aura

$$-\xi_0 = \cfrac{1}{\varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_h - \xi'}}}, \qquad \eta_0 = \varepsilon_1 + \cfrac{1}{\varepsilon_2 + \cdots + \cfrac{1}{\varepsilon_h + \cfrac{1}{\eta'}}}$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_{-1},\ \varepsilon_2 = \alpha_{-2},\ \cdots,\ \varepsilon_h = \alpha_{-h},$$

$$\xi' = \alpha_{-h} + \cfrac{1}{\alpha_{-h+1} + \cfrac{1}{\alpha_{-h+2} + \cdots}},\qquad \eta' = \alpha_{-h-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-h-2} + \cfrac{1}{\alpha_{-h-3} + \cdots}}.$$

La proposition énoncée est donc démontrée.

Maintenant proposons nous de trouver la composition de la suite (J) à la condition d'avoir pour toutes les indices $\varkappa$

(20) $$L_\varkappa \geqq \frac{2}{3}.$$

Remarquons d'abord, que cette suite ne contiendra que le nombres 1 et 2, les nombres plus grands ne pouvent figurer parmi ses élements; car en supposant

$$\alpha_\varkappa \geqq 3$$

la formule (17) donne

$$\frac{2}{L_\varkappa} > 3 \quad \text{et} \quad L_\varkappa < \frac{2}{3}.$$

En suite on voit facilement, que les 1 et les 2 ne peuvent figurer isolément; car si l'on a

$$\alpha_{\varkappa-1} = 1,\quad \alpha_\varkappa = 2,\quad \alpha_{\varkappa+1} = 1,$$

la formule (17) donne

$$L_\varkappa < \frac{2}{3}.$$

De même en supposant

$$\alpha_{\varkappa-1} < 3,\quad \alpha_\varkappa = 2,\quad \alpha_{\varkappa+1} = 1,\ \alpha_{\varkappa+2} = 2$$

on aura

$$\frac{2}{L_\varkappa} > 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} + \frac{1}{3} = 3 \quad \text{et} \quad L_\varkappa < \frac{2}{3}.$$

Soit maintenant

$$\alpha_{\varkappa-1} = 2,\quad \alpha_\varkappa = 2,\quad \alpha_{\varkappa+1} = 1,\quad \alpha_{\varkappa+2} = 1.$$

En consérvant nos notations, nous aurons

$$\frac{2}{L_\varkappa} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\xi_{\varkappa+3}}}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\eta_{\varkappa-1}}},$$

$$\frac{2}{L_{\varkappa-1}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\xi_{\varkappa+3}}}}} + \frac{1}{\eta_{\varkappa-1}}.$$

En ayant égard à l'identité

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{g}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{g}}}=1$$

on voit facilement, que les conditions

$$L_\varkappa \geqq \frac{2}{3}, \quad L_{\varkappa-1} \geqq \frac{2}{3}$$

équivalent aux suivantes

$$(21) \qquad \xi_{\varkappa+3} \geqq \eta_{\varkappa-1}, \quad \eta_{\varkappa-1} \geqq 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\xi_{\varkappa+3}}}}}.$$

De là on déduit facilement

$$(22) \quad \xi_{\varkappa+3} \geqq 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\xi_{\varkappa+3}}}}}, \qquad \eta_{\varkappa-1} \geqq 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\eta_{\varkappa-1}}}}}.$$

Nous allons distinguer les deux cas suivans

1) $\xi_{\varkappa+3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

2) $\xi_{\varkappa+3}$ n'est pas égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dans le cas $\xi_{\varkappa+3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la première des inégalités (21) donne

$$\eta_{\varkappa-1} \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et la seconde

$$\eta_{\varkappa-1} \geqq \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

donc il faut, que l'on ait

$$\eta_{\varkappa-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dans le second cas $\eta_{\varkappa-1}$ n'est pas égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, car, si l'on avait

$$\eta_{\varkappa-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

les conditions (21) donneraient

$$\xi_{\varkappa+3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent on aura dans ce cas

$$(23)^{*)}\quad\begin{cases} \xi_{\varkappa+3} = \underbrace{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1+}}}}_{\mu-2}\cfrac{1}{\xi_{\varkappa+\mu+1}>2}, \\[2ex] \eta_{\varkappa-1} = \underbrace{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1+}}}_{\mu'}\cfrac{1}{\xi_{\varkappa-\mu'-1}>2}, \\[2ex] \xi_{\varkappa+1} = \underbrace{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1+}}}_{\mu}\cfrac{1}{\xi_{\varkappa+\mu+1}>2}, \end{cases}$$

μ et μ' étant des entiers positifs finis (μ' peut être égal à zéro).

De plus il résulte des inégalités (22), que

$$(24)\qquad \mu = 2r,\quad \mu' = 2r'$$

où r et r' sont des entiers.

En substituant les expressions (23) dans les inégalités (21) en déduit enfin, qu'on ne peut faire que les trois suppositions

$$(25)\qquad \begin{cases} 1)\quad r = r'+1, & \xi_{\varkappa+2r+1} \geqq \eta_{\varkappa-2r'-1}, \\ 2)\quad r = r', & \\ 3)\quad r = r'-1, & \xi_{\varkappa+2r+1} \leqq \eta_{\varkappa-2r'-1}. \end{cases}$$

Dans chacune de ces suppositions $L_\varkappa$ et $L_{\varkappa-1}$ ne sont pas inférieurs à $\frac{2}{3}$.

Soit maintenant

$$r' = 0$$

et par conséquent

$$r = 1;$$

on obtient dans ce cas en vertu des formules (23)

$$(26)\qquad \begin{cases} \xi_{\varkappa+1} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\xi_{\varkappa+5}}}}}, & \eta_{\varkappa-1} = 2+\cfrac{1}{\eta_{\varkappa-2}}, \\[2ex] \xi_{\varkappa+3} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\xi_{\varkappa+5}}}, & \eta_{\varkappa+3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\eta_{\varkappa-1}}}}}. \end{cases}$$

---

*) Par les formules (23) nous voulons exprimer, que dans les développements en fraction continue de $\xi_{\varkappa+3}$, $\eta_{\varkappa-1}$, $\xi_{\varkappa+1}$, respectivement $\mu-2$, μ', μ premiers quotiens sont égaux à l'unité, les suivans étant plus grands que l'unité. —

Ainsi on aura

$$\frac{2}{L_{\varkappa+3}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi_{\varkappa+5}}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\eta_{\varkappa-1}}}}}}.$$

Cette équation avec l'identité

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{g}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{g}}} = 1$$

montre, que la condition

$$L_{\varkappa+3} \geqq \frac{2}{3}$$

en vertu de la supposition $r' = 0$ équivaut à la suivante

$$\xi_{\varkappa+5} \leqq 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\eta_{\varkappa-1}}}. \tag{27}$$

La formule (27) combinée avec (21) et (26) donne

$$\xi_{\varkappa+3} \leqq 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi_{\varkappa+3}}}}}, \qquad \eta_{\varkappa-1} \leqq 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\eta_{\varkappa-1}}}}};$$

il résulte de là, qu'on doit supposer

$$\xi_{\varkappa+3} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} = 1 + \sqrt{2} = \eta_{\varkappa-1}$$

ou, encore,

$$\xi_{\varkappa+3} = \underbrace{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots + \cfrac{1}{2 +}}}_{2\varrho} \, \cfrac{1}{\xi_{\varkappa+2\varrho+3} < 2},$$

$$\eta_{\varkappa-1} = \underbrace{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots + \cfrac{1}{2 +}}}_{2\varrho_1} \, \cfrac{1}{\eta_{\varkappa-2\varrho_1-1} < 2},$$

ϱ et ϱ_1 étant des entiers positifs.

De toutes ces considérations il suit, que la suite cherchée (J) preséntera l'une des formes suivantes

(J_0) $\qquad \ldots, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots,$

(J_1) $\qquad \ldots, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots,$

(J_∞) $\quad \cdots, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, \cdots,$

(J^∞) $\quad \cdots, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, \cdots,$

$$(J') \cdots \underbrace{1, 1, \cdots 1}_{2r_{-2}}, 2, 2, \underbrace{1, 1, \cdots}_{2r_{-1}}, 2, 2, \underbrace{1, 1, \cdots 1}_{2r_0}, 2, 2, \underbrace{1, 1, \cdots}_{2r_1}, 2, 2, \underbrace{1, \cdots 1}_{2r_2}, \cdots$$

Le nombre $r_\varkappa$ en général est fini, $\varkappa$ étant fini.

Nous supposons de plus, que pour quelques-uns des indices $\varkappa$ $r_\varkappa$ n'est pas égal à zéro; car en faisant $r_\varkappa = 0$ pour toute indice $\varkappa$, on aura la série (J_1) au lieu de (J').

Les séries (J_0) et (J_1) satisfont à la condition

$$L_\varkappa > \frac{2}{3}$$

pour tout indice $\varkappa$; car pour la première de ces séries

$$\frac{2}{L_\varkappa} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} = \sqrt{5},$$

et pour la seconde

$$\frac{2}{L_\varkappa} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = 2\sqrt{2}.$$

Les séries (J_∞) et (J^∞) satisfont aussi à la condition

$$L_\varkappa \geqq \frac{2}{3}$$

pour tout indice $\varkappa$.

De plus ces dernières séries satisfont pour un certain indice $\varkappa$ à la condition

$$L_\varkappa = \frac{2}{3}$$

car, évidemment, on a

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} = 3$$

et

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = 3.$$

L'une des formes (F), qui correspondent à la série (J_∞) est la suivante

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}\left(x-2y-\cfrac{y}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}\right),\ \left(x+\cfrac{y}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}\right)$$

c'est à dire

$$\frac{2}{3}\sqrt{D}\left(x-y\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+y\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}\,(x^2-\sqrt{5}\,x\,y-y^2).$$

Ainsi nous avons trouvée l'une des formes, dont le minimum est égal à $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}$.

De la même manière au moyen de la série (J^∞) on obtient une autre forme

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}\left\{x-2y-\cfrac{y}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}\right\}\left\{x+\cfrac{y}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}\right\}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{D}\,.\,\{x^2-(2\sqrt{2}-1)\,xy-\sqrt{2}\,y^2\}$$

dont le minimum est aussi égal à $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{D}$.

Enfin si la suite cherchée (J) présentera la forme (J'), il suit des considérations précedentes, que la série des nombres

(R) $\qquad \cdots,\ r_{-3},\ r_{-2},\ r_{-1},\ r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots$

doit satisfaire aux conditions suivantes:

1) Les différences

$$\cdots,\ r_{-3}-r_{-2},\ r_{-2}-r_{-1},\ r_{-1}-r_0,\ r_0-r_1,\ r_1-r_2,\ \cdots$$

ne peuvent avoir que les trois valeurs $+1$, 0, -1.

2) Si l'on a pour un indice λ

$$r_\lambda-r_{\lambda+1}=+1,$$

la première des différences

$$r_{\lambda+2}-r_{\lambda-1},\quad r_{\lambda+3}-r_{\lambda-2},\quad r_{\lambda+4}-r_{\lambda-3},\ \cdots$$

qui ne s'évanouit pas doit être *positive.*

3) Si l'on a pour un indice λ

$$r_\lambda-r_{\lambda+1}=-1,$$

la première des différences

$$r_{\lambda+2}-r_{\lambda-1},\quad r_{\lambda+3}-r_{\lambda-2},\quad r_{\lambda+4}-r_{\lambda-3},\ \cdots$$

qui ne s'évanouit pas doit être *negative**).

*) S. 394. On ne doit pas excepter les cas où $r_\lambda-r_{\lambda+1}=\pm1$ et pour tous les indices $\mu>0$, $r_{\lambda-\mu}=r_{\lambda+\mu+1}$.

Supposons maintenant que ces conditions sont effectivement satisfaites.

Dans ce cas en vertu de tout ce, que nous avons dit, on aura

$$L_{\varkappa-1} \geqq \frac{2}{3}, \quad L_\varkappa \geqq \frac{2}{3},$$

si

$$\alpha_{\varkappa-1} = 2, \quad \alpha_\varkappa = 2, \quad \alpha_{\varkappa+1} = 1, \quad \alpha_{\varkappa+2} = 1.$$

De la même manière il est facile de voir, que les inégalités

$$L_\varkappa \geqq \frac{2}{3}, \quad L_{\varkappa+1} \geqq \frac{2}{3},$$

auront lieu, si l'on choisie $\varkappa$ de manière à avoir

$$\alpha_{\varkappa-2} = 1, \quad \alpha_{\varkappa-1} = 1, \quad \alpha_\varkappa = 2, \quad \alpha_{\varkappa+1} = 2.$$

Par conséquent l'inégalité

$$L_\varkappa \geqq \frac{2}{3},$$

est satisfaite dans les deux cas suivans

$$1) \quad \alpha_{\varkappa-1} = 2, \quad \alpha_\varkappa = 2, \quad \alpha_{\varkappa+1} = 1;$$
$$2) \quad \alpha_{\varkappa-1} = 1, \quad \alpha_\varkappa = 2, \quad \alpha_{\varkappa+1} = 2.$$

Dans tous les autres cas on aura

$$\alpha_\varkappa = 1,$$

ou encore

$$\alpha_{\varkappa-1} = 2, \quad \alpha_\varkappa = 2, \quad \alpha_{\varkappa+1} = 2;$$

la formule (17) donne immédiatement dans l'une et l'autre supposition

$$\frac{2}{L_\varkappa} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad L_\varkappa > \frac{2}{3}.$$

Il suit de là, que les conditions énoncées ci-dessus sont suffisantes.

En vertu de ces conditions la différence des deux nombres quelconques de la série (R) ne peut surpasser l'unité en valeur absolue.

En effet supposons, que le cas contraire a lieu, savoir, que la série (R) contient deux nombres w et $w' \leqq w - 2$.

Cela posé, nous trouverons dans la série (R) en vertu de sa première propriété enoncée ci-dessus l'une de deux combinaisons suivantes.

(A) $$w, \; \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s}, \; w-2$$

(A′) $$w-2, \; \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s}, \; w$$

s étant un nombre entier positif.

En vertu de la seconde propriété de la série (R) à gauche de la combinaison (A) doit se trouver la combinaison

$$\text{(B)} \qquad w-2, \quad \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s-\varkappa}$$

et de la même manière en vertu de la troisième propriété à droite de la combinaison (A′) doit figurer la combinaison

$$\text{(B′)} \qquad \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s-\varkappa}, \quad w-2$$

$\varkappa$ étant un entier positif.

Ainsi nous obtenons l'une des combinaisons suivantes

$$\text{(C)} \qquad w-2, \quad \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s-\varkappa}, \quad w, \quad \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s}, \quad w-2,$$

$$\text{(C′)} \qquad w-2, \quad \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s}, \quad w, \quad \underbrace{w-1, w-1, \cdots}_{s-\varkappa}, \quad w-2,$$

dont (C) est en contradiction avec la troisième propriété de la série (R) et (C′) avec la seconde.

Si l'on avait $s = \varkappa$ les combinaisons (C) et (C′) se trouveraient aussi en contradiction avec la première.

Par conséquent la série (R) doit présenter l'une des formes suivantes

$$\begin{array}{llllllll}
(\mathrm{R}_1) & \cdots, & r^0, & r^0, & r^0, & r^0, & r^0, & r^0, \; r^0, \; \cdots \\
(\mathrm{R}_\infty) & \cdots, & r^0-1, & r^0-1, & r^0-1, & r^0, & r^0-1, & r^0-1, \; \cdots \\
(\mathrm{R}^\infty) & \cdots, & r^0, & r^0, & r^0, \; r^0-1, & r^0, & r^0, & r^0, \; \cdots
\end{array}$$

$$\text{(R′)} \qquad \cdots, \underbrace{r^0-1, \cdots, r^0-1}_{s_{-2}}, \; r^0, \; \underbrace{r^0-1, \cdots}_{s_{-1}}, \; r_0, \; \underbrace{r^0-1, \cdots}_{s_0},$$
$$r^0, \; \underbrace{r^0-1, \cdots}_{s_1}, \; r^0, \; \underbrace{r^0-1, \cdots}_{s_2}, \qquad \cdots$$

r^0 étant le plus grand des nombres de la série (R).

Le nombre $s_\varkappa$ en général est fini, $\varkappa$ étant fini. Les séries (R_1), (R_∞) et (R^∞) satisfont évidemment aux nos trois conditions demontrées pour la série (R).

Par conséquent toute la question consiste maintenant dans les propriétés de la série

$$\cdots, s_{-3}, \quad s_{-2}, \quad s_{-1}, \quad s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3, \cdots$$

Il est facile de voir, que les valeurs des différences

$$\cdots, s_{-3}-s_{-2}, \quad s_{-2}-s_{-1}, \quad s_{-1}-s_0, \quad s_0-s_1, \quad s_1-s_2, \cdots$$

sont $+1, 0, -1$.

De plus en vertu de la seconde propriété de la série (R′) toutes les fois, qu'on aura

$$s_\lambda - s_{\lambda+1} = -1$$

la première des différences

$$s_{\lambda+2} - s_{\lambda-1}, \quad s_{\lambda+3} - s_{\lambda-2}, \quad s_{\lambda+4} - s_{\lambda-3}, \cdots$$

qui n'est pas égale à zéro doit être négative.

De même en vertu de la troisième propriété la première des différences

$$s_{\lambda+2} - s_{\lambda-1}, \quad s_{\lambda+3} - s_{\lambda-2}, \quad s_{\lambda+4} - s_{\lambda-3}, \cdots$$

qui ne s'évanouit pas, est positive, si l'on a

$$s_\lambda - s_{\lambda+1} = +1.$$

La série (S) doit donc posséder les mêmes trois propriétés que la série (R).

Il est evident de plus, que la série (R′) doit posséder les propriétés mentionnés, lorsque les posséde la série (S).

En discutant la série (S) de la même manière que (R), nous verrons, qu'elle doit présenter l'une des formes suivantes

$$(S_1) \qquad \cdots, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, \cdots$$

$$(S_\infty) \quad \cdots, s^0-1, s^0-1, s^0-1, s^0, s^0-1, s^0-1, s^0-1, \cdots$$

$$(S^\infty) \quad \cdots, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0-1, s^0, s^0, s^0, s^0, \cdots$$

$$(S') \quad \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_{-2}}, s_0, \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_{-1}}, s_0, \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_0}, s^0, \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_1}, s^0, \underbrace{s^0-1, \cdots}_{t_2}.$$

La série

$$(T) \qquad \cdots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \cdots$$

aura les propriétés mentionnées des séries (R) et (S).

On peut prolonger ces considérations aussi loin, qu'on voudra et toutes les séries

$$(\Phi) \qquad R, S, T, \cdots$$

qui seront obtenues de cette manière, doivent posséder les propriétés mentionnées.

En autre, si l'une des séries (Φ) a ces trois propriétés, toutes les précédentes les auront aussi et la série (J′) satisfait à la condition

$$L_\varkappa \geqq \frac{2}{3}$$

pour tout indice $\varkappa$.

Supposons d'abord, que nous obtenons de cette manière la série, qui ne contient que des nombres égaux.

Dans ce cas les précédentes séries (Φ) et aussi la série (J′) sont périodiques.

Il est facile de voir de plus, que toutes les fois, qu'on a

$$\alpha_{\varkappa-1} = 2, \quad \alpha_\varkappa = 2, \quad \alpha_{\varkappa+1} = 1, \quad \alpha_{\varkappa+2} = 1,$$

le nombre $2i$ des égalités successives

$$\alpha_{\varkappa-2} = \alpha_{\varkappa+3}, \quad \alpha_{\varkappa-3} = \alpha_{\varkappa+4}, \cdots \alpha_{\varkappa-2i-1} = \alpha_{\varkappa+2i+2}$$

doit être moindre, que le nombre des termes dans la période de la série (J'); et si l'on a

$$\alpha_{\varkappa-2}=1,\quad \alpha_{\varkappa-1}=1,\quad \alpha_{\varkappa}=2,\quad \alpha_{\varkappa+1}=2,$$

le nombre $2i$ des égalités successives

$$\alpha_{\varkappa+2}=\alpha_{\varkappa-3},\quad \alpha_{\varkappa+3}=\alpha_{\varkappa-4},\ \cdots,\ \alpha_{\varkappa+2i+1}=\alpha_{\varkappa-2i-2}$$

doit aussi être moindre que le nombre des termes dans la période de la série (J').

Par conséquent $L_{\varkappa}$ ne peut avoir qu'un nombre fini de différentes valeurs et toutes ces valeurs sont plus grandes que $\frac{2}{3}\cdot$

Donc on peut trouver une infinité des séries (J) pour lesquelles les minima de $L_{\varkappa}$ sont plus grands que $\frac{2}{3}\cdot$

Or il résulte de ce, que nous avons demontré ci-dessus, le théorème suivant:*)

Si deux formes (a_0, b_0, c_0) et (a', b', c') réduites sont équivalentes entre elles et la forme (a_0, b_0, c_0) correspond à la série

$$\text{(J)}\qquad \cdots,\ \alpha_{-3},\ \alpha_{-2},\ \alpha_{-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots$$

la forme (a', b', c') correspond à la même série (I) ou à la série inverse

$$\text{(J)}\qquad \cdots,\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_0,\ \alpha_{-1},\ \alpha_{-2},\ \alpha_{-3},\ \cdots$$

La série (J) est composée des mêmes termes que la série (J), avec cette seule différence, que les termes y sont rangés dans un ordre inverse.

Donc on peut trouver une infinité des classes de formes de déterminant D, dont les minima sont plus grands que $\frac{2}{3}\sqrt{D}\cdot$

Supposons maintenant, que l'une des séries (Φ) peut être mise sous la forme

$$\cdots,\ \delta,\ \delta,\ \delta,\ \delta\pm 1,\ \delta,\ \delta,\ \delta,\ \cdots$$

Dans cette hypothèse toutes les séries, qui la précédent dans l'ensemble (Φ) sont de la forme suivante

$$\cdots,\ \omega_3,\ \omega_2,\ \omega_1,\ \omega,\ \omega\pm 1,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \cdots$$

et la serie (J') se présentera sous la forme

$$\cdots,\eta_3,\eta_3,\eta_2,\eta_2,\eta_1,\eta_1,2,2,1,1,\eta_1,\eta_1,\eta_2,\eta_2,\eta_3,\eta_3,\cdots$$

ou sous cette autre forme

$$\cdots,\eta_3,\eta_3,\eta_2,\eta_2,\eta_1,\eta_1,1,1,2,2,\eta_1,\eta_1,\eta_2,\eta_2,\eta_3,\eta_3,\cdots$$

Par conséquent la condition

$$L_{\varkappa}\geq\frac{2}{3}$$

*) Seite 389.

pour un certain indice $\varkappa$ sera satisfaite avec le signe $=$, car évidemment on a

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\eta_1+\cfrac{1}{\eta_1+\cfrac{1}{\eta_2+\cfrac{1}{\eta_2+\cdots}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\eta_1+\cfrac{1}{\eta_1+\cfrac{1}{\eta_2+\cfrac{1}{\eta_2+\cdots}}}}}=3\,.$$

Donc on peut trouver une infinité des séries (J), pour lesquels le minimum de $L_\varkappa$ est égal à $\frac{2}{3}\cdot$

En d'autres termes, il y a une infinité de classes de formes (a, b, c) d'un déterminant donné D, dont le minimum est égal à $\frac{2}{3}\sqrt{D}\cdot$

Nous allons enfin trouver parmi les séries (J′) celles, qui satisfont à une nouvelle condition

$$L_\varkappa \gtreqless l$$

pour tout indice $\varkappa$, l étant un nombre donné plus grand que $\frac{2}{3}\cdot$

Posons dans la série cherchée (J′) pour un certain indice $\varkappa$

$$\alpha_{\varkappa\mp1}=2,\quad \alpha_\varkappa=2,\quad \alpha_{\varkappa\pm1}=1,\quad \alpha_{\varkappa\pm2}=1$$

et soit aussi $2j$ le nombre des égalités successives

$$\alpha_{\varkappa\mp2}=\alpha_{\varkappa\pm3},\quad \alpha_{\varkappa\mp3}=\alpha_{\varkappa\pm4},\quad \cdots,\quad \alpha_{\varkappa\mp2j\mp1}=\alpha_{\varkappa\pm2j\pm2}\cdot$$

Ce nombre $2j$ ne peut surpasser un nombre suffisement grand $2j'$, car quelques soient les nombres

$$\alpha_{\varkappa\mp2}=\alpha_{\varkappa\pm3}>1,\quad \alpha_{\varkappa\mp3}=\alpha_{\varkappa\pm4}\gtreqless 1,\quad \cdots\quad \alpha_{\varkappa\mp2j\mp1}=\alpha_{\varkappa\pm2j\pm2}>1,$$

la différence

$$3-\frac{2}{L_\varkappa}=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa\pm3}+\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa\pm4}+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa\pm2j\pm2}+\cdots}}}}}$$

$$-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa\mp2}+\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa\mp3}+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_{\varkappa\mp2j\mp1}+\cdots}}}}$$

pour des valeurs j assez grandes sera aussi petite, qu'on voudra.

Donc, en désignant le maximum de j par j_0, on aura

$$j_0 \leqq j'.$$

On voit encore que si l'on a

$$r_\lambda - r_{\lambda+1} = \pm 1$$

et

$$r_{\lambda-1} = r_{\lambda+2}, \quad r_{\lambda-2} = r_{\lambda+3}, \quad \cdots \quad r_{\lambda-\varrho} = r_{\lambda+\varrho+1},$$

le nombre ϱ doit satisfaire à la condition

$$(\varrho + 2)\, r^0 \leqq j_0 + 1.$$

Désignons maintenant par ϱ_0 le maximum de ϱ et par $\sigma_0, \tau_0, \cdots$ les valeurs qui dépendent respectivement des séries $S, T, \cdots$ de la même manière que ϱ_0 de la série R.

On aura

$$(28) \qquad \begin{cases} j_0 < j' \\ (\varrho_0 + 2)\, r^0 \leqq j_0 + 1 \\ (\sigma_0 + 2)\, s^0 < \varrho_0 + 1 \\ (\tau_0 + 2)\, t^0 \leqq \sigma_0 + 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Ces inégalités montrent, que l'une des séries

$$(\Phi) \qquad R, S, T, \cdots$$

n'est composée que des entiers positifs égaux, c'est à dire présente la forme suivante

$$(\mathrm{W}) \qquad \cdots, w^0, w^0, w^0, w^0, w^0, w^0, \cdots$$

Par conséquent la série précédente (V) peut être mise sous la forme

$$(\mathrm{V}) \qquad \cdots, v^0, \underbrace{v^0-1, v^0-1 \cdots}_{w^0}, v^0, \underbrace{v^0-1, v^0-1 \cdots}_{w^0}, v^0, \underbrace{v^0-1, \cdots}_{w^0}, \cdots$$

Quant au nombre des séries

$$R, S, T, \cdots U, V, W,$$

il ne surpasse pas $j' + 1$.

En effet dans le cas contraire la série des entiers positifs (le dernier de ces nombres peut être égal à zéro)

$$\varrho_0, \sigma_0, \tau_0, \cdots$$

qui satisfont aux inégalités (28) contient au moins $j' + 1$ termes; ce qui est impossible.

Supposons encore, que parmi les nombres $\varrho_0, \sigma_0, \tau_0, \cdots$ les deux ψ_0 et χ_0 correspondent respectivement aux séries (U) et (V).

Alors au lieu des inégalités (28), on aura

$$(29)^{*}) \quad \left\{\begin{array}{r} j_0 \leq j' \\ (\varrho_0 + 2)\, r^0 \leq j_0 + 1 \\ (\sigma_0 + 2)\, s^0 \leq \varrho_0 + 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (\chi_0 + 2)\, v^0 \leq \psi_0 + 1 \\ w^0 \leq \chi_0 + 1 \end{array}\right.$$

Puisque les entiers

$$j^0,\ r^0,\ \varrho_0,\ s^0,\ \sigma_0,\ \cdots,\ v^0,\ \chi_0,\ w^0$$

qui satisfont à ces conditions ne peuvent avoir, qu'un nombre fini de différentes valeurs, le nombre des séries cherchées (J′) est aussi un nombre fini.

Par conséquent le nombre des séries (J) qui satisfont pour tout indice $\varkappa$ à la condition

$$L_\varkappa \geq l > \frac{2}{3}$$

est aussi fini; car nous avons démontré ci-dessus, qu'en excluant les séries (J′), la condition

$$L_\varkappa > \frac{2}{3}$$

pour tout indice $\varkappa$ n'est remplie que par les deux séries

(J_0) $\qquad \cdots, 1, 1, 1, 1, \cdots$

(J_1) $\qquad \cdots, 2, 2, 2, 2, \cdots$

En d'autres termes il n'y a qu'un nombre fini des classes de formes (a, b, c) de déterminant positif D, dont les valeurs absolues ne peuvent pas être moindre que $l\sqrt{D}$, l étant un nombre donné plus grand que $\frac{2}{3}$.

Remarquons enfin, que ces séries (J) sont périodiques.

Par conséquent pour toute forme (a', b', c') reduite, qui correspond à l'une de ces séries, la racine positive ξ' de l'équation

$$a'\xi^2 + 2b'\xi + c' = 0$$

peut être developpée en fraction continue de la forme

$$\xi' = \beta_0 + \cfrac{1}{\beta_1 + \cdots + \cfrac{1}{\beta_{q-1} + \cfrac{1}{\xi'}}}$$

et le développement de la racine négative $\frac{-1}{\eta}$ de la même équation sera de la forme

*) Si la série (W) est la même que série (R), ces inegalités deviennent

$$j_0 \leq j', \quad r^0 \leq j_0 + 1.$$

$$\frac{-1}{\eta'} = -\cfrac{1}{\beta_{q-1}+\cfrac{1}{\beta_{q-2}+\cdots+\cfrac{1}{\beta_0+\cfrac{1}{\eta'}}}},$$

$$\beta_0,\ \beta_1,\ \cdots\ \beta_{q-1},\ \beta_q$$

étant la période de la série correspondante (J).

Il résulte de là, que $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{c'}{a'}$ sont des nombres rationnels.

En outre il est évident, que cette forme (a', b', c') devient égale à son minimum pour quelques valeurs finies de x' et y'.

Donc toutes les fois que les valeurs absolues d'une forme binaire indéterminée

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

ne peuvent être moindre que $l\sqrt{b'^2 - a'c'}$, l étant un nombre donné plus grand que $\frac{2}{3}$, les quantités

$$\frac{b'}{a'} \text{ et } \frac{c'}{a'}$$

sont rationnelles et le minimum de cette forme correspond à quelques valeurs finies de x' et y'.

En déterminant successivement les limites précises des minima des formes binaires indeterminées nous obtenons la table suivante:

La valeur absolue de toute forme (a, b, c) indeterminée non équivalente à la forme	peut être faite moindre que la quantité	qui est le minimum des formes equivalentes à
$f_0 = \sqrt{\frac{4}{5}D}\,(x^2 - xy - y^2)$	$\sqrt{\frac{4}{5}D}$	f_0
$f_0,\ f_1 = \sqrt{\frac{D}{2}}\,(x^2 - 2xy - y^2)$	$\sqrt{\frac{1}{2}D}$	f_1
$f_0, f_1, f_2 = \sqrt{\frac{4D}{221}}\,(5x^2 - 11xy - 5y^2)$	$\sqrt{\frac{100}{221}D}$	f_2
$f_0,\ f_1,\ f_2,$ $f_3 = \sqrt{\frac{4D}{1517}}\,(13x^2 - 29xy - 13y^2)$	$\sqrt{\frac{676}{1517}D}$	f_3
$f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3$ $f_4 = \sqrt{\frac{4D}{7565}}\,(29x^2 - 63xy - 31y^2)$	$\sqrt{\frac{3364}{7565}D}$	f_4

La valeur absolue de toute forme (a, b, c) indeterminée non équivalente à la forme	peut être faite moindre que la quantité	qui est le minimum des formes équi-valentes à
f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 $f_5 = \sqrt{\frac{D}{650}}(17x^2 - 38xy - 17y^2)$	$\sqrt{\frac{289}{650} D}$	f_5
$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ $f_6 = \sqrt{\frac{4D}{71285}}(89x^2 - 199xy - 89y^2)$	$\sqrt{\frac{31684}{71285} D}$	f_6
$f_0, f_1, f_2, f_2, f_4, f_5, f_6$ $f_7 = \sqrt{\frac{4D}{257045}}(169x^2 - 367xy - 181y^2)$	$\sqrt{\frac{114244}{257045} D}$	f_7
$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ $f_8 = \sqrt{\frac{D}{21170}}(97x^2 - 216xy - 98y^2)$	$\sqrt{\frac{9409}{21170} D}$	f_8
$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$ $f_9 = \sqrt{\frac{4D}{488597}}(233x^2 - 521xy - 233y^2)$	$\sqrt{\frac{217156}{488597} D}$	f_9

Nous nous proposons de revenir en detail sur ce sujet dans une autre occasion.

St. Petersbourg, 1879.