Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

Georg Cantor in Halle a. d. Saale.

2.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XV, pag. 1.)

Um die folgende Darstellung durch Abkürzung zu erleichtern, sei mir zunächst gestattet einiges Formale festzustellen.

Die Identität zweier Punktmengen P und Q werde durch die Formel: $P \equiv Q$ ausgedrückt. Haben zwei Mengen P und Q kein gemeinschaftliches Element, so sagen wir, sie seien *ohne Zusammenhang*. Entsteht eine Menge P aus der Zusammenfassung mehrerer: $P_1, P_2, P_3, \cdots$, in endlicher oder unendlicher Anzahl, welche paarweise keinen Zusammenhang haben, so schreiben wir:

$$P \equiv \{P_1, P_2, P_3, \cdots\}.$$

Gehören alle Punkte einer Menge P zu einer andern Menge Q, so sagen wir: P sei in Q *enthalten* oder auch P sei ein Divisor von Q, Q ein Multiplum von P. Sind $P_1, P_2, P_3, \cdots$ irgend welche Punktmengen in endlicher oder unendlicher Anzahl, so gehört zu ihnen sowohl ein kleinstes gemeinsames Multiplum, welches wir mit:

$$\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \cdots)$$

bezeichnen und welches die Menge ist, die aus allen verschiedenen Punkten von $P_1, P_2, P_2, \cdots$ besteht und sonst keine anderen Punkte als Elemente besitzt, — wie auch ein grösster gemeinsamer Divisor, den wir $\equiv$

$$\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \cdots)$$

setzen und welcher die Menge der Punkte ist, die allen $P_1, P_2, P_3, \cdots$ gemeinsam sind. Beispielsweise können wir, wenn $P', P'', P''', \cdots$ die auf einander folgenden Ableitungen einer Punktmenge P sind (s. Art. 1, pag. 2), sagen, dass P'' ein Divisor von P', P''' sowohl

Divisor von P'', wie auch von P', allgemein $P^{(\nu)}$ Divisor von $P^{(\nu-1)}$, $P^{(\nu-2)}, \cdots P'$ ist; dagegen ist P' *im Allgemeinen kein* Divisor von P; wenn aber P selbst die erste Ableitung einer Menge Q ist, so ist P' Divisor von P.

Es ist ferner zweckmässig ein Zeichen zu haben, welches die Abwesenheit von Punkten ausdrückt, wir wählen dazu den Buchstaben O; $P \equiv O$ bedeutet also, dass die Menge P *keinen einzigen* Punkt enthält, also streng genommen als solche gar nicht vorhanden ist. Um auch hierfür ein Beispiel zu geben, so ist eine Punktmenge *erster Gattung* und n^{ter} Art dadurch charakterisirt, dass:

$$P^{(n+1)} \equiv O,$$

dagegen $P^{(n)}$ von O verschieden ist.

Zwei Mengen *hängen* durch ihren grössten gemeinsamen Divisor *zusammen*, und wenn der letztere $= 0$ ist, so sind sie *ohne Zusammenhang*.

Besitzen zwei Punktmengen, P und Q gleiche *Mächtigkeit*, gehören sie also zu *einer* Classe (Art. 1, pag. 3 u. 4), so nennen wir sie *äquivalent* und drücken diese Beziehung durch die Formel aus:

$$P \sim Q.$$

Hat man $P \sim Q$; $Q \sim R$; so ist auch immer:

$$P \sim R.$$

Ist ferner $P_1, P_2, P_3, \cdots$ eine Reihe von Mengen, welche paarweise keinen Zusammenhang haben, $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ eine andere Reihe, von welcher das Gleiche gilt und hat man: $P_1 \sim Q_1$; $P_2 \sim Q_2$; $P_3 \sim Q_3$; $\cdots$, so ist auch:

$$\{P_1, P_2, P_3, \cdots\} \sim \{Q_1, Q_2, Q_3, \cdots\}.$$

Die Punktmengen der ersten Gattung lassen sich, wie wir soeben gesehen, durch den Begriff der Ableitung, soweit er bisher entwickelt ist, vollkommen charakterisiren, für die der zweiten Gattung reicht jener Begriff nicht aus, hier wird eine Erweiterung desselben nothwendig, die sich bei tieferem Erfassen wie von selbst darbietet.

Man beachte, dass in der Reihe der Ableitungen $P', P'', P''', \cdots$ einer Menge P jedes Glied ein Divisor der vorangehenden ist, jede neue Ableitung $P^{(\nu)}$ also aus der vorhergehenden $P^{(\nu-1)}$ durch *Wegfall* gewisser Punkte entsteht, *ohne* dass neue Punkte hinzukommen.

Gehört P zur zweiten Gattung, so wird P' sich aus zwei wesentlich verschiedenen Punktmengen Q und R zusammensetzen, so dass:

$$P' \equiv \{Q, R\},$$

die eine Q besteht aus denjenigen Punkten von P', welche bei hinreichendem Fortschreiten in der Folge $P', P'', P''', \cdots$ verloren gehen, die andere R umfasst diejenigen Punkte, welche in *allen* Gliedern der Folge $P', P'', P''', \cdots$ erhalten bleiben, es ist also R definirt durch die Formel:

$$R = \mathfrak{D}(P', P'', P''', \cdots).$$

Wir haben aber auch offenbar:

$$R = \mathfrak{D}(P'', P''', P^{IV}, \cdots)$$

und allgemein:

$$R = \mathfrak{D}(P^{(n_1)}, P^{(n_2)}, P^{(n_3)}, \cdots),$$

wo $n_1, n_2, n_3, \cdots$ irgend eine Reihe ins Unendliche wachsender ganzer, positiver Zahlen ist.

Diese aus der Menge P hervorgehende Punktmenge R werde nun durch das Zeichen:

$$P^{(\infty)}$$

ausgedrückt und Ableitung von P der Ordnung ∞ genannt.

Die erste Ableitung von $P^{(\infty)}$ werde mit $P^{(\infty+1)}$, die n^{te} Ableitung von $P^{(\infty)}$ mit $P^{(\infty+n)}$ bezeichnet; $P^{(\infty)}$ wird aber auch eine, im Allgemeinen von O verschiedene Ableitung von der Ordnung ∞ haben, wir nennen sie $P^{(2\infty)}$. Durch Fortsetzung dieser Begriffsconstructionen kommt man zu Ableitungen, die consequenterweise durch:

$$P^{(n_0\infty + n_1)}$$

zu bezeichnen sind, wo n_0, n_1 positive ganze Zahlen sind. Wir kommen aber auch darüber hinaus, indem wir:

$$\mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(2\infty)}, P^{(3\infty)}, \cdots)$$

bilden und dafür das Zeichen $P^{(\infty^2)}$ festsetzen.

Hieraus ergiebt sich durch Wiederholung derselben Operation und Combinirung mit den früher gewonnenen der allgemeinere Begriff:

$$P^{(n_0\infty^2 + n_1\infty + n_2)},$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man zu:

$$P^{(n_0\infty^\nu + n_1\infty^{\nu-1} + \cdots + n_\nu)},$$

wo $n_0, n_1, \cdots, n_\nu$ positive ganze Zahlen sind. Zu weiteren Begriffen gelangt man, indem man ν variabel werden lässt; man setze:

$$P^{(\infty^\infty)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(\infty^2)}, P^{(\infty^3)}, \cdots).$$

Durch consequentes Fortschreiten gewinnt man successive die weiteren Begriffe:

$P^{(n\infty^\infty)}$, $P^{(\infty^\infty+1)}$, $P^{(\infty^\infty+n)}$, $P^{(\infty^{n\infty})}$, $P^{(\infty^{\infty^n})}$, $P^{(\infty^{\infty^\infty})}$ u. s. w.;

wir sehen hier eine dialektische Begriffserzeugung*), welche immer weiter führt und dabei frei von jeglicher Willkür in sich nothwendig und consequent bleibt.

Für die Punktmengen der ersten Gattung ist, wie aus ihrem Begriffe folgt:

$$P^{(\infty)} \equiv O;$$

es ist bemerkenswerth, dass auch das Umgekehrte bewiesen werden kann: jede Punktmenge, für welche jene Gleichung besteht, ist von der ersten Gattung; die Mengen erster Gattung sind also durch jene Gleichung *völlig charakterisirt.*

Es ist leicht, das Beispiel einer Punktmenge zweiter Gattung zu bilden, für welche $P^{(\infty)}$ aus einem Punkte p besteht; man nehme in Intervallen, die auf einander folgen, an einander grenzen und dabei unendlich klein werdend gegen p convergiren, Punktmengen der ersten Gattung an, deren Ordnungszahlen über alle Grenzen hinaus wachsen, wenn die entsprechenden Intervalle sich dem p nähern, — so bilden sie zusammengenommen ein derartiges Beispiel, welches zugleich die in Art. 1., pag. 3 aufgeworfene Frage erledigt, ob zu einer Punktmenge zweiter Gattung ein Intervall immer gehören müsse, in welchem sie *überalldicht* sei; wir sehen an diesem Beispiel, dass dies *keineswegs* erforderlich ist.

Mit gleicher Leichtigkeit construirt man Punktmengen der zweiten Gattung, für welche $P^{(\infty+n)}$ oder $P^{(2\infty)}$ oder allgemeiner:

$$P^{(n_0\infty^{\nu}+n_1\infty^{\nu-1}+\cdots+n_\nu)}$$

aus einem vorgeschriebenen Punkte p bestehen.

Alle derartigen Mengen sind in *keinem* Intervalle überalldicht und gehören ausserdem der *ersten* Classe an; sie gleichen in diesen beiden Beziehungen den Punktmengen erster Gattung.

(Fortsetzung folgt.)

Halle im Mai 1880.

---

*) Zu derselben bin ich vor nun zehn Jahren gelangt; bei Gelegenheit einer eigenthümlichen Darstellung des Zahlbegriffs (Math. Ann. Bd. V) habe ich entfernt darauf hingewiesen.