p

Gruppentheoretische Studien.

Von

WALTHER DYCK in Leipzig.

(Mit drei lithogr. Tafeln.)

„A group is defined by means of the laws of combination of its symbols."

Cayley.

Einleitung.

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit dem Probleme, *eine Gruppe von discreten Operationen, welche auf ein gewisses Object angewandt werden, zu definiren, wenn man dabei von einer speciellen Darstellungsform der einzelnen Operationen absieht, diese vielmehr nur nach den zur Gruppenbildung wesentlichen Eigenschaften als gegeben voraussetzt.*

Wir gehen zur Bildung der Gruppe von gewissen *erzeugenden Operationen* $A_1, A_2, A_3, \cdots$ aus, über deren *speciellen* Charakter keinerlei Annahmen gemacht werden.

*Dann kann man jede Gruppe, welche durch Iteration und Combination dieser Operationen sich bilden lässt, individualisiren, durch die Kenntniss gewisser Relationen, die bei der Zusammensetzung dieser ursprünglichen Operationen auftreten.**)

Indem wir jede Verbindung unserer Operationen in der bekannten Weise in Form eines symbolischen Productes:

$$(1)\qquad A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} \cdots A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} \cdots\cdots$$

schreiben, nehmen alle solche Relationen die Gestalt

$$(2)\qquad F_h(A_i) = 1$$

an, wo die F_h specielle Producte der in (1) angedeuteten Form sind.

Damit werden alle *holoedrisch isomorphen* Gruppen in *eine einzige* Gruppe begriffen, und das *Wesen* der Gruppe drückt sich nicht mehr an einer speciellen Darstellungsform ihrer Operationen aus, sondern lediglich in der gegenseitigen Beziehung derselben zu einander. Im umgekehrten Sinne lässt sich daher auch das Princip aussprechen:

---

*) Die zu Anfang gesetzte Bemerkung Cayley's im „American Journal of Mathematics" vol. 1, pag. 51.

Die nothwendige und hinreichende Charakteristik des gegenseitigen Verhaltens einer Reihe irgendwie definirter Operationen A_1, A_2, $\cdots$, welche wir auf ein gewisses Object ausüben, ist in der aus ihnen gebildeten Gruppe gegeben.

Indem wir so die gruppentheoretischen Operationen rein formal auffassen, zeigt sich deutlich ihre Stellung in einer formalen Entwickelung analytischer Operationen überhaupt.*) Es sind Multiplicationsoperationen, welche das associative, *nicht* aber das commutative Princip befolgen. Dabei wird diesen Operationen *durch gewisse Multiplicationsregeln* (2), $F_\lambda = 1$, der Charakter eines *speciellen* Operationskreises ertheilt, der eine unendliche oder auch eine endliche Gruppe von Operationen umfasst.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Theile. *Der erste Abschnitt* entwickelt das Thema in seiner allgemeinsten Formulirung. Wir gehen aus von der denkbar allgemeinsten Gruppe G, die aus einer Reihe von erzeugenden Operationen A_1, A_2, A_3, $\cdots$ sich bilden lässt, indem wir zwischen diesen Operationen keinerlei Relationen voraussetzen. Jede specielle Gruppe $\overline{G}$ scheidet sich dann ab durch Einführung gewisser Relationen $F_\lambda = 1$, deren gegenseitiges Verhältniss, sowie ihre Stellung zu den Gruppen G und $\overline{G}$ sich in einfachster Weise präcisiren lässt.

Den abstracten Entwickelungen geht eine *geometrische* Einkleidung parallel, die hier zunächst nur eine anschauungsmässige Darstellung unserer analytischen Operationen bezweckt, die aber für die Auseinandersetzungen des zweiten Abschnittes wesentlich wird. Allgemein zu reden besteht diese geometrische Darstellung einer Gruppe in der Eintheilung zunächst eines ebenen Bereiches in gleichartige Gebiete**), derart, dass jedem einzelnen Gebiete eine Substitution der Gruppe zugeordnet werden kann und die Ueberführung der Substitutionen in einander durch die (im Sinne der analysis situs verstandene) Ueberführung dieser Gebiete in einander sich ausspricht.

---

*) Ich erwähne hier die Entwickelungen in Grassmann's Ausdehnungslehre über die Multiplication extensiver Grössen, einzelne Abschnitte über die Multication der Quaternionen in Hamilton's Elements of Quaternions, sowie Hankel's Vorlesungen über die complexen Zahlen, um darauf in § 16. Bezug zu nehmen; endlich Arbeiten von E. Schröder, welcher speciell der Stellung gruppentheoretischer Operationen in einer formalen Entwickelung der Algebra gedenkt.

**) Gebietseintheilungen, wie sie der Art nach zuerst von Schwarz im Anschluss an *functionentheoretische* Betrachtungen studirt worden sind (man vergleiche die Abhandlung über die hypergeometrische Reihe in Crelle's Journal, Band 75, sowie „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche." Preisschrift. Berlin 1871), und wie sie in den sogleich näher zu bezeichnenden Arbeiten von Klein — zuerst in dessen Programm „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" Erlangen 1872 (Note VII) — in *gruppentheoretischem* Sinne verwerthet sind.

Der zweite Abschnitt beschränkt sich auf die Darstellung *endlicher Gruppen* und schliesst dabei enge an unser geometrisches Bild an. Dieses erscheint nämlich jetzt in der Form der regulären Gebietseintheilung einer geschlossenen Fläche und damit als reguläre Riemann'sche Fläche in dem von Herrn Klein eingeführten Sinne*). Die Relationen $F_h = 1$, die wir zur Definition einer Gruppe zu Grunde legen, lassen sich dabei zur Charakterisirung der Verzweigung der Riemann'schen Fläche und weiter zur Bestimmung eines Systems von nicht ineinander überführbaren Rückkehrschnitten auf der Fläche verwenden. Diese geometrische Bedeutung ergiebt die Bestimmung einer oberen Grenze für die, zur Definition einer endlichen Gruppe nothwendige, Anzahl von Relationen $F_h = 1$.

Gerade diese geometrische Formulirung vermittelt nun die Darstellung gewisser specieller Gruppen in dem von uns intendirten Sinne durch Relationen $F_h = 1$ zwischen gewissen erzeugenden Substitutionen.

---

*) Man sehe die Abhandlungen von Klein in den Annalenbänden IX—XV und insbesondere die Arbeit „Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen." Math. Ann. Bd. XIV, p. 458 ff. In allen diesen Untersuchungen tritt die Gruppe der behandelten regulären Riemann'schen Flächen in dem hier zu Grunde gelegten Sinne in der Ueberführung gewisser Gebiete (der Blätter der Riemann'schen Fläche) ineinander hervor.

Im Anschlusse hieran stehen meine früheren Untersuchungen, in denen es sich darum handelte, reguläre Gebietseintheilungen auf einer Fläche von gegebenem Geschlechte zu bestimmen und die zugehörigen Gruppen zu discutiren*).

Der Zusammenhang gewisser Gebietseintheilungen auf einer Fläche mit gruppentheoretischen Problemen wurde wohl zuerst von C. Jordan ausgesprochen und es sei betreffs dieser Anschauungen auf dessen „Recherches sur les polyèdres" im 66. und 68. Bande von Crelle's Journal, sowie auf eine Bemerkung in seinem „Traité des substitutions et des équations algébriques" pag. 56 verwiesen. Ferner habe ich noch eine im April dieses Jahres erschienene Abhandlung von W. Godt „Untersuchungen über Polyeder von mehrfachem Zusammenhange" (Programm des Katharineums zu Lübeck, 1881) zu erwähnen, welche unmittelbar an diese C. Jordan'schen Untersuchungen anknüpft und in welcher geradezu eine gegebene Gruppe zur Bildung einer zugehörigen regulären Gebietseintheilung auf einer Fläche von gewissem Geschlechte verwandt wird.

Die vorliegenden Untersuchungen betrachten dagegen die geometrische Darstellung nur als ein Durchgangsstadium zur Entwickelung der abstracten gruppentheoretischen Anschauungen. So kam es mir bei der hier zu Grunde gelegten geometrischen Deutung**) wesentlich darauf an, die zur Erzeugung einer Gruppe zum Ausgangspunkt gewählten Substitutionen als gleichberechtigte geometrische Operationen unmittelbar hervortreten zu lassen und dabei eine für die gruppentheoretischen Operationen möglichst übersichtliche Darstellung zu erhalten. Man vergl. hierzu die Schlussbemerkungen dieser Einleitung, sowie pag. 25.

---

*) Vergleiche hierzu § 14. der vorliegenden Arbeit, wo die Stellung des gruppentheoretischen Theiles dieser Untersuchungen zu den vorliegenden allgemeinen Ausführungen bezeichnet ist.

**) — und diese unterscheidet sich von der bei Godt angewandten, welche auf dem durch C. Jordan eingeführten „aspect d'un polyèdre" basirt ist.

Diese Beispiele, theils angedeutet, theils durchgeführt, bilden den Schluss der vorliegenden Arbeit. Unter ihnen gestalten sich diejenigen, für welche das Geschlecht der zugehörigen Riemann'schen Fläche gleich Null ist, besonders einfach.

Eine letzte Bemerkung bezieht sich auf gewisse gruppentheoretische Festsetzungen, welche man der Definition eines Systems von Einheiten für gewisse complexe Zahlsysteme zu Grunde legen kann, Festsetzungen, unter denen sich insbesondere die übliche Definition der *Quaternioneneinheiten* als ein besonderer Fall einbegreifen lässt.

Wenn somit in der Durchführung der Absicht, *die Definition einer Gruppe von der speciellen Gestalt ihrer Operationen loszulösen*, eben wieder eine specielle (geometrische) Darstellung dieser letzteren mit zur Verwendung kommt, so steht eine solche, theoretisch genommen, allerdings mit jeder anderen auf gleicher Stufe. Aber wie gerade *diese* Darstellung für mich die Veranlassung zu den abstracten Fragestellungen gewesen ist, so scheint sie auch (practisch) die erste Behandelung derselben zu erleichtern. Diese Versinnlichung gruppentheoretischer Operationen hat nämlich vor anderen den Vorzug, für einfache Fälle die Gesammtheit der Operationen einer Gruppe in ihrer gegenseitigen Stellung überblicken zu lassen*) und so gelingt es von ihr aus, das Wesentliche einer Gruppe von den durch ihre specielle Erscheinungsform zufällig hineingetragenen Eigenschaften zu sondern.

Was nun *ähnliche geometrische Operationen* anlangt, welche, an Stelle der von mir gewählten, zur Versinnlichung einer Gruppe eintreten können, so bezeichne ich in § 10., pag. 23 eine *allgemeinere Auffassung* meiner Figuren, welche das ganze Gebiet andeutet, dem diese geometrischen Repräsentationen angehören**). — Gleichwohl konnte und wollte ich den heuristischen Entwickelungsgang, der gerade in der *specielleren* von mir gewählten Darstellungsform liegt, nicht verwischen. Er findet in meinen früheren Studien über Riemann'sche Flächen seine Entstehung und hat vor der allgemeineren geometrischen Auffassung den Vorzug der grösseren Uebersichtlichkeit für die einzelnen Operationen der Gruppe, auf die es mir zur Entwickelung der abstracten gruppentheoretischen Formulirungen vor Allem ankam. Dagegen kenn-

---

*) Was beispielsweise bei einer Darstellung der Operationen als Buchstabenvertauschungen sicher nicht der Fall ist.

**) Ein Gebiet, welches *nach seiner functionentheoretischen Bedeutung* durch die (schon erwähnten) Arbeiten von Schwarz, Klein und von Fuchs (in einer Reihe von Abhandlungen in Crelle's Journal) eröffnet und durch die neuesten Untersuchungen von Poincaré (Comptes Rendus 1881) wesentlich gefördert worden ist. Weiter gehört hieher eine Arbeit von Schottky „Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen" im 83. Bande von Crelle's Journal. — Man vergl. noch pag. 24, Anm. der vorl. Abh.

zeichne ich auch (pag. 24) bestimmt eine gewisse hieraus erwachsene *Einseitigkeit* meiner *geometrischen* Behandlung, die mich in meinen früheren Arbeiten zu einem Fehler verleitet hat*). Die Beschränkung auf diese speciellere Darstellungsform ist indess für den hier festgehaltenen gruppentheoretischen Zielpunkt keine wesentliche. Für die *Weiterentwickelung* der vorliegenden *gruppentheoretischen* Probleme hat nämlich an Stelle jeder geometrischen Sprechweise die *analytische* (combinatorische) Formulirung einzutreten. Für sie aber hat diese erste geometrische Orientirung gewisse Gesichtspunkte ergeben, die in ihrer geometrischen Fassung, wie ihrem analytischen Inhalte nach, zu entwickeln, den Zweck der vorliegenden Arbeit bildet.

I. Abschnitt.

Allgemeine Entwickelungen.

§ 1.

Definition einer Gruppe G als Ausgangspunkt der Betrachtung.

Wir gehen, um auf die Darstellung einer Gruppe in dem von uns intendirten Sinne zu kommen, von der denkbar allgemeinsten Gruppe von Operationen aus und fragen uns dann nach der Stellung einer speciellen Gruppe zu dieser allgemeinsten.

Seien $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m$ irgendwelche m Operationen, welche auf ein Object J (Identität), das wir in der Folge stets als 1 bezeichnen, angewandt werden können, so lassen sich diese A_i stets als die *„erzeugenden“* Operationen einer Gruppe auffassen, die wir erhalten, wenn wir auf unser Object J alle Operationen in Iteration und Combination anwenden.

Die *allgemeinste* Gruppe aus m erzeugenden Operationen entsteht dann, wenn wir voraussetzen, dass unsere Operationen A_i *keine Perioden* besitzen und ausserdem gegenseitig durch *keine Relation* verbunden sind. Wir wollen dabei auch die den Operationen A_i *entgegengesetzten* Operationen in die Betrachtung ziehen, die wir in der üblichen Weise durch A_i^{-1} bezeichnen. Dann erhalten wir die unendlich vielen Substitutionen, welche unserer Gruppe G angehören, wenn wir auf die Identität zunächst die Operationen $A_1, A_1^{-1}, A_2, A_2^{-1}, \cdots, A_m, A_m^{-1}$ anwenden, je auf die so entstandenen Substitutionen die gleichen Operationen u. s. f. Da wir zwischen den erzeugenden Operationen

*) Man vergl. mein Referat über die Arbeit „Ueber reguläre Riemann'sche Flächen.“ (Math. Ann. Bd. XVII, p. 473 ff.) in Ohrtmann's Jahrbuch für 1880, ferner pag. 30 der vorliegenden Abhandlung.

keine Relation angenommen haben, so sind die so entstandenen Substitutionen sämmtlich von einander verschieden und *es kann jede nur auf einem ganz bestimmten Wege aus den erzeugenden Substitutionen erlangt werden*, den die Formel

$$A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} \cdots A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} \cdots\cdots$$

(die wir stets von links nach rechts lesen wollen) angiebt.*)

In der That ist die Forderung, dass alle Substitutionen einer Gruppe nur auf *einem* Wege aus den erzeugenden Substitutionen erlangt werden, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen den letzteren *keine* Relationen bestehen und die folgenden Entwickelungen beschäftigen sich gerade mit der Frage, wie nun der Umstand, dass gewisse Substitutionen einer Gruppe auf *mehrfache* Weise aus den zu Grunde gelegten erzeugenden Substitutionen erhalten werden können, dass also gewisse Relationen zwischen den erzeugenden Substitutionen bestehen, zur Definition jeder speciellen Gruppe dient.

Es erweist sich im Folgenden, mit Rücksicht auf die von uns gewählte geometrische Interpretation unserer Gruppen, zweckmässig, den Gebrauch der negativen Potenzen unserer Operationen A_i zu vermeiden und wir führen zu dem Ende eine neue Operation A_n ein durch die Definition

(1) $$A_1 A_2 A_3 \cdots A_m A_n = 1$$

oder wie wir in der Folge kurz schreiben:

(1a) $$\Pi(A_i) = 1.$$

Wir bemerken dabei, dass die Definition der Substitution A_n an eine *bestimmte* Reihenfolge der Operationen $A_1, A_2, \cdots A_m$ geknüpft ist, die noch auf die verschiedenste Weise gewählt werden kann. Wir wollen stets die in (1) gegebene Reihenfolge der Operationen A_i zu Grunde legen und in *dieser* auch das Symbol $\Pi(A_i)$ verstehen.

Dann ergiebt sich für die negativen Potenzen unserer Operationen sofort:

$$\begin{aligned}
A_1^{-1} &= A_2 A_3 \cdots A_m A_n, \\
A_2^{-1} &= A_3 A_4 \cdots A_n A_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_m^{-1} &= A_n A_1 \cdots \quad A_l, \\
\{A_n^{-1} &= A_1 A_2 \cdots \quad A_m\}.
\end{aligned}$$

Wir können also unsere Gruppe G erzeugen, indem wir die

*) Wir wollen jede solche Substitution in der Folge durch

$$S(A_1, A_2, \cdots, A_m) = S(A_i)$$

oder kurz durch S bezeichnen.

Operationen $A_1, A_2 \cdots A_m, A_n$ nur in *positivem* Sinne anwenden*) und bemerken dabei, dass wir durch Anwendung bloss der positiven Operationen wieder *nur auf einem Wege* zu einer bestimmten Substitution gelangen können, von der Einschaltung von Operationen $A_1 A_2 A_3 \cdots A_n$, $A_2 A_3 \cdots A_n A_1$ u. s. w., die nach der obigen Relation gleich 1 sind, abgesehen. Fassen wir aber gleichzeitig auch negative Potenzen der A_i hinzu, so giebt es zu jedem Ausdrucke $S(A_1, A_2 \cdots A_m, A_n)$ unendlich viele äquivalente.

§ 2.

Eine geometrische Versinnlichung der Gruppe G.

Das geometrische Bild, durch das wir jetzt die ganze Gruppe ersetzen wollen, zeigt, so zu sagen, nur eine schematische Raumeintheilung, deren wir bedürfen, um die Substitutionen unserer soeben definirten Gruppe G übersichtlich aufzuschreiben.

Der präciseren Ausdrucksweise wegen wollen wir zunächst eine ganz bestimmte geometrische Anordnung bezeichnen, deren Verallgemeinerung im Sinne der analysis situs sich daraus aber sofort ergiebt.

Wir zeichnen ein, etwa reguläres, Kreisbogenpolygon, dessen Ecken $a_1, a_2 \cdots a_m, a_n$, sämmtlich auf einem Kreise K gelegen sind, während die Seiten auf ebendiesem Kreise K senkrecht stehen, und vervielfältigen dasselbe, indem wir es nach dem Principe der reciproken Radien zu den Seiten spiegeln. Indem wir die Ecken dieser Spiegelbilder in symmetrischer Weise durch $a_1, a_2 \cdots a_m, a_n$ bezeichnen und diesen Process in's Unendliche fortsetzen, erhalten wir eine unendliche Reihe von (in Rücksicht auf die Bezeichnung der Ecken) congruenten und symmetrischen Polygonen — die wir auch als schraffirte und nichtschraffirte bezeichnen mögen — welche sich dem Begrenzungskreise K näher und näher anschliessen. Dabei stossen, weil alle Polygonseiten auf dem Kreise K senkrecht stehen, in jeder Ecke unendlich viele Polygone zusammen [man vergleiche Fig. 1., Tafel I, welche für $n = 4$ entworfen ist.].

Denkt man sich nun durch einen, im Sinne der analysis situs aufzufassenden Process ein bestimmtes, etwa schraffirtes Polygon P_1 in ein anderes schraffirtes Polygon P_2 übergeführt, so, dass die homologen Eckpunkte der beiden Polygone sich decken und setzt dabei fest, dass benachbarte Polygone wieder in benachbarte übergehen**), so wird dabei, weil die Anordnung unserer unendlichen Polygonreihe

*) Des kurzen Ausdruckes halber sprechen wir in der Folge auch von diesen n Operationen $A_1, \cdots A_m, A_n$ als den *erzeugenden* Operationen der Gruppe.

**) Eine Operation, die bei unseren *speciellen* Annahmen mit einer linearen Substitution einer complexen Veränderlichen (die wir in der Zeichnungsebene deuten) äquivalent ist.

mit Bezug auf alle congruenten Polygone eine identische ist, das ganze Polygonnetz in sich übergehen. Die unendlich vielen Operationen also, die ein bestimmtes Ausgangspolygon 1 in *sämmtliche* andere schraffirten Polygone überführen, bilden *eine Gruppe von unendlich hoher Ordnung.*

Von dieser Gruppe beweisen wir, dass sie *holoedrisch isomorph* auf die im vorigen Paragraphen definirte Gruppe bezogen werden kann, oder, sofern wir überhaupt holoedrisch isomorphe Gruppen als identisch betrachten*), dass sie mit ihr zusammenfällt.

Wir definiren zu dem Zwecke eine Reihe von Elementaroperationen

$$A_1, A_1^{-1}, A_2, A_2^{-1}, \cdots A_m, A_m^{-1}, A_n, A_n^{-1}$$

dadurch, dass jede derselben ein bestimmtes (etwa schraffirtes) Ausgangspolygon 1 in das bezüglich an der Ecke $a_1, a_2 \cdots a_m, a_n$ desselben nach der einen oder anderen Richtung anstossende schraffirte Nachbarpolygon überführt, Operationen, die wir als „Drehungen“ des Polygons 1 um seine Eckpunkte $a_1, a_2, \cdots a_m, a_n$ figürlich bezeichnen wollen**). Dabei setzen wir fest, dass die Drehung A_i immer in einem dem Uhrzeiger entgegengesetzten Sinne verstanden sein soll, die Drehung A_i^{-1} also im Sinne des Uhrzeigers.

Wenden wir die Operationen $A_1, A_2 \cdots A_m, A_n$ hintereinander an, eine Operation die wir durch $A_1 A_2 A_3 \cdots A_m A_n$ bezeichnen, so kommen wir zum Ausgangspolygone 1 zurück und somit besteht zwischen unseren Operationen die Beziehung:

$$A_1 A_2 A_3 \cdots A_m A_n = 1.$$

Die Anordnung der einzelnen Polygone in unserem Netze lässt nun ersehen, dass, wenn wir die Operationen $A_1, A_2 \cdots A_m, A_n$ von einem Polygone 1 ausgehend nur im *positiven* Sinne anwenden, wir in *jedes* andere schraffirte Polygon gelangen können *und zwar nur auf einem Wege* —, dabei abgesehen von der Einschaltung von Wegen $A_1 A_2 \cdots A_m A_n$, $A_2 A_3 \cdots A_n A_1$ u. s. w., welche sich auf die Identität reduciren. Das sagt aber, dass zwischen den Operationen $A_1, A_2, \cdots A_m, A_n$, ausser der obigen Relation, *keine weiteren* mehr bestehen und *dass somit die Substitutionen dieser Gruppe den Substitutionen der in* § 1. *definirten Gruppe holoedrisch isomorph zugeordnet werden, wenn wir die beiderseits gleichbezeichneten erzeugenden Operationen einander zuordnen.*

Wir können etwa auch nur von den Operationen $A_1, A_2 \cdots A_m$

---

*) Und das liegt, wie schon Eingangs erwähnt, im Sinne unserer ganzen Betrachtungen.

**) Ueber die Stellung dieser speciellen geometrischen Repräsentation zu allgemeineren Auffassungen vergl. pag. 23.

zur Erzeugung unserer Gruppe ausgehen, wo wir dann auch die Operationen A_1^{-1}, A_2^{-1} $\cdots A_m^{-1}$, die Drehungen im entgegengesetzten Sinne, zur Darstellung der gewollten Gruppe heranziehen müssen, analog wie eben in § 1.

Um den Isomorphismus der beiden Gruppen noch deutlicher hervortreten zu lassen, können wir jetzt die einzelnen schraffirten Polygone mit Namen belegen, indem wir, von irgend einem Polygone als erstem, 1, beginnend, jedes Polygon durch die Substitution S bezeichnen, welche, von jenem ersten ausgehend, zu ihm hinführt. Dann erhält nach dem Obigen jedes Polygon, wenn wir nur positive Operationen anwenden, eine *bestimmte* Bezeichnung $S(A_1, A_2, \cdots A_n)$ und so ist *jede Substitution* unserer Gruppe durch ein bestimmtes Polygon unseres Netzes vertreten.

Was wir bisher nur für die eine Reihe der (schraffirten) Polygone ausgeführt, gilt selbstverständlich auch für die andere Polygonreihe. Dabei wollen wir für diese letzteren (nichtschraffirten) Polygone eine mit der obigen *gleichlaufende* Bezeichnung einführen, in der Weise, dass wir gleichfalls irgend eines dieser Polygone mit 1 bezeichnen und nun dasjenige weisse Polygon mit S, in welches das weisse Polygon 1 übergeführt wird, wenn wir auf das schraffirte Polygon 1 die Substitution S ausüben. Es ist dann in der Folge zweckmässig, eines der an das schraffirte Polygon 1 *anstossenden* weissen Polygone mit 1 zu bezeichnen, etwa das an der Kante $a_1 a_n$ benachbarte, wo dann jedesmal die zwei in den analogen Kanten (also hier in Kanten $a_1 a_n$) zusammenstossenden Polygone die gleiche Bezeichnung tragen.

Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung der in § 1. gegebenen allgemeinen Gruppe G zu der durch unser eben geschildertes Polygonnetz definirten liegt in der vollen Allgemeinheit und Unabhängigkeit der beiderseits zu Grunde gelegten erzeugenden Operationen $A_1, A_2, \cdots A_m$, nicht aber in der speciellen Gesetzmässigkeit, mit der wir, zur besseren Uebersicht, unser Polygonnetz entworfen haben. Wir fassen dasselbe, insoferne für uns nur die gegenseitige Anordnung der einzelnen Gebiete von Wichtigkeit ist, lediglich im Sinne der analysis situs auf und können es also beliebigen Dehnungen unterwerfen.

Wir können, sofern sich die Polygone unseres eben betrachteten Netzes näher und näher *einer* bestimmten Randcurve anschmiegen, das System in einem gewissen Sinne als *einfach zusammenhängend* bezeichnen. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Anordnung unserer Polygone und bleibt bei beliebigen Dehnungen erhalten. Im Sinne der analysis situs ausgesprochen lautet dieselbe: Es ist nicht möglich, eine unendliche Reihe von lauter *einfach zusammenhängenden n-Ecken*, deren an jedem Ecke unendlich viele zusammenstossen, so aneinander zu schliessen, dass das Netz sich *mehreren* getrennten Randcurven anschmiegt. Der Beweis dafür liegt eben darin, dass die

Gruppen aller solcher Netze holoedrisch isomorph aufeinander bezogen werden können, und dadurch in den zugehörigen Netzen successive je *einfach zusammenhängende* Gebiete einander entsprechen.

§ 3.

Isomorphismus der Gruppe G in sich.

Mit Bezug auf die im vorigen Paragraphen festgesetzte Bezeichnungsweise der einzelnen Polygone erwähnen wir für unsere allgemeine Gruppe G einer bestimmten Art der isomorphen Beziehung dieser Gruppe in sich, mit der wir uns weiterhin, im Anschluss an die geometrische Formulirung, für gewisse specielle Gruppen noch zu beschäftigen haben.

Unser unendlich ausgedehntes Polygonnetz ist in Bezug auf *die Anordnung* der schraffirten und der nichtschraffirten Polygone *symmetrisch.*

Wir greifen speciell die Anordnung des Netzes um das schraffirte und weisse Polygon 1 heraus, die etwa mit der Kante $a_1 a_n$ zusammenstossen mögen. [In der zugehörigen Fig. 2., Taf. I. tritt, der Uebersicht halber, diese Symmetrie der Anordnung noch in einer gestaltlichen Symmetrie der Polygone hervor]. Dann lassen sich zu den Operationen $A_1, A_2, A_3 \cdots A_l, A_m, A_n$, die als erzeugende Substitutionen der Gruppe für die schraffirten Polygone definirt sind, sofort die *symmetrischen* Operationen — mit Bezug auf diese beiden in einer Kante $a_1 a_n$ zusammenstossenden Polygone 1 — für die nichtschraffirten Polygone angeben. Es sind die Operationen:

$$\begin{aligned}
A_1' &= A_1^{-1} &&= A_2 A_3 A_4 \cdots A_l A_m A_n,\\
A_2' &= A_1 A_2^{-1} A_1^{-1} &&= A_1 A_3 A_4 \cdots A_l A_m A_n,\\
A_3' &= A_1 A_2 A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1} &&= A_1 A_2 A_4 \cdots A_l A_m A_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_m' &= \left\{\begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \cdots A_l \quad A_m^{-1} A_l^{-1} \cdots A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1} \\ A_n^{-1} A_m^{-1} A_n \end{matrix}\right\} &&= A_1 A_2 A_3 \cdots \quad A_l A_n,\\
A_n' &= A_n^{-1} &&= A_1 A_2 A_3 \cdots \quad A_l A_m,
\end{aligned}$$

die wir in gleicher Weise zur Erzeugung der Gruppe zu Grunde legen können.

Nun gehen umgekehrt die A_i ganz analog aus den A_i' hervor durch die Formeln:

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_2' A_3' A_4' \cdots A_l' A_m' A_n',\\
A_2 &= A_1' A_3' A_4' \cdots A_l' A_m' A_n',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_m &= A_1' A_2' A_3' \cdots \quad A_l' A_n',\\
A_n &= A_1' A_2' A_3' \cdots \quad A_l' A_m'.
\end{aligned}$$

Der Relation:

$$A_1 A_2 A_3 \cdots A_m A_n = 1$$

entspricht weiter die zu ihr „symmetrische“ Relation:

$$A_1' A_2' A_3' \cdots A_m' A_n' = 1,$$

während die A_i sowohl, wie die A_i' *keiner* weiteren Bedingung unterworfen sind.

Damit schliessen wir aber unmittelbar, dass durch die Zuordnung der Substitutionen A_i zu den A_i' *sämmtliche Substitutionen* der Gruppe einander *wechselseitig eindeutig* zugeordnet werden.

Geometrisch lässt sich diese holoedrisch isomorphe Beziehung der Gruppe G in sich folgendermassen darthuen: Die symmetrische Anordnung des Netzes in Bezug auf die Kante $a_1 a_n$ unserer beiden Ausgangspolygone 1 ergiebt das Vorhandensein einer (nicht mit zu unserer Gruppe gehörigen) Operation Θ, der „Spiegelung“ längs der Kante $a_1 a_n$, durch welche die Gruppe in sich transformirt wird und vermöge deren wir die erzeugenden Substitutionen A_i sofort in die A_i' überführen können durch die Beziehung:

$$\Theta A_i \Theta^{-1} = A_i'.$$

Allgemein können wir die symmetrische Anordnung unseres Netzes auffassen mit Bezug auf irgend ein schraffirtes und irgend ein weisses Polygon. Dies besagt aber gegen vorhin nur eine Aenderung in der Bezeichnung etwa der Reihe der weissen Polygone. Wir gehen dann zur Definition der zu den A_i symmetrischen Operationen A_i', statt von jenem in Kante $a_1 a_n$ an das schraffirte Polygon 1 anstossenden weissen Polygone, von irgend einem anderen mit 1 zu bezeichnenden weissen Polygone aus.

§ 4.

Stellung einer speciellen Gruppe $\overline{G}$ zu der allgemeinen Gruppe G.

In §§ 1. und 2. haben wir die allgemeinste Gruppe G, die aus irgend welchen m Operationen $A_1, A_2, \cdots A_m$ erzeugt wird, in ihrer abstracten Formulirung und in einem geometrischen Bilde gekennzeichnet.

Es handelt sich jetzt um die Frage nach der Stellung jeder beliebigen speciellen Gruppe $\overline{G}$, — von der also angenommen wird, dass sie aus m, durch vorgegebene Processe definirten Operationen $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots \overline{A}_m$ (die wir uns, wenn $\overline{G}$ z. B. eine endliche Gruppe ist, etwa als Permutationen gewisser Buchstaben gegeben denken mögen) erzeugt wird, — *zu der in allgemeinster Weise definirten Gruppe G.*

Wir behandeln diese Frage zuvörderst im analytischen Sinne, um sie weiterhin auch in unserer geometrischen Darstellung zu verfolgen. Zunächst haben wir den Satz:

Unsere Gruppen G und $\overline{G}$ lassen sich isomorph auf einander beziehen.

Wegen der Allgemeinheit der Operationen A_i ist es nämlich gestattet, den m erzeugenden Operationen $A_1, A_2 \cdots A_m$ der Gruppe G die Operationen $\overline{A}_1, \overline{A}_2', \cdots \overline{A}_m$, durch welche die Gruppe $\overline{G}$ entsteht, zuzuordnen: Indem wir dann die jedesmal gleichen Substitutionen der einen und anderen Gruppe entsprechend setzen, folgt:

Jeder Operation $S(A_1, A_2, \cdots A_m)$ in den A_i entspricht eine und nur eine Operation $S(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots \overline{A}_m)$ in den $\overline{A}_i$.

Die Annahme, dass mehrere Substitutionen $S(\overline{A}_i)$, $S'(\overline{A}_i) \cdots$ der einen Substitution $S(A_i)$ entsprechen, führt nämlich zu dem Widerspruche, dass mehrere Substitutionen $S(A_i)$, $S'(A_i) \cdots$ der Gruppe G einander gleich sein müssten, was nach unseren allgemeinen Annahmen für die Substitutionen A_i unzulässig ist.

Umgekehrt aber entspricht einer Operation in den $\overline{A}_i$ entweder gleichfalls n u r e i n e Operation in den A_i, oder aber u n e n d l i c h v i e l e.

Im ersten Falle sind die Gruppen G und $\overline{G}$ holoedrisch isomorph auf einander bezogen und die Operationen $\overline{A}_i$ von derselben Allgemeinheit, wie die Operationen A_i. *Die Gruppen erscheinen also für unsere Auffassung als identisch.*

Wir nehmen zweitens an, die Gruppe aus den Operationen $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m$ sei so beschaffen, dass neben der identischen Operation 1 auch noch die Operation

$$F(A_1, A_2, \cdots A_m) = F$$

gebildet in den $\overline{A}_i$ zur Identität führt, haben also für unsere Operationen $\overline{A}_i$ die Beziehung:

$$F(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots \overline{A}_m) = \overline{F} = 1.$$

Dann folgt aber sofort, dass alle aus F mit Hülfe der Substitutionen $1, S, S' \cdots$ der Gruppe G „transformirten“ Substitutionen:

$$F,\ SFS^{-1},\ S'FS'^{-1} \cdots$$

in den $\overline{A}_i$ gebildet, gleichfalls zur Identität führen und ebenso alle aus diesen Substitutionen wieder durch Iteration und Combination abgeleiteten. Es sind dies *unendlich viele* Operationen für die Gruppe G, weil sie als solche sämmtlich von einander verschieden sind.

Alle diese unendlich vielen Operationen der Gruppe G, welche sonach der Identität in $\overline{G}$ entsprechen, bilden eine Gruppe H und diese ist, wie aus der Entstehungsweise ihrer Operationen unmittelbar hervorgeht, mit allen Substitutionen $S, S' \cdots$ der Gruppe G vertauschbar, oder um die von Herrn L i e eingeführte Bezeichnungsweise zu gebrauchen, diese Gruppe H ist in G ausgezeichnet enthalten.

Bezeichnen wir die Operationen der Gruppe H, also die Operationen in G, welche der Identität in $\overline{G}$ zugeordnet sind, durch $1, T, T' \cdots$, so sind die irgend einer Substitution $\overline{S}$ der Gruppe $\overline{G}$ zugeordneten Substitutionen gegeben durch $\overline{S}, \overline{S}T, \overline{S}T' \cdots$.

Jetzt setzen wir ganz allgemein fest, dass die Operationen

$$F_1(A_1, \cdots A_m),\ F_2(A_1, \cdots A_m), \cdots F_h(A_1, \cdots A_m), \cdots \cdots F_r(A_1, \cdots A_m),$$

in den $\overline{A}_i$ ausgeführt, die Identität ergeben, dass also:

$$\overline{F}_1 = 1,\ \overline{F}_2 = 1, \cdots \overline{F}_h = 1, \cdots \overline{F}_r = 1$$

statthat.

Dann ist die Beziehung der Gruppen G und $\overline{G}$ eine solche, dass jeder Substitution S der Gruppe G die eine Substitution $\overline{S}$ in $\overline{G}$ entspricht. Umgekehrt aber entsprechen der Identität in $\overline{G}$, neben der identischen Substitution, zunächst die Substitutionen $F_1, F_2, \cdots F_h, \cdots F_r$ der Gruppe G. Dann aber alle aus diesen durch Iteration, Combination und Transformation (durch die Substitutionen $S, S' \cdots$) abgeleiteten Substitutionen.

Dabei bilden diese Operationen $1, T, T' \cdots$, wie dies wieder aus ihrer Entstehungsweise sich ergiebt, eine Gruppe H, die in der Gruppe G ausgezeichnet enthalten ist*).

Einer beliebigen Substitution $\overline{S}$ der Gruppe $\overline{G}$ entsprechen dann wieder die Substitutionen $\overline{S}, \overline{S}T, \overline{S}T' \cdots$ in der Gruppe G.

Die soeben definirte Gruppe H bildet sich durch die Combination einer Reihe von Untergruppen $H_1, H_2, \cdots H_h, \cdots H_r$**). Jeder einzelne Ausdruck F_h giebt nämlich Anlass zu einer speciellen Gruppe H_h, die aus allen Substitutionen SF_hS^{-1} und den hieraus durch Iteration, und Combination abgeleiteten Substitutionen besteht. Dabei ist nach dem früher Gesagten auch jede dieser speciellen Gruppen H_h in der ganzen Gruppe G ausgezeichnet enthalten.

Weiter aber folgt unmittelbar aus der Entstehungsweise jeder einzelnen dieser Gruppen:

---

*) Der Satz, dass meriedrischer Isomorphismus — und ein solcher liegt hier in der $1, \infty$-deutigen Beziehung der Gruppen G und $\overline{G}$ vor — nur bei zusammengesetzter Gruppe G statthaben kann, findet sich bei C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, pag. 56.

**) Die indess im Allgemeinen nicht völlig von einander getrennt zu sein brauchen, sondern sehr wohl gewisse Theile (Untergruppen) gemeinsam haben können.

1. Die Gruppen H_h sind auch in der Gruppe H ausgezeichnet enthalten.

2. Jede Gruppe H_h ist mit jeder anderen H_i vertauschbar.

3. Jede Combination zweier oder mehrerer Gruppen $H_h, H_i, \cdots$, die also in der zu Grundelegung zweier, oder mehrerer Relationen $\overline{F}_h = 1$, $\overline{F}_i = 1, \cdots$ ihre Entstehung findet, ist in der Gruppe H als ausgezeichnete Untergruppe enthalten.

4. Auch alle solche Combinationen sind gegeneinander vertauschbar.

Wir gehen auf die Folgerungen, welche sich an diese Sätze knüpfen, im nächsten Paragraphen ein. Doch wollen wir schon hier die Beziehung unserer Gruppe $\overline{G}$ zu der allgemeinen Gruppe G, wie sie aus der Zuordnung der erzeugenden Substitutionen $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_m$ einerseits, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ andererseits entstanden ist, formuliren:

Die isomorphe Zuordnung der Gruppen G und $\overline{G}$ spaltet die Gruppe G in zwei Factoren: In die Gruppe der Substitutionen, welche in den Substitutionen $\overline{A}_i$ geschrieben v e r s c h i e d e n sind, d. h. die Gruppe $\overline{G}$ selbst — und in die Gruppe H derjenigen Substitutionen, welche in den Substitutionen von $\overline{G}$ geschrieben d e r I d e n t i t ä t ä q u i v a l e n t sind. Die letztere Gruppe H ist dabei in G ausgezeichnet enthalten und folgt aus ihr „durch Adjunction von $\overline{G}$“.

§ 5.

Fortsetzung. Verallgemeinerungen.

Der Zusammenhalt der im vorigen Paragraphen besprochenen Beziehungen der Gruppen G und $\overline{G}$ ergiebt jetzt *d i e D e f i n i t i o n einer Gruppe $\overline{G}$ in dem von uns beabsichtigten Sinne durch die blosse Kenntniss einer Anzahl von Beziehungen zwischen erzeugenden Substitutionen unmittelbar*.

Wir können nämlich diese Sätze auch folgendermassen formuliren:

Legen wir den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_m$ unserer allgemeinsten Gruppe G die Bedingung auf, dass:

$$(1) \qquad F_1(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1$$

sei, so wird die Gruppe dadurch eingeschränkt auf die Gruppe $\overline{G_1}$ der Substitutionen, welche mit Berücksichtigung der Bedingung (1) noch verschieden ausfallen.

Fügen wir die weitere Bedingung

$$(2) \qquad F_2(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1$$

zur ersten hinzu, so wird dadurch die engere Gruppe $\overline{G_{1,2}}$ der Substitutionen definirt, welche nach Zuziehung der beiden Relationen noch von einander verschieden sind u. s. f.

Dabei ist es *gleichgültig*, in welcher Reihenfolge wir die Substitutionen $F_1, \cdots, F_r$ zur successiven Abgrenzung unserer Gruppe $\overline{G}$ benutzen *und somit bilden, unabhängig von ihrer Reihenfolge, die Relationen*

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1, \cdots, F_r = 1$$

zwischen den erzeugenden Substitutionen A_i, die Definition einer bestimmten Gruppe $\overline{G}$ von Substitutionen.

Es ist zweckmässig, gleich hier noch eine etwas allgemeinere Auffassung dieser Definition einzufügen, die wohl implicite im Vorstehenden enthalten ist, die aber der folgenden Darstellung wegen besonders formulirt sein mag:

Wir haben die Gruppe $\overline{G}$ aus der denkbar allgemeinsten Gruppe G, die aus m erzeugenden Substitutionen sich bildet, ausgeschieden. Unser Process lässt sich analog definiren, wenn wir von einer weniger allgemeinen Gruppe dabei ausgehen.

Bezeichnen zu dem Ende

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots, \mathsf{A}_m$$

wieder die erzeugenden Operationen einer Gruppe Γ, für welche wir aber jetzt gewisse *specielle Voraussetzungen*

$$\text{(I)} \qquad F_1(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots, \mathsf{A}_m) = 1, \cdots, F_k(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots, \mathsf{A}_m) = 1$$

vorab machen wollen.

Seien dann

$$\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots, \overline{\mathsf{A}_m}$$

die erzeugenden Substitutionen einer speciellen Gruppe $\overline{\Gamma}$, für welche zunächst gleichfalls die Voraussetzungen:

$$\text{(I)} \qquad F_1(\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots, \overline{\mathsf{A}_m}) = 1, \cdots, F_k(\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots, \overline{\mathsf{A}_m}) = 1$$

erfüllt sind, welche aber *ausserdem* noch gewisse weitere Bedingungen:

$$\text{(II)} \qquad F_{k+1}(\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots \overline{\mathsf{A}_m}) = 1, \cdots, F_r(\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots, \overline{\mathsf{A}_m}) = 1$$

befolgen.

Dann ist das Verhältniss dieser Gruppen Γ und $\overline{\Gamma}$ genau das gleiche wie in unserem allgemeinsten Falle: *Wir haben zwei Gruppen, welche zunächst eine Reihe gemeinsamer Bedingungen* (I) *erfüllen. Diese kommen also bei der Frage nach dem gegenseitigen Verhältniss beider Gruppen nicht in Betracht. Vielmehr wird die Stellung der Gruppe $\overline{\Gamma}$ zu Γ eben durch die zweite Reihe von Relationen bezeichnet, welche der Gruppe*

$\overline{\Gamma}$ *gegenüber von* Γ *ihren speciellen Charakter ertheilt. Dabei gelten für diese Relationen wieder analoge Sätze, wie die auf pag.* 14 *oben allgemein formulirten.*

§ 6.

Geometrische Interpretation.

Ehe wir in unseren abstracten Betrachtungen weitergehen, und nun gewisse Gesichtspunkte für die wirkliche Aufstellung der Relationen F_h entwickeln, welche zur Definition einer Gruppe dienen, wollen wir das bisherige in unserer anschauungsmässigen Darstellung verfolgen, weil gerade auch diese für unsere weiteren Ausführungen von Bedeutung wird.

Wie schon früher erwähnt, haben wir jedem der schraffirten und weissen Polygone unseres für die Gruppe G entworfenen Netzes eine bestimmte Bezeichung $S(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ beigelegt, indem wir dabei von einem bestimmten als (1) bezeichneten Polygone ausgingen. Wir haben, zu einer präcisen Festsetzung, dabei jedesmal den beiden an einer Kante $a_1\, a_n$ zusammenstossenden Polygonen die gleiche Bezeichnung beigelegt und halten auch hier daran fest. Die isomorphe Zuordnung der Gruppen G und $\overline{G}$ bedeutet nun, dass wir diese Bezeichnungen durch die in den speciellen Operationen $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_m$ der Gruppe $\overline{G}$ geschriebenen Bezeichnungen $S(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_m)$ ersetzen.*) Dadurch erhält jedesmal eine unendliche Zahl von Polygonen die *gleiche* Bezeichnung; alle Polygone, die durch eine Substitution der Gruppe H bezeichnet sind, werden als (1) benannt werden u. s. f.

Wir greifen unter allen solchen zu *einer* Substitution gehörigen Polygonen, die wir wohl auch als *äquivalente* Polygone bezeichnen, jedesmal einen „Repräsentanten“ unter den schraffirten und den nichtschraffirten Polygonen heraus; dann entspricht ein solches System von lauter verschieden bezeichneten Polygonen der Gruppe $\overline{G}$.

Alle Ränder der Polygone, die wir so als Repräsentanten der verschiedenen Substitutionen abgeschieden haben, sind einander paarweise zugeordnet, derart, dass immer ein Rand $a_i\, a_{i+1}$ eines schraffirten Gebietes einem bestimmten Rande $a_i a_{i+1}$ eines nichtschraffirten Gebietes entspricht. Dabei ist diese Zuordnung eine völlig bestimmte und eindeutige, weil jedes schraffirte (nichtschraffirte) Polygon von ganz bestimmten nichtschraffirten (schraffirten) Polygonen umgeben ist. (Vgl. Fig. 1 der I. Tafel.) Da nun die Substitutionen, durch welche unsere

*) Wir mögen dabei auch die der Operation A_n, für welche $A_1 A_2 \cdots A_m A_n = 1$ ist, entsprechende Operation $\overline{A}_n$ definiren durch die Relation $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \overline{A}_n = 1$.

Polygone bezeichnet sind *eine Gruppe* bilden, *lässt sich dieses System von Polygonen als ein zusammenhängendes Ganze in unserem Netze ausbreiten.*

Der Rand dieses Bereichs besteht dann noch aus einer Reihe von Kanten $a_i a_{i+1}$, die wieder paarweise einander zugeordnet sind. Jede solche Zuordnung zweier Randkanten K_1 und K_2 bedeutet dabei im gruppentheoretischen Sinne, dass ein (etwa schraffirtes) Polygon S, welches an der einen Randkante K_1 *in* unserem Bereiche *liegt*, äquivalent ist mit jenem (schraffirten) Polygone S', welches an der Randkante K_2 *an* unseren Bereich *angrenzt*. Mit anderen Worten: Jeder solchen Zuordnung entspricht eine Substitution T unserer Gruppe H, welche die zu einem gegebenen Polygone S äquivalenten Polygone definirt.

Das so umgrenzte zusammenhängende System von Polygonen breitet sich überdies noch als *einfach zusammenhängendes* Ganze in unserem Netze aus, weil jedes einzelne Polygon mit seinen Spitzen bis zur „Randcurve" desselben (vergl. pag. 9) sich erstreckt. Wir wollen dieses System, das indess noch der mannigfachsten „äquivalenten" Modificationen fähig ist, als das *Fundamentalpolygon* der Gruppe $\overline{G}$ bezeichnen*).

Indem wir über das Fundamentalpolygon unserer Gruppe hinaus die Substitutionen entsprechend fortsetzen, lassen sich an dieses unendlich viele äquivalente Fundamentalpolygone anreihen, deren jedes in gleicher Weise die Gruppe $\overline{G}$ repräsentirt.

Wir beweisen, dass dieselben *lückenlos* und *einfach* unser ganzes unendliches Gebiet von Polygonen überdecken.

Zunächst nämlich lässt sich an jede freie Kante des ursprünglichen Fundamentalpolygons ein neues Fundamentalpolygon anlegen und ebenso an jedes folgende. Wir haben also nur zu zeigen, dass zwei solche Fundamentalpolygone coincidiren, sobald sie nur *ein* Polygon miteinander gemein haben. Bezeichnen aber in einer bestimmten Reihenfolge

$$1, \quad S, \quad S', \cdots, \quad S^{(i)}, \cdots$$

die Polygone des ursprünglichen Fundamentalpolygons, so sind

$$T_1,\ T_1 S,\ T_1 S', \cdots, T_1 S^{(i)}, \cdots$$
$$T_2,\ T_2 S,\ T_2 S', \cdots, T_2 S^{(i)}, \cdots$$

die diesen entsprechenden Polygone zweier neuen Fundamentalpolygone, für welche beziehungsweise T_1 und T_2 dem Polygone 1 entspricht. Ist nun irgend ein

*) Nach Klein, der diese Bezeichnung speciell bei der Gruppe der linearen ganzzahligen Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ von der Determinante 1 einführt.

$$T_1 S^{(i)} = T_2 S^{(i)}$$

so folgt $T_1 = T_2$ und damit die Coincidenz der beiden Fundamentalpolygone*).

Durch unsere Entwickelungen ist jetzt das Verhältniss der Gruppen $\overline{G}$ und G in der geometrischen Auffassung völlig deutlich und wir können dem Schlusssatze des § 4. (pag. 14) die folgende geometrische Beziehung zur Seite setzen:

Die isomorphe Zuordnung der Gruppen G und $\overline{G}$ spaltet unser unendliches Netz in eine unendliche Reihe von „äquivalenten Gebieten“, deren jedes der Gruppe $\overline{G}$ entspricht. Die Gruppe H kennzeichnet sich dabei als die Gruppe der Operationen, welche alle unsere Fundamentalpolygone ineinander überführt, dergestalt, dass dabei das Polygon 1 *in alle äquivalenten Polygone übergeführt wird.*

§ 7.

Geometrische Interpretation. Fortsetzung.

Den Entwickelungen des § 5. gehen nach unserer geometrischen Auffassung die folgenden Sätze parallel:

Legen wir den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_m$ unserer allgemeinsten Gruppe G die Bedingung auf:

(1) $$F_1(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1$$

so wird aus dem unendlichen Netze der Gruppe G ein Stück herausgeschnitten, welches die mit Berücksichtigung der Bedingung (1) noch „verschiedenen“ Polygone umfasst. Die Ränder dieses Gebietes sind einander paarweise zugeordnet, so dass dasselbe geeignet ist, die Gruppe $\overline{G}_1$ zu repräsentiren.

Die weitere Bedingung:

(2) $$F_2(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1$$

spaltet auch hier wieder ein Gebiet ab, das sich durch die paarweise Zuordnung seiner Randkanten als geschlossenes Ganze und geeignet erweist, die Gruppe $\overline{G}_{12}$ zu versinnlichen u. s. f.

Dabei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge wir die Relationen $F_1, F_2, \cdots, F_r$ zur successiven Einschränkung unseres Fundamentalpolygons benutzen, so dass dieses letztere, bis auf äquivalente Modificationen in *eindeutiger* Weise erhalten, in geometrischer Form die Definition einer bestimmten Gruppe $\overline{G}$ bildet.

---

*) Diese Entwickelung für die Gruppe der linearen ganzzahligen Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ von der Determinante 1 hat Herr Klein in einer Vorlesung über elliptische Modulfunctionen, Sommersemester 1879, gegeben. Vergl. auch die Ausführung von Hurwitz, Math. Annalen, Bd. XVIII, pag. 537 ff.

Was die verallgemeinerte Auffassung unserer Definition anlangt, deren wir in § 5. erwähnt haben, indem wir zur Specialisirung einer Gruppe $\bar{\Gamma}$ nicht von der allgemeinsten Gruppe G ausgingen, sondern bereits von einer speciellen Γ, so ist ihre geometrische Bedeutung jetzt gleichfalls unmittelbar ersichtlich:

Wir gehen dann zur Abscheidung eines Fundamentalpolygons für die Gruppe $\bar{\Gamma}$ nicht von dem allgemeinsten Polygonnetze G aus, sondern bereits von einem Fundamentalpolygone Γ desselben.

Dabei erscheint es aber zweckmässig, dieses Fundamentalpolygon Γ so umzugestalten, dass es seine speciellen Eigenschaften

$$\text{(I)} \qquad F_1 = 1, \ F_2 = 1, \ \cdots, \ F_k = 1$$

bereits implicite enthält. Dies geschieht, indem wir die durch die obigen Relationen gegebenen Zuordnungen der *Ränder* dieses Fundamentalpolygons uns durch die Vereinigung der Randkanten wirklich ausgeführt denken. Es erscheint dann das Fundamentalpolygon nicht mehr über dem allgemeinen Polygonnetze G ausgebreitet, sondern als Individuum für sich, implicite behaftet mit den Eigenschaften (I).

Wir wollen ein solches Netz, auch wenn es eine unendlich grosse Gruppe definirt, und dann eine niemals abschliessende Reihe von Polygonen umfasst, als ein *geschlossenes Netz* bezeichnen, mit Rücksicht darauf, dass es keine freien Randkanten mehr besitzt.

In diesem Sinne bildet also auch der ganze Bereich der Gruppe G ein geschlossenes Netz. Dabei beachten wir noch folgendes: Während das geschlossene Netz G in gewissem Sinne als *einfach zusammenhängend* zu bezeichnen war (vergl. pag. 9), wird dies für das geschlossene Netz einer Gruppe Γ *im Allgemeinen nicht mehr der Fall sein.* Vielmehr kann der Zusammenhang eines solchen Netzes ein gewisser endlicher sowohl, wie auch ein unendlich grosser sein.

Aus einem geschlossenen Netze Γ schneiden wir nun wieder das Fundamentalpolygon $\bar{\Gamma}$ aus, vermöge der Relationen

$$\text{(II)} \qquad F_{k+1} = 1, \ \cdots, \ F_r = 1.$$

Dann spricht sich in diesem letzteren Fundamentalpolygone explicite nur mehr das Verhältniss von $\bar{\Gamma}$ zu Γ aus, nicht mehr das allgemeinere von $\bar{\Gamma}$ zu G.

Dabei wird sich ein solches Fundamentalpolygon $\bar{\Gamma}$ im Allgemeinen jetzt nicht mehr als *einfach* zusammenhängendes Ganze in dem geschlossenen Netze Γ ausbreiten lassen, wie dies speciell für ein Fundamentalpolygon $\bar{G}$ der Fall war, das wir aus dem allgemeinsten Netze G ausgeschnitten haben.

§ 8.

Geschlossene Netze.

Das bisherige zusammenfassend, gewinnen wir für die geometrische Definition einer Gruppe die folgende Auffassung:

Die Definition einer Gruppe $\bar{\Gamma}$, welche sich analytisch durch die, zwischen den erzeugenden Substitutionen A_i bestehenden Relationen:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ \cdots,\ F_h = 1,\ \cdots,\ F_r = 1$$

kennzeichnet, ist geometrisch gegeben:

1. Durch die Angabe eines Fundamentalpolygons, welches sich über dem geschlossenen Netze einer allgemeinen Gruppe Γ (und das kann selbstverständlich auch die allgemeinste Gruppe G sein) ausbreitet, und durch die Festsetzung der paarweisen Zuordnung der Ränder dieses Fundamentalpolygons.

2. Zweitens aber lässt sich die Gruppe $\bar{\Gamma}$ (die wir nach der eben gemachten Bemerkung auch als Gruppe $\bar{G}$ bezeichnen können) in einem *geschlossenen* Netze versinnlichen, welches erhalten wird, wenn wir die eben angegebene Aneinanderfügung der Ränder des Fundamentalpolygons wirklich ausführen. Dabei wird dieses geschlossene Netz *eindeutig* erhalten, welche allgemeinere Gruppe Γ auch den Ausgangspunkt für die Bildung des Fundamentalpolygons von $\bar{\Gamma}$ gegeben hat. *Somit bildet dieses geschlossene Netz auch die geometrische Definition unserer Gruppe* $\bar{\Gamma}$.

Wir fügen dieser Definition der geschlossenen Netze noch zwei Sätze bei, welche die Lagenverhältnisse der einzelnen schraffirten und nichtschraffirten Polygone eines solchen Netzes charakterisiren und welche sich unmittelbar den Sätzen anschliessen, welche wir in § 2. und § 3. für das Netz der allgemeineren Gruppe G aufgestellt haben:

1. *Die Lagenbeziehung der einzelnen schraffirten Polygone untereinander ist für jedes schraffirte Polygon genau dieselbe wie für jedes andere.*

Betrachten wir nämlich die Anordnung der Fläche in Bezug auf das schraffirte Polygon 1, so gehen wir von den Operationen $A_1, A_2, \cdots, A_n$ aus, durch welche wir successive alle Gebiete unserer Fläche um das Gebiet 1 anordnen. Die Anordnung der Fläche um irgend ein anderes schraffirtes Gebiet S erhalten wir nun, wenn wir von den Operationen ausgehen, welche dieses Gebiet S in die den obigen analogen Gebiete $SA_1, SA_2, \cdots, SA_n$ überführen. Dies sind aber auf das Polygon 1 angewandt die Operationen SA_iS^{-1}. Da nun unsere Gruppe holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen ist, wenn wir sie einmal durch die Operationen A_i erzeugen, das andere Mal durch die Operationen SA_iS^{-1}, so ist die Anordnung um ein Gebiet S dieselbe, wie um ein Gebiet 1, w. z. b. w.

Das gleiche gilt bezüglich der gegenseitigen Anordnung der nichtschraffirten Polygone, aus welchen sich in analoger Weise die Gruppe des Netzes herleitet.

Wir bezeichnen dieses Lagenverhältniss der einzelnen Polygone zu einander, indem wir sagen: *Jede Gruppe lässt sich durch ein reguläres Polygonnetz versinnlichen.*

2. *Was die Lagenbeziehung der schraffirten Polygone zu den nichtschraffirten anlangt*, so gilt hierüber das Folgende:

Wir haben diese Anordnung für das Netz der Gruppe G als eine *symmetrische* bezeichnet. Es war nämlich die Gruppe G holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen, wenn wir den erzeugenden Operationen $A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n$ der Gruppe die „symmetrischen" Operationen $A_1', A_2', \cdots, A_m', A_n'$ zuordneten (vergl. pag. 10). Dabei fanden die Beziehungen statt:

$$A_i' = A_1\, A_2 \cdots A_{i-1}\, A_{i+1} \cdots A_m\, A_n,$$
$$A_i = A_1' A_2' \cdots A_{i-1}' A_{i+1}' \cdots A_m' A_n',$$
$$\Pi(A_i) = 1, \qquad \Pi(A_i') = 1.$$

Diese Symmetrie, welche für das geschlossene Netz der Gruppe G statthat, tritt im Allgemeinen für das geschlossene Netz einer speciellen Gruppe $\overline{G}$ nicht ein. Dies ist vielmehr dann und nur dann der Fall, wenn den Relationen:

$$F_h(A_1, A_2, \cdots A_m, A_n) = 1,$$

welche die Gruppe $\overline{G}$ definiren, sich die analogen Relationen, geschrieben in den A_i' zur Seite stellen, wenn also unsere erzeugenden Substitutionen auch den Bedingungen:

$$F_h(A_1', A_2', \cdots A_m', A_n') = 1,$$

genügen, wo die A_i und A_i' durch die obigen Relationen verbunden sind.

Sprechen wir also allgemein von dem *regulären Polygonnetze einer Gruppe $\overline{G}$*, so wollen wir diese *besonderen* Netze, welche sich durch die Möglichkeit einer gewissen holoedrisch isomorphen Beziehung der Gruppe $\overline{G}$ in sich ergeben, als *regulär-symmetrische Polygonnetze* bezeichnen*).

Schliesslich bemerken wir noch, dass ein durch die obigen Processe erhaltenes Polygonnetz G stets *einer bestimmten* Erzeugungsweise der

*) Man vergleiche hierzu § 10., sowie die im II. Abschnitte (§ 12. u. § 14.) für *endliche* Gruppen gegebenen Erörterungen, die speciell auf die Stellung dieser allgemeineren Auffassung zu meinen früheren Arbeiten Bezug nehmen, in denen ich in falscher Beschränkung ausschliesslich gewisse *regulär-symmetrische* Netze betrachtet habe.

Gruppe aus gewissen Operationen A_i entspricht, dass also zu einer Gruppe, den unendlich vielen verschiedenen Arten ihrer Erzeugung durch solche Operationen entsprechend, eine unendliche Anzahl verschiedener Netze gehört.

§ 9.

Verhältniss der Gruppen $\overline{G}$ und H.

Unsere bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, dass zur Definition einer Gruppe $\overline{G}$ es darauf ankommt, für eine Anzahl von „erzeugenden Substitutionen“ $A_1, A_2, \cdots A_m$ die hinreichende Zahl von Relationen $F_h(A_1, A_2, \cdots A_m) = 1$ zu bestimmen, welche diese Gruppe aus der allgemeinen Gruppe G abscheidet.

Die Aufgabe fällt zusammen mit der anderen, unsere Gruppe H zu bestimmen derjenigen Substitutionen von G, welche mit Bezug auf die Gruppe $\overline{G}$ der Identität congruent sind).*

Es mögen *die erzeugenden Substitutionen* dieser Gruppe H sich in der Form:

$$\Phi_1(A_1, \cdots A_m), \quad \Phi_2(A_1, \cdots A_m), \quad \cdots \quad \Phi_t(A_1, \cdots A_m)$$

darstellen. Diese Substitutionen liefern für unsere Gruppe $\overline{G}$ ein System von *definirenden Relationen*. Denn die aus den Φ_i gebildete Gruppe H soll, in Bezug auf die Gruppe $\overline{G}$ betrachtet, mit der Identität congruent sein, d. h. mit Bezug auf die Substitutionen $\overline{A}_i$ der Gruppe $\overline{G}$ ist

$$\Phi_i(\overline{A_1}, \cdots \overline{A_m}) = 1.$$

Die linken Seiten der obigen Relationen

$$F_h(A_1, \cdots A_m) = 1$$

für unsere Gruppe $\overline{G}$ finden sich also sicher als *erzeugende Substitutionen* unter den $\Phi_i(A_i)$. *Aber das System der Φ_i ist umfassender als das System der F_h.* Es ist nämlich ersichtlich, dass mit einer Relation $F_h = 1$ alle aus ihr durch Transformation mit den Substitutionen der Gruppe G abgeleiteten Relationen $SF_hS^{-1} = 1$ *äquivalent* sind**), während die linken Seiten dieser Relationen doch als wesentlich *verschiedene erzeugende Substitutionen* Φ_i der Gruppe H im Allgemeinen zu gelten haben.

Insofern nun jede Relation $F_h = 1$ (wie auch die Relationen $\Phi_i = 1$) geometrisch die Zusammengehörigkeit zweier Randkanten des Fundamentalpolygons für unsere Gruppe bedeutet, lassen sich umgekehrt diese *definirenden Relationen* einer Gruppe $\overline{G}$ (sowie jene der

---

*) Es sei die kurze Ausdrucksweise in diesem übertragenen Sinne gestattet.

**) Nicht aber im Allgemeinen die aus solchen Substitutionen durch Iteration und Combination abgeleiteten.

Gruppe H) bilden, wenn uns für eine Gruppe das Fundamentalpolygon und die Zuordnung der Ränder desselben gegeben vorliegt. Gerade in dieser Form, ausgehend von der geometrischen Darstellung, stellen wir im II. Abschnitte die abstracte Definition einiger bekannten Gruppen auf. Es sind die Beispiele, an denen ich zuerst die vorliegende Auffassungsweise gruppentheoretischer Processe studirte. Doch ist gerade auch hier nicht zu verkennen, dass die Geometrie nur für verhältnissmässig einfache Fälle die Lösung ermöglicht, während weitergehende Untersuchungen auf die rein combinatorische Formulirung der Frage eingehen müssen, welche ich hier zu entwickeln versucht habe.

§ 10.

Anschliessende Bemerkungen.

Zum Schlusse dieses Abschnittes seien noch einige Punkte berührt, die sich unmittelbar den bisherigen Erörterungen anfügen.

1. Was zunächst die hier verwendete *geometrische Darstellung* einer Gruppe betrifft, so habe ich die allgemeinere Auffassung solcher Figuren zu bezeichnen, deren ich in der Einleitung erwähnte. Sie liegt geradezu in den vorstehend gegebenen Entwickelungen über *Fundamentalpolygone.*

Die Gruppe H, welche wir vorhin (pag. 12, ff.) aus unserer allgemeinsten Gruppe G abgeschieden haben, als die Gruppe der mit Bezug auf $\overline{G}$ der Identität congruenten Substitutionen von G, ist uns in geometrischer Form gegeben durch die Ueberführungen eines gewissen Fundamentalpolygons (welches der Gruppe $\overline{G}$ entsprach) in eine Reihe von gleichartigen Fundamentalpolygonen, die, mit ihren Rändern aneinander grenzend, das ganze Gebiet der Gruppe G *einfach* und *lückenlos* überdecken. Diese Gruppe H entsteht dabei *aus denjenigen Operationen als „den erzeugenden Substitutionen“, welche durch die paarweisen Zuordnungen der Randkanten eines ursprünglichen Fundamentalpolygons bezeichnet sind*, und aus welchen die Zuordnung der einzelnen Fundamentalpolygone, deren jedes eine Substitution der Gruppe H versinnlicht, hervorgeht.

Gehen wir, zu einer noch etwas allgemeineren Formulirung, von dem „geschlossenen Netze“ einer Gruppe Γ aus (vergl. § 7. u. 8.), so wird durch das Fundamentalpolygon einer Gruppe $\overline{\Gamma}$, in analoger Weise wie soeben, in diesem geschlossenen Netze eine Eintheilung in eine Reihe von Fundamentalpolygonen hergestellt, deren Ueberführungen in einander eine zur obigen Gruppe H analoge Gruppe H definiren. Dabei werden jetzt diese Fundamentalpolygone, deren jedes Träger einer Substitution der Gruppe H ist, im Allgemeinen *mehrfachen Zusammenhang* aufweisen und von *einer Anzahl getrennter Ränder* begrenzt sein, für welche eine gegenseitige Zuordnung wieder die Art der Ueberführung der einzelnen Polygone ineinander bestimmt.

Das Wesentliche für alle solche Darstellungen von Gruppen H und H *ist dabei dieses, dass die Reihe der Fundamentalpolygone ein „in sich geschlossenes"* (*vergl. pag.* 19) *Gebiet* (*von endlichem oder unendlich hohem Zusammenhange*) *lückenlos und einfach, und in regulärer Eintheilung überdeckt* *).

Eine solche allgemeinere geometrische Darstellung kann man nun ersichtlich von Anfang an zur Repräsentation einer jeden Gruppe zu Grunde legen, und hat dabei vor der im Vorstehenden gewählten speciellen Formulirung gewisse Vortheile voraus:

Zunächst fällt die gezwungene Auffassung fort, welche darin liegt, dass wir auf ein „*symmetrisches*" Netz G (vgl. pag. 10) als den Ausgangspunkt der Darstellung zurückgehen **) und alle Gruppen $\overline{G}$ als Fundamentalpolygone aus einem solchen Netze ausschneiden, während doch diese selbst dabei durchaus nicht symmetrisch zu sein brauchen (vergl. pag. 21). Dadurch kommt es, dass jedes specielle geschlossene Polygonnetz G, auch wenn es kein *regulär-symmetrisches* ist, doch eine *scheinbare* Symmetrie in der Unterabtheilung in schraffirte und nichtschraffirte, zu einander symmetrische, Polygone besitzt ***). Wir müssen je zwei solcher Gebiete, welche die gleiche Bezeichnung tragen, zu einem einzigen zusammenfassen, um eine Darstellung in dem hier gegebenen allgemeineren Sinne zu erhalten.

Indem weiter in der allgemeineren Darstellung die erzeugenden Substitutionen der Gruppen G, $\overline{G}$, Γ, $\overline{\Gamma}$, ebenso wie die der Gruppen H und H, definirt erscheinen durch die paarweise Zuordnung der Ränder in einem ersten Polygone einer regulären Gebietseintheilung,

---

*) *Ebene* Gebietseintheilungen solcher Art sind es, welche den schon Eingangs erwähnten functionentheoretischen Untersuchungen von Schottky und Poincaré zu Grunde liegen. [Vergl. insbesondere Comptes rendus 1881, I., pag. 333, 1274, 1484, sowie Crelle's Journal, Bd. 83, pag. 346.]*) Dabei sind, im Gegensatz zu der hier eingeführten abstract gruppentheoretischen Auffassung, die in Gebietseintheilungen vorliegenden Gruppen stets als *Gruppen linearer Substitutionen* einer Veränderlichen verstanden, zu welchen ebendiese Gebietseintheilungen in einer *bestimmten quantitativen Beziehung* stehen.

**) Wir legen damit eigentlich eine Gruppe zu Grunde, welche doppelt so gross ist, als die Gruppe G. Zu den Operationen von G kommen nämlich noch die *Spiegelungen* hinzu, welche die schraffirten und nichtschraffirten Polygone mit einander vertauschen.

***) Und hier liegt die Quelle des schon erwähnten Fehlers meiner früheren Arbeit, auf den ich pag. 30 ausführlich eingehe.

---

*) Den auf pag. 4 gegebenen Citaten habe ich nachträglich noch 2 demnächst in diesen Annalen (Bd. XIX, Heft 4) erscheinende Abhandlungen von Poincaré und Klein beizufügen [Januar 1882].

fällt die Besonderheit fort, welche der specielleren Darstellung anhaftet, dass nämlich die erzeugenden Substitutionen der Gruppen $G, \overline{G}, \Gamma, \overline{\Gamma}$ definirt sind als „Drehungen um die Eckpunkte der Gebietseintheilung", während gleichzeitig die erzeugenden Substitutionen für die Gruppen H und H durch die Zuordnung der Ränder eines Fundamentalpolygons gegeben erscheinen.

Gleichwohl habe ich an der specielleren geometrischen Darstellung festgehalten. Einmal ist sie mir durch meine früheren Studien die geläufigere; dann aber, und darauf kommt es hier vor Allem an, lässt sich in der allgemeineren Formulirung die geometrische Uebersichtlichkeit nicht in dem Maasse erreichen, wie dies hier (auch noch für verhältnissmässig complicirte Beispiele) gelingt, wo durch die Trennung schraffirter und nichtschraffirter Gebiete die Definition der einzelnen gruppentheoretischen Operationen in anschaulichster Form gegeben ist. Und insoferne der geometrische Apparat, wie schon in der Einleitung erwähnt, nur einem ersten Eindringen auf die *gruppentheoretischen* Fragen dient, an dessen Stelle weiterhin eine davon unabhängige Behandelung zu treten hat, mag es genügen, hier gezeigt zu haben, wie eine solche Darstellung sich unter ein allgemeines Gebiet subsumirt, das von anderer Seite her Gegenstand der Untersuchung geworden ist, und mag es genügen, von der *Besonderheit*, welche unserer engeren *geometrischen* Formulirung anhaftet, Rechenschaft gegeben zu haben.

2. Die folgende Bemerkung bezweckt, der *gruppentheoretischen* Fragestellung, welche uns in ihrer allgemeinen Gestalt seither beschäftigte, noch eine andere Fassung zu geben, die uns gleichzeitig zu den Ausführungen des folgenden Abschnittes hinüberleitet. Ist uns „in independenter Form" eine Gruppe gegeben durch Relationen $F_h = 1$ zwischen erzeugenden Substitutionen A_i, und wir haben die Aufgabe, nun die Substitutionen derselben explicite zu bilden, so werden wir uns aus den erzeugenden Substitutionen zunächst eine Reihe von Gruppen herstellen, die, mit den Bedingungen $F_h = 1$ verträglich, sicher als *Untergruppen* in der ganzen Gruppe enthalten sind. Durch die Combination solcher Untergruppen entsteht dann die Gesammtgruppe, und die Regeln nach welchen diese Combinationen vorzunehmen sind, liegen eben wieder in den obigen Relationen vor.

Wir kennzeichnen also in dieser Auffassung eine Gruppe dadurch, dass wir sagen, sie enthält eine Reihe von (bekannten) Gruppen als Untergruppen, für welche die gegenseitige Stellung durch gewisse Relationen zwischen ihren Substitutionen gegeben ist. Diese Darstellung lässt sich dabei noch auf die mannichfachste Weise, durch zweckmässige Umformungen der Relationen $F_h = 1$, gestalten, den verschiedenen in einer Gruppe enthaltenen Untergruppen entsprechend.

Wir machen im Folgenden von diesem allgemeinen Principe Gebrauch: Indem wir uns nämlich im folgenden Abschnitte auf *endliche Gruppen* beschränken, geben wir durch eine erste Reihe von Formeln $F_h = 1$ jedesmal die *Perioden* der erzeugenden Substitutionen A_i an; es ist also unmittelbar eine Reihe von *cyklischen* Untergruppen, welche in der Gesammtgruppe enthalten sind, durch diese Formeln definirt; eine zweite Reihe von Formeln $F_h = 1$ bestimmt dann die gegenseitige Stellung dieser cyklischen Untergruppen untereinander.

II. Abschnitt.

Endliche Gruppen.

§ 11.

Definition einer Gruppe Γ, welche den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen bildet.

Die specielle Weiterführung der im vorhergehenden Abschnitte in allgemeinster Weise gegebenen Entwickelungen soll sich auf die Behandelung *endlicher Gruppen* beziehen.

Dabei wollen wir in unserer Darstellung nicht mehr von der allgemeinsten Gruppe G ausgehen, sondern im Sinne des § 5. von einer speciellen Gruppe Γ, die aber geeignet ist, alle möglichen Fälle endlicher Gruppen zu umfassen. *Wir wollen (wie soeben erwähnt) annehmen, dass unsere erzeugenden Operationen $A_1, A_2, \cdots, A_m$ bestimmte Perioden $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m$ besitzen,* so dass für unsere Gruppe Γ die Relationen

$$A_1^{\nu_1} = 1, \; A_2^{\nu_2} = 1, \; \cdots, \; A_m^{\nu_m} = 1$$

bestehen. Diesen fügen wir noch die analoge Relation zu für die Operation A_n (welche wir durch die Beziehung $A_1 A_2 \cdots A_m A_n = 1$ definirt hatten). Wir setzen für A_n die Periode ν_n fest und stellen also kurz als *Definition der Gruppe Γ die Relationen auf:*

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} A_i^{\nu_i} = 1, \\ \prod A_i = 1, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots m, n.$$

Die Einführung und nähere Definition der Substitution A_n geschieht im Interesse unserer *geometrischen Darstellung*, wie denn die folgenden Entwickelungen sich enger an diese anschliessen sollen als dies bisher der Fall war, wo sie nur eine gelegentliche anschauungsmässige Deutung unserer gruppentheoretischen Sätze bildete.

Unserer neuen, im Allgemeinen*) noch unendlich grossen, Gruppe Γ entspricht nun in dem unendlichen Netze der Gruppe G als Funda-

*) Ueber gewisse *specielle* Fälle vergleiche § 15, 1.

mentalpolygon, wie wir oben (pag. 17) allgemein gezeigt, ein *einfach zusammenhängender* Bereich. An jedem Eckpunkte a_i desselben sind nur mehr $2\nu_i$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Polygone zu berücksichtigen, den Perioden ν_i der Operationen A_i entsprechend. Die jedesmal entstehenden beiden Randkanten sind dann einander zugeordnet.

Indem wir durch Dehnungen des Fundamentalpolygons diese freien Randkanten vereinigen, entsteht ein neues „geschlossenes Polygonnetz", in welchem an jedem Eckpunkte a_i je $2\nu_i$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Polygone zusammenstossen, die sich (im Allgemeinen (vergl. vorige Anm.)) unendlich oft reproduciren. Ertheilen wir auch diesem Netze, im Sinne unserer früheren Darstellung (pag. 7) eine übersichtliche Anordnung, so können wir die Kanten unserer Polygone wieder als Orthogonalkreise zu einem festen Kreise K zeichnen und auseinander durch Spiegelung nach dem Principe der reciproken Radien ableiten. Dabei müssen wir dann, um die gewünschte Anzahl der jedesmal in einem Ecke zusammenstossenden Polygone zu erhalten, dem Ausgangspolygone an den Ecken $a_1, a_2, \cdots, a_m, a_n$ bez. die Winkel $\frac{\pi}{\nu_1}, \frac{\pi}{\nu_2}, \cdots, \frac{\pi}{\nu_m}, \frac{\pi}{\nu_n}$ beilegen, eine Anordnung, die sich im Allgemeinen noch auf sehr mannigfache Weise bewerkstelligen lässt.

Dieses unendliche geschlossene Netz definirt jetzt unsere Gruppe Γ *im Sinne des § 7., denn die näheren Eigenschaften*

$$\text{(I)} \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi A_i = 1$$

dieser Gruppe, und nur diese, sprechen sich implicite in der gegenseitigen Anordnung der einzelnen Polygone aus. Dabei bemerken wir, dass das Netz dieser Gruppe gleichfalls noch ein *einfach zusammenhängendes* Ganze bildet in unserer pag. 9 gegebenen Auffassung.

Indem wir jetzt wieder von einem Polygone 1 ausgehen, ertheilen wir allen übrigen Polygonen bestimmte Namen, den Substitutionen entsprechend, welche vom Ausgangspolygone 1 zu ihnen führen. Diese Bezeichnungen sind dabei wieder *bestimmte*, wenn wir von äquivalenten Ausdrücken absehen, die durch das Vorhandensein der obigen Relationen herbeigeführt werden. Geometrisch gesprochen können wir von Polygon 1 auf unendlich vielen *„Transformationswegen"* zu einem Polygone S gelangen: Alle diese Wege sind *äquivalent* und durch die obigen Relationen in einander überführbar. Wir geben mit Rücksicht auf das Folgende diesem Satze noch die Formulirung:

Jeder in sich geschlossene Transformationsweg auf unserem unendlichen Netze, der also ein Stück desselben herausschneidet, kann auf einen Punkt zusammengezogen werden, d. h. *die einem solchen Wege auf der Fläche entsprechende Substitution* $S(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n)$ *kann mit Hülfe der Bedingungen* (I) *auf die Identität gebracht werden.*

Dabei sei erwähnt, dass (wie dies auch unmittelbar in der Figur deutlich) unser Polygonnetz ein *regulär-symmetrisches* ist. Den Relationen

$$A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi(A_i) = 1$$

entsprechen nämlich, wie aus den pag. 10 gegebenen Formeln unmittelbar hervorgeht, die symmetrischen Relationen:

$$A_i'^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi(A_i') = 1$$

womit nach § 8. (pag. 21) die Symmetrie gekennzeichnet ist. In geometrischer Auffassung bildet wieder die *Spiegelung* der Polygone längs einer der Kanten eine Operation Θ, durch welche die Gruppe in sich übergeführt wird und für welche gleichzeitig $\Theta A_i \Theta^{-1} = A_i'$ ist, womit die holoedrisch isomorphe Zuordnung der Gruppe in sich gleichfalls bezeichnet ist (vergl. pag. 11).

§ 12.

Fundamentalpolygon und geschlossenes Polygonnetz (Riemann'sche Fläche) für eine endliche Gruppe $\bar{\Gamma}$.

Jede Gruppe $\bar{\Gamma}$, für welche ein System von erzeugenden Operationen $A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n$ existirt, welches den Bedingungen:

$$\text{(I)} \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi(A_i) = 1$$

der Gruppe Γ genügt, stellt sich jetzt in der Weise dar, dass zu diesen Bedingungen noch weitere Relationen (II) hinzutreten, die wir (um Verwechselung mit der früheren Bezeichnung zu vermeiden) jetzt in der Form

$$\text{(II)} \quad P_1(A_i) = 1,\ P_2(A_i) = 1, \cdots, P_h(A_i) = 1, \cdots, P_q(A_i) = 1$$

schreiben wollen.

Wir verfolgen die Bedeutung dieser Relationen $P_h = 1$ unter der Annahme, dass wir es mit einer endlichen Gruppe $\bar{\Gamma}$ von N Substitutionen zu thun haben.

In gleicher Weise, wie früher geschildert, breiten wir die Substitutionen der Gruppe $\bar{\Gamma}$ in dem geschlossenen Netze der Gruppe Γ aus und gelangen zu einem *Fundamentalpolygone* der Gruppe, welches bis auf „äquivalente Aenderungen" bestimmt ist. Es besteht aus $2N$ abwechselnd schraffirten und nichtschraffirten Polygonen (n-Ecken), welche, der Erzeugung unserer Gruppe durch die Substitutionen A_i entsprechend, sich als ein *zusammenhängendes Gebiet* im Netze Γ ausbreiten lassen, dessen Randkanten vermöge der Relationen (II) paarweise einander zugeordnet sind. Wir haben zu beweisen, dass wir das Gebiet wiederum in Gestalt eines *einfach zusammenhängenden* Stückes in unserem Netze ausbreiten können.

Nimmt man nämlich an, dass innerhalb des Fundamentalpolygons ausgeschlossene „Inseln“ von Polygoncomplexen liegen, so brauchen wir zunächst diese Inseln nur als einfach zusammenhängend vorauszusetzen, denn andernfalls hätten wir unser Fundamentalpolygon überhaupt nicht zusammenhängend ausgebreitet, was sicher möglich ist. Die Ränder R_1, R_2 einer solchen Insel sind nun irgendwie anderen Randkanten R_1', R_2', $\cdots$ unseres Fundamentalpolygons zugeordnet. Die an diese letzteren grenzenden Stücke S_1', S_2', $\cdots$ des Fundamentalpolygons sind also den entsprechenden Stücken S_1, S_2, $\cdots$ der Insel äquivalent und diese kann, indem wir die Stücke S_1', S_2', $\cdots$ ersetzen durch die Stücke S_1, S_2, $\cdots$ der Insel, verkleinert und ganz zum Verschwinden gebracht werden, ohne dass eine neue Insel aufträte. Indem wir dieses Verfahren fortsetzen, sehen wir:

Für jede Gruppe $\overline{\Gamma}$, *welche durch Substitutionen* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *erzeugt wird, welche den Bedingungen*

$$\text{(I)} \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi A_i = 1$$

genügen, lässt sich in unserem unendlichen Netze ein ***einfach zusammenhängendes Fundamentalpolygon*** *construiren, dessen Ränder einander paarweise zugeordnet sind.*

Wir wollen die freien Ränder dieses Fundamentalpolygons wirklich aneinanderschliessen, wie es die Relationen

$$\text{(II)} \qquad P_h(A_i) = 1$$

angeben, d. h. wir wollen das *geschlossene Polygonnetz* für unsere *endliche* Gruppe $\overline{\Gamma}$ bilden. *Dieses ist dann eine* ***allseitig*** *geschlossene Fläche von einem gewissen Geschlechte p: eine frei im Raume gelegene* ***Riemann'sche*** *Fläche*)*, deren $2N$ einzelne, abwechselnd schraffirte und weisse Gebiete in den Ecken (Verzweigungspunkten) zu je $2\nu_i$ zusammenstossen, den Relationen (I) $A_i^{\nu_i} = 1$ entsprechend. Je zwei in irgend einer Kante $a_i a_{i+1}$ benachbarte Polygone sind dabei als *ein Blatt* der Riemann'schen Fläche aufzufassen.

Der pag. 21 für unsere allgemeinen Polygonnetze aufgestellte Satz lautet für unseren speciellen Fall:

Das geschlossene Polygonnetz ist eine ***reguläre*** *N blättrige* ***Riemann'sche*** *Fläche.*

---

*) Ich gebrauche für diese Polygonnetze das Wort „*Riemann'sche Fläche*“ wegen ihrer unmittelbaren Beziehung zu den betreffenden Eingangs erwähnten Abhandlungen (pag. 2, 3, 4, Anm.). Doch sei nochmals hervorgehoben, dass in der vorliegenden Untersuchung alle unsere geometrischen Gebilde, allein den *gruppentheoretischen* Fragen dienend, nur im Sinne der analysis situs verstanden sind.

Dabei ist, wie schon im § 8. allgemein erwähnt, die Anordnung der nichtschraffirten Gebiete nicht nothwendig symmetrisch zu der Anordnung der schraffirten Gebiete. Vielmehr verlangen die früher hiefür aufgestellten Bedingungen unter Festhaltung der dortigen Bezeichnung, dass neben den Relationen:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \text{I.} & A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi A_i = 1, \\ \text{II.} & P_h(A_i) = 1 \end{cases}$$

noch die symmetrischen Relationen

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \text{I.} & A_i'^{\,\nu_i} = 1, \qquad \Pi A_i' = 1, \\ \text{II.} & P_h(A_i') = 1 \end{cases}$$

stattfinden, was wohl stets für die Relationen I. (pag. 28) nicht aber im Allgemeinen für die Relationen II. eintritt.

Die Zusammenfassung des Bisherigen ergiebt folgenden Satz: der eine früher (Ann. Bd. XVII, p. 476) aufgeworfene Frage beantwortet:

Jede endliche Gruppe von N Substitutionen lässt sich, ausgehend von gewissen erzeugenden Substitutionen derselben, durch eine reguläre N-blättrige Riemann'sche Fläche versinnlichen, und zwar, den verschiedenen Arten entsprechend, durch die wir die Gruppe aus erzeugenden Substitutionen definiren können, noch auf sehr verschiedene Weise. Die reguläre Fläche, die wir erhalten, ist aber im Allgemeinen nicht auch regulär-symmetrisch. Dies tritt vielmehr dann und nur dann ein, wenn die Gruppe vermöge ihrer erzeugenden Substitutionen in der eben angedeuteten Weise holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen werden kann*).

*) Anmerkung: Hier sei es gestattet, die Richtigstellung des Fehlers einzufügen, der sich, wie schon erwähnt, in meinen früheren Arbeiten über reguläre Riemann'sche Flächen findet: Meine Untersuchungen über reguläre Riemann'sche Flächen (in meiner Inauguraldissertation, (München 1879) und im XVII. Bande der Mathematischen Annalen pag. 473—510) beschränken sich auf die Betrachtung nur *regulär-symmetrischer* Flächen (vergl. pag. 17 der Diss., sowie pag. 477, 478 der Annalenarbeit), ohne dass dieses Umstandes *als einer Einschränkung* — weil als solche nicht erkannt — Erwähnung gethan ist. So sind also die Sätze in pag. 9 der Inauguraldissertation, sowie pag. 477, Anm. und 501 der Annalenarbeit, welche eine *Aufzählung* gewisser *regulärer* Riemann'scher Flächen betreffen, dort nur für *regulär-symmetrische* Flächen zu verstehen. Die eigentliche gruppentheoretische und algebraische Untersuchung der Arbeiten macht von dieser Voraussetzung keinen Gebrauch und ist somit allgemeingültig. Inwiefern sich gerade diese Untersuchungen den hier gegebenen allgemeineren gruppentheoretischen Formulirungen einordnen, zeige ich in § 14. Fassen wir die reguläre Riemann'sche Fläche in ihrer algebraischen Definition als Galois'sche Resolvente $f(\eta, z) = 0$ auf, so bedeutet die Einschränkung auf nur regulär-symmetrische Flächen im algebraischen Sinne *die Betrachtung Galois'scher Resolventen mit nur reellen Coefficienten*, wie dies Herr Klein in seiner soeben erschienenen Schrift „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" § 21. für symmetrische Flächen überhaupt zeigt.

§ 13.

Geschlossene Curven auf unserer Riemann'schen Fläche. Maximalzahl der Relationen II.

Wir haben uns vermöge der Relationen

$$\text{(I)} \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi A_i = 1,$$

$$\text{(II)} \qquad P_h(A_i) = 1$$

eine geschlossene Riemann'sche Fläche hergestellt, die unsere, N Substitutionen umfassende, Gruppe $\overline{\Gamma}$ repräsentirt. *Für jede solche Darstellung wird also einer Gruppe $\overline{\Gamma}$ ein gewisses Geschlecht p zugewiesen.* Dasselbe ergiebt sich nämlich aus der Kenntniss der Zahl N, (der Blätterzahl) und den durch *die Formeln* (I) gegebenen Zahlen ν_i, welche die Anzahl der in einem Eckpunkte zusammenstossenden schraffirten Polygone (Multiplicität der Verzweigungspunkte) angeben. Man hat nämlich nach dem Geschlechtssatze:

$$p = -N + 1 + \sum \frac{\nu_i - 1}{2}$$

wo die Summe über alle Eckpunkte der Gebietseintheilung ausgedehnt ist.

Wir wollen uns über die Anzahl der Relationen (II) *orientiren, welche die Gruppe $\overline{\Gamma}$ aus dem unendlichen, durch die Formeln* (I) *definirten Netze ausschneiden.*

Ziehen wir auf unserer geschlossenen Fläche irgend eine Curve, welche von einem Polygone zu einem anderen hinführt, so lässt sich dieser Weg *mit Bezug auf die auf der Fläche getroffene reguläre Eintheilung* sofort als eine aus den Operationen $A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n$ zusammengesetzte Substitution $P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n)$ schreiben, analog wie früher im unendlichen Netze.

Ist dieser Weg ein *geschlossener*, so implicirt er eine Relation

$$P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1.$$

Dabei haben wir aber jetzt zu unterscheiden, ob der Weg im Sinne der analysis situs auf einen Punkt zusammengezogen werden kann oder nicht. Im ersteren Falle lässt sich die Relation $P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1$ mit Hülfe der Formeln (I) auf eine Identität zurückführen, wie wir dies beim unendlichen Netze gesehen. *Im anderen Falle ist dies nicht möglich*, d. h. die Relation $P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1$ stellt eine *wesentlich neue* in den Formeln (I) nicht ausgesprochene Beziehung zwischen den Operationen A_i auf. Dabei können wir diese Relationen (I) noch mannigfach umgestalten, d. h. wir können die geschlossene Curve noch mannigfach auf der Fläche verschieben — und umgekehrt sind alle geschlossenen Wege, die sich auf der Fläche durch blosse

Verschiebung ineinander überführen lassen, von jenen durch (I) hervorgerufenen Aenderungen abgesehen, einer einzigen Relation $P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1$ äquivalent.

Nun giebt es auf einer Fläche vom Geschlechte p in diesem Sinne nicht mehr als $2p$ von einander unabhängige geschlossene Wege; alle übrigen lassen sich aus diesen unter Zuhülfenahme blosser Verschiebungen durch Wiederholung und Combination zusammensetzen. Sprechen wir diesen Satz in gruppentheoretischem Sinne aus, so folgt:

Es giebt für unsere reguläre Eintheilung sicher nicht mehr als $2p$ von einander unabhängige Relationen:

$$P_i(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1 .$$

Jede weitere Relation lässt sich mit Hülfe dieser und übrigens der Relationen (I) *herstellen.*

Dabei stellt aber die Zahl $2p$ nur eine obere Grenze der nothwendigen Relationen $P_i = 1$ fest. Denn für unsere reguläre Eintheilung sind nicht bloss die geschlossenen Wege äquivalent, die wir durch stetige Verschiebungen auf der Fläche ineinander überführen können. Eine Relation $P_i = 1$ sagt nämlich zunächst, dass wir, von einem Polygone 1 ausgehend, auf dem Wege P_i wieder zum Polygone 1 zurückgelangen; sie sagt aber auch, dass wir vom Polygone ϑ ausgehend auf dem Wege P_i wieder nach ϑ gelangen; d. h. aus $P_i = 1$ folgt unmittelbar $\vartheta P_i \vartheta^{-1} = 1$. Und allgemein wird sich ein aus solchen Wegen zusammengesetzter Zug

$$\vartheta P_i \vartheta^{-1} \vartheta' P_i \vartheta'^{-1} \cdots = \mathsf{P}(\vartheta P_i \vartheta^{-1})$$

schliessen, wenn nur $P_i = 1$ ist*). Nun kann aber sehr wohl:

$$\vartheta P_i \vartheta^{-1} = P_k \quad \text{oder} \quad \mathsf{P}(\vartheta P_i \vartheta^{-1}) = P_k$$

sein, und also aus $P_i = 1$ auch $P_k = 1$ folgen, ohne dass darum diese beiden Wege stetig (d. h. durch blosse Verschiebung auf der Fläche) ineinander übergeführt werden können.

Verzeichnen wir also auf unserer Fläche $2p$ Curven, die dieselbe zu einer einfach zusammenhängenden machen und drücken diese geschlossenen Curven als Relationen $P_1 = 1$, $P_2 = 1, \cdots, P_{2p} = 1$ aus, so wird die Zahl $2p$ derselben sich um 1 vermindern lassen, so oft eine Relation $\mathsf{P}(\vartheta P_i \vartheta^{-1}) = P_k$ statthat.

Gerade diese geometrische Formulirung ist es nun, von welcher wir in § 15. ausgehen, um für einzelne specielle Gruppen eine „independente Definition" abzuleiten. Wir legen die Definition dieser Gruppen durch reguläre Riemann'sche Flächen zu Grunde, deren

---

*) Umgekehrt folgt aber aus $\mathsf{P}\left(\vartheta P_i \vartheta^{-1}\right) = 1$ *nicht* auch nothwendig $P_i = 1$.

Verzweigung uns die *Relationen* (I) erkennen lässt, deren zweckmässige *Zerschneidung* zu einfach zusammenhängenden Flächenstücken uns die zugehörigen *Relationen* (II) ergiebt.

§ 14.

Frühere Untersuchungen.

Ehe ich dazu übergehe, die im Vorstehenden allgemein exponirten Principien an einigen Beispielen durchzuführen, sei es gestattet, die Stellung meiner früheren gruppentheoretisch-geometrischen Untersuchungen zu den hier gegebenen zu bezeichnen.

In den soeben, pag. 30, citirten Abhandlungen wird geometrisch die Aufgabe gelöst, *eine Gruppe* $\overline{\Gamma}$, *die uns in Form einer regulären Riemann'schen Fläche gegeben vorliegt*, *zu zerlegen*, d. h. für dieselbe eine Reihenfolge von Gruppen $\overline{\Gamma}, H_1, H_2, \cdots$ aufzustellen, deren jede ausgezeichnet in der unmittelbar vorhergehenden enthalten ist und dabei aus ihr sich abscheidet durch Adjunction bez. einer Gruppe $\overline{\Gamma}_1, \overline{\Gamma}_2, \cdots$. Zu dem Ende*) wird die N-blättrig über der complexen Ebene ausgebreitete reguläre Riemann'sche Fläche einer Deformation unterworfen, durch welche die Blätter derselben zum Theile neben- zum Theile übereinander zu liegen kommen. Gelingt dann diese Deformation so, dass eine M'-blättrige $(N = M' \cdot M'')$ frei im Raume gelegene *reguläre* Riemann'sche Fläche entsteht, deren jedes Blatt vom Geschlechte p_1 wieder regulär eingetheilt erscheint, so ist durch diese Deformation die Gruppe $\overline{\Gamma}$ der Fläche gespalten in eine Gruppe Γ_1, repräsentirt durch die reguläre Eintheilung des einzelnen Blattes der deformirten Fläche und eine Gruppe H_1, die Gruppe der Vertauschungen der übereinanderliegenden Blätter.

In unserer hier gegebenen allgemeinen Ausdrucksweise haben wir aus dem geschlossenen Netze einer endlichen Gruppe $\overline{\Gamma}$ ein *Fundamentalpolygon* für eine Gruppe $\overline{\Gamma}_1$ abgeschieden, durch dessen Adjunction die Gruppe $\overline{\Gamma}$ sich auf die Gruppe H_1 reducirt, welche in der Ueberführung der einzelnen äquivalenten Fundamentalpolygone $\overline{\Gamma}_1$ besteht. Somit kennzeichnet sich diese frühere Behandelung als eine specielle Form unserer hier gegebenen allgemeinen Auffassung**).

---

*) Vergl. pag. 46 ff. der Inauguraldissertation; pag. 484 ff. der Arbeit im XVII. Annalenbande.

**) Es sei hier der Hinweis gestattet, dass für die allgemeine *Frage nach der Zerlegung einer Gruppe*, *die durch Relationen* $F_h = 1$ *gegeben ist*, in der vorliegenden Untersuchung (zumal in §§. 4., 5., 9., 10.) die nothwendigen Mittel gegeben sind, und ich möchte mir vorbehalten, auf eine Behandlung derselben,

§ 15.

Beispiele.

1. Die Gruppen beim Geschlechte $p = 0$.

Die vorstehenden Sätze über die Definition von endlichen Gruppen an einigen Beispielen zu erläutern, beginnen wir mit den Fällen, in denen das, aus den Relationen

$$\text{(I)} \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi(A_i) = 1$$

und der Zugrundelegung der Anzahl N der Substitutionen einer Gruppe sich ableitende Geschlecht p gleich *Null* ist. Dann ergiebt unser in § 13. abgeleiteter Satz über die Maximalzahl $2p$ der zur vollständigen Definition einer endlichen Gruppe noch nothwendigen Relationen (II) sofort:

Die beim Geschlechte Null auftretenden Gruppen sind durch die Relationen (I) *allein vollständig definirt.*

Wir zählen die in Betracht kommenden, nachgerade sehr bekannten Gruppen*) kurz auf, indem wir zunächst die hierhergehörigen regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte 0 durch ihre Verzweigung und Blätterzahl charakterisiren, durch welche ja ganz ebenso die Gebietseintheilung der entsprechenden „frei im Raume gelegenen Fläche" bezeichnet ist. Es sind die folgenden:

	Verzweigung der Blätter der Riemann'schen Fläche an den Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zu je ν_1,	ν_2,	ν_3	Blätterzahl $N =$
1. Cyklische Gruppe.	ν,	ν,	.	ν
2. Doppelpyramidengruppe.	ν,	2,	2	2ν
3. Tetraedergruppe.	3,	3,	2	12
4. Oktaedergruppe.	4,	3,	2	24
5. Ikosaederpruppe.	5,	3,	2	60

Für diese Gruppen ergeben sich hiernach unmittelbar die independenten Definitionen. Wir schreiben dieselben, wie wir dies im Anschluss an unsere *geometrischen* Formulirungen stets gethan, in der Weise, dass wir 2 bez. 3 Substitutionen A_i als erzeugende Substitutionen einführen, der Anzahl der Verzweigungsstellen entsprechend, zwischen denen eine

---

die sich in einfachster Weise gestaltet und das Wesen der Frage klar erfassen lässt, demnächst im weiteren Verfolge meiner Untersuchungen einzugehen.

*) Man vergl. Klein, Math. Ann. Bd. IX., pag. 183 ff., und ebenda Bd. XIV, pag. 149.

Relation $\Pi(A_i) = 1$ besteht — eine Schreibweise, die man etwa als „homogene" bezeichnen könnte. Dann kommen *die definirenden Formeln:*

1. Cyklische Gruppe: $A_1^{\nu}=1$, $A_2^{\nu}=1$, $A_1 A_2=1$.
2. Doppelpyramidengruppe: $A_1^{\nu}=1$, $A_2^{2}=1$, $A_3^{2}=1$, $A_1 A_2 A_3=1$.
3. Tetraedergruppe: $A_1^{3}=1$, $A_2^{3}=1$, $A_3^{2}=1$, $A_1 A_2 A_3=1$.
4. Oktaedergruppe: $A_1^{4}=1$, $A_2^{3}=1$, $A_3^{2}=1$, $A_1 A_2 A_3=1$.
5. Ikosaedergruppe: $A_1^{5}=1$, $A_2^{3}=1$, $A_3^{2}=1$, $A_1 A_2 A_3=1$.

Dies Resultat, etwa speciell für die letzte dieser Gruppen ausgesprochen, lautet also:

Sind uns zwei Operationen irgend welcher Art, A_1 und A_2, gegeben, von denen, auf ein Object 1 *angewandt, die erste nach* 5*-maliger Wiederholung, die zweite nach* 3*-maliger Wiederholung den Anfangszustand herstellt, während die Combination der beiden $A_1 A_2 (= A_3^{-1})$ von der Periode* 2 *ist, so ist die durch Iteration und Combination der beiden Operationen A_1, A_2 entstehende Gruppe holoedrisch isomorph mit der Ikosaedergruppe (also mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von* 5 *Dingen).*

Abgesehen von unserer *geometrischen* Entwickelung überzeugt man sich auf rein combinatorischem Wege leicht von diesem Resultate.

Es lassen sich nämlich (indem wir etwa A_2 zunächst durch die Beziehung $A_2^{-1} = A_3 A_1$ eliminiren) alle aus A_1 und A_3 möglichen Producte $A_1^{\alpha} A_3 A_1^{\beta} A_3 \cdots$ mit Hülfe der obigen Relationen

$$A_1^5 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad (A_1 A_3)^3 = 1$$

auf die folgenden 60 *von einander verschiedenen Producte* zurückführen:

$$\begin{gathered} A_1^{\mu}, \\ A_1^{\mu} A_3 A_1^{\nu}, \\ A_1^{\mu} A_3 A_1^{2} A_3 A_1^{\nu}, \\ A_1^{\mu} A_3 A_1^{2} A_3 A_1^{3} A_3 = A_3 A_1^{2} A_3 A_1^{3} A_3 A_1^{-\mu}, \\ (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4), \end{gathered}$$

welche die Substitutionen unserer Gruppe vorstellen.

In unserer geometrischen Sprechweise lautet der Satz: Setzt man irgend welche krummlinige Dreiecke $\overline{a_1 a_2 a_3}$ (schraffirte Dreiecke) und im Sinne der analysis situs symmetrische Dreiecke $\overline{a_1 a_2 a_3}$ (nichtschraffirte Dreiecke) derart nebeneinander, dass in den Ecken a_1 je 10 abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Dreiecke zusammenstossen, in den Ecken a_2 ebenso je 6 und in den Ecken a_3 je 4 solcher Dreiecke, *so enthält das entstehende Netz von Dreiecken, wie wir auch die* G e s t a l t *dieser Dreiecke* *im Uebrigen wählen mögen, nur* 60 *schraffirte und ebensoviele weisse Dreiecke, welche die ganze Ebene ausfüllen*).* [*Die Ebene ist dabei als geschlossene Fläche mit einem unendlich fernen Punkte aufgefasst.*]

In Tafel II ist ein solches Netz von Dreiecken entworfen. Zur besseren Uebersicht sind diese als Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ gezeichnet und somit erscheint die Figur als die bekannte stereographische Projection eines auf die Kugel verzeichneten Ikosaeders**). Weiter ist in der Figur von einem Polygon „1" ausgehend ein Theil der Dreiecke durch die zugehörigen Substitutionen $S(A_1, A_3)$ bezeichnet, wodurch sich die eben angeführte Tabelle der 60 Substitutionen unmittelbar ergiebt.

Die Zurückführung irgend einer allgemeinen Substitution

$$A_1^\alpha A_3 A_1^\beta A_3 \cdots$$

auf eine dieser 60 Substitutionen wird dann geometrisch sofort geleistet, wenn wir nur den einer solchen Substitution entsprechenden Weg vom Polygone 1 beginnend auf unserer Gebietseintheilung verfolgen. Dieser Weg führt uns zu einem bestimmten *Endpolygone,* welches die „reducirte Form" des obigen Ausdruckes darstellt.

Für die übrigen, bei $p = 0$ auftretenden Gruppen und die zugehörigen Gebietseintheilungen ergeben sich selbstverständlich ganz analoge Sätze. Insoferne aber diese Gruppen die einzigen sind, deren, aus den Relationen I gebildete Netze nur eine *endliche* Zahl von Polygonen umfassen, können wir auch umgekehrt den Satz aussprechen:

Die aufgezählten Gruppen sind die einzigen, für welche die Kenntniss der Relationen I *zu ihrer völligen Definition hinreicht.*

Es bedarf dabei wohl kaum der Erwähnung, dass unsere Gebietseintheilungen, als Netze der in § 11. gegebenen Art, *symmetrische* sind, die Gruppen also durch die pag. 21 gegebene Zuordnung holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen sind.

2. Einige Gruppen, für welche das Geschlecht einer zugehörigen Riemann'schen Fläche $p = 1$ ist.

a. Als Beispiel einer Gruppe, bei welcher die in §. 13. abgeleitete Maximalzahl der Relationen (II) wirklich *nothwendig* ist zur völligen Charakterisirung der Gruppe, dient uns die Gruppe der Transformationsgleichungen der elliptischen Functionen.

*) Der Ausdruck „im Allgemeinen", den wir in den Sätzen pag. 26 u. 27 gebraucht, ist also gerade mit Bezug auf die Gebietseintheilungen bei $p = 0$ als specielle Fälle zu verstehen.

**) Eine Figur, wie sie Schwarz in der mehrfach erwähnten Abhandlung im 75. Bande von Crelle's Journal pag. 321 ff. angiebt. Vergleiche auch Klein, Math. Annalen Bd. XII, pag. 511.

Verwandeln wir die Perioden 2ω, $2\omega'$ einer elliptischen Function in $\frac{2\omega}{m}$, $\frac{2\omega'}{n}$, so besteht die zur Gruppe der Transformationsgleichung gehörige reguläre Riemann'sche Fläche aus $N = 2mn$ Blättern, die an vier Stellen paarweise verzweigt sind*). Das Fundamentalpolygon unserer Fläche zeigt also die bekannte Parallelogrammeintheilung (Fig. 1 der Tafel III), in der die schraffirten und nichtschraffirten Polygone jedesmal den Halbblättern unserer Riemann'schen Fläche entsprechen. Die Anordnung dieses Polygonnetzes in seiner unendlichen Ausdehnung liefert uns also sofort die „Relationen (I)“ für die erzeugenden Substitutionen unserer Gruppe in der Gestalt:

(I) $A_1^2 = 1, \quad A_2^2 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_4^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 A_4 = 1$

und aus diesem Netze wird ein endliches Stück als Fundamentalpolygon unserer Gruppe herausgeschnitten durch die unmittelbar aus der Figur abzulesenden Relationen

(II) $(A_1 A_2)^m = 1, \quad (A_3 A_2)^n = 1,$

durch welche die „Länge“ und „Breite“ unseres Fundamentalpolygons sich bestimmt.

Die Substitutionen $(A_1 A_2)$ und $(A_3 A_2)$ (also die Combination zweier „Drehungen“ A_i) bezeichnen dabei zwei „Verschiebungen“ des unendlichen Netzes in sich, aus welchen sich alle möglichen Verschiebungen desselben zusammensetzen; gerade der Umstand nun, dass diese Verschiebungen unter einander vertauschbar sind, bewirkt, dass wir hier wirklich $2p = 2$ Relationen (II) bedürfen, um aus diesen zweifach unendlich vielen Operationen eine endliche Gruppe abzuscheiden.

Schliessen wir das nunmehr analytisch definirte Fundamentalpolygon unserer Gruppe zur Riemann'schen Fläche zusammen, so kommt die bekannte, regulär eingetheilte Ringfläche, auf welcher sich die „geschlossenen Wege“ einer Fläche in ihrer gruppentheoretischen Bedeutung an einem einfachsten Beispiele darstellen.

b. Wir führen als weitere Beispiele $p = 1$ zwei reguläre Riemann'sche Flächen auf, welche *nicht regulär-symmetrisch* sind, für welche also die aus den Flächeneintheilungen abgeleitete Erzeugungsweise der zugehörigen Gruppen den in § 12. gekennzeichneten Isomorphismus der Gruppe in sich *nicht* zulässt.

---

*) Führen wir in der Weierstrass'schen Bezeichnung $p(u)$, $p'(u)$ als doppeltperiodische Functionen mit den Perioden 2ω, $2\omega'$ ein, und bezeichnen durch $\overline{p}(u)$, $\overline{p}'(u)$ Functionen mit den Perioden $\frac{2\omega}{m}$, $\frac{2\omega'}{n}$, so stellt die obige Fläche *unmittelbar* die Verzweigung von $p'(u)$ in Bezug auf $\overline{p}(u)$ dar. Vergl. Math. Ann. XVII, pag. 504 ff.

Die beiden Gruppen sind durch die in Figur 2 und 3 der Tafel III gegebenen Fundamentalpolygone und die beigesetzte Zuordnung der Ränder definirt. Uebertragen wir dieses geometrische Bild in unsere analytische Formelsprache, so ergeben sich zunächst die „Relationen I“, welche das unendliche Polygonnetz kennzeichnen. Sie sind:

α) Für die erste Gruppe (Fig. 2):

$$\text{(I)} \qquad A_1^6 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1.$$

β) Für die zweite Gruppe (Fig. 3):

$$\text{(I)} \qquad A_1^4 = 1, \quad A_2^4 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1.$$

Die Zuordnung der Ränder der Fundamentalpolygone für unsere endlichen Gruppen liefern nun weiter die Relationen (II), welche wir der in die Figuren eingetragenen Bezeichnung der einzelnen Polygone sofort entnehmen. Es sind die folgenden:

α) Für die erste Fläche:

$$\text{(II)} \qquad (A_3 A_1^3)^3 = A_2 A_1^4.$$

β) Für die zweite Fläche:

$$\text{(II)} \qquad (A_3 A_1^2)^2 = A_2 A_1^3.$$

Bilden wir nun für diese Flächen die analogen Definitionen, wie sie sich mit Hülfe der (pag. 21 gegebenen) symmetrischen Relationen A_1', A_2', A_3' gestalten, so kommt:

α) Für die erste Fläche:

$$\text{(I}'\text{)} \qquad A_1'^6 = 1, \quad A_2'^3 = 1, \quad A_3'^2 = 1, \quad A_1' A_2' A_3' = 1,$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad (A_3' A_1'^3)^3 = (A_2' A_1'^4)^2.$$

β) Für die zweite Fläche:

$$\text{(I}'\text{)} \qquad A_1'^4 = 1, \quad A_2'^4 = 1, \quad A_3'^2 = 1, \quad A_1' A_2' A_3' = 1,$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad (A_3' A_1'^2)^2 = (A_2' A_1'^3)^4.$$

Hier zeigt sich also, dass die obigen Relationen (II), geschrieben in den gestrichenen Buchstaben, *nicht* erfüllt sind, dass also eine isomorphe Beziehung der Gruppe in sich durch Zuordnung der Operationen A_i und A_i' *nicht* statthat, wie dies geometrisch unmittelbar ersichtlich ist*).

---

*) Flächeneintheilungen dieser Art sind, nach den Ausführungen auf pag. 30, in meiner Arbeit im XVII. Annalenbande (Abschnitt III.) *nicht* enthalten, vielmehr sind dort (pag. 506, § 12.) unter den Flächen der Verzweigung [6, 3, 2] und [4, 4, 2] (in der dortigen Bezeichnung) nur die *regulär-symmetrischen* Flächen aufgezählt. Wie dort beziehen sich auch die hier charakterisirten *nicht-symmetrischen* Flächen auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen mit $g_2 = 0$ bez. $g_3 = 0$ (in der Weierstrass'schen Bezeichnung) und zwar ist

3. Die Gruppen der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Functionen.

Die Darstellung der Gruppe der Modulargleichungen, welche einer Primzahltransformation der elliptischen Functionen entsprechen, durch Relationen zwischen den erzeugenden Substitutionen ist mir in endgültiger Form noch nicht gelungen. Während ich also hierauf bei nächster Gelegenheit zurückzukommen denke, sei doch für diese Gruppen die Form der Fragestellung, die sich hier kurz bezeichnen lässt, entwickelt. Gerade für diese Gruppen ist nämlich das Princip der Bildung eines Fundamentalpolygons, auf dem ja unsere *geometrischen* Definitionen beruhen, von Herrn Klein, im Verfolge anderer Gesichtspunkte, zuerst ausgesprochen worden.

Alle linearen ganzzahligen ω-Substitutionen von der Determinante 1 bilden eine Gruppe Γ, die erzeugt wird durch die beiden Substitutionen

$$A_1 \cdots \omega' = \omega + 1,$$

$$A_3 \cdots \omega' = -\frac{1}{\omega},$$

wo A_1 eine „unendlich hohe" Periode — wenn dieser Ausdruck gestattet ist —, A_2 die Periode 2 besitzt. Die Combination beider Operationen

$$A_2 = A_1^{-1} A_3 \cdots \omega' = -\frac{\omega+1}{\omega}$$

ist von der Periode 3. *In unserem Sinne ist also diese Gruppe* Γ *definirt durch die Relationen:*

(1) $$A_1^{\infty} = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1.$$

Geometrisch entspricht ihr ein unendliches Netz von abwechselnd schraffirten und nichtschraffirten Dreiecken, die an den Ecken a_1 zu je unendlich vielen, bei a_2 zu je 6, bei a_3 zu je 4 zusammenstossen — in eine gewisse Symmetrie gebracht die bekannte Eintheilung der ω-Ebene, wie sie sich ergiebt, wenn wir die Abhängigkeit des Periodenverhältnisses ω des elliptischen Integrales von der absoluten Invariante desselben studiren. *Die gestaltliche Anordnung dieses Netzes, im Sinne der analysis situs, ergiebt sich dabei hier, unabhängig von der Theorie der*

---

es hier speciell die Multiplication mit $(2+\varrho)$, wo ϱ eine dritte Einheitswurzel, beziehungsweise die Multiplication mit $(2+i)$, also eine specielle Transformation der 7ten bez. 5ten Ordnung, deren Gruppe durch die obigen Flächen bezeichnet wird.

Es finden sich diese Flächen in den Tabellen der regulären Gebietseintheilungen vom Geschlechte 1 von C. Jordan und W. Godt (vergl. dessen bereits erwähnte Programmschrift pag. 11 ff.) nicht aufgezählt; auch die Flächen, die ich nach meiner früheren Bezeichnung durch [2, 3, 6], $N = 18m^2$; [3, 3, 3], $N = 9m^2$ und [2, 4, 4], $N = 8m^2$ charakterisirt habe, sind dort nicht erwähnt.

linearen Substitutionen, auf einem independenten Wege aus den Relationen (I).

Nehmen wir alle Substitutionen der Gruppe Γ nach einem Modul n (der als Primzahl vorausgesetzt sei), so spaltet sich dieselbe dadurch in die Gruppe H der modulo n *der Identität congruenten* ω-Substitutionen und die Gruppe $\overline{\Gamma}$ der modulo n *verschiedenen* ω-Substitutionen. Die letztere Gruppe ist die Gruppe der Modulargleichung für Transformation n^{ter} Ordnung. Ihr entspricht in der ω-Ebene ein Fundamentalpolygon von $N = \frac{n \cdot n^2 - 1}{2}$ schraffirten und ebensovielen nichtschraffirten Dreiecken, dessen Ränder einander paarweise zugeordnet sind. Das „geschlossene Netz“ bildet die reguläre Riemann'sche Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung zukommt. Ihre $2N = n \cdot n^2 - 1$ abwechselnd schraffirten und nichtschraffirten Gebiete (Halbblätter) stossen an Ecken a_1 zu je $2n$, an Ecken a_2 zu je 6, und an Ecken a_3 zu je 4 zusammen. Diese Fläche und das zugehörige Fundamentalpolygon habe ich (Annalen XVIII, p. 507 ff.) einer eingehenden gestaltlichen Discussion unterworfen, auf die man eine Definition unserer Fläche durch Relationen $F_h(A_i) = 1$ gründen kann. *Die Ableitung der Relationen* $F_h = 1$ *für diese Gruppen ist dabei, nach den früher allgemein ausgesprochenen Sätzen, gleichlaufend mit der Bestimmung der Gruppe* H *der modulo* n *der Identität congruenten Substitutionen* $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ *durch ihre erzeugenden Substitutionen.*

Indem ich auf diese allgemeine Fragestellung später zurückzukommen denke, sei hier die Durchführung unseres Problems *für den Fall der Transformation* 7^{ter} *Ordnung* gegeben. Die hier zugehörige 168-blättrige Fläche hat Herr Klein im XIV. Annalenbande in der Abhandlung „Ueber Transformation siebenter Ordnung“ ausführlich discutirt*). Wir beziehen unsere folgende Entwickelung auf das dort in einer besonderen Tafel gegebene *Fundamentalpolygon* der Gruppe.

Zuvörderst ergeben sich die „Relationen (I)“ für unsere Gruppe sofort aus der Multiplicität der Verzweigungspunkte unserer Fläche in der Form:

$$\text{(I)} \qquad A_1^7 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1.$$

Zur Herstellung der „Relationen (II)“ haben wir jetzt die *Zuordnung der Ränder* unseres Fundamentalpolygons (wie sie auf jener Tafel bezeichnet ist) symbolisch auszudrücken. Dies gelingt am einfachsten, wenn wir die in jener Tafel stark markirte Zickzacklinie verfolgen, welche von dem mit 13 bezeichneten Rande des Gebietes

*) Vergl. insbesondere § 12. dieser Abhandlung.

zum Rande 4 hinführt. Indem nämlich die Ränder 4 und 13 einander zugeordnet sind, schliesst sich in der geschlossenen Fläche unsere Linie gerade zusammen; schreiben wir also den Zickzackweg mit Hülfe der Substitutionen A_1, A_2, A_3 als eine Substitution, welche von einem am Rande 13 liegenden Dreieck unseres Fundamentalpolygons hinführt zu dem „äquivalenten“ Dreieck, welches im Rande 4 an unser Fundamentalpolygon anstösst, so haben wir diese Substitution gleich 1 zu setzen, um die gewünschte Relation zu erhalten, welche die Ränder 4 und 13 einander zuordnet. So kommt eine Relation (II) in der Gestalt:

$$\text{(II)} \qquad (A_2 A_1^5)^4 = 1 \text{*)}.$$

Diese Relation ist aber ausreichend, um das ganze Fundamentalpolygon unserer Gruppe auszuschneiden. In der That, die Zuordnungen der übrigen Ränder unserer Figur (wie sie die, jener Tafel beigesetzte, Tabelle angiebt) werden durch ebensolche Zickzacklinien bezeichnet, welche sich als Substitutionen schreiben lassen, die aus der obigen durch Transformation abgeleitet sind.

Es bilden also die Relationen (I) *und* (II) *die gewollte Definition unserer Gruppe*, *die wir kurz etwa in der folgenden Form schreiben können:*

$$A_1^7 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad (A_1 A_2)^2 = 1, \quad (A_2 A_1^5)^4 = 1.$$

Die 168 Substitutionen, welche unsere Gruppe umfasst, lauten dabei — indem wir zu einfacher Schreibweise wieder von A_1 und A_3 als erzeugenden Substitutionen ausgehen — kurz wie folgt:

$$S^\lambda A_1^\mu,$$
$$S^\lambda A_1^\mu A_3 A_1^\nu,$$

wo S die folgende Substitution von der Periode 3 bedeutet:

$$S = A_3 A_1^3 A_3 A_1^5 A_3 A_1^3,$$

und α die Werthe 0, 1, 2; μ und ν (von einander unabhängig) die Werthe 0, 1, 2, $\cdots$, 6 durchläuft**).

---

*) Selbstverständlich hätten wir (nach pag. 17 u. 31) auch irgend einen anderen Weg von Rand zu Rand führen können; der vorliegende ist nur in der gruppentheoretischen Schreibweise der einfachste.

**) Diese Schreibweise der 168 Substitutionen beruht auf der Zerlegung der Fläche in drei Gebiete von 56 schraffirten und ebensovielen nichtschraffirten Dreiecken, welche ich in der erwähnten Abhandlung im XVIII. Annalenbande (p. 525) als „Polygoncyklen“ bezeichnet habe.

Ich füge hier gleich die ganz entsprechende Schreibweise überhaupt für die Substitutionen der Modulargruppe für Transformation nter Ordnung (n Primzahl) bei. Bezeichnen hier A_1 und A_3 die (jetzt modulo n verstandenen) Substitutionen $\omega' = \omega + 1$, bez. $\omega' = -\frac{1}{\omega}$, so sind die $\frac{n \cdot n^2 - 1}{2} = \frac{n-1}{2} \cdot n + \frac{n-1}{2} \cdot n^2$ Substitutionen, welche unsere Gruppe umfasst, gegeben durch die Formeln:

Unsere Fläche kennzeichnet sich — (wie die Figur lehrt und eine Umsetzung der obigen Formeln (pag. 21 gemäss) zeigt — als eine *regulär-symmetrische*. Die isomorphe Zuordnung der Gruppe in sich, welche sich hierin ausspricht, ist, wenn wir die betreffenden Substitutionen etwa wieder als „ω-Substitutionen" deuten wollen, bezeichnet durch:

$$\begin{array}{l|l} A_1 \cdots \omega' = \omega + 1, & A_1' \cdots \omega' = \omega - 1, \\ A_3 \cdots \omega' = -\frac{1}{\omega}, & A_3' \cdots \omega' = -\frac{1}{\omega} \text{*}). \end{array}$$

$$S^\lambda A_1^\mu,$$

$$S^\lambda A_1^\mu A_3 A_1^\nu,$$

$$\left[\lambda = 0, 1, \cdots \frac{n-3}{2}; \quad \mu, \nu = 0, 1, \cdots n-1\right],$$

wo S die folgende Substitution bedeutet:

$$S = A_3 A_1^\delta A_3 A_1^\alpha A_3 A_1^\delta;$$

hierin sind die Exponenten α und δ zwei primitive Wurzeln der Primzahl n, für welche die Beziehung $\alpha\delta \equiv 1 \text{ mod. } n$ statthat. Für die Potenzirung der Substitution S hat man dabei die folgende einfache Regel:

$$S^\lambda = A_3 A_1^{\delta^\lambda} A_3 A_1^{\alpha^\lambda} A_3 A_1^{\delta^\lambda},$$

aus welcher sich, mit Berücksichtigung der soeben gemachten Festsetzungen, die Periode von S zu $\frac{n-1}{2}$ ergiebt.

Diese Angaben folgen unmittelbar aus pag. 515 ff. und 523 ff. der oben erwähnten Arbeit: Die Substitution S, als ω-Substitution (und modulo n) geschrieben, lautet nämlich einfach $\omega' = \frac{\alpha\omega}{\delta}$, und die obige Schreibweise für die Substitutionen unserer Gruppe besagt geometrisch nichts anderes, als dass die reguläre Riemann'sche Fläche, welche wir unseren Darstellungen zu Grunde legen können, in $\frac{n-1}{2}$ „Polygoncyklen" zerlegt werden kann, welche den verschiedenen Werthen von λ entsprechen.

Selbstverständlich lässt sich in dieser Formulirung auch die vorhin (pag. 35) gegebene Modulargruppe für die Transformation 5ter Ordnung (die „Ikosaedergruppe") einbegreifen. Man hat nämlich hiefür $S = A_3 A_1^2 A_3 A_1^3 A_3 A_1^2$ und bekommt dann 60 Ausdrücke $S^\lambda A_1^\mu$, $S^\lambda A_1^\mu A_3 A_1^\nu$, welche sich sofort in die vorhin (pag. 35), in unmittelbaren Anschluss an die Figur (Tafel II.), gegebenen überführen lassen.

*) Diese holoedrisch isomorphe Beziehung hat, wie bekannt, allgemein für *jede* Modulargruppe statt. Man sehe die Entwickelungen in Serret's Traité d'algèbre supérieure vol. II., sowie auch einen Aufsatz von Kronecker in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1861. Geometrisch spricht sich der Isomorphismus wieder in der Symmetrie der zugehörigen Riemann'schen Flächen aus (vergl. Ann. XVIII, pag. 521).

§ 16.

Ueber die Definition gewisser complexer Zahlsysteme.

Bei der Aufstellung eines Systems von complexen Zahlen im allgemeinsten Sinne des Wortes handelt es sich zunächst stets um die Annahme einer Reihe von Einheiten für dieses Zahlsystem und weiter um die Festsetzung der Rechenoperationen in diesem Systeme.

Die folgenden Bemerkungen betreffen die Einführung gewisser *Multiplicationsregeln* für die Einheiten eines Zahlsystems. Unter den verschiedenartigen Verabredungen, die man hier treffen kann, setzen wir nämlich ein Princip solcher Bestimmung folgendermassen fest:

Die durch Iteration und Combination der zu Grunde gelegten Einheiten $E_1, E_2, E_3, \cdots E_m$ gebildeten Producte

$$E_1^{\mu_1} E_2^{\mu_2} \cdots E_1^{\nu_1} E_2^{\nu_2} \cdots,$$

sollen eine geschlossene Gruppe von Operationen bilden.

Dann gelten die ursprünglichen Einheiten $E_1, E_2, \cdots E_m$ als die erzeugenden Substitutionen dieser Gruppe und die *Multiplicationsregeln* für unsere Einheiten stellen sich als die zur Definition der Gruppe nothwendigen Relationen zwischen den erzeugenden Substitutionen dar. Die Gesammtheit aller Substitutionen dieser Gruppe entspricht dem *vollen Systeme der Einheiten* für unsere complexen Zahlen.

Es soll gezeigt werden, dass dieses Princip bei der *Definition der Quaternioneneinheiten* thatsächlich zur Verwendung kommt und diese also eine Gruppendefinition in dem hier aufgestellten Sinne ist.*)

Wir bezeichnen durch $1, E_1, E_2, E_3$ *vier Einheiten*, für welche die Multiplicationsregeln gegeben sind durch folgende Formeln:

$$E_1 = E_3 E_2, \quad E_2 = E_1 E_3, \quad E_3 = E_2 E_1,$$
$$E_1 E_2 E_3 = 1.$$

Dann ist, 1 (die identische Substitution), E_1, E_2, E_3 als die erzeugenden Substitutionen einer Gruppe aufgefasst, durch diese Relationen die Gruppe folgender acht Substitutionen definirt:

---

*) Analoges gilt für die von Clifford, im Anschluss an Grassmann, gegebene Erweiterung der Quaternionen auf ein System mit n Einheiten (vergl. den Aufsatz „Applications of Grassmann's extensive Algebra" im American Journal, vol. I., pag. 351). Was Festsetzungen für die Multiplicationsregeln eines Zahlengebietes anlangt, so ist hier (neben der schon Eingangs angeführten „Ausdehnungslehre") noch der Aufsatz von Grassmann „Sur les différents genres de multiplication" im 49. Bande von Crelle's Journal zu erwähnen. Doch sei bemerkt, dass eine Reihe der dort getroffenen Multiplicationsregeln sich *nicht* unter den Gruppenbegriff subsumiren lassen, insoferne dort gewisse Producte von Einheiten gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{array}{ccc} & 1, & \\ E_1, & E_2, & E_3, \\ E_1^2 = & E_2^2 = & E_3^2, \\ E_1^3, & E_2^3, & E_3^3. \end{array}$$

Man findet nämlich, für die Zurückführung irgendwelcher Substitutionen, sofort die Beziehungen:

$$E_1^4 = E_2^4 = E_3^4 = 1,$$

und

$$E_1^3 = E_2 E_3, \quad E_2^3 = E_3 E_1, \quad E_3^3 = E_1 E_2.$$

Diese Einheiten und ihre Multiplicationsregeln entsprechen hiernach unmittelbar dem System der Quaternioneneinheiten, wenn wir für dasselbe die acht Einheiten

$$1, \ -1, \ i, \ -i, \ j, \ -j, \ k, \ -k\,^{*)}$$

(*in der gewöhnlichen Schreibweise*) *zu Grunde legen***).

Leipzig, am 6. December 1881.

---

*) Die *getrennte* Einführung positiver und negativer Einheiten giebt z. B. Weierstrass in seinen Vorlesungen über analytische Functionen.

**) Man vergleiche die Formeln in Hamilton's Elements of Quaternions pag. 157 ff., oder auch in H. Hankel's Theorie der complexen Zahlen, Abschnitt VIII.

In Ergänzung des pag. 1 gegebenen Citats auf die Cayley'sche Note „On the theory of groups" im 1. Bande des American Journal of Mathematics habe ich noch drei kleine Abhandlungen Cayley's „On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\Theta^n = 1$" (Philosophical Magazine and Journal of Science, S^e 4, Bd. 7 u. 18, 1854, 1859) zu erwähnen, die mir bisher entgangen sind. Sie behandeln die Aufstellung aller möglichen Gruppen von n Substitutionen als Lösungssysteme der symbolischen Gleichung $\Theta^n = 1$ für die einfachsten Fälle; inbesondere findet sich dort die soeben gegebene Darstellung der „Gruppe der Quaternioneneinheiten".

April 1882.