Sur les formes quadratiques binaires indéfinies.

Par

A. Markoff à St. Petersbourg.

(Sécond mémoire.)

Il a été demontré dans mon premier mémoire*) „Sur les formes quadratiques binaires indéfinies“, qu'à toute classe de formes binaires quadratiques d'un déterminant positif donné correspond une certaine suite déterminée de nombres positifs entiers

$$\text{(J)} \qquad \cdots, \alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$$

et réciproquement; le rapport entre $2\sqrt{D}$ et le minimum de ces formes est égal au maximum de la somme

$$\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \ddots}} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \ddots}} = \frac{2}{L_\varkappa},$$

où l'indice $\varkappa$ est un nombre variable.

Après avoir fait différentes suppositions relativement à la suite (J) et avoir varié l'indice $\varkappa$, je suis arrivé aux résultats suivants:

I. Pour chaque nombre positif

$$l < \frac{2}{3}$$

on peut trouver une quantité infinie de suites (J) satisfaisant à la condition

$$L_\varkappa \overline{>} l$$

pour toute indice $\varkappa$.

II. A tout nombre positif

$$l > \frac{2}{3}$$

donné correspond un nombre limité de suites (J), satisfaisant à la condition

$$L_\varkappa \overline{>} l$$

pour toute indice $\varkappa$.

---

*) Mathematische Annalen, Band XV., p. 381—406.

III. Si la suite (J) satisfait à la condition

$$L_\varkappa \geqq l > \frac{2}{3}$$

pour toute indice $\varkappa$, dans ce cas il lui correspond un certain système (Φ)

$$(\Phi) \qquad \begin{cases} \cdots, w_{-2}, & w_{-1}, & w_0, & w_1, & w_2, \cdots & W, \\ \cdots, v_{-2}, & v_{-1}, & v_0, & v_1, & v_2, \cdots & V, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdots, s_{-2}, & s_{-1}, & s_0, & s_1, & s_2, \cdots & S, \\ \cdots, r_{-2}, & r_{-1}, & r_0, & r_1, & r_2, \cdots & R \end{cases}$$

qui se compose d'un nombre limité de suites

$$W,\ V,\ \cdots,\ S,\ R,$$

dont W ne contient que des termes égaux

$$\cdots,\ w^0,\ w^0,\ w^0,\ w^0,\ \cdots$$

et toutes les autres se déduisent les unes des autres d'après la forme

$$\cdots,\ v^0,\ \underbrace{v^0-1}_{w_{-1}},\quad v^0,\ \underbrace{v^0-1}_{w_0},\quad v^0,\ \underbrace{v^0-1}_{w_1},\ \cdots \qquad V,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdots,\ r^0,\ \underbrace{r^0-1}_{s_{-1}},\quad r^0,\ \underbrace{r^0-1}_{s_0},\quad r^0,\ \underbrace{r^0-1}_{s_1},\ \cdots \qquad R;$$

enfin la suite (J) peut être mise sous la forme

$$\cdots,2,2,\underbrace{1}_{2r_{-1}},\quad 2,\ 2,\underbrace{1}_{2r_0},\quad 2,\ 2,\underbrace{1}_{2r_1},\cdots$$

Je me propose de déterminer dans ce second mémoire la période de la suite (J) et le maximum de la somme $\frac{2}{L_\varkappa}$, les nombres

$$w^0,\quad v^0,\ \cdots,\ s^0,\quad r^0$$

étant connues.

§ 1.

Modifions quelques unes des notations précédentes afin de faciliter les discussions qui vont suivre.

Posons

$$w^0 = a_0,\quad v^0 = a_1,\ \cdots,\ s^0 = a_{n-2},\ r^0 = a_{n-1}$$

et désignons les suites

$$W,\ V,\ \cdots,\ S,\ R$$

par les symboles correspondantes:

$$(a_0),\ (a_0, a_1),\ \cdots,\ (a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}),\ (a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}).$$

Le symbole (a_0) représente la suite

$$\cdots, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, \cdots,$$

le symbole (a_0, a_1) — la suite

$$\cdots, a_1, \underbrace{\overset{a_1-1}{}}_{a_0}, a_1, \underbrace{\overset{a_1-1}{}}_{a_0}, a_1, \underbrace{\overset{a_1-1}{}}_{a_0}, \cdots,$$

et en général si $(a_0, a_1, \cdots, a_\nu)$ représente une suite

$$\cdots, b_{\varkappa,-2}, b_{\nu,-1}, b_{\nu,0}, b_{\varkappa,1}, b_{\varkappa,2}, \cdots$$

la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_\nu, a_{\nu+1})$ peut être mise sous la forme:

$$\cdots, a_{\nu+1}, \underbrace{\overset{a_{\nu+1}-1}{}}_{b_{\nu,-2}}, a_{\nu+1}, \underbrace{\overset{a_{\varkappa+1}-1}{}}_{b_{\nu,-1}}, a_{\varkappa+1}, \underbrace{\overset{a_{\varkappa+1}-1}{}}_{b_{\varkappa,0}}, a_{\varkappa+1}, \underbrace{\overset{a_{\nu+1}-1}{}}_{b_{\nu,1}}, \cdots$$

Désignons en outre par $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_\nu \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_\nu \end{pmatrix}$ une suite:

$$\cdots, b_{\nu,-2}, b_{\nu,-2}, b_{\nu,-1}, b_{\nu,-1}, b_{\nu,0}, b_{\nu,0}, b_{\nu,1}, b_{\nu,1}, b_{\nu,2}, b_{\nu,2}, \cdots$$

qu'on obtient en répétant 2 fois chacun des termes de la suite

$$(a_0, a_1, \cdots, a_\nu).$$

De cette manière le symbole $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_{n-2}, & a_{n-1}, & 2 \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_{n-2}, & a_{n-1}, & 2 \end{pmatrix}$ représentera la suite (J') pour laquelle la suite R est exprimée par le symbole $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1})$.

En appliquant ces mêmes notations aux suites J_0 et J_1, auquelles ne correspondent aucunes suites R, nous représenterons la première d'elles par le symbole $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la seconde par $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les suites $(a_0, a_1, \cdots, a_\nu)$ et $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_\nu \end{pmatrix}$ sont périodiques. La manière de les obtenir l'indique suffisamment.

Pour trouver le nombre m_ν et la somme s_ν des termes renfermés dans une période*) de la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_\nu)$ remarquons les relations

(1) $$m_{\varkappa+1} = m_\varkappa + s_\nu,$$

(2) $$s_{\nu+1} = m_\varkappa a_{\nu+1} + s_\varkappa (a_{\varkappa+1} - 1)$$

d'où l'on déduit

$$s_{\nu+1} = m_\varkappa + (a_{\varkappa+1} - 1) m_{\nu+1}.$$

De même on trouve

(3) $$s_\nu = m_{\nu-1} + (a_\varkappa - 1) m_\nu.$$

---

*) Ici comme dans toutes les discussions qui vont suivre il s'agit de périodes avec le minimum de termes.

En substituant cette valeur de $s_\varkappa$ dans la formule (1) nous aurons

$$m_{\nu+1} = a_\nu m_\varkappa + m_{\nu-1}. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) et les égalités évidentes

$$m_0 = 1, \quad m_1 = a_0 + 1$$

nous indiquent, que les fractions $\frac{m_{\nu+1}}{m_\nu}$ et $\frac{s_\nu}{m_\nu}$ sont irréductibles et égales respectivement à

$$a_\nu + \cfrac{1}{a_{\nu+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0 + 1}}}, \qquad a_\varkappa - 1 + \cfrac{1}{a_{\nu+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0 + 1}}}.$$

Quant au nombre et à la somme des termes, renfermés dans une période de la suite $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_\nu \end{pmatrix}$, elles sont respectivement le double de $m_\varkappa$ et le double de $s_\varkappa$.

§ 2.

A chaque suite $(a_0, a_1, \cdots, a_{\nu-1}, a_\nu)$ correspondent plusieurs périodes différentes qu'on obtient de l'une d'elles à l'aide de substitutions circulaires de tous ses termes.

Si par exemple

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}, \alpha_m \tag{Π_1}$$

est une des périodes de la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\nu)$, toutes les autres périodes seront

$$(\Pi) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_1, \\ \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_{m-2}, \\ \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}. \end{array} \right.$$

Nous nous occuperons particulièrement de deux de ces périodes.

Désignons l'une d'elles par $[a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\nu]$ et admettons qu'elle soit la période Π_1; désignons l'autre par le symbole

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\nu\}$$

et admettons qu'elle soit

$$\alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}, \cdots, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\mu-1}. \tag{Π_2}$$

Formons de Π_1 et de Π_2 les nouvelles périodes

$$\underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_1},\quad a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_2},\quad a_{\varkappa+1},\ \cdots,\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_m},\quad a_{\varkappa+1}$$

et

$$a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_\mu},\ \cdots,\ a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_m},\ a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_1},\ \cdots,\ a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_{\mu-1}}$$

et entendons nous de désigner la première par $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}\}$, la seconde par $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}]$. Ce procédé peut être consideré comme une règle générale, car il ne contredit en rien les principes établis précédemment à l'égard des suites $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$.

Il nous donne les moyens de déterminer successivement les périodes

$$[a_0, a_1],\quad \{a_0, a_1, a_2\},\quad [a_0, a_1, a_2, a_3],\ \cdots$$

et

$$\{a_0, a_1\},\quad [a_0, a_1, a_2],\quad \{a_0, a_1, a_2, a_3\},\ \cdots$$

les périodes $\{a_0\}$ et $[a_0]$ étant connues. La suite (a_0) se compose de termes égaux à a_0, par conséquent les symboles $\{a_0\}$ et $[a_0]$ l'un et l'autre désignent une même période à un seul terme a_0

De cette manière les symboles $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa\}$ et $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa]$ sont complètement déterminés.

Par exemple $[a_0, a_1]$ et $\{a_0, a_1\}$ seront

$$a_1,\ \underbrace{a_1-1}_{a_0}\quad \text{et}\quad \underbrace{a_1-1}_{a_0},\ a_1.$$

§ 3.

En comparant les périodes Π_1 et Π_2 avec n'importe laquelle des périodes Π

$$\alpha_\omega,\ \alpha_{\omega+1},\ \cdots,\ \alpha_m,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{\omega-1},$$

nous trouverons toujours parmi les différences

$$\alpha_1-\alpha_\omega,\ \alpha_2-\alpha_{\omega+1},\ \cdots,\ \alpha_{m-\omega+1}-\alpha_m,\ \alpha_{m-\omega+2}-\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m-\alpha_{\omega-1}$$

quelques unes différentes de zéro dont la première sera égale à $+1$ et la dernière à -1. De même parmi

$$\alpha_\mu-\alpha_\omega,\ \cdots,\ \alpha_{\mu-1}-\alpha_{\omega-1}$$

la première des différences non égales à zéro sera -1 et la dernière $+1$.

En effet la propriété ci-dessus mentionnée distingue évidemment $[a_0, a_1]$ et $\{a_0, a_1\}$ l'une de l'autre et de toutes les autres périodes de la suite (a_0, a_1):

$$\underbrace{a_1-1}_{a_0-1},\ a_1,\ a_1-1;$$

$$\underbrace{a_1-1}_{a_0-2},\ a_1,\ a_1-1,\ a_1-1;$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$a_1-1,\ a_1,\ \underbrace{a_1-1}_{a_0-1}.$$

La loi de formation de ces périodes $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}]$ et $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}\}$ nous montre en même temps qu'elles jouissent de cette propriété toutes les fois que les périodes $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa]$ et $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa\}$ la possèdent.

Notre théorème a donc lieu toutes les fois qu'il y a plus d'une période qui correspond à la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa)$.

De même il est facile de démontrer que le premier et le dernier terme de la période $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa]$ sont respectivement égaux à

$$a_\varkappa,\ a_\varkappa-1$$

et les autres termes de cette période forment une suite symmétrique dans laquelle deux termes également distants des extrêmes sont égaux entre eux.

Enfin la période $\{a_0, a_1, \cdots a_\varkappa\}$ est inverse à la précédente.

§ 4.

En vertu des résultats précédents le maximum de la quantité $\frac{2}{L_\varkappa}$ pour la suite $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \end{pmatrix}$ est égal à

$$\xi' + \frac{1}{\eta'}$$

où la valeur de ξ' est déterminée par le développement

$$\xi' = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\xi'}}}}}}}}$$

et celle de η' par le suivant

$$\eta' = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\eta'}}}}}}.$$

La somme $\xi' + \frac{1}{\eta'}$ peut être facilement exprimée à l'aide des fractions irréductibles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ respectivement égales à

$$\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1}}}}}}}$$

et

$$\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2}}}}}}.$$

A cet effet remarquons que ξ' est égal à la racine positive de l'équation

$$Q\xi^2 - (P - Q')\,\xi - P' = 0$$

et $\frac{-1}{\eta'}$ à la racine négative de la même équation

Nous avons par conséquent en vertu d'une formule connue

(5) le maximum de $\frac{1}{L_\varkappa} = \sqrt{\frac{P'}{Q} + \left(\frac{P - Q'}{2Q}\right)^2}$.

§ 5.

Les nombres $a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa$ dans les symboles

$$(a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa), \quad \begin{pmatrix} a_0, \cdots, a_\varkappa \\ a_0, \cdots, a_\varkappa \end{pmatrix}, \quad [a_0, \cdots, a_\varkappa], \quad \{a_0, \cdots, a_\varkappa\}$$

par la nature même de la question que nous discutons sont des entiers positifs. Nous croyons utile cependant d'étendre la définition des symboles sur le cas $a_0 = 0$.

Convenons de déduire à l'aide des mêmes procédés que nous avons employés pour $a_0 > 0$ les séries

$$(0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}),\quad \begin{pmatrix}0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\\ 0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\end{pmatrix}$$

de la série

$$(0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa)$$

et les périodes

$$[0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}],\quad \{0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\}$$

des périodes

$$\{0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa\},\quad [0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa].$$

De cette manière le symbole $(0,\ a_1)$, par exemple, représentera

$$\cdots,\ a_1,\ \underbrace{0}^{a_1-1},\ a_1,\ \underbrace{0}^{a_1-1},\ a_1,\ \underbrace{0}^{a_1-1},\ a_1,\ \cdots$$

ou simplement

$$\cdots,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ \cdots.$$

En général il est facile de voir que les symboles

$$(0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa),\quad \begin{pmatrix}0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\\ 0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\end{pmatrix},\quad [0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa],$$
$$\{0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\}$$

sont équivalentes à

$$(a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa),\quad \begin{pmatrix}a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\end{pmatrix},\quad [a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa],\quad \{a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\}.$$

§ 6.

Introduisons encore une notation nouvelle. Si les périodes

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_t & A,\\
\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s & B,\\
\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_r & C,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\
\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n & F
\end{array}$$

sont telles que pour obtenir A nous devons écrire successivement b fois la période B, c fois C, $\cdots$ et f fois F, nous désignerons A par la formule symbolique

$$A = bB + cC + \cdots + fF,$$

qui indiquera clairement la manière dont A est formée.

En appliquant cette notation pour exprimer la manière de composer les périodes $[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}]$ et $\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\}$ nous aurons les formules:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &[a_0, a_1, \cdots, a_\nu, a_{\varkappa+1}] = [a_{\nu+1}] + \alpha_\mu[a_{\varkappa+1}-1] + \cdots + [a_{\varkappa+1}] \\ &\qquad + \alpha_m[a_{\nu+1}-1] + [a_{\varkappa+1}] + \alpha_1[a_{\varkappa+1}-1] \\ &\qquad + \cdots + [a_{\nu+1}] + \alpha_{\mu-1}[a_{\nu+1}-1] \\ &\text{et} \\ &\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}\} = \alpha_1\{a_{\varkappa+1}-1\} + \{a_{\varkappa+1}\} + \alpha_2\{a_{\varkappa+1}-1\} \\ &\qquad + \{a_{\varkappa+1}\} + \cdots + \alpha_m\{a_{\varkappa+1}-1\} + \{a_{\varkappa+1}\}, \end{aligned}\right.$$

où

$$\{\alpha_\mu\} + \cdots + \{\alpha_m\} + \{\alpha_1\} + \cdots + \{\alpha_{\mu-1}\} = \{a_0, a_1, \cdots, a_\nu\}$$

et

$$[\alpha_1] + [\alpha_2] + \cdots + [\alpha_m] = [a_0, a_1, \cdots, a_\nu].$$

Si $\varkappa = 0$ les formules (6) se réduisent aux suivantes

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &[a_0, a_1] = [a_1] + a_0[a_1 - 1], \\ &\{a_0, a_1\} = a_0\{a_1 - 1\} + \{a_1\}, \end{aligned}\right.$$

où $a_0 + 1$ et a_1 sont des nombres entiers positifs quelconques.

En posant ensuite dans les formules (6) $\varkappa = 1$ et prenant en considération les formules (7), nous trouvons que pour former la période $[a_0, a_1, a_2]$ il faut écrire successivement a_0 fois la période

$$[a_2] + (a_1 - 1)[a_2 - 1]$$

et une fois la période

$$[a_2] + a_1[a_2 - 1],$$

et pour former la période $\{a_0, a_1, a_2\}$ il faut écrire une fois la période

$$a_1\{a_2 - 1\} + \{a_2\}$$

et ensuite a_0 fois la période

$$(a_1 - 1)\cdot\{a_2 - 1\} + \{a_2\}.$$

Cependant en vertu des mêmes formules (6) on a

$$\begin{aligned} [a_2] + (a_1 - 1)[a_2 - 1] &= [a_1 - 1, a_2], \\ a_1\{a_2 - 1\} + \{a_2\} &= \{a_1, a_2\}, \\ [a_2] + a_1[a_2 - 1] &= [a_1, a_2], \\ (a_1 - 1)\{a_2 - 1\} + \{a_2\} &= \{a_1 - 1, a_2\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, a_2] &= a_0[a_1 - 1, a_2] + [a_1, a_2], \\ \{a_0, a_1, a_2\} &= \{a_1, a_2\} + a_0\{a_1 - 1, a_2\}. \end{aligned}$$

Passons maintenant au cas plus général. Soient

$$\begin{gathered} \alpha, \beta, \gamma, \cdots, \varphi, \psi, \omega, \\ \alpha', \beta', \gamma', \cdots\cdots, \varrho', \sigma', \\ \alpha'', \beta'', \gamma'', \cdots\cdots, \lambda'', \mu'' \end{gathered}$$

les périodes correspondantes

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\},$$

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\}$$

et

$$\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\}$$

et supposons, que l'égalité symbolique

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\} = a_0 \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\} + \{a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}\} \tag{7a}$$

a lieu.

Alors il s'ensuit des formules (6), que la période

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}]$$

s'obtient si l'on écrit successivement a_0 fois la période

$$[a_{2l}] + \alpha''[a_{2l} - 1] + \cdots + [a_{2l}] + \mu''[a_{2l} - 1]$$

et une fois la période

$$[a_{2l}] + \alpha'[a_{2l} - 1] + \cdots + [a_{2l}] + \sigma'[a_{2l} - 1].$$

Cependant les mêmes formules (6) donnent

$$[a_{2l}] + \alpha''[a_{2l} - 1] + \cdots + [a_{2l}] + \mu''[a_{2l} - 1] = [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}]$$

et

$$[a_{2l}] + \alpha'[a_{2l} - 1] + \cdots + [a_{2l}] + \sigma'[a_{2l} - 1] = [a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}].$$

Donc si l'égalité (7a) a réellement lieu, on aura

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}] = a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}] + [a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}].$$

De même en supposant l'une des égalités suivantes

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}] = [a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}] + a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}],$$
$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2l}\} + a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l}\},$$
$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}] = a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l}] + [a_1, a_2, \cdots, a_{2l}],$$

nous avons l'une des égalités correspondantes

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}\} + a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l-1}, a_{2l}\},$$

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}] = [a_1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}] + a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}],$$

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}\} = a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}\}, + \{a_1, a_2, \cdots, a_{2l}, a_{2l+1}\}.$$

En comparant ces résultats avec les égalités (7) il est facile de voir qu'on aura

$$
(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}] = [a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}] \\
&\qquad\qquad + a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}], \\
&\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} = a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} \\
&\qquad\qquad + \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\}, \\
&[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t}] = a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\qquad\qquad + [a_1, a_2, \cdots, a_{2t}], \\
&\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t}\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t}\} \\
&\qquad\qquad + a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}\},
\end{aligned}\right.
$$

où $t, a_0 + 1, a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}, a_{2t}$ sont des nombres entiers et positifs quelconques.

En substituant $a_0 + 1$ au lieu de a_0 dans les formules (8) nous aurons

$$
\begin{aligned}
&[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}] = [a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}] \\
&\qquad\qquad + (a_0 + 1)\cdot[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}], \\
&\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}\} = (a_0 + 1)\cdot\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} \\
&\qquad\qquad + \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\}, \\
&[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}] = (a_0 + 1)\cdot[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\qquad\qquad + [a_1, a_2, \cdots, a_{2t}], \\
&\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\qquad\qquad + (a_0 + 1)\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}\}.
\end{aligned}
$$

D'où l'on déduit

$$
(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}] = [a_0, a_1, \cdots, a_{2t-1}] \\
&\qquad\qquad + [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}], \\
&\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}\} = \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} \\
&\qquad\qquad + \{a_0, a_1, \cdots, a_{2t-1}\}, \\
&[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}] = [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\qquad\qquad + [a_0, a_1, \cdots, a_{2t}], \\
&\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}\} = \{a_0, a_1, \cdots, a_{2t}\} \\
&\qquad\qquad + \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}\}.
\end{aligned}\right.
$$

§ 7.

Soit maintenant

$$a_\varkappa = 2$$

et passons aux suites $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \\ a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \end{pmatrix}$ dont nous avons particulièrement à nous occuper. Dans ce cas en vertu des résultats du § 3. nous avons

$$(10) \qquad \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1 + \cfrac{1}{1}}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m}}}}}}}} .$$

La première de ces fractions, conformément aux notations du § 4., est égale à $\frac{P - 2Q}{Q}$.

En outre en vertu de formules connues de la théorie des fractions continues nous avons

$$\frac{P - P'}{Q - Q'} = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1}}}}}}}$$

et ensuite

$$\frac{Q - Q'}{Q} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m}}}}}}}} .$$

Ainsi de l'équation (10) nous avons

$$\frac{P-2Q}{Q}=\frac{Q-Q'}{Q},$$

ou simplement

$$Q'=3Q-P. \tag{11}$$

En substituant cette valeur de Q' dans l'égalité évidente

$$PQ'-P'Q=+1$$

nous obtenons pour la valeur de P' l'expression

$$P'=3P-\frac{P^2+1}{Q}. \tag{12}$$

Les égalités (11) et (12) nous permettent d'éliminer P' et Q' de la formule (5).

Nous avons donc pour la suite $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_{\nu-1}, 2 \\ a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \end{pmatrix}$ la formule suivante

$$\text{le maximum de } \frac{1}{L_\varkappa}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{Q^2}}. \tag{13}$$

Remarquons encore que les formules (11), (12) et (13) peuvent être appliquées aussi et aux suites $\binom{2}{2}$ et $\binom{1}{1}$ si nous admettons pour la première

$$\frac{P}{Q}=2+\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{Q'}=2$$

et pour la seconde

$$\frac{P}{Q}=1+\frac{1}{1} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{Q'}=1.$$

Donc pour calculer la valeur du maximum de $L_\varkappa$ il suffit de connaitre la valeur correspondante de Q. Quant aux nombres Q, nous trouverons pour les exprimer des formules correspondantes aux égalités symboliques (9).

§ 8.

Soient

$$\frac{P_{\alpha,\lambda}}{Q_{\alpha,\lambda}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\cdots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{2}}}}}, \qquad \frac{P'_{\alpha,\lambda}}{Q'_{\alpha,\lambda}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\cdots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda}}}},$$

$$\frac{P_{\mu,\omega}}{Q_{\mu,\omega}}=2+\cfrac{1}{\mu+\cfrac{1}{\mu+\ddots+\cfrac{1}{\omega+\cfrac{1}{\omega+\cfrac{1}{2}}}}}, \qquad \frac{P'_{\mu,\omega}}{Q'_{\mu,\omega}}=2+\cfrac{1}{\mu+\cfrac{1}{\mu+\ddots+\cfrac{1}{\omega+\cfrac{1}{\omega}}}},$$

$$\frac{P_{\alpha,\omega}}{Q_{\alpha,\omega}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\ddots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{P_{\mu,\omega}:Q_{\mu,\omega}}}}}}}$$

et

$$\frac{P'_{\alpha,\omega}}{Q'_{\alpha,\omega}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\ddots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{P'_{\mu,\omega}:Q'_{\mu,\omega}}}}}}}$$

six fractions irréductibles pour lesquelles

$$\text{(11a)} \qquad \begin{cases} Q'_{\alpha,\lambda}=3\,Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda}, \\ Q'_{\mu,\omega}=3\,Q_{\mu,\omega}-P_{\mu,\omega}, \\ Q'_{\alpha,\omega}=3\,Q_{\alpha,\omega}-P_{\alpha,\omega}. \end{cases}$$

En vertu de formules connues relatives aux fractions continues

$$P_{\alpha,\lambda}Q'_{\alpha,\lambda}-P'_{\alpha,\lambda}Q_{\alpha,\lambda}=+1,$$
$$P_{\mu,\omega}Q'_{\mu,\omega}-P'_{\mu,\omega}Q_{\mu,\omega}=+1,$$
$$P_{\alpha,\omega}Q'_{\alpha,\omega}-P'_{\alpha,\omega}Q_{\alpha,\omega}=+1,$$

et encore

$$P_{\alpha,\omega}=P_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+P'_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}, \quad P'_{\alpha,\omega}=P_{\alpha,\lambda}P'_{\mu,\omega}+P'_{\alpha,\lambda}Q'_{\mu,\omega},$$
$$Q_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+Q'_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}, \quad Q'_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}P'_{\mu,\omega}+Q'_{\alpha,\lambda}Q'_{\mu,\omega},$$

d'où en vertu des formules (11a) nous déduisons

$$\text{(12a)} \qquad \begin{cases} P'_{\alpha,\lambda}=3\,P_{\alpha,\lambda}-\dfrac{P^2_{\alpha,\lambda}+1}{Q_{\alpha,\lambda}}, \\[2ex] P'_{\mu,\omega}=3\,P_{\mu,\omega}-\dfrac{P^2_{\mu,\omega}+1}{Q_{\mu,\omega}}, \\[2ex] P'_{\alpha,\omega}=3\,P_{\alpha,\omega}-\dfrac{P^2_{\alpha,\omega}+1}{Q_{\alpha,\omega}} \end{cases}$$

et

$$
(14)\begin{cases}
P_{\alpha,\omega}=P_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+\left(3P_{\alpha,\lambda}-\dfrac{P^2_{\alpha,\lambda}+1}{Q_{\alpha,\lambda}}\right)Q_{\mu,\omega},\\
Q_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+(3Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda})Q_{\mu,\omega},\\
Q'_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}\left(3P_{\mu,\omega}-\dfrac{P^2_{\mu,\omega}+1}{Q_{\mu,\omega}}\right)+(3Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda})(3Q_{\mu,\omega}-P_{\mu,\omega}).
\end{cases}
$$

En substituant ces valeurs de $P_{\alpha,\omega}$, $Q_{\alpha,\omega}$, $Q'_{\alpha,\omega}$ dans la dernière des formules (11a) nous aurons

$$Q_{\alpha,\lambda}\left(3P_{\mu,\omega}-\frac{P^2_{\mu,\omega}+1}{Q_{\mu,\omega}}\right)+(3Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda})(3Q_{\mu,\omega}-P_{\mu,\omega})$$

$$=3Q_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+3(3Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda})Q_{\mu,\omega}-P_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}-\left(3P_{\alpha,\lambda}-\frac{P^2_{\alpha,\lambda}+1}{Q_{\alpha,\lambda}}\right)Q_{\mu,\omega}$$

qui devient après quelques simples reductions

$$(15)\qquad \begin{aligned} &Q^2_{\alpha,\lambda}+Q^2_{\mu,\omega}+(Q_{\mu,\omega}P_{\alpha,\lambda}-P_{\mu,\omega}P_{\alpha,\lambda})^2\\ &=3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}(Q_{\mu,\omega}P_{\alpha,\lambda}-P_{\mu,\omega}Q_{\alpha,\lambda}).\end{aligned}$$

Quant à la quantité

$$Q_{\mu,\omega}P_{\alpha,\lambda}-P_{\mu,\omega}Q_{\alpha,\lambda}$$

on voit, qu'en vertu de la seconde des formules (14) elle est égale à

$$3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}-Q_{\alpha,\omega}.$$

Nous pourrons donc écrire au lieu de la formule (15)

$$Q^2_{\alpha,\lambda}+Q^2_{\mu,\omega}+(3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}-Q_{\alpha,\omega})^2=3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}(3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}-Q_{\alpha,\omega})$$

d'où

$$(16)\qquad Q^2_{\alpha,\lambda}+Q^2_{\mu,\omega}+Q^2_{\alpha,\omega}=3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}Q_{\alpha,\omega}.$$

§ 9.

De ces considérations générales et des formules (9) et (11) il suit*)

$$
(17)\begin{cases}
Q^2\{a_0+1,a_1,a_2,\cdots,a_{\nu-1},2\}+Q^2\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\
\qquad\qquad+Q^2\{a_1-1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\
=3Q\{a_0+1,a_1,a_2,\cdots,a_{\nu-1},2\}\cdot Q\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{\varkappa-1},2\}\\
\qquad\qquad\cdot Q\{a_1-1,a_2,\cdots,a_{\nu-1},2\}
\end{cases}
$$

*) Nous désignons généralement par le symbole $Q\{a,b,c,\cdots,l\}$ un nombre Q (§ 4.) correspondant à la période $\{a,b,c,\cdots,l\}$. De même les nombres P, P' et Q' correspondants à cette même période $\{a,b,c,\cdots,l\}$ seront designés par $P\{a,b,c,\cdots,l\}$, $P'\{a,b,c,\cdots,l\}$ et $Q'\{a,b,c,\cdots,l\}$.

où

$$\varkappa - 1,\ a_0 + 1,\ a_1,\ a_2, \cdots, a_{\varkappa-1},$$

sont des nombres entiers positifs quelconques.

En vertu des mêmes considérations nous avons

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} & Q^2\{a_0+2, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q^2\{a_0+1, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & \qquad + Q^2\{a_1-1, a_2, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & = 3Q\{a_0+2, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0+1, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & \qquad \cdot Q\{a_1-1, a_2, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}, \\ & Q^2\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q^2\{a_0+1, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & \qquad + Q^2\{a_0, a_1, \cdots\cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & = 3Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0+1, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & \qquad \cdot Q\{a_0, a_1, \cdots\cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}. \end{aligned}\right.$$

En comparant la formule (17) avec les formules (18) nous obtenons

$$(19)\quad \begin{pmatrix} Q\{a_0+2, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ -3Q\{a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q\{a_0+2, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ -\ Q\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \end{pmatrix} = 0$$

et

$$(20)\quad \begin{pmatrix} Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ -3Q\{a_0+1, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ -\ Q\{a_1-1, a_2, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \end{pmatrix} = 0.$$

Or il n'est pas difficile de voir qu'on a

$$Q\{a_0+2, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} > Q\{a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}$$

et

$$Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} > Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}.$$

Donc en divisant (19) par le facteur

$$Q\{a_0+2, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} - Q\{a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}$$

et (20) par le facteur

$$Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} - Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}$$

nous aurons définitivement

$$(21)\quad \begin{cases} Q\{a_0+2,\ a_1, \cdots, a_{\nu-1}, 2\} + Q\{a_0,\ a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ 3\,Q\{a_1-1,\ a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0+1,\ a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}, \\ Q\{1,\ a_0+1,\ a_1, \cdots, a_{\nu-1}, 2\} + Q\{a_1-1,\ a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ = 3\,Q\{a_0,\ a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0+1,\ a_1, \cdots, a_{\nu-1}, 2\}. \end{cases}$$

Ces égalités donnent un moyen facile de calculer successivement les nombres Q lorsqu'on connait

$$Q\{2\},\ Q\{1, 2\},\ Q\{2, 2\}, \cdots, Q\{a, 2\},\ Q\{a+1, 2\}, \cdots$$

et

$$Q\{1, 1, 2\},\ Q\{1, 2, 2\}, \cdots, Q\{1, a, 2\},\ Q\{1, a+1, 2\}, \cdots$$

Pour ces dernières quantités la formule (17) donne

$$(22)\qquad \begin{aligned} &Q^2\{1, a, 2\} + Q^2\{a, 2\} + Q^2\{a-1, 2\} \\ &= 3\,Q\{1, a, 2\} \cdot Q\{a, 2\} \cdot Q\{a-1, 2\} \end{aligned}$$

a étant un nombre entier positif quelconque.

En outre nous avons

$$(23)\quad \begin{cases} Q\{1\} = 1, \quad Q\{2\} = 2, \quad Q\{1, 2\} = 5, \\ P\{a, 2\} = Q\{a+1, 2\}, \quad P\{a-1, 2\} = Q\{a, 2\}, \\ Q'\{a, 2\} = Q\{a-1, 2\}, \quad P'\{a-1, 2\} = Q\{a-1, 2\} \end{cases}$$

d'où en ayant égard aux formules (11) et (12) nous déduisons

$$(24)\quad \begin{cases} Q\{2\} = 3\,Q\{1\} \cdot Q\{1\} - Q\{1\}, \\ Q\{1, 2\} = 3\,Q\{2\} \cdot Q\{1\} - Q\{1\}, \\ Q\{a+1, 2\} = 3\,Q\{a, 2\} \cdot Q\{1\} - Q\{a-1, 2\} \end{cases}$$

et encore

$$(25)\quad \begin{cases} Q^2\{1\} + Q^2\{1\} + Q^2\{1\} = 3\,Q\{1\} \cdot Q\{1\} \cdot Q\{1\}, \\ Q^2\{2\} + Q^2\{1\} + Q^2\{1\} = 3\,Q\{2\} \cdot Q\{1\} \cdot Q\{1\}, \\ Q^2\{a, 2\} + Q^2\{a-1, 2\} + Q^2\{1\} = 3\,Q\{a, 2\} \cdot Q\{a-1, 2\} \cdot Q\{1\}. \end{cases}$$

En comparant enfin l'égalité (22) avec la dernière des égalités (25), en vertu de l'inégalité

$$Q\{1, a, 2\} > Q\{1\}$$

nous aurons

$$(26) \qquad Q\{1, a, 2\} = 3Q\{a, 2\}\, Q\{a-1, 2\} - Q\{1\},$$

Donc pour trouver $Q\{1, a, 2\}$ il suffit de connaitre $Q\{a, 2\}$ et $Q\{a-1, 2\}$ qui s'obtiennent facilement des formules (24).

§ 10. -

Disons encore quelques mots sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation

$$(16\text{a}) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

que nous avons obtenue à la fin du § 8. Cette équation est symmétrique relativement aux termes inconnus x, y, z; par conséquent, connaissant l'une de ses solutions

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma,$$

il sera facile d'en trouver encore les cinq suivantes:

$$\begin{array}{lll} x = \alpha, & y = \gamma, & z = \beta; \\ x = \beta, & y = \gamma, & z = \alpha; \\ x = \beta, & y = \alpha, & z = \gamma; \\ x = \gamma, & y = \alpha, & z = \beta; \\ x = \gamma, & y = \beta, & z = \alpha. \end{array}$$

Ces six solutions peuvent, évidemment, être differéntes, nous les envisagerons cependant comme une seule et désignerons par

$$x, y, z = \alpha, \beta, \gamma.$$

Cela posé les formules du paragraphe précédent donneront les solutions suivantes de l'équation (16a)

$$(\Omega) \left\{ \begin{array}{l} x,y,z = Q\{1\},\ Q\{1\},\ Q\{1\}; \\ x,y,z = Q\{2\},\ Q\{1\},\ Q\{1\}; \\ x,y,z = Q\{1,2\},\ Q\{2\},\ Q\{1\}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\{a,2\},\ Q\{a-1,2\},\ Q\{1\}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\{1,a,2\},\ Q\{a,2\},\ Q\{a-1,2\}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\{b,a,2\},\ Q\{b-1,a,2\},\ Q\{a-1,2\}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\{l,j,i,\cdots,a,2\},\ Q\{l-1,j,i,\cdots,a,2\},\ Q\{j-1,i,\cdots,a,2\}; \\ \cdot \end{array} \right.$$

Supposons maintenant que la même équation a une autre solution

$$x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

qui ne se trouve pas dans l'ensemble (Ω).

Dans ce cas les nombres α, β, γ ne peuvent être tous égaux entre eux, car si

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

la solution

$$x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

doit être identique à la première des solutions (Ω).

Donc si α est le plus grand des nombres α, β, γ et γ le plus petit nous aurons

$$\alpha > \beta > \gamma \quad \text{et} \quad \alpha > \gamma.$$

L'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha\beta\gamma$$

nous donne

$$3\beta\gamma > \alpha > \beta\gamma.$$

En la résolvant par rapport à α on trouve

$$\alpha = \frac{3\beta\gamma \pm \sqrt{9\beta^2\gamma^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2)}}{2}.$$

Des deux signes $\pm$ c'est $+$ qu'il faut garder, car nous avons pour toutes les valeurs entières positives de β et de γ

$$\frac{3\beta\gamma - \sqrt{9\beta^2\gamma^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2)}}{2} < \beta\gamma.$$

Il en résulte de là

$$3\beta\gamma > \alpha > \frac{3}{2}\beta\gamma$$

et la différence

$$3\beta\gamma - \alpha$$

se trouve comprise entre 0 et α.

En la désignant par δ nous trouvons

$$\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 3\beta\gamma\delta.$$

Donc de la solution donnée:

$$x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

on peut déduire une autre

$$x,\ y,\ z = \beta,\ \gamma,\ \delta$$

où

$$\beta + \gamma + \delta < \alpha + \beta + \gamma.$$

Cette nouvelle solution aussi n'est pas comprise dans l'ensemble (Ω), parceque dans le cas contraire la première solution

$$x,\ y,\ z = 3\beta\gamma - \delta,\ \beta,\ \gamma$$

devrait aussi être comprise dans l'ensemble (Ω) conformément aux formules du § 9. C'est pourquoi en transformant la solution

$$x,\ y,\ z = \beta,\ \gamma,\ \delta$$

d'après le procédé indiqué nous aurous encore une solution

$$x,\ y,\ z = \beta',\ \gamma',\ \delta'$$

qui n'est pas comprise dans l'ensemble (Ω) et satisfait à l'inégalité

$$\beta' + \gamma' + \delta' < \beta + \gamma + \delta.$$

En continuant à discuter de la même manière, nous aurons une suite infinie de solutions de l'équation (16 a)

$$\begin{aligned} x,\ y,\ z &= \alpha,\ \beta,\ \gamma, \\ x,\ y,\ z &= \beta,\ \gamma,\ \delta, \\ x,\ y,\ z &= \beta',\ \gamma',\ \delta', \\ x,\ y,\ z &= \beta'',\ \gamma'',\ \delta'', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et une série infinie décroissante de nombres positifs et entiers

$$\alpha + \beta + \gamma,\quad \beta + \gamma + \delta,\quad \beta' + \gamma' + \delta',\quad \beta'' + \gamma'' + \delta'',\ \cdots$$

Ce qui n'est pas possible, car il n'existe qu'un nombre limité de nombres positifs entiers moindres que la limite donnée

$$\alpha + \beta + \gamma.$$

Par conséquent toutes les solutions en nombres positifs et entiers de l'equation (16 a) doivent être comprises dans l'ensemble (Ω).

Table des périodes $\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\}$ pour les valeurs de $\varkappa$ moindres de 6.

Symboles	$\{x\}$	$\{\gamma - 1,\ x + 1\}$	$\{\delta - 1,\ \gamma,\ x + 1\}$	$\{\varepsilon - 1,\ \delta,\ \gamma,\ x + 1\}$
Périodes	x	$\gamma - 1$ fois x $1 \cdots\cdots x + 1$	$\gamma \cdots\cdots x$ $1 \cdots\cdots x + 1$ $\delta - 1 \begin{cases} \gamma - 1 \cdots x \\ 1 \cdots\cdots x + 1 \end{cases}$	$\varepsilon - 1 \begin{cases} \gamma \cdots\cdots x \\ 1 \cdots\cdots x + 1 \\ \delta - 1 \begin{cases} \gamma - 1 \cdots x \\ 1 \cdots\cdots x + 1 \end{cases} \end{cases}$ $\gamma \cdots\cdots x$ $1 \cdots\cdots x + 1$ $\delta \begin{cases} \gamma - 1 \cdots x \\ 1 \cdots\cdots x + 1 \end{cases}$

Symboles	$\{\eta-1,\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ x+1\}$	$\{\vartheta-1,\ \eta,\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ x+1\}$
Périodes	$\begin{array}{l} \varepsilon\begin{cases}\gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta-1\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\end{cases}\\ \gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\\ \eta-1\begin{cases}\varepsilon-1\begin{cases}\gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta-1\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\end{cases}\\ \gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\end{cases}\end{array}$	$\begin{array}{l} \vartheta-1\begin{cases}\varepsilon\begin{cases}\gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta-1\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\end{cases}\\ \gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\\ \eta-1\begin{cases}\varepsilon-1\begin{cases}\gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta-1\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\end{cases}\\ \gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \varepsilon\begin{cases}\gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta-1\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\end{cases}\\ \gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\\ \eta\begin{cases}\varepsilon-1\begin{cases}\gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta-1\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\end{cases}\\ \gamma\cdots x\\ 1\cdots x+1\\ \delta\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots x+1\end{cases}\end{cases}\end{array}$

Remarque. Le lecteur trouvera les mêmes périodes dans la table, ajoutée au tome I de l'ouvrage de J. Bernoulli: „Recueil pour les astronomes."