Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

Georg Cantor in Halle.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XXI, pag. 545.)

Nr. 6.

§ 15.

In Nr. 5 dieser Abhandlung habe ich an verschiedenen Stellen im Interesse des Zusammenhangs gewisse Sätze der Mengenlehre ausgesprochen, ohne mich auf deren Beweise damals einzulassen, weil im Plane jener Mittheilung andere Gegenstände den Vorzug eingehenderer Behandlung erfahren mussten. Ich will jetzt die sonach gebliebenen Lücken auszufüllen suchen und in dieser Nummer sowohl, wie in der bald nächstfolgenden die fehlenden Beweise geben, wobei ich mich aber nicht darauf beschränken, sondern auch Sätze entwickeln will, die zwar in diesen Zusammenhang gehören, in den früheren Nummern aber theils noch gar nicht erwähnt, theils nicht mit der erforderlichen Genauigkeit formulirt worden sind.

Den Anfang mache ich mit der folgenden einfachen und sehr allgemeinen Betrachtung.

Wenn ein n-dimensionaler Theil H eines nach n Dimensionen ausgedehnten, stetigen, ebenen Raumes G_n eine Punktmenge P enthält, wobei H auch der ganze Raum G_n selbst sein kann, und wir zerlegen den Raumtheil H nach einem bestimmten, im Uebrigen beliebig *gelassenen Gesetze in eine* endliche oder unendliche Anzahl getrennter, in sich zusammenhängender, n-dimensionaler Theile:

$$H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$$

(deren *Inbegriff*, wenn er unendlich ist, nach Bd. XX, pag. 117 stets von der *ersten Mächtigkeit* ist und folglich in der Form jener einfach unendlichen Reihe (H_ν) gedacht werden kann), wobei die gegenseitigen Begrenzungen der aneinanderstossenden Theile gehörig *vergeben* sind, (so dass ein und derselbe Punkt von H *einem* und *nur einem* der Theile H_ν desselben angehört), so zerfällt die Punktmenge P in eine entsprechende Anzahl von *Theilmengen:*

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots,$$

wobei P_ν derjenige *Theil* von P ist, welcher mit allen seinen Punkten dem Gebiete H_ν angehört; es kann also unter Umständen P_ν gleich *Null* sein, falls kein Punkt von P in den Raumtheil H_ν fällt.

Wir wollen nun mit dem Buchstaben Υ *irgend eine Eigenschaft* oder *Beschaffenheit* bezeichnen, welche von Punktmengen innerhalb G_n ausgesagt werden *kann und die nur an die folgenden Voraussetzungen geknüpft ist:*

1) falls P irgend eine, in einem *ganz im Endlichen* liegenden n-dimensionalen Theil H von G_n befindliche Punktmenge *von der Beschaffenheit* Υ ist und man zerlegt das Gebiet H in der oben besprochenen Weise nach irgend einem Gesetze in eine *endliche* Anzahl m von Theilgebieten:

$$H_1,\ H_2,\ ,\ldots,\ H_{m-1},\ H_m,$$

wodurch P in die Theilmengen:

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{m-1},\ P_m$$

zerfällt, so *soll dieselbe Beschaffenheit* Υ auch *wenigstens einer* von den Theilmengen $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$ zukommen;

2) ist P irgend eine Punktmenge innerhalb G_n, *welcher die Beschaffenheit* Υ zukommt und Q eine *beliebige* andere Punktmenge innerhalb G_n, welche mit P *keinen* Punkt *gemeinsam* hat, so soll die Menge $P+Q$ *stets auch* die Beschaffenheit Υ haben.

Als einfachstes Beispiel einer *Beschaffenheit* von Punktmengen, welche den Charakter Υ haben, führe ich diejenige Beschaffenheit einer unendlichen Punktmenge an, wonach sie aus *unendlich viel* Punkten besteht; offenbar genügt diese Beschaffenheit den beiden *soeben formulirten* Voraussetzungen. Es gilt nun folgender Satz:

Theorem I. *Ist H irgend ein ganz im Endlichen liegender n-dimensionaler Theil von G_n und P eine in H enthaltene Punktmenge von der Beschaffenheit Υ, so giebt es wenigstens einen Punkt g von H in solcher Lage, dass, wenn K_n irgend eine n-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunkt g ist, derjenige Bestandtheil von P, welcher in das Gebiet K_n fällt, stets die Beschaffenheit Υ hat, der Radius der Vollkugel K_n mag so klein genommen werden, wie man wolle.*

Zum Beweise dieses Satzes zerlegt man das *ganz im Endlichen liegende* Gebiet H nach irgend einem Gesetze in eine *endliche* Anzahl von n-dimensionalen Theilgebieten, in deren jedem sämmtliche Distanzen von je zwei Punkten kleiner sind als 1; dass solches immer thunlich ist, sieht man leicht ein; von den entsprechenden Theilmengen, in welche hierbei P zerfällt, muss wenigstens eine die Beschaffenheit Υ haben (wegen der Voraussetzung 1), man wähle in gesetzmässiger Weise eine von diesen Theilmengen und bezeichne sie mit $P_{(1)}$, den entsprechenden Theil von H, in welchem $P_{(1)}$ liegt, nennen wir $H_{(1)}$.

Nun zerlege man ebenso das Gebiet $H_{(1)}$ nach irgend einem *Gesetze* in eine *endliche* Anzahl von n-dimensionalen Theilgebieten, in deren jedem sämmtliche Distanzen kleiner sind als $\frac{1}{2}$; von den entsprechenden Theilmengen, in welche hierbei $P_{(1)}$ zerfällt, werde in gesetzmässiger Weise *eine* genommen, die die Beschaffenheit Υ hat, wir nennen sie $P_{(2)}$ und den entsprechenden Theil von $H_{(1)}$, in welchem $P_{(2)}$ liegt, nennen wir $H_{(2)}$; so fahren wir fort und erhalten eine gesetzmässige, *unendliche* Reihe von n-dimensionalen Theilgebieten

$$H_{(1)},\ H_{(2)},\ \ldots,\ H_{(\nu-1)},\ H_{(\nu)},\ \ldots$$

von denen jedes in den vorhergehenden enthalten ist und wo sämmtliche in H_ν vorkommenden Distanzen kleiner sind als $\frac{1}{\nu}$; gleichzeitig haben wir eine gesetzmässige unendliche Reihe von Punktmengen:

$$P_{(1)},\ P_{(2)},\ \ldots,\ P_{(\nu-1)},\ P_{(\nu)},\ \ldots$$

von denen jede ein Bestandtheil der vorhergehenden ist und stets die Beschaffenheit Υ hat; $P_{(\nu)}$ ist derjenige Bestandtheil von P, welcher mit allen Punkten dem Gebiete $H_{(\nu)}$ angehört. —

Nach einem bekannten Satze der arithmetischen Analysis giebt es nun einen *ganz bestimmten* Punkt g von H, der *allen* den Theilgebieten $H_{(\nu)}$ *zugleich* angehört und *hieraus* erkennt man leicht, dass dieser Punkt g eine *Lage* hat, wie sie in unserem Theorem beschrieben worden ist.

Ich bemerke, dass die hier angewandte Beweismethode, welche wohl schwerlich durch eine wesentlich andere ersetzt werden kann, ihrem Kerne nach sehr alt ist; in neuerer Zeit findet man sie unter Anderem in gewissen zahlentheoretischen Untersuchungen bei Lagrange, Legendre und Dirichlet, in Cauchy's *Cours d'analyse* (Note troisième) und in einigen Abhandlungen von Weierstrass und Bolzano; es scheint mir daher nicht richtig, sie vorzugsweise oder ausschliesslich auf Bolzano zurückzuführen, wie solches in neuerer Zeit beliebt worden ist.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, dass unsere Beweismethode von einigen Geometern angegriffen wird. Die hierzu benutzten Argumente sind höchst subtil; sie haben Viele in Verlegenheit gesetzt, eingeschüchtert und verwirrt, denen die Aufrechterhaltung der Beweisführung von grösster Wichtigkeit gewesen wäre. Die vorgekommenen Einwände sind jedoch ihrem Wesen nach nicht neu, sondern haben die grösste Aehnlichkeit mit jenen Paralogismen, die Zeno von Elea gebraucht hat, um die Möglichkeit der Bewegung oder der Vielheit der Dinge in Zweifel zu ziehen (vergl. Aristoteles, Physik VI, 9). Solche Erscheinungen lassen sich in fast jedem Zeitalter nachweisen; im siebenzehnten Jahrhundert beispielsweise lebte in Paris ein gewisser Chevalier de Méré, welcher durch seine Sophismen, neben anderen Ursachen, dazu beigetragen hat, einem der grössten Geister Frankreichs, Pascal die Beschäftigung mit der Mathematik völlig zu verleiden. Man findet hierüber sehr interessante Details in Bayle's Dictionnaire historique et critique, im Artikel über Zeno von Sidon (Schüler des Apollodorus, nicht zu verwechseln mit jenem Eleaten Zeno). Dieser Epikureische Philosoph ist durch ein Werk berühmt geworden, worin er die Gültigkeit der mathematischen Beweise angriff. Er erscheint daher als Vorläufer einer Richtung, welche sich heutzutage selbst „Metamathematik" nennt. Der Stoiker Posidonius hat gegen ihn ein Werk geschrieben, um seine wider die Mathematik gerichteten Angriffe zu nichte zu machen. Beide Bücher sind verloren gegangen.

Eine sehr umfassende *Classe* von Punktmengen bilden diejenigen, welche die *erste* Mächtigkeit haben und die ich auch in den Nummern 1—4 *abzählbare* Mengen genannt habe. Die letztere Ausdrucksweise *kann* zwar im engeren Sinne auch ferner beibehalten werden, um diese Mengen von denen *höherer* Mächtigkeit zu unterscheiden, ich habe aber in Nr. 5 (Bd. XXI, pag. 550) *gezeigt* und *hervorgehoben* dass man strenggenommen auch von den Mengen *zweiter*, *dritter* oder *höherer* Mächtigkeit *immer* sagen kann, sie seien *abzählbar;* der *Unterschied* ist nur der, dass während die Mengen *erster* Mächtigkeit nur *durch* (*mit Hülfe von*) Zahlen der *zweiten* Zahlenclasse abgezählt werden können, die *Abzählung* bei Mengen *zweiter* Mächtigkeit *nur durch* Zahlen der *dritten* Zahlenclasse, bei Mengen *dritter* Mächtigkeit *nur durch* Zahlen der *vierten* Zahlenclasse u. s. w. erfolgen kann.

Denkt man sich *beispielsweise* den Inbegriff (φ) aller rationalen Zahlen die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ nach dem in Borchardt's J. Bd. 84, p. 250 angegebenen Gesetze in die Form einer einfach unendlichen Reihe:

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots)$$

gebracht, so bildet er in dieser Form eine „*wohlgeordnete Menge*" deren *Anzahl* (nach den Definitionen von Annalen Bd. XXI, p. 548 und p. 576) *gleich* ω ist.

Schreibt man aber denselben Inbegriff etwa in den beiden anderen *Formen wohlgeordneter* Mengen:

$$(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{\nu+1}, \ldots, \varphi_1),$$

$$(\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_{2\nu-1}, \ldots, \varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2\nu}, \ldots)$$

so kommen ihm in *Bezug* auf diese Formen resp. die *Anzahlen* $\omega + 1$ und 2ω zu; und wenn α *irgend* eine Zahl der *zweiten* Zahlenclasse ist, so lassen sich unzählig viele *wohlgeordnete* Mengen denken, die ihrem *Bestande* nach völlig übereinstimmen und zusammenfallen mit dem Inbegriffe (φ), aber ihrer *Form* nach die *vorgeschriebene* Zahl α zur *Anzahl* haben.

Durch Umformung einer *wohlgeordneten* Menge wird, wie ich dies in Nr. 5 wegen seiner Wichtigkeit wiederholt hervorgehoben habe, *nicht* ihre *Mächtigkeit* geändert, wohl aber kann dadurch ihre *Anzahl* eine andere werden.

Ganz ebenso lässt sich irgend eine Menge (ψ) der *zweiten Mächtigkeit zunächst* in die Form einer wohlgeordneten Menge:

$$(\psi_\omega, \psi_{\omega+1}, \ldots, \psi_\alpha, \ldots)$$

bringen, worin α sämmtliche Zahlwerthe der *zweiten* Zahlenclasse anzunehmen hat; in *dieser* Form ist ihre *Anzahl* gleich Ω, wo Ω die *erste*, d. h. *kleinste* Zahl der *dritten* Zahlenclasse ist; *dieselbe* Menge (ψ) lässt sich aber auch, wenn A *irgend* eine *vorgegebene* Zahl der *dritten* Zahlenclasse ist, auf unzählig viele Weisen in die Form einer *wohlgeordneten Menge* bringen, welche *durch* die Zahl A *abgezählt* wird, u. s. w. —

Die *Frage*, durch *welche* Umformungen einer wohlgeordneten Menge ihre Anzahl *geändert* wird, durch welche *nicht*, lässt sich einfach so beantworten, dass diejenigen und nur diejenigen Umformungen die Anzahl *ungeändert* lassen, welche sich zurückführen lassen auf eine endliche oder unendliche Menge von Transpositionen, d. h. von *Vertauschungen je zweier Elemente*. —

Ich will nun zwei Sätze über Punktmengen *erster* Mächtigkeit formuliren, welche in der Mengenlehre häufig angewandt werden:

Theorem II. *Ist eine im unendlichen Raume G_n verbreitete Punktmenge P so beschaffen, dass, wenn H irgend ein ganz im Endlichen befindlicher Theil von G_n ist, der zu H gehörige Bestandtheil von P endlich ist oder die erste Mächtigkeit besitzt, so hat auch P selbst die erste Mächtigkeit*, (*es sei denn, dass P endlich ist*).

Der Beweis kann auf verschiedene Weisen dadurch geführt werden, dass man G_n in eine unendliche Anzahl von gesonderten n-dimensionalen Theilen:

$$H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$$

zerlegt, von denen jeder ganz im Endlichen liegt; dadurch zerfällt P in eine unendliche Anzahl von Theilmengen:

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots;$$

da jede von diesen entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist, so gilt ein gleiches von ihrer Zusammenfassung, welche nichts anderes als P ist. (M. v. Bd. XX, pag. 117 oben).

Theorem III. *Es sei Q irgend eine Punktmenge innerhalb G_n, $Q^{(1)}$ ihre erste Ableitung und R eine Punktmenge, welche mit Q und ebenso mit $Q^{(1)}$ keinen Punkt gemeinsam und ausserdem eine solche Beschaffenheit hat, dass, wenn H irgend ein Theil von G_n ist, der weder Punkte von Q noch Punkte von $Q^{(1)}$ enthält, alsdann der zum Gebiete H*

gehörige Bestandtheil von R endlich ist oder die erste Mächtigkeit hat, so ist auch R selbst endlich oder von der ersten Mächtigkeit.

Beweis. Sei ϱ irgend eine positive Grösse; um jeden Punkt q von $\mathfrak{M}(Q, Q^{(1)})$ als Mittelpunkt werde eine n-dimensionale Vollkugel $K(q, \varrho)$ gedacht, wobei wir die $(n-1)$-dimensionale Grenze derselben zu ihr mitrechnen. Diese sämmtlichen Vollkugeln $K(q, \varrho)$ können theilweise in einander eindringen, bestimmen jedoch in ihrer *Gesammtheit* einen *gewissen* zusammenhängenden oder nicht zusammenhängenden n-dimensionalen Theil des Raumes G_n; diesen Theil, nach der Ausdrucksweise von Nr. 2 d. Abh., Annalen Bd. XVII, pag. 355 das *kleinste gemeinschaftliche Multiplum* aller $K(q, \varrho)$ bei festem ϱ, in Zeichen: $\mathfrak{M}(K(q, \varrho))$ wollen wir $\Pi(\varrho)$ und die Differenz $G_n - \Pi(\varrho)$ wollen wir $H(\varrho)$ nennen. $H(\varrho)$ enthält alsdann weder Punkte von Q, noch solche von $Q^{(1)}$; ist $\varrho' < \varrho$ so ist immer $H(\varrho)$ ein Bestandtheil von $H(\varrho')$.

Unter Umständen kann $H(\varrho)$ gleich Null sein, man sieht aber in unserm Falle, wo R von Null verschieden ist und weder mit Q noch mit $Q^{(1)}$ Punkte gemein hat, dass, wenn ϱ unter eine gewisse Grenze der Kleinheit sinkt, $H(\varrho)$ ein von Null verschiedener, n-dimensionaler Theil von G_n ist, dem seiner Definition nach seine *Grenze* nicht zugehörig anzusehen ist.

Man erkennt aber auch ferner, dass, wenn r *irgend* ein Punkt von R ist, alsdann durch hinreichende Verkleinerung von ϱ immer bewirkt werden kann, dass dieser Punkt r zum Gebiete $H(\varrho)$ gehört. Denn da R keinen Punkt mit Q und $Q^{(1)}$ gemeinsam hat, so können an r Punkte von Q nicht beliebig nahe herantreten. Bezeichnet man daher mit $\varepsilon(r)$ die *untere* Grenze der Entfernungen zwischen r und den Punkten von Q, *so ist $\varepsilon(r)$ von Null verschieden.*

Nimmt man nun $\varrho < \varepsilon(r)$, so muss nothwendig der Punkt r ausserhalb des Gebietes $\Pi(\varrho)$ liegen und daher zum Gebiete $H(\varrho)$ gehören. Man denke sich nun folgende unendliche Reihe von Raumgebieten:

$$H(1),\ \left(H\left(\tfrac{1}{2}\right)-H(1)\right),\ \left(H\left(\tfrac{1}{3}\right)-H\left(\tfrac{1}{2}\right)\right),\ldots,$$
$$\left(H\left(\tfrac{1}{\nu}\right)-H\left(\tfrac{1}{\nu-1}\right)\right),\ldots,$$

so wird nach dem soeben Bewiesenen jeder Punkt r von R einem *ganz bestimmten* von diesen Gebieten angehören. Der Bestandtheil R_ν von R, welcher einem beliebigen Gliede dieser Reihe:

$$\left(H\left(\tfrac{1}{\nu}\right)-H\left(\tfrac{1}{\nu-1}\right)\right)$$

angehört, ist, weil das Gebiet:

$$H\left(\tfrac{1}{\nu}\right)-H\left(\tfrac{1}{\nu-1}\right)$$

keinen Punkt von Q oder $Q^{(1)}$ enthält, der *Voraussetzung* unseres Theorems gemäss, *endlich* oder von der *ersten Mächtigkeit*. Folglich ist auch R, d. h. die Gesammtheit der Punkte von $R_1, R_2, \ldots, R_\nu, \ldots$ *endlich* oder *von der ersten Mächtigkeit*. w. z. b. w.

§ 16.

Theorem A*). *Eine in einem stetigen, n-dimensionalen Gebiete G_n enthaltene Punktmenge P kann, wenn sie von der ersten Mächtigkeit ist, nie eine perfecte Punktmenge sein.*

Beweis. Unter einer *perfecten* Punktmenge in einem stetigen Gebiete G_n verstehe ich eine Menge S von solcher Beschaffenheit, dass ihre *erste Ableitung* $S^{(1)}$ völlig mit ihr identisch ist, so dass:

$$S^{(1)} = S.$$

In Folge dessen ist auch *jede* höhere Ableitung $S^{(\alpha)}$ von S mit S identisch.

Ist also s *irgend* ein *Punkt* einer *perfecten* Menge S, so ist s gleichzeitig ein *Grenzpunkt* von S und ist s' *irgend* ein *Grenzpunkt* von S, d. h. irgend ein *Punkt* von $S^{(1)}$, so ist s' gleichzeitig auch ein *zu S gehöriger Punkt*. —

Dies vorausgeschickt sei P irgend eine Punktmenge *erster Mächtigkeit* innerhalb des Gebietes G_n, so können wir uns die sämmtlichen Punkte p von P in die Form:

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots$$

einer einfach unendlichen Reihe (p_ν) gebracht denken. Um nun zu zeigen, dass P *nicht* eine *perfecte* Menge sein kann, wollen wir voraussetzen, dass *jeder* Punkt p_ν von P ein *Grenzpunkt* von P ist und *alsdann beweisen*, dass immer gewisse andere *Grenzpunkte* p' von P vorkommen müssen, die nicht zugleich *Punkte* von P sind, oder, was dasselbe ist, die mit keinem der Punkte p_ν zusammenfallen. Hiermit wird unser Theorem vollkommen bewiesen sein; denn wäre P eine *perfecte* Menge, so müsste *nicht nur* jeder Punkt p_ν von P ein *Grenzpunkt* von P sein, sondern es müsste auch umgekehrt *jeder Grenzpunkt* p' von P ein zu P gehöriger Punkt p_ν sein.

Man nehme p_1 zum Mittelpunkt eines *sphärischen Gebildes* von $(n - 1)$ Dimensionen innerhalb G_n und gebe demselben den Radius $\varrho_1 = 1$; wir wollen dieses sphärische Gebilde mit K_1 bezeichnen. Von allen Punkten der Reihe (p_ν), welche auf p_1 folgen, sei p_{i_2} der erste (d. h. mit dem kleinsten Index versehene) von allen, die in das *Innere* der Sphäre K_1 fallen; dass solche Punkte in unzähliger Menge in der Reihe (p_ν) vorkommen, ist deshalb nothwendig, weil unserer obigen Voraussetzung nach p_1 ein Grenzpunkt der Menge (p_ν) ist.

---

*) M. v. Acta math. t. II, pag. 409.

Wir bezeichnen mit σ_1 den *Abstand* der beiden Punkte p_1 und p_{i_2} und nehmen p_{i_2} zum Mittelpunkt einer *zweiten* Sphäre K_2, deren Radius ϱ_2 durch die Bedingung bestimmt ist, *gleich* der *kleinsten* von den beiden Grössen:

$$\frac{1}{2}\sigma_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\varrho_1 - \sigma_1)$$

zu sein.

Es liegt alsdann die Sphäre K_2 *ganz* im *Innern* von K_1 und die Punkte: $p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}$ der Reihe (p_ν) liegen offenbar sämmtlich *ausserhalb* der Sphäre K_2; wir heben ferner hervor, dass der Radius ϱ_2 von K_2 kleiner ist als $\frac{1}{2}$.

Ebenso sei p_{i_3} der erste unter den auf p_{i_2} folgenden Punkten der Reihe (p_ν), welcher in das *Innere* der Sphäre K_2 fällt; solcher Punkte von (p_ν), die in das Innere der Sphäre K_2 fallen, giebt es nämlich unendlich viel, weil der Mittelpunkt p_{i_2} von K_2 ein *Grenzpunkt* der Menge (p_ν) sein soll; den *Abstand* der beiden Punkte p_{i_2} und p_{i_3} nennen wir σ_2 und nehmen p_{i_3} zum *Mittelpunkt* einer *dritten Sphäre* K_3, deren Radius ϱ_3 die *kleinste* von den beiden Grössen:

$$\frac{1}{2}\sigma_2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\varrho_2 - \sigma_2)$$

ist. Die Sphäre K_3 fällt alsdann *ganz* in das *Innere* der Sphäre K_2 und die Punkte:

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_3-1}$$

der Reihe (p_ν) sind alle *ausserhalb* der Sphäre K_3 gelegen; der Radius ϱ_3 von K_3 ist offenbar kleiner als $\frac{1}{4}$.

Nach dem schon hieraus *sichtbaren Gesetze* wird eine *unendliche* Reihe von Sphären:

$$K_1, K_2, \ldots, K_\nu, \ldots$$

erhalten, die in Beziehung steht zu einer bestimmten unendlichen Reihe von *wachsenden ganzen* Zahlen:

$$1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu < i_{\nu+1} < \cdots$$

Jede Sphäre K_ν fällt *ganz* in das *Innere* der vorangehenden Sphäre $K_{\nu-1}$.

Das *Centrum* p_{i_ν} der Sphäre K_ν ist definirt als der erste in der Reihe (p_ν) *auf* $p_{i_{\nu-1}}$ *folgende Punkt*, der in das Innere der Sphäre $K_{\nu-1}$ zu liegen kommt (wobei wieder zu bemerken ist, dass $p_{i_{\nu-1}}$, der Mittelpunkt von $K_{\nu-1}$, ein *Grenzpunkt* von P ist); der Radius ϱ_ν der Sphäre K_ν ist definirt als die *kleinste* von beiden Grössen:

$$\frac{1}{2}\sigma_{\nu-1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\varrho_{\nu-1} - \sigma_{\nu-1}),$$

wobei $\sigma_{\nu-1}$ die *Distanz* der beiden Punkte $p_{i_{\nu-1}}$ und p_{i_ν} ist.

Die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{i_{\nu-1}}$ fallen, wie man leicht sieht, *ausserhalb* der Sphäre K_ν und man hat:

$$\varrho_\nu \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}}.$$

Es *werden* daher die Radien der Sphären K_ν *mit wachsendem* ν *unendlich klein*; hieraus, und weil immer K_ν *ganz* in das Innere von $K_{\nu-1}$ fällt, folgt nach einem bekannten Hauptsatze der Grössenlehre, dass die Mittelpunkte p_{i_ν} der Sphäre K_ν mit wachsendem ν gegen einen bestimmten Grenzpunkt convergiren, den wir p' nennen wollen, so dass:

$$\lim_{\nu=\omega} (p_{i_\nu}) = p',$$

p' ist offenbar ein *Grenzpunkt* von P, weil die Punkte p_{i_ν} sämmtlich zu P gehören. Andrerseits überzeugt man sich aber, dass p' *nicht als Punkt zu* P *gehören kann;* denn sonst würde für einen gewissen Werth des Index n die Gleichung statthaben:

$$p' = p_n;$$

sie ist aus dem Grunde *unmöglich*, weil p' in das *Innere* der Sphären K_ν fällt, wie gross auch ν sei, dagegen p_n *ausserhalb* der Sphären K_ν liegt, sobald nur $\nu > n$ genommen wird.

Auf solche Weise haben wir gezeigt, dass eine Punktmenge P von der *ersten Mächtigkeit niemals* eine *perfecte* Menge sein kann.

Theorem B. *Ist* α *irgend eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse und* P *innerhalb* G_n *eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass:*

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

so ist $P^{(1)}$ *sowohl wie auch* P *von der ersten Mächtigkeit, es sei denn, dass* P *resp.* $P^{(1)}$ *endliche Mengen sind.*

Beweis. Die *erste* Ableitung einer Punktmenge P ist eine bestimmte neue Menge $P^{(1)}$, nämlich die Menge *aller* Grenzpunkte von P; unter der *zweiten* Ableitung $P^{(2)}$ von P verstanden wir die *erste* Ableitung von $P^{(1)}$ und allgemein unter der ν^{ten} Ableitung $P^{(\nu)}$ die *erste* Ableitung von $P^{(\nu-1)}$.

Die Ableitung $P^{(2)}$ ist, wie leicht zu sehen, stets mit allen ihren Punkten in $P^{(1)}$ enthalten und allgemein ist $P^{(\nu)}$ ein *Bestandtheil* aller Ableitungen $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu-1)}$, welche ihr vorangehen.

Wir sahen aber auch, dass die *für die Erforschung der Natur einer Punktmenge* P *so wichtige Begriffsbildung* von Ableitungen verschiedener Ordnung durch die soeben erwähnten Ableitungen mit *endlicher* Ordnungszahl ν *keineswegs* ihren Abschluss findet, dass es vielmehr im Allgemeinen *nothwendig* ist, aus P *abgeleitete* Mengen mit in die Betrachtung zu ziehen, welche sich *naturgemäss* als Ableitungen der Menge P auffassen lassen, deren *Ordnungen* durch bestimmte *transfinite* Zahlen der *zweiten*, *dritten* Zahlenclasse u. s. w. characterisirt werden.

In Wirklichkeit stellt sich zwar, wie aus den später folgenden Theoremen aufs bestimmteste hervorgehen wird, die Sache so, dass bei den Punktmengen innerhalb eines beliebigen Gebietes G_n strenggenommen nur diejenigen *Ableitungen* eine Rolle spielen, deren Ordnungszahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse angehört. Es zeigt sich nämlich die *höchst merkwürdige Thatsache*, dass für *jede* Punktmenge P *von einer gewissen Ordnungszahl* α an, welche der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse, jedoch *keiner* höheren Zahlenclasse angehört, die Ableitung $P^{(\alpha)}$ entweder 0 oder eine *perfecte* Menge wird; daraus folgt, dass die Ableitungen höherer Ordnung als α mit der Ableitung $P^{(\alpha)}$ sämmtlich identisch sind, ihre Inbetrachtnahme daher *überflüssig* wird.

Nichtsdestoweniger sind wir im Stande formell (d. h. dem Begriffe nach) Ableitungen einer Punktmenge P zu definiren, deren Ordnungszahlen *beliebig hohen* Zahlenclassen angehören, vorausgesetzt, dass diese Zahlenclassen vorher ordnungsmässig definirt sind. — Die Begriffe der Ableitungen mit *transfiniter* Ordnungszahl ergeben sich *successive in derselben Folge wie die transfiniten Zahlen selbst.*

Zunächst erhält man:

$$P^{(\omega)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots),$$

wo das Zeichen $\mathfrak{D}$ die Bedeutung hat, welche ich ihm in Bd. XVII, pag. 355 gegeben habe.

Sodann erhalten wir $P^{(\omega+1)}$ als die erste Ableitung von $P^{(\omega)}$, $P^{(\omega+2)}$ als die erste Ableitung von $P^{(\omega+1)}$ u. s. w. Ist γ *irgend eine transfinite* Zahl der *zweiten* oder einer *höheren* Zahlenclasse, so gründet sich der Begriff $P^{(\gamma)}$ auf die Begriffe der Ableitungen von *niedrigerer* Ordnung als γ wie folgt: ist γ eine transfinite Zahl der *ersten* Art, d. h. eine solche Zahl, welche einen ihr *nächst kleineren* Nachbar hat, den wir γ_{-1} nennen, so ist $P^{(\gamma)}$ definirt als die *erste Ableitung* von $P^{(\gamma-1)}$; ist hingegen γ eine transfinite Zahl der *zweiten* Art, d. h. eine solche Zahl, welche in der Reihe der ganzen Zahlen *keinen nächst vorangehenden* Nachbar hat (wie beispielsweise die Zahlen ω, ω^{ω} oder $\omega^{\omega^{\omega}} + \omega^2$), so geschieht die Definition von $P^{(\gamma)}$ mittelst der Formel:

$$P^{(\gamma)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\gamma')}, \ldots),$$

worin γ' alle ganzen Zahlenwerthe, die *kleiner* sind als γ, zu erhalten hat.

Jedes $P^{(\gamma)}$ wird daher ein bestimmter *Bestandtheil* von $P^{(\gamma')}$, falls $\gamma' < \gamma$, so dass, unter letzterer Voraussetzung die Differenz:

$$P^{(\gamma')} - P^{(\gamma)}$$

gleichfalls die Bedeutung einer bestimmten in $P^{(1)}$ enthaltenen Punktmenge hat, nämlich derjenigen Menge, welche übrig bleibt, wenn man von $P^{(\gamma')}$ die sämmtlichen der Menge $P^{(\gamma)}$ angehörigen Punkte entfernt.

Aus diesen Erklärungen ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit folgender Gleichung, die gültig ist für jede Zahl γ, mag diese endlich oder überendlich sein:

$$(1) \qquad P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma'} (P^{(\gamma')} - P^{(\gamma'+1)}) + P^{(\gamma)},$$

wo γ' einen veränderlichen Index bedeutet, der alle ganzzahligen Werthe von 1 an zu erhalten hat, die kleiner sind als die *gegebene* Zahl γ. —

Dies Alles vorausgeschickt, sei nun α irgend eine ganze Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse und P eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass:

$$P^{(\alpha)} \equiv 0.$$

Es soll gezeigt werden, dass $P^{(1)}$ und daher auch P (vergl. Bd. XXI, pag. 53) von der *ersten* Mächtigkeit sind.

Zu dem Ende wenden wir obige Formel (1) an, indem wir darin $\gamma = \alpha$ voraussetzen und haben:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}),$$

wo α' ein veränderlicher Index ist, der alle ganzen Zahlen von 1 an zu durchlaufen hat, die *kleiner* sind als α.

Das auf der *rechten* Seite eigentlich noch hinzukommende Glied $P^{(\alpha)}$ fällt hier nämlich fort, weil es gleich 0 *vorausgesetzt* ist.

Jedes Glied unserer Summe auf der Rechten:

$$P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}$$

bildet eine *isolirte* Menge (vergl. Bd. XXI, pag. 51) und ist *daher*, wie an der soeben citirten Stelle gezeigt worden ist, falls sie aus unendlich viel Punkten besteht, von der *ersten Mächtigkeit.*

Der *Inbegriff aller* Glieder unserer Summe ist gleichfalls (falls er nicht *endlich* ist) von der *ersten* Mächtigkeit, weil nach der Definition der *zweiten* Zahlenclasse der Inbegriff aller Zahlen α', welche kleiner sind als eine *bestimmte* transfinite Zahl α der zweiten Zahlenclasse die *erste* Mächtigkeit hat. (M. vergl. Bd. XXI, pag. 579.)

Achtet man nun auf den in Bd. XX, pag. 117, oben, angeführten Satz, so folgt aus dem eben gesagten unmittelbar, dass $P^{(1)}$ und daher auch P von der *ersten Mächtigkeit* sind, falls diese Mengen nicht aus einer *endlichen* Anzahl von Punkten bestehen. —

Theorem C. *Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ von der ersten Mächtigkeit ist, so giebt es immer Zahlen γ der ersten oder zweiten*

Zahlenclasse derart, dass $P^{(\gamma)}$ gleich Null wird und von allen solchen Zahlen γ giebt es eine kleinste α.

Beweis. In der Formel (1) von § 16 werde die Zahl $\gamma = \Omega$ gesetzt, wo unter Ω die *kleinste* Zahl der *dritten* Zahlenclasse verstanden wird. (M. vergl. Bd. XXI, pag. 582).

Man hat alsdann:

$$(2) \qquad P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)},$$

worin der Buchstabe γ *alle* Zahlen der *ersten* und *zweiten* Zahlenclasse durchläuft.

In unserem Theorem wird vorausgesetzt, dass $P^{(1)}$ von der *ersten* Mächtigkeit sei; in Folge dessen sind alle höheren Ableitungen $P^{(\gamma)}$, *weil* sie in $P^{(1)}$ *aufgehen*, gleichfalls von der *ersten* Mächtigkeit, wofern sie nicht aus einer *endlichen* Anzahl von Punkten bestehen; es kann daher die Differenz:

$$(P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)})$$

nicht anders gleich Null werden, als indem $P^{(\gamma)}$ und daher auch $P^{(\gamma+1)}$ Null werden; denn im andern Falle wäre $P^{(\gamma)}$, wegen:

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\gamma+1)}$$

eine *perfecte* Menge, was dem *Satze A* widersprechen würde.

Wären daher sämmtliche Ableitungen $P^{(\gamma)}$, wie hoch wir auch γ innerhalb der *ersten* oder der *zweiten* Classe annehmen, von Null verschieden, so würden auch sämmtliche Glieder:

$$(P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)})$$

der Summe auf der Rechten unserer Gleichung (2) von Null verschieden sein.

Der Inbegriff *aller* dieser Glieder, oder, was dasselbe bedeutet, der Inbegriff aller *ganzen* Zahlen der *ersten* und *zweiten* Zahlenclasse zusammengenommen hat die *zweite* Mächtigkeit. (M. vergl. Bd. XXI, pag. 579 u. f.) Wir würden daher auf der rechten Seite unserer Gleichung (2) eine Punktmenge stehen haben, die sicherlich von *höherer* Mächtigkeit wäre, als die linke Seite unserer Gleichung, welche der Voraussetzung nach von der *ersten* Mächtigkeit ist.

Es führt also die Annahme, dass sämmtliche Ableitungen $P^{(\gamma)}$ (unter γ eine Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse verstanden) von Null verschieden seien, zu einem *offenbaren* Widerspruche mit der Voraussetzung, dass $P^{(1)}$ die erste Mächtigkeit hat.

Daher *muss* es Zahlen γ der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse geben, so dass:

$$P^{(\gamma)} \equiv 0,$$

und von allen solchen Zahlen γ muss es eine kleinste α geben, weil der *allgemeine* Satz besteht, dass in jedem *irgendwie definirten In-*

begriffe von ganzen Zahlen, die der ersten oder zweiten (oder auch einer höheren) Zahlenclasse angehören, ein *Minimum*, d. h. eine Zahl vorhanden sein muss, die *kleiner* ist, als alle übrigen Zahlen desselben Inbegriffes. (M. vergl. Bd. XXI, pag. 581).

Theorem D. *Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, so giebt es immer Punkte, welche allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich angehören, wo α irgend eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse ist und der Inbegriff aller dieser Punkte, der nichts anderes ist als $P^{(\Omega)}$, ist stets eine perfecte Punktmenge.*

Beweis. Dass es immer unter der gemachten Voraussetzung über $P^{(1)}$ solche Punkte giebt, die gleichzeitig allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ angehören, erkennt man aus Theorem I in § 15, wenn man ausserdem Theorem B dieses Paragraphen berücksichtigt. In Folge des letzteren hat nämlich P die Beschaffenheit, dass alle ihre Ableitungen $P^{(\alpha)}$, wie hoch wir auch α in der zweiten Zahlenclasse annehmen, *von Null verschieden sind.* Diese Beschaffenheit von P genügt den *beiden* Voraussetzungen einer Beschaffenheit, welche in Theorem I durch den Buchstaben Υ bezeichnet wurde; folglich giebt es nach diesem Satze *wenigstens* einen Punkt, wir wollen ihn s nennen, von solcher Lage, dass wenn wir ihn zum Mittelpunkte einer Vollkugel $K(\varrho)$ mit dem Radius ϱ nehmen, der *Bestandtheil* $P(\varrho)$ von P, welcher in diese Vollkugel fällt, ebenfalls die Beschaffenheit hat, dass alle seine Ableitungen $P^{(\alpha)}(\varrho)$ von Null verschieden sind, wie klein auch ϱ gewählt werden möge; ist daher α irgend eine ganze, zur ersten oder zweiten Zahlenclasse gehörige Zahl, so ist (da $P^{(\alpha)}(\varrho)$ ein Bestandtheil von $P^{(\alpha)}$ und da es somit in jeder Nähe von s Punkte von $P^{(\alpha)}$ giebt) s ein *Grenzpunkt* von $P^{(\alpha)}$, also ein *Punkt* von $P^{(\alpha+1)}$; nun ist aber $P^{(\alpha+1)}$ ein Bestandtheil von $P^{(\alpha)}$, daher also auch s ein Punkt von $P^{(\alpha)}$. Der Punkt s gehört also allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich an.

Fassen wir nun den Inbegriff $S = P^{(\Omega)}$ aller Punkte s in's Auge, welche sämmtlichen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich angehören, so überzeugt man sich leicht, dass dieser Inbegriff S eine perfecte Menge bildet. In der That muss jeder Punkt s von S ein Grenzpunkt von S sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man um s als Mittelpunkt eine Vollkugel $K(\varrho, s)$ mit hinreichend kleinem Radius $\varrho \leq \varepsilon$ legen, so dass der Theil $P^{(1)}(\varrho, s)$ von $P^{(1)}$, welcher dieser Vollkugel angehört, eine Ableitung $P^{(\Omega)}(\varrho, s)$ hat, die aus dem einzigen Punkte s besteht; es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\nu, \cdots$ eine Reihe von abnehmenden, beliebig klein werdenden Grössen, welche alle kleiner sind als ε, so dass dem soeben gemeinten ϱ nach einander die Werthe $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\nu, \cdots$ gegeben werden können; man hat alsdann:

$$(3)\quad P^{(1)}(\varepsilon,s)\equiv s+\big(P^{(1)}(\varepsilon,s)-P^{(1)}(\varepsilon_1,s)\big)+\big(P^{(1)}(\varepsilon_1,s)-P^{(1)}(\varepsilon_2 s)\big)+\cdots$$
$$+\big(P^{(1)}(\varepsilon_{\nu-1},s)-P^{(1)}(\varepsilon_\nu,s)\big)+\cdots.$$

Jedes der einzelnen Glieder auf der rechten Seite ist nun endlich oder von der ersten Mächtigkeit; denn die Menge

$$P^{(1)}(\varepsilon_{\nu-1},s)-P^{(1)}(\varepsilon_\nu,s)=Q_\nu$$

ist so beschaffen, dass $Q_\nu^{(\Omega)}$ gleich Null ist, weil sonst in das Innere der Vollkugeln $K(\varrho, s)$ $(\varrho \leqq \varepsilon)$ ausser s noch andere Punkte von S fallen würden; Q_ν kann daher nach dem vorher Bewiesenen keine höhere Mächtigkeit haben als die *erste*.

Es müsste also auch wegen (3) $P^{(1)}(\varepsilon, s)$ von keiner höheren als der ersten Mächtigkeit sein, was aber nach Theorem C unverträglich damit ist, dass $P^{(\Omega)}(\varepsilon, s)$ von Null verschieden, nämlich gleich s ist.

Wir sehen daher, dass jeder Punkt s von S ein *Grenzpunkt* von S ist.

Es ist aber auch jeder Grenzpunkt s' von S ein Punkt von S, weil $P^{(\Omega+1)}$ ein Bestandtheil von $P^{(\Omega)}$ ist.

Somit ist gezeigt, dass $S=P^{(\Omega)}$ eine *perfecte* Menge ist.

Theorem E. *Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, und ist $S=P^{(\Omega)}$ die perfecte Menge, deren Existenz in Theorem D ausgesprochen ist, so ist die Differenz:*

$$R\equiv P^{(1)}-S$$

stets eine Punktmenge von höchstens der ersten Mächtigkeit und wir können daher stets und nur auf eine Weise $P^{(1)}$ in zwei Bestandtheile R und S zerlegen, so dass:

$$P^{(1)}\equiv R+S,$$

wo S eine perfecte Punktmenge und R eine Punktmenge ist, die entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist.

Beweis. Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, brauchen wir nur das Theorem III in § 15 und das soeben bewiesene Theorem D anzuwenden. Es hat hier nämlich R, ihrer Bedeutung nach, *keinen* Punkt mit S gemein und mithin, da $S^{(1)}\equiv S$, auch keinen Punkt mit $S^{(1)}$ gemein.

Wenn wir ferner irgend einen stetigen Theil H von G_n betrachten, der keinen Punkt von S und mithin auch keinen Punkt von $S^{(1)}\equiv S$ enthält, so muss die Theilmenge von R, wir wollen sie $\overline{R}$ nennen, welche dem Gebiete H angehört, endlich oder von der ersten Mächtigkeit sein; denn wäre $\overline{R}$ von einer höheren als der ersten Mächtigkeit, so wäre nach Theorem D die Menge $\overline{R}^{(\Omega)}$ von Null verschieden und es müssten also, da $\overline{R}$ ein Bestandtheil von $P^{(1)}$ und folglich

$\bar{R}^{(\Omega)}$ ein Bestandtheil von $P^{(\Omega)} \equiv S$ ist, in dem Gebiete H Punkte der Menge S liegen, was unserer Voraussetzung nach nicht der Fall ist.

Es treffen also für unsere Menge R alle diejenigen Annahmen zu, welche im Theorem III in § 15 in Bezug auf die dort mit demselben Buchstaben R bezeichnete Menge gemacht worden sind, wobei wir nur an Stelle der dort mit Q bezeichneten Menge unsere Menge S zu setzen haben.

Wir schliessen daher, mit Hülfe von Theorem III, § 15, dass unsere Menge R höchstens von der *ersten* Mächtigkeit ist, was zu beweisen war.

Theorem F. *Ist P innerhalb G_n eine beliebige Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, so giebt es stets eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahl α, so dass:*

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\alpha+1)},$$

und es ist folglich bereits die α^{te} Ableitung von P, d. i. $P^{(\alpha)}$ gleich der perfecten Menge $P^{(\Omega)} \equiv S$.

Beweis. Nach dem Vorhergehenden ist:

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

wo R von der *ersten* Mächtigkeit und S gleich der perfecten Menge $P^{(\Omega)}$ ist.

Nach Formel (2) dieses Paragraphen ist aber auch:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\Omega)}.$$

Vergleichen wir diese beiden Ausdrücke von $P^{(1)}$ und berücksichtigen, dass $P^{(\Omega)} \equiv S$, so ergiebt sich für R der Ausdruck:

$$R \equiv \sum_{\gamma} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}), \tag{4}$$

wo der Buchstabe γ *alle* Zahlen der *ersten* und *zweiten* Zahlenclasse zu durchlaufen hat.

Da R von der *ersten* Mächtigkeit ist, dagegen die Menge der Glieder auf der rechten Seite von (3) die *zweite Mächtigkeit* hat (c. Ann. Bd. XXI, pag. 579), so schliessen wir, dass es eine *kleinste* der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse angehörige Zahl α geben muss, so dass:

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\alpha+1)}.$$

Hieraus folgt, dass $P^{(\alpha)}$ eine perfecte und daher mit $P^{(\Omega)} \equiv S$ zusammenfallende Menge ist.

Diese Sätze A, B, C, D, E, F sowohl, wie die hier entwickelten Beweise derselben waren mir zur Zeit der Abfassung von Nr. 5 dieser Abhandlung bekannt; indessen bin ich dort bei der Formulirung des

Satzes E, auf pag. 575, Bd. XXI, etwas zu weit gegangen; so wie der Satz E dort steht, ist er nicht allgemein richtig. Aus dem Umstande nämlich, dass R höchstens von der ersten Mächtigkeit und gleichzeitig ein Bestandtheil von $P^{(1)}$ ist, glaubte ich folgern zu dürfen, dass R die Ableitung eines gewissen Bestandtheiles von P wäre und schloss daraus mit Hülfe des Theorems C ganz richtig, dass es ein α geben müsste, so dass $R^{(\alpha)} \equiv 0$. Es zeigt sich nun aber, dass im Allgemeinen R nicht Ableitung einer andern Menge zu sein braucht.

Diese *wichtige* Bemerkung ist zuerst von Herrn Ivar Bendixson in Stockholm in einem an mich gerichteten Schreiben (v. Mai 1883) gemacht worden. Auf meinen Wunsch hat derselbe seine bei dieser Gelegenheit gefundenen Resultate, welche zum Theil mit den obigen Sätzen D, E, F übereinstimmen, ausgearbeitet und in Acta mathem. Bd. II, pag. 415 publicirt.

Da hiernach $R^{(\gamma)}$ im Allgemeinen für keinen Werth von γ Null zu sein braucht, so ergab sich die Frage, durch *welche Eigenschaft* die abzählbare Menge R sich von anderen Mengen der ersten Mächtigkeit unterscheide; die Beantwortung dieser Frage fand Herr Bendixson in folgendem Theorem:

Theorem G. *Ist R die in Theorem E vorkommende Menge erster Mächtigkeit, so giebt es eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl α, so dass:*

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) \equiv 0.$$

Beweis. Nach Theorem F giebt es ein *kleinstes* α der ersten oder zweiten Zahlenclasse, so dass:

$$P^{(\alpha)} \equiv P^{(\Omega)} \equiv S.$$

Nun hat R mit S keinen Punkt gemein, folglich ist auch:

$$\mathfrak{D}(R, P^{(\alpha)}) \equiv 0.$$

Da R ein Bestandtheil von $P^{(1)}$, mithin $R^{(\alpha)}$ ein Bestandtheil von $P^{(\alpha)}$ ist, so hat man umsomehr auch:

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) \equiv 0 \quad \text{q. e. d.}$$

An diese Theoreme knüpfen sich erläuternde und zusätzliche Bemerkungen.

Schon in Nr. 2 dieser Abh. (Bd. XVII, pag. 358) habe ich auf den merkwürdigen Umstand hingewiesen, dass, wenn eine Punktmenge P so beschaffen ist, dass $P^{(\omega)} \equiv 0$, es alsdann immer auch eine *endliche* Zahl ν giebt, so dass schon $P^{(\nu)} \equiv 0$. Der hierin enthaltene Satz ist aber nur ein specieller Fall eines allgemeineren, welchen man wie folgt ausdrücken kann:

Ist β irgend eine zur zweiten Zahlenclasse gehörige Zahl der zweiten Art (d. h. eine Zahl, welche in zwei Factoren zerlegt werden kann, *von denen der Multiplicandus* $= \omega$ *ist) und* P *eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass* $P^{(\beta)} \equiv 0$, *so giebt es stets kleinere, zur ersten oder zweiten Zahlenclasse gehörige Zahlen* $\beta' < \beta$, *so dass auch für sie:* $P^{(\beta')} \equiv 0$ *ist.*

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, nehmen wir an, es sei zwar $P^{(\beta)} \equiv 0$, dagegen $P^{(\beta')}$ für jede Zahl $\beta' < \beta$ von Null verschieden. Nach Theorem I des § 15 würde es einen Punkt g von solcher Lage geben, dass in jede Vollkugel K_n mit dem Mittelpunkte g und dem Radius ϱ eine Theilmenge $P(\varrho)$ von P fiele, für welche ebenfalls alle Ableitungen $P^{(\beta')}(\varrho)$, wenn $\beta' < \beta$, von Null verschieden wären. Indem wir ϱ beliebig klein annehmen können, so folgt hieraus leicht, dass der Punkt g zu jeder der Ableitungen $P^{(\beta')}$, wenn $\beta' < \beta$, als Punkt gehören und mithin auch, wegen der Formel:

$$P^{(\beta)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(\beta')}, \cdots)$$

ein Punkt von $P^{(\beta)}$ sein würde, was der Annahme widerspricht, wonach $P^{(\beta)} \equiv 0$ ist. Folglich ist die gleichzeitig von uns gemachte Voraussetzung, dass alle $P^{(\beta')}$ von Null verschieden seien, unstatthaft und es muss daher Zahlen β' geben, die kleiner sind als β und für welche $P^{(\beta')}$ ebenfalls gleich Null ist.

Aus diesem Satze folgern wir, *dass die in Theorem C mit* α *bezeichnete Zahl stets von der e r s t e n Art ist*, so dass eine ihr nächst kleinere Zahl α_{-1} immer vorhanden ist; denn wäre α von der *zweiten* Art, so könnte nach dem soeben Bewiesenen α nicht die *kleinste* Zahl sein, für welche $P^{(\alpha)} \equiv 0$ wäre. Es giebt also, falls $P^{(1)}$ von der ersten Mächtigkeit ist, stets eine Zahl α_{-1}, so dass zwar $P^{(\alpha_{-1})}$ von Null verschieden, dagegen $P^{(\alpha)}$ oder was dasselbe ist $P^{(\alpha_{-1}+1)}$ gleich Null ist.

§ 17.

Um die Sätze der beiden vorangehenden Paragraphen noch weiter zu vervollständigen, sowie um neue Untersuchungen im Folgenden bequem ausführen zu können, ist es für mich unvermeidlich neue Definitionen sowohl wie Benennungen festzusetzen.

Zunächst will ich bemerken, dass es sich als zweckmässig erweist, das kleinste gemeinsame Multiplum mehrerer Mengen $P_1, P_2, \ldots$ wofür wir bisher das Zeichen $\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots)$ (Ann. Bd. XVII, p. 355) gebraucht haben, als Summe der einzelnen Mengen $P_1, P_2, \ldots$ auch in denjenigen Fällen zu schreiben, wo die Mengen $P_1, P_2, \ldots$ Punkte gemeinsam haben, wobei jeder gemeinsame Punkt nur *einfach* der Menge $\mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots)$ zugetheilt wird.

Wir haben also von jetzt ab in allen Fällen:

$$(1) \qquad P_1 + P_2 + \cdots \equiv \mathfrak{M}(P_1, P_2, \ldots).$$

Man überzeugt sich nämlich leicht, dass die gewöhnlichen Commutations- und Associationsregeln für die Summanden auch hier Gültigkeit haben. Nur muss beachtet werden, dass aus einer Gleichung:

$$P \equiv P_1 + P_2 + \cdots$$

die folgende:

$$P - P_1 \equiv P_2 + P_3 + \cdots$$

nur in dem Falle geschlossen werden kann, dass P_1 *mit keiner der übrigen* $P_2, P_3 \ldots$ *gemeinsame Punkte hat.*

Wenn ferner die Summe (1) aus einer nur *endlichen* Anzahl von Summanden besteht, sieht man ohne Schwierigkeit, dass immer folgende Regel für die Bildung der Ableitungen besteht:

$$(2) \qquad (P_1 + P_2 + \cdots + P_\nu)^{(\alpha)} = P_1^{(\alpha)} + P_2^{(\alpha)} + \cdots + P_\nu^{(\alpha)},$$

wo α irgend eine endliche oder transfinite ganze Zahl bedeutet.

Diese Regel hört jedoch im Allgemeinen auf gültig zu sein, wenn die Anzahl der Theilmengen $P_1, P_2, \ldots$ unendlich gross ist. —

Wenn eine Punktmenge P so beschaffen ist, dass ihre Ableitung $P^{(1)}$ in ihr als Divisor enthalten ist oder, was dasselbe ist, dass

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) \equiv P^{(1)},$$

so wollen wir P eine *abgeschlossene* Menge nennen. Zu dieser Art von Mengen gehören beispielsweise die Mengen der singulären Punkte analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen. Ferner entsteht aus jeder Menge P eine *abgeschlossene:*

$$\mathfrak{M}(P, P^{(1)}) \equiv P + P^{(1)}.$$

Jede Menge, welche selbst erste Ableitung einer andern Menge ist, gehört auch, wie wir wissen, zu den abgeschlossenen Mengen.

Dieser letztere Satz ist umkehrbar: *jede abgeschlossene Menge lässt sich auf unzählig viele Weisen darstellen als die erste Ableitung einer andern Menge.*

In der That sei P eine abgeschlossene Menge, also $P^{(1)}$ ein Bestandtheil von P; wir setzen:

$$P \equiv Q + P^{(1)}.$$

Es ist dann Q eine *isolirte* Menge und daher von der *ersten* Mächtigkeit; es mögen die zu ihr gehörigen Punkte mit:

$$q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \ldots$$

bezeichnet werden.

Sei ϱ_ν die hier von Null verschiedene untere Grenze der Entfernungen des Punktes q_ν von allen übrigen Punkten der Menge P; um q_ν als Mittelpunkt werde eine n-dimensionale Vollkugel K_ν mit dem Radius $\frac{\varrho_\nu}{2}$ geschlagen.

Die sämmtlichen Vollkugeln K_ν liegen ausser einander und können sich höchstens berühren; in das Innere von K_ν fällt kein anderer Punkt von P, als ihr Mittelpunkt q_ν.

Man setze nun in jede dieser Vollkugeln K_ν eine Punktmenge P_ν deren Ableitung $P_\nu^{(1)}$ aus dem einzigen Punkte q_ν besteht und bilde folgende Menge:

$$M \equiv P^{(1)} + \Sigma P_\nu,$$

so hat M, wie leicht zu erkennen, zur Ableitung die Menge P, d. h. es ist:

$$M^{(1)} \equiv P.$$

Denn man hat:

$$P \equiv Q + P^{(1)}$$

und daher:

$$P^{(1)} \equiv Q^{(1)} + P^{(2)}$$

mithin:

$$P \equiv Q + Q^{(1)} + P^{(2)}$$

andererseits ist:

$$M^{(1)} \equiv P^{(2)} + (\Sigma P_\nu)^{(1)}.$$

Es ist aber, wie man leicht erkennt:

$$(\Sigma P_\nu)^{(1)} \equiv Q + Q^{(1)}$$

woraus der zu beweisende Satz folgt.

Aus unsern Sätzen C, D, E, F in § 16 ergeben sich daher folgende Sätze für *abgeschlossene* Punktmengen:

Theorem C′. *Ist P irgend eine abgeschlossene Punktmenge von der ersten Mächtigkeit, so giebt es immer eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahl α, so dass $P^{(\alpha)}$ gleich Null ist, oder was dasselbe heissen soll, solche Mengen sind immer reductibel.*

Theorem E′. *Ist P eine abgeschlossene Punktmenge von höherer, als der ersten Mächtigkeit, so zerfällt P und zwar nur auf eine Weise in eine perfecte Menge S und eine Menge von der ersten Mächtigkeit R, so dass*

$$P \equiv R + S$$

und es existirt eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahl α, so dass $P^{(\alpha)}$ gleich S wird.

Es ist ferner wichtig den Fall ins Auge zu fassen, dass eine Menge P *Divisor ihrer Ableitung* $P^{(1)}$ *ist* oder, was dasselbe ist, dass

$$\mathfrak{D}(P, P^{(1)}) \equiv P;$$

unter solchen Umständen wollen wir P eine *in sich dichte Menge* nennen.

Ist P irgend eine in sich dichte Menge, so ist ihre Ableitung $P^{(1)}$ stets eine perfecte Menge.

Denn einerseits ist ja *immer* $P^{(2)}$ Divisor von $P^{(1)}$; in unserm Falle ist aber auch $P^{(1)}$ Divisor von $P^{(2)}$; denn schreiben wir:

$$P^{(1)} \equiv N + P,$$

so folgt daraus:

$$P^{(2)} \equiv N^{(1)} + P^{(1)};$$

d. h. $P^{(1)}$ ist mit allen seinen Punkten in $P^{(2)}$ enthalten. Folglich sind die beiden Mengen $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ identisch dieselben und es ist daher $P^{(1)}$ eine *perfecte* Menge.

Dann ist auch der Fall hervorzuheben, wo eine Menge P eine solche Beschaffenheit hat, dass *kein* Bestandtheil d. h. *keine* Theilmenge von P *in sich dicht* ist; in diesem Falle nennen wir die Menge P eine *separirte Menge.*

Die *isolirten* Mengen bilden offenbar eine besondere Classe von *separirten* Mengen. Ferner ist hervorzuheben, dass *alle abgeschlossenen Mengen erster Mächtigkeit* separirte Mengen sind, weil sie sonst nicht *reductibel* wären, und dass auch alle diejenigen Mengen erster Mächtigkeit, welche in den Theoremen E, E′ und G (§ 16) vorkommen und dort mit R bezeichnet wurden, *separirte* Mengen sind.

Würde nämlich R einen Bestandtheil M haben, welcher *in sich dicht* ist, so würde $R^{(\alpha)}$ den Bestandtheil $M^{(1)}$ haben, weil $M^{(1)}$ eine perfecte Menge ist, die in *allen* Ableitungen von R erhalten bleibt; da zudem M als in sich dichte Menge ein Bestandtheil von $M^{(1)}$ ist, so würde der Bestandtheil M von R ebenfalls in $R^{(\alpha)}$ enthalten sein, was in Widerspruch zu dem Bendixsonschen Satze G (§ 16) treten würde. Also hat R keinen Bestandtheil, welcher *in sich dicht* ist, und es gehört also R immer zu der Classe der *separirten Mengen.*

Zu den *separirten* Mengen gehört auch *immer*, was auch P sei, die Menge

$$P - \mathfrak{D}(P, P^{(\Omega)}),$$

von welcher man zugleich stets behaupten kann, dass sie von der ersten Mächtigkeit ist, was leicht mittelst des Theorems III in § 15 bewiesen wird. Auf die Frage ob eine *separirte* Menge auch von höherer als der ersten Mächtigkeit sein kann, kommen wir später.

Der Begriff „*in sich dicht*“ steht natürlich in einer gewissen Verwandtschaft zu dem schon früher oft von mir gebrauchten „*überalldicht*“, umsomehr müssen wir sie auseinander halten und jeder Verwechslung zwischen ihnen vorbeugen.

Der Ausdruck „*in sich dicht*“ bezeichnet *für sich* eine bestimmte Beschaffenheit einer Menge; dagegen hat „*überalldicht*“ an und für sich nicht die Bedeutung einer Mengenbeschaffenheit, sondern erlangt solche erst dadurch, dass man ihn in Verbindung mit einem bestimmten *n*-

dimensionalen stetigen Bestandtheil H von G_n braucht, indem man von einer Menge P sagt, sie sei „*überalldicht in* H“.

Macht man sich diesen wesentlichen Unterschied klar, so folgt von selbst, dass eine Menge P sehr wohl *in sich dicht* sein kann, *ohne* dass sie in irgend welchem Theilgebiete H von G_n *überalldicht* wäre, und dass auch umgekehrt eine Menge P *in einem Theilgebiete* H *überalldicht* sein kann, ohne dass sie *in sich dicht* zu sein braucht, falls nämlich P auch ausserhalb des Gebietes H zugehörige Punkte besitzt. —

Liegt andrerseits P ganz im Gebiete H und ist *darin überalldicht*, so ist unmittelbar klar, dass in einem solchen Falle P auch *in sich dicht* genannt werden muss.

§ 18.

Jeder Punktmenge P innerhalb G_n, sie mag *continuirlich* oder *discontinuirlich* sein, kommt eine bestimmte *nicht negative Zahlgrösse* zu, welche wir ihren *Inhalt* oder ihr *Volumen mit Bezug auf ihre Theilnehmerschaft an dem ebenen n-dimensionalen Raum* G_n, oder, wie wir uns kürzer ausdrücken wollen, *mit Bezug auf* G_n nennen wollen. Diese Zahlgrösse ist in allen Fällen, in welchen man bisher von *Volumen* oder *Inhalt* gesprochen hat (wenn nämlich P ein aus einem oder mehreren n-dimensionalen Stücken bestehender Theil von G_n ist) *gleich* dem n-fachen Integral:

$$\int \partial x_1 \, \partial x_2 \dots \partial x_n,$$

wobei die Integration über alle Elemente des betreffenden Raumtheiles P ausgedehnt wird. Sie hat aber auch in *allen anderen* Fällen ihre *bestimmte Bedeutung* und einen *einzigen Werth*. Wegen ihrer Abhängigkeit sowohl von P, wie auch von dem ebenen Raume G_n, in welchem P enthalten ist, wollen wir diese Zahlgrösse mit:

$$I(P \text{ in } G_n)$$

oder einfach mit:

$$I(P)$$

bezeichnen, letzteres in den Fällen, wo in der laufenden Betrachtung die Heranziehung mehrerer *ebener* Räume G_n, G'_m, ..., denen P gemeinschaftlich angehören könnte, ausgeschlossen und daher eine Verwechselung nicht möglich ist. Zu dieser Verallgemeinerung des *Inhaltsbegriffes* gelangt man durch die Betrachtung einer gewissen Function einer positiven unbeschränkten Variablen ϱ, die wir *die zu der gegebenen Punktmenge* P *mit Bezug auf* G_n *gehörige charakteristische Function nennen* und je nach Bedarf mit:

$$F(\varrho, P \text{ in } G_n)$$

oder, falls dies ausreicht, einfacher mit:

$$F(\varrho, P) = F(\varrho)$$

bezeichnen wollen.

Ist nämlich irgend eine *ganz in das Endliche fallende* Punktmenge P innerhalb G_n gegeben, so bilde man um *jeden* der abgeschlossenen Menge

$$\mathfrak{M}(P, P^{(1)}) \equiv P + P^{(1)}$$

zugehörigen Punkt p eine n-dimensionale Vollkugel mit dem Mittelpunkt p und dem Radius ϱ; wir wollen sie, als Menge mit allen innern und auf der Begrenzung liegenden Punkten aufgefasst, mit:

$$K(\varrho, p)$$

bezeichnen.

Der Inbegriff *aller* dieser Vollkugeln, welchen man erhält, indem man p *alle* Punkte der Menge $P + P^{(1)}$ durchlaufen lässt, hat nun ein bestimmtes kleinstes gemeinschaftliches Multiplum;

$$\sum_p K(\varrho, p),$$

welcher Punktmenge wir die Bezeichnung:

$$\Pi(\varrho, P \text{ in } G_n)$$

oder die einfachere:

$$\Pi(\varrho, P)$$

oder

$$\Pi(\varrho),$$

je nach Umständen geben wollen.

Diese Punktmenge $\Pi(\varrho)$ ist nun, weil P ganz im *Endlichen* liegend vorausgesetzt ist, wie man leicht sieht, immer ein aus einer *endlichen Anzahl* von Stücken bestehender Theil des Raumes G_n, wo *jedes dieser Stücke ein n-dimensionales Continuum mit dazu gehöriger Begrenzung darstellt.* Es hat also das n-fache Integral

$$\int \partial x_1\, \partial x_2 \dots \partial x_n,$$

ausgeführt über alle Elemente des Raumtheiles $\Pi(\varrho)$ einen bestimmten Werth, der sich mit ϱ ändert; diesen Werth nennen wir $F(\varrho)$, so dass wir also folgende Definition der *zu einer gegebenen Punktmenge P mit Bezug auf G_n gehörigen charakteristischen Function erhalten:*

$$(1) \qquad F(\varrho, P \text{ in } G_n) = \int\limits_{(\Pi(\varrho, P \text{ in } G_n))} \partial x_1\, \partial x_2 \dots \partial x_n$$

Bemerken wir nun, dass $F(\varrho)$, wie leicht erkannt wird, eine mit ϱ gleichzeitig abnehmende stetige Function von ϱ ist, deren Derivirte $F'(\varrho)$ sogar auch eine ganz bestimmte Bedeutung hat, indem sie nämlich in gewissem Sinne den Inhalt der Begrenzung von $\Pi(\varrho)$

ausdrückt, so folgt, dass mit beliebigem Abnehmen der Grösse ϱ die Function $F(\varrho)$ sich einem bestimmten, nicht negativen Grenzwerth $\lim\limits_{\varrho=0} F(\varrho)$ beliebig nähert; *diesen Grenzwerth nennen wir den Inhalt oder das Volumen der Menge P mit Bezug auf den ebenen Raum G_n* und haben daher die Definitionsgleichung:

$$(2) \qquad I(P \text{ in } G_n) = \lim_{\varrho=0} F(\varrho, P \text{ in } G_n)$$

oder einfacher geschrieben:

$$I(P) = \lim_{\varrho=0} F(\varrho).$$

Sind P und Q zwei Punktmengen von solcher Lagenbeziehung, *dass völlig getrennte n-dimensionale Raumtheile H und H' angegeben werden können, so dass P ganz in H, Q ganz in H' enthalten ist*, so gilt, wie leicht zu zeigen, der Satz, dass:

$$I(P+Q) = I(P) + I(Q).$$

Lässt man aber die gemachte Voraussetzung über P und Q fallen, so gilt dieser Satz im Allgemeinen *nicht*.

Zunächst beweisen wir nun den *Fundamentalsatz*, *dass der Inhalt einer Menge P stets gleich ist dem Inhalt ihrer Ableitung $P^{(1)}$ mit Bezug auf denselben ebenen Raum G_n, oder dass immer die Gleichung besteht:*

$$(3) \qquad I(P \text{ in } G_n) = I(P^{(1)} \text{ in } G_n)$$

Der Beweis dafür wird wie folgt geführt: sei ε eine beliebige positive Grösse, die wir für's erste als gegeben ansehen, später aber gegen Null abnehmen lassen werden.

Sei ferner H ein ganz im Endlichen gelegener n-dimensionaler Theil von G_n, der nur so gross anzunehmen ist, dass der Raumtheil $\Pi(\varepsilon, P)$ und mithin auch die Mengen P und $P^{(1)}$ ganz in ihn hineinfallen.

Wir wollen nun, während die zu P gehörige charakteristische Function mit $F(\varrho)$ bezeichnet wird, die zu $P^{(1)}$ gehörige charakteristische Function mit $F_1(\varrho)$ bezeichnen, so dass also $F_1(\varrho)$ genau geschrieben gleich ist $F(\varrho, P^{(1)}$ in $G_n)$. Betrachten wir nun den Raumtheil $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$, so ist derselbe enthalten in $\Pi(\varepsilon, P)$ und daher auch in H.

Der Raumtheil:

$$\Delta_1 \equiv H - \Pi(\varepsilon, P^{(1)})$$

wird nun sammt seiner Begrenzung höchstens eine *endliche* Anzahl von Punkten der Menge P enthalten, weil in ihm kein *einziger* Punkt der Menge $P^{(1)}$ vorkommt. Wir wollen die Menge dieser in endlicher Anzahl vorkommenden Punkte mit Q_1 bezeichnen.

Unter ϱ wollen wir nun eine positive Grösse verstehen, die kleiner als ε ist und gegen Null convergirt.

Wir haben alsdann erstens:

$$F(\varrho) - F_1(\varrho) \geqq 0,$$

weil $\Pi(\varrho, P^{(1)})$ stets *innerhalb* $\Pi(\varrho, P)$ gelegen ist.

Andrerseits können wir ϱ immer *so klein* nehmen, dass $\Pi(\varrho, P-Q)$ ganz in den Raumtheil $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$ zu liegen kommt, weil die Punkte der Menge $P-Q$ nirgends der Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(1)})$ unendlich nahe kommen (sonst würde diese Begrenzung Punkte von $P^{(1)}$ in sich haben, was ihrer Natur entgegen ist); von einem *hinreichend kleinen* ϱ an ist also immer:

$$F(\varrho, P-Q) < F_1(\varepsilon).$$

Folglich haben wir:

$$F(\varrho) - F_1(\varrho) < (F_1(\varepsilon) - F_1(\varrho)) + (F(\varrho) - F(\varrho, P-Q))$$

während schon vorher gesehen wurde, dass:

$$F(\varrho) - F_1(\varrho) \geqq 0.$$

Nun haben aber die beiden Mengen P und $P-Q$, weil sie sich nur um eine *endliche* Anzahl von Punkten unterscheiden, *gleiche* Inhalte, es wird also die Differenz $F(\varrho) - F(\varrho, P-Q)$ mit ins unendliche abnehmendem ϱ selbst unendlich klein; wir schliessen daher aus den beiden soeben geschriebenen Ungleichungen, dass:

$$I(P) - I(P^{(1)})$$

seinem absoluten Betrage nach nicht grösser ist als:

$$F_1(\varepsilon) - I(P^{(1)}).$$

Hier ist ε eine ganz beliebige positive Grösse, die wir daher *jetzt* auch gegen Null convergiren lassen können; unter solchen Verhältnissen nähert sich die letztere Differenz selbst der Null und es muss also $I(P)$ gleich $I(P^{(1)})$ sein, worin der zu beweisende Satz liegt.

Es besteht nun aber auch der allgemeinere Satz:

Ist γ irgend eine endliche oder der zweiten Zahlenclasse angehörige transfinite Zahl, P eine beliebige Punktmenge in G_n, so ist immer

$$(4)\qquad I(P \text{ in } G_n) = I(P^{(\gamma)} \text{ in } G_n).$$

Zum Beweise wenden wir ein vollständiges Inductionsverfahren an; wir nehmen an, es sei bei *jeder* Punktmenge P erwiesen, dass für *alle Werthe von γ', die kleiner sind als ein gegebenes* der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehöriges γ, die Gleichung besteht:

$$I(P) = I(P^{(\gamma')})$$

und wollen nun zeigen, dass alsdann auch:

$$I(P) = I(P^{(\gamma)}).$$

In dem Falle, dass γ eine Zahl der *ersten* Art ist, so dass eine ihr *nächst* vorhergehende Zahl γ_{-1} existirt, hat dieses keine Schwierigkeit; denn da unter diesen Umständen

$$(P^{(\gamma-1)})^{(1)} = P^{(\gamma)},$$

so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze:

$$I(P^{(\gamma-1)}) = I(P^{(\gamma)}),$$

und daher auch:

$$I(P) = I(P^{(\gamma)}).$$

Nehmen wir nun *zweitens* an, es sei γ eine *transfinite* Zahl der *zweiten* Art.

Betrachten wir hier den Raumtheil:

$$\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

innerhalb H und bezeichnen die Differenz:

$$H - \Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

mit Δ_γ.

Was die positive Grösse ε anbetrifft, so wollen wir sie nur so gewählt denken, dass auf die Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ *kein einziger* Punkt der *abzählbaren* Punktmenge $(P + P^{(1)}) - P^{(\gamma)}$ fällt; eine solche Wahl von ε und selbst *unter jeder Kleinheitsgrenze* ist stets möglich, wie mit Anwendung meines in Ann. Bd. XV pag. 5 bewiesenen Satzes leicht erkannt wird.

In dem Raumtheil Δ_γ ist ein gewisser, im Allgemeinen aus unendlich viel Punkten zusammengesetzter Bestandtheil von $P + P^{(1)}$ enthalten, den wir Q_γ nennen wollen.

Die Menge Q_γ ist nun offenbar von der Art, dass *ihre* γ^{te} *Ableitung Null* ist; denn sonst würde ausserhalb des Raumtheiles

$$\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

zum mindesten ein Punkt von $P^{(\gamma)}$ liegen, was nicht der Fall ist.

Da γ eine transfinite Zahl der *zweiten* Art ist, so muss es (s. § 16 gegen Schluss) sogar noch eine kleinere Zahl $\bar{\gamma} < \gamma$ geben, so dass auch die $\bar{\gamma}^{\text{te}}$ Ableitung von Q_γ gleich Null ist.

Da aber unser zu beweisende Satz als richtig vorausgesetzt wird für alle Punktmengen, also auch für Q_γ, sofern nur $\gamma' < \gamma$, so schliessen wir, dass:

$$I(Q_\gamma) = I(Q_\gamma^{(\bar{\gamma})}) = 0 \tag{5}$$

ist.

Da ferner die beiden Punktmengen Q_γ und $(P + P^{(1)}) - Q_\gamma$ derart ausser einander liegen, dass die eine in dem Raumtheil Δ_γ, die andere in dem davon gänzlich getrennten Raumtheile $\Pi(\varepsilon - \varkappa, P^{(\gamma)})$ (für ein hinreichend kleines $\varkappa$, wie sogleich gezeigt wird) liegt, so haben wir:

$$I(P) = I(P + P^{(1)}) = I((P + P^{(1)}) - Q_\gamma) + I(Q_\gamma)$$

und wegen $I(Q_\gamma) = 0$:

$$I(P) = I((P + P^{(1)}) - Q_\gamma). \tag{6}$$

Unter ϱ verstehen wir nun eine beliebige Grösse die kleiner ist als ε und ausserdem *so klein* ist, dass $\Pi(\varrho, (P+P^{(1)}) - Q_\gamma)$ ganz in den Raumtheil $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ zu liegen kommt; letztere Bedingung ist erfüllbar, weil ε so gewählt worden ist, dass auf der Begrenzung von $\Pi(\varepsilon, P^{(\gamma)})$ *kein einziger* Punkt der Menge $(P+P^{(1)}) - P^{(\gamma)}$ liegt; dies hat zur Folge, dass die Punkte der Menge $P+P^{(1)}$ *nicht beliebig nahe* an diese Begrenzung heranrücken, weil diese sonst einen Punkt von $P^{(\gamma)}$ in sich aufnehmen würde, was offenbar eine Unmöglichkeit ist, da *alle* Punkte von $P^{(\gamma)}$ zum *mindesten* in der Entfernung ε von dieser Begrenzung abstehen.

Folglich haben wir für *hinreichend kleine* Werthe von ϱ:

$$F(\varrho, (P+P^{(1)}) - Q_\gamma) < F(\varepsilon, P^{(\gamma)})$$

mithin auch:

$$F(\varrho, P) - F(\varrho, P^{(\gamma)}) < (F(\varepsilon, P^{(\gamma)}) - F(\varrho, P^{(\gamma)})) + \big(F(\varrho, P) - F(\varrho, (P+P^{(1)}) - Q_\gamma)\big).$$

Anderseits ist offenbar:

$$F(\varrho, P) - F(\varrho, P^{(\gamma)}) \geqq 0.$$

Lassen wir nun ϱ unendlich klein werden, so folgt in Rücksicht auf (6), dass die Differenz:

$$I(P) - I(P^{(\gamma)})$$

ihrem absoluten Betrage nach nicht grösser ist als:

$$F(\varepsilon, P^{(\gamma)}) - I(P^{(\gamma)}).$$

Hier ist ε eine beliebige positive Grösse, die nur an gewisse Voraussetzungen geknüpft ist, *welche jedoch ihre Kleinheit nicht beschränken:* lassen wir daher ε unendlich klein werden, so folgt, dass:

$$I(P) = I(P^{(\gamma)}).$$

Wir können daher den Satz (4) als durch *vollständige* Induction bewiesen ansehen; aus ihm ergeben sich nun die Folgerungen:

I. *Wenn P eine reductible Menge ist, so ist ihr Inhalt $I(P)$ immer gleich Null.*

In der That giebt es in diesem Falle, ein kleinstes α, so dass:

$$P^{(\alpha)} \equiv 0;$$

folglich ist $I(P^{(\alpha)})$ und daher auch $I(P)$ gleich Null.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung meines in Ann. Bd. XXI, pag. 54 für *lineare* reductible Mengen bewiesenen Satzes.

II. *Wenn P nicht reductibel ist, so giebt es immer eine perfecte Menge S, die denselben Inhalt hat, wie P, so dass:*

$$I(P \text{ in } G_n) = I(S \text{ in } G_n). \tag{7}$$

Denn nach Theorem E in § 16 giebt es eine perfecte Menge S, so dass für ein kleinstes der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehöriges α:

$$P^{(\alpha)} \equiv S;$$

also haben wir nach (4):

$$I(P) = I(S).$$

Hieraus folgt, *dass die Bestimmung der Inhalte von beliebigen Punktmengen immer zurückgeführt ist auf die Herstellung der Inhalte perfecter Punktmengen.*

In einer späteren Abhandlung werde ich das letztere Problem ausführlich in seiner Allgemeinheit behandeln und beschränke mich daher hier auf folgende Bemerkungen.

Bei einer perfecten Punktmenge kommt es oft vor, dass ihr Inhalt gleich Null ist, doch kann dies nur dann eintreten, wenn die perfecte Punktmenge in *keinem* n-dimensionalen Theilgebiete von G_n *überalldicht* ist.

Ein Beispiel von *linearen* perfecten Punktmengen mit *dem Inhalte Null* wird von mir in Ann. Bd. XXI, pag. 590 angeführt. Aehnliche Beispiele lassen sich innerhalb G_n für $n > 1$ leicht bilden.

Ist dagegen eine perfecte Punktmenge innerhalb eines gewissen n-dimensionalen Raumtheiles H *überalldicht*, so ist ihr Inhalt offenbar von Null verschieden.

Andrerseits giebt es aber auch perfecte Mengen, die in *keinem noch so kleinen n-dimensionalen Raumtheile überalldicht sind und deren Inhalt trotzdem einen von Null verschiedenen Werth hat.*

In den mathematisch-physikalischen Anwendungen der Mengenlehre, über welche ich demnächst die von mir angestellten Untersuchungen veröffentlichen werde, spielt ein noch allgemeinerer Begriff, als der hier mit $I(P)$ bezeichnete, eine wesentliche Rolle.

Ist $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ irgend eine unbedingt integrirbare Function der n Coordinaten eines beliebigen Punktes von G_n und P irgend eine in G_n, ganz im Endlichen gelegene Punktmenge, $\Pi(\varrho, P \text{ in } G_n)$ der im Vorigen definirte Raumtheil, so stellt uns das Integral:

$$\int\limits_{(\Pi(\varrho, P \,\mathrm{in}\, G_n))} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, \partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n$$

eine stetige Function von ϱ dar, deren Grenzwerth für $\lim \varrho = 0$ eine von P sowohl wie von der Function $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ abhängige Zahl liefert, die ich mit $I(\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n), P \text{ in } G_n)$ oder kürzer mit $I(\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n), P)$ bezeichne, so dass unser $I(P)$ nichts andres ist als $I(1, P)$.

§ 19.

Wir wollen nun zu einer genaueren Untersuchung der *perfecten Mengen* übergehen.

Da jede solche Punktmenge gewissermassen *in sich begrenzt, abgeschlossen* und *vollendet* ist, so zeichnen sich die *perfecten Mengen* vor allen anderen Gebilden durch besondere Eigenschaften aus.

Sie dürften aber auch noch aus dem Grunde eine generelle und ausführliche Behandlung verdienen, weil die sämmtlichen *Continua*, wenn wir dieses Wort in dem Sinne nehmen, wie ich ihn in der vorigen Nummer dieser Abhandlung, in Ann. Bd. XXI, pag. 576 gebraucht habe, zu ihnen gehören; denn unter einem *Continuum* im *eigentlichen Sinne* verstehe ich jede *perfecte* Punktmenge, die *in sich zusammenhängend* ist; was ich hierbei mit „*zusammenhängend*“ sagen will, ist gleichfalls an der soeben erwähnten Stelle erklärt worden.

Alle *übrigen* Continua, welche ich Ann. Bd. XXI, pag. 590 *Semicontinua* genannt habe, lassen sich gewissermassen durch *Addition* und *Subtraction* aus perfecten Punktmengen und aus solchen Punktmengen, die aus einer endlichen Anzahl von Punkten oder auch aus einer unendlichen Anzahl von der *ersten Mächtigkeit* zusammengesetzt sind, herstellen; aus diesem Grunde scheint mir die Untersuchung der *perfecten Continua* derjenigen der *Semicontinua* vorangehen zu müssen.

Bei aller Verschiedenheit, welche wir in der *reichhaltigen Classe* der *perfecten Punktmengen* kennen lernen werden, indem sowohl in Ansehung ihres „*Inhaltes*“ wie auch in Bezug auf ihre *innere* und *äussere Gestaltung* die merkwürdigsten und zum Theil seltsamsten Varietäten sich unter ihnen vorfinden, haben sie doch *alle* ein *Gemeinsames;* sie sind *alle* von *gleicher Mächtigkeit* und folglich, da die *Continua* zu ihnen gehören, sind sie *alle von der Mächtigkeit des Linearcontinuums*, also beispielsweise von der Mächtigkeit des *Inbegriffs aller rationalen und irrationalen Zahlen, die grösser oder gleich Null und kleiner oder gleich Eins sind.*

In Borchardts Journ. Bd. 84, pag. 242 ist bereits gezeigt worden, dass die Mächtigkeit *n-dimensionaler Continua* dieselbe ist, wie die des *eindimensionalen Linearcontinuums.* Wir werden im weiteren Verlaufe dieser Untersuchung diese merkwürdige Thatsache von Neuem zu bestätigen Veranlassung finden.

Zunächst aber will ich meine Betrachtungen wieder auf die linearen Punktmengen beschränken und einen Beweis für den Satz entwickeln, dass alle *linearen perfecten Mengen gleiche Mächtigkeit* haben oder, was dasselbe heisst, dass je zwei solche Mengen in eine Beziehung zu einander gesetzt werden können, welcher gemäss gewissermassen *die eine als eine eindeutige Function der andern* betrachtet werden kann.

Sei zunächst S eine *lineare, perfecte, im Intervall* $(0 \ldots 1)$ *ein-*

geschlossene Punktmenge, welche in keinem noch so kleinen Intervall überalldicht ist und welcher die Punkte 0 *und* 1 *zugehörig sind;* alle anderen *in keinem noch so kleinen Intervalle überalldichten* Punktmengen lassen sich *projectivisch* auf die soeben charakterisirten zurückführen; wenn also von S gezeigt sein wird, dass ihre Mächtigkeit gleich ist der Mächtigket des Linearcontinuums $(0 \dots 1)$, so ist damit das gleiche bewiesen für alle linearen perfecten Mengen, *die in keinem Intervalle überalldicht* sind.

Den einfachen Betrachtungen zufolge, welche in Ann. Bd. XXI, pag. 55 und 56 angestellt worden sind, gehört zu unsrer Menge S eine *bestimmte unendliche Menge von in* $(0 \dots 1)$ *enthaltenen*, völlig von einander getrennten *Theilintervallen*, durch deren Endpunkte, welche zusammengenommen eine *in sich dichte aber in keinem noch so kleinen Intervalle überalldichte* Punktmenge *erster Mächtigkeit* bilden, die *perfecte Menge* S *völlig bestimmt ist*, indem sie die *erste Ableitung* von jener, welche wir J nennen wollen, darstellt, so dass:

$$(1) \qquad S \equiv J^{(1)}.$$

S besteht sonach aus zwei zu unterscheidenden Bestandtheilen, nämlich aus J und aus einer *andern in sich dichten aber in keinem noch so kleinen Intervalle überalldichten* Punktmenge, die wir L nennen wollen, so dass:

$$(2) \qquad S \equiv J + L.$$

Diese letztere Menge L wird nämlich von allen *Grenzpunkten* der Menge J gebildet, die nicht J selbst zugehörig sind.

Wir wollen uns jene Theilintervalle, deren Endpunkte die Menge J constituiren, ihrer *Grösse* nach geordnet denken, so dass die *kleineren* auf die *grösseren* folgen und wenn gleich grosse unter ihnen vorkommen, die mehr nach links gelegenen früher geschrieben werden, als die mehr nach rechts fallenden; in *dieser* Anordnung mögen sie folgende unendliche Reihe bilden:

$$(3) \qquad (a_1 \dots b_1),\ (a_2 \dots b_2),\ \dots,\ (a_\nu \dots b_\nu) \dots$$

Den Inbegriff aller Punkte a_ν wollen wir mit $\{a_\nu\}$, den aller Punkte b_ν mit $\{b_\nu\}$ bezeichnen und für einen beliebigen der zur Menge L gehörigen Punkte das Zeichen l wählen, so dass wir haben:

$$(4) \qquad J \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\};\ L \equiv \{l\};\ S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{l\}.$$

Ich will noch Folgendes aus dem Begriffe von S leicht sich Ergebende ausdrücklich hervorheben:

Die Endpunkte 0 und 1 gehören dem Bestandtheile L von S an; zwischen irgend zweien Intervallen $(a_\mu \dots b_\mu)$ und $(a_\nu \dots b_\nu)$ der Reihe (3) liegen immer unendlich viele andere Intervalle derselben Reihe; in jeder beliebigen Nähe eines einzelnen von den Punkten a_ν oder b_ν oder l liegen Intervalle der Reihe (3) von beliebiger Kleinheit.

Nachdem wir solchermaassen den Begriff unsrer Menge S vollständig analysirt haben, geben wir uns *irgend eine abzählbare* lineare Punktmenge:

(5) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots,$$

die nur folgenden Bedingungen unterworfen ist:

1) *alle Punkte* φ_ν *sind unter einander verschieden;*
2) *sie fallen alle in das Intervall* $(0 \ldots 1)$;
3) *die Endpunkte* 0 *und* 1 *dieses Intervalles gehören nicht zu der Menge* $\{\varphi_\nu\}$ *und*
4) *die Menge* $\{\varphi_\nu\}$ *ist im Intervalle* $(0 \ldots 1)$ *überalldicht.*

Ich behaupte nun Folgendes:

zwischen der Punktmenge $\{\varphi_\nu\}$ *einerseits und der Intervallmenge* $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ *andrerseits lässt sich immer eine solche, gesetzmässige, gegenseitig eindeutige und vollständige Correspondenz ihrer Elemente herstellen, dass, wenn* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *und* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *irgend zwei Intervalle der Intervallmenge,* $\varphi_{\varkappa_\nu}$ *und* $\varphi_{\varkappa_\mu}$ *die zu ihnen gehörigen Punkte der Punktmenge* $\{\varphi_\nu\}$ *sind, alsdann stets* $\varphi_{\varkappa_\nu}$ *links oder rechts von* $\varphi_{\varkappa_\mu}$ *liegt, jenachdem das Intervall* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *links oder rechts von dem Intervalle* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *fällt, oder, was dasselbe heissen soll, dass die Lagenbeziehung der Punkte* $\varphi_{\varkappa_\nu}$ *und* $\varphi_{\varkappa_\mu}$ *stets dieselbe ist, wie die Lagenbeziehung der ihnen entsprechenden Intervalle* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *und* $(a_\mu \ldots b_\mu)$.

Um eine solche Beziehung zwischen den beiden Mengen $\{\varphi_\nu\}$ und $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ herzustellen, *kann* man wie folgt verfahren:

man setze $\varkappa_1 = 1$, d. h. man ordne dem Intervall $(a_1 \ldots b_1)$ den Punkt φ_1 zu; dem Intervalle $(a_2 \ldots b_2)$ ordne man den mit *kleinstem Index* versehenen, also bei Verfolgung der Reihe (5) *zuerst* hervortretenden Punkt $\varphi_{\varkappa_2}$ zu, der zu φ_1 dieselbe Lagenbeziehung hat, wie das Intervall $(a_2 \ldots b_2)$ zum Intervall $(a_1 \ldots b_1)$; dem Intervalle $(a_3 \ldots b_3)$ ordne man den mit kleinstem Index versehenen, d. h. bei Verfolgung der Reihe (5) zuerst hervortretenden Punkt $\varphi_{\varkappa_3}$ zu, der *sowohl* zu φ_1, wie auch zu φ_2 dieselbe Lagenbeziehung hat, wie das Intervall $(a_3 \ldots b_3)$ respective zu den beiden Intervallen $(a_1 \ldots b_1)$ und $(a_2 \ldots b_2)$; nach diesem Gesetze gehen wir weiter, so dass, nachdem den ν *ersten* Intervallen der Reihe (3) die Punkte:

$$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}$$

zugeordnet sind, welche unter einander dieselbe Lagenbeziehung erhalten, wie sie die entsprechenden Intervalle untereinander haben, alsdann dem nächst folgenden Intervall $(a_{\nu+1} \ldots b_{\nu+1})$ der Reihe (3) der mit dem *kleinsten Index* versehene Punkt $\varphi_{\varkappa_{\nu+1}}$ der Reihe (5) zugeordnet wird, welcher dieselbe Lagenbeziehung zu *allen* Punkten

$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}$ besitzt, wie sie das Intervall $(a_{\nu+1} \ldots b_{\nu+1})$ zu den entsprechenden Intervallen $(a_1 \ldots b_1), (a_2 \ldots b_2), \ldots, (a_\nu \ldots b_\nu)$ hat.

Klar ist zunächst, dass auf diese Weise *allen* Intervallen der Reihe (3) *bestimmte* Punkte der Reihe (5) zugeordnet werden; denn wegen des Ueberalldichtseins der Menge $\{\varphi_\nu\}$ im Intervall $(0 \ldots 1)$ und weil die Endpunkte 0 und 1 nicht zu $\{\varphi_\nu\}$ gehören, giebt es in dieser Reihe unendlich viele Punkte, die eine *geforderte* Lagenbeziehung zu einer bestimmten endlichen Anzahl von Punkten derselben Menge $\{\varphi_\nu\}$ besitzen und es erfährt daher der aus unsrer Regel resultirende Zuordnungsprocess *keinen Stillstand.*

Die Punkte $\varphi_{\varkappa_\nu}$ constituiren also eine gewisse in (5) enthaltene unendliche Reihe von Punkten:

(6) $$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu}, \ldots$$

und die Zuordnung der beiden Mengen $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ und $\{\varphi_{\varkappa_\nu}\}$ würde den gestellten Anforderungen völlig entsprechen, wenn wir uns nur noch davon überzeugen könnten, dass auch umgekehrt in der Reihe (6) die Reihe (5) *vollständig enthalten* ist, sich also von ihr *nur durch eine andre Anordnung der Glieder unterscheidet;* dass dies nun wirklich der Fall, erhellt aus folgender Ueberlegung.

Denken wir uns es seien nach unsrer Regel die ν ersten Zuordnungen ausgeführt und damit die ν Punkte $\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots \varphi_{\varkappa_\nu}$ an die ersten ν Intervalle der Reihe (3) derart vergeben, dass auf beiden Seiten gleiche Lagenbeziehung unter entsprechenden Elementen vorhanden ist. Von den *übrig gebliebenen* Punkten unsrer Reihe (5) wird nun einer die unterste Stelle in dieser Reihe einnehmen oder, was dasselbe heisst, den kleinsten Index haben, wir nennen ihn φ_ϱ; es giebt nun, wie aus der oben angestellten Analysirung des Begriffes S hervorgeht, unendlich viele Intervalle der Reihe (3), welche zu den ν Intervallen $(a_1 \ldots b_1) \ldots (a_\nu \ldots b_\nu)$ *genau dieselbe Lagenbeziehung haben*, wie der Punkt φ_ϱ zu den entsprechenden Punkten

$$\varphi_{\varkappa_1}, \varphi_{\varkappa_2}, \ldots, \varphi_{\varkappa_\nu};$$

unter diesen unendlich vielen Intervallen sei $(a_\sigma \ldots b_\sigma)$ dasjenige, dessen Index der kleinste von allen ist. Es ist $\sigma > \nu$. Nach unsrer Regel muss nun offenbar bei der σ^{ten} Zuordnung der Punkt φ_ϱ an die Reihe kommen, d. h. es ist:

(7) $$\varrho = \varkappa_\sigma$$

Nach der σ^{ten} Zuordnung sind alsdann jedenfalls *zum Mindesten* die ϱ ersten Punkte der Reihe (5):

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$$

alle vergeben.

ϱ ist aber eine von ν abhängige, während ν wächst nicht abnehmende und mit ins Unendliche wachsendem ν selbst eine über alle Grenzen hinaus wachsende Zahl. Folglich müssen nach unsrer Regel *alle Glieder* unsrer Reihe (5) bei der Vergebung *schliesslich an die Reihe kommen* und es ist daher die Reihe (5) vollständig in der Reihe (6) enthalten, diese beiden Reihen sind abgesehen von der Folge ihrer Glieder, identisch dieselben; es ist:

(8) $$\{\varphi_\nu\} \equiv \{\varphi_{\varkappa_\nu}\}.$$

Wir wollen nun der grösseren Einfachheit halber schreiben:

(9) $$\varphi_{\varkappa_\nu} = \psi_\nu.$$

Alsdann können wir das voraufgehende Resultat wie folgt ausdrücken:

Es lässt sich immer eine im Intervall $(0 \ldots 1)$ *gelegene und darin überalldichte Punktmenge erster Mächtigkeit in folgender Reihenform aufstellen:*

(10) $$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots,$$

zu welcher die Endpunkte 0 *und* 1 *des Intervalls* $(0 \ldots 1)$ *nicht gehören und die zu der in Reihenform* (3) *gegebenen Intervallmenge:*

(3) $$(a_1 \ldots b_1), (a_2 \ldots b_2), \ldots, (a_\nu \ldots b_\nu), \ldots$$

ein solches Verhältniss hat, dass irgend je zwei Punkte von (10) ψ_ν *und* ψ_μ *stets dieselbe Lagenbeziehung zu einander haben, wie die entsprechenden Intervalle* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *und* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *der Reihe* (3); *und zwar kann jede beliebige im Intervall* $(0 \ldots 1)$ *gelegene, darin überalldichte und die Punkte* 0 *und* 1 *nicht in sich aufnehmende Punktmenge erster Mächtigkeit in eine Reihenform gebracht werden, so dass sie in dieser Reihenform die Beschaffenheit unsrer Reihe* (10) *annimmt.*

Wir wollen nun den Inbegriff aller derjenigen Punkte des Intervalles $(0 \ldots 1)$, welche nicht in der Menge $\{\psi_\nu\}$ vorkommen, mit F und einen beliebigen Repräsentanten dieser letzteren Menge mit f bezeichnen, so dass:

(11) $$F \equiv \{f\}, \quad (0 \ldots 1) \equiv \{\psi_\nu\} + \{f\}.$$

Die Menge F ist, wie ich in Borch. J. Bd. 84, pag. 254 gezeigt, von gleicher Mächtigkeit wie das Linearcontinuum $(0 \ldots 1)$ und daher (s. Ann. Bd. XV, pag. 5) von höherer Mächtigkeit als der ersten.

Unsere perfecte Menge S ist nach (4) aus den drei Mengen $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ und $\{l\}$ zusammengesetzt; es war:

(4) $$S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{l\}.$$

Schreiben wir nun die zweite Formel (11) wie folgt:

(12) $$(0 \ldots 1) \equiv \{\psi_{2\nu}\} + \{\psi_{2\nu-1}\} + \{f\}$$

so geht aus dem Vergleich dieser beiden Formeln nach Ann. Bd. XVII, pag. 356 hervor, dass wir zum Beweise unseres Satzes, dass S und $(0 \ldots 1)$ von gleicher Mächtigkeit sind, gelangen werden, wenn es uns möglich ist, zu zeigen, dass die beiden Mengen L und F gleiche Mächtigkeit haben; letzteres ist aber wirklich der Fall, wie wir nun leicht sehen können.

Ist f ein beliebiger Punkt von F, so können wir, da die Menge $\{\psi_\nu\}$ überalldicht ist, eine derselben zugehörige unendliche Reihe von Punkten aufstellen:

$$(13) \qquad \psi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_2}, \ldots, \psi_{\lambda_\nu}, \ldots$$

so dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \psi_{\lambda_\nu} = f.$$

Diese Punktreihe bestimmt eine entsprechende Intervallreihe:

$$(14) \qquad (a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1}).\ (a_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_2}), \ldots, (a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu}), \ldots$$

die sich nothwendig einem bestimmten Punkte l der Menge L als Grenze nähern.

Dass sie sich einem bestimmten Grenzpunkte nähern müssen, folgt leicht aus der Lagenbeziehung der beiden Reihen (10) und (3) und ebenso, dass dieser Grenzpunkt nicht etwa ein zu J gehöriger Punkt sein kann.

Nimmt man anstatt der Reihe (13) eine andere der Menge $\{\psi_\nu\}$ angehörige Punktfolge, die sich aber demselben Punkt f als Grenzpunkt nähert, so kommt man zwar auch zu einer andern entsprechenden Intervallreihe an Stelle von (14), überzeugt sich aber ebenso leicht, dass diese keinen andern Grenzpunkt haben kann, als den schon gefundenen l.

Geht man umgekehrt von einem beliebigen Punkt l der Menge L aus und wählt irgend eine Intervallreihe (14), die sich ihm als Grenzpunkt unendlich nähert, so kommt man mit Hülfe von (13) zu einem bestimmten zugehörigen Punkt f der Menge F, welcher derselbe bleibt, sobald wir nur von ein und demselben Punkt l der Menge L ausgehen. Die sämmtlichen Punkte l unsrer Menge L sind also in gegenseitig eindeutige und vollständige Beziehung zu sämmtlichen Punkten f der Menge F gebracht, das heisst: die beiden Mengen L und F sind von gleicher Mächtigkeit, woraus, wie oben bemerkt, folgt, dass *die gegebene perfecte lineare Menge S gleiche Mächtigkeit hat mit dem Linearcontinuum* $(0 \ldots 1)$.

Im Vorhergehenden habe ich gezeigt, dass irgend eine perfecte lineare Menge, welche in keinem Intervall überalldicht ist, sich auf ein Linearcontinuum, z. B. auf das vollständige Intervall $(0 \ldots 1)$ vollständig mit gegenseitiger Eindeutigkeit beziehen lässt, folglich mit ihm von gleicher Mächtigkeit ist. Ich will nun zeigen, wie sich derselbe Satz in Bezug auf eine *ganz beliebige* lineare perfecte Menge beweisen lässt.

Sei also jetzt S irgend eine derartige Punktmenge im Intervall $(-\infty \cdots +\infty)$.

Es werden im Allgemeinen gewisse, nicht aneinander grenzende, *keiner Vergrösserung fähige* Intervalle vorhanden sein, in denen S *überalldicht* ist und die folglich, da S *perfect* ist, mit *allen ihren Punkten* zu S gehören. Sie bilden zusammen eine Intervallmenge von der *ersten* Mächtigkeit, wie Ann. Bd. XX, pag. 118 gezeigt worden ist.

Wir wollen diese Intervalle in irgend einer Ordnung als einfach unendliche Reihe gedacht, wie folgt schreiben:

(15) $$(c_1 \ldots d_1),\ (c_2 \ldots d_2), \ldots,\ (c_\nu \ldots d_\nu), \ldots$$

Da wir sie so gross annehmen, dass sie bei keiner Vergrösserung die Beziehung zu S behalten würden, wonach S in ihnen überalldicht bleibt, so folgt daraus leicht, dass sie durch diese Bedingung für jedes S völlig bestimmt sind, dass sie nicht an einander grenzen und dass in dem Zwischenraum zwischen je zweien von ihnen die Menge S nicht überalldicht ist.

Ausser diesen Intervallen (15), welche mit ihrem vollen Punktbestand der Menge S angehören, wird im allgemeinen eine andere Intervallmenge existiren, welche, wenn sie aus unendlich vielen Intervallen besteht, ebenfalls die *erste* Mächtigkeit hat und die gleichfalls durch die Menge S bestimmt ist; jedes dieser Intervalle soll einen *perfecten Bestandtheil* von S enthalten, der in keinem Theilintervalle überalldicht ist und dem die Endpunkte des Intervalles zugehörig sind; auch sollen diese Intervalle so gross genommen werden, dass bei weiterer Vergrösserung sie aufhören würden in der angegebenen Beziehung zu S zu stehen. Diese *zweite* Intervallmenge wollen wir mit:

(16) $$(e_1 \ldots f_1),\ (e_2 \ldots f_2),\ \ldots,\ (e_\nu \ldots f_\nu), \ldots$$

bezeichnen.

Die in diesen Intervallen enthaltenen perfecten Bestandtheile von S wollen wir entsprechend mit:

(17) $$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_\nu,\ \ldots$$

bezeichnen.

Aus der Erklärung, welche wir gegeben haben, folgt ohne weiteres, dass die Intervalle von (1) *höchstens* an ihren Endpunkten mit Intervallen der Reihe (2) zusammenstossen, im übrigen aber ganz ausserhalb derselben zu liegen kommen.

Wir haben nun folgende Zerlegung der perfecten Menge S:

(18) $$S \equiv \Sigma(c_\nu \ldots d_\nu) + \Sigma S_\nu.$$

Zu bemerken ist hierbei, (da c_ν und f_ν immer Punkte von S_ν sind und da es vorkommen kann, dass sich Intervalle in der Reihe (1) mit Intervallen der Reihe (2) berühren) dass Glieder der ersten Summe in unserer Gleichung (4) mit Gliedern der zweiten Summe einzelne Punkte gemein haben können; um die Zerlegung (4) der Menge S von dieser Unbequemlichkeit zu befreien, wollen wir mit $\overline{S}_\nu$ diejenige Menge verstehen, welche aus S_ν dadurch hervorgeht, dass wir davon den Punkt oder die beiden Punkte in Abzug bringen, welche S_ν mit höchstens zwei Intervallen der Reihe (1) (nämlich nach links oder nach rechts hin) gemeinsam haben könnte, so dass $S_\nu \equiv \overline{S}_\nu$ ist in allen Fällen, wo solche Berührungspunkte nicht existiren, dagegen in den übrigen Fällen entweder: $S_\nu \equiv \overline{S}_\nu + e_\nu + f_\nu$, oder $\equiv \overline{S}_\nu + e_\nu$ oder $\equiv \overline{S}_\nu + f_\nu$ ist, jenachdem S_ν zu beiden Seiten an Intervalle der Reihe (1) grenzt, oder nur zu ihrer Linken oder nur zu ihrer Rechten mit einem dieser Intervalle einen Punkt gemein hat.

Wir können nun offenbar auch schreiben:

$$S \equiv \Sigma(c_\nu \ldots d_\nu) + \Sigma\overline{S}_\nu, \tag{19}$$

und hier ist S in Bestandtheile $(c_\nu \ldots d_\nu)$ und $\overline{S}_\nu$ zerlegt, die unter einander keinen Zusammenhang haben.

Jeder Bestandtheil $(c_\nu \ldots d_\nu)$ hat, weil er selbst ein Continuum ist, die Mächtigkeit von $(0 \ldots 1)$; das gleiche gilt aber auch, wie wir im Vorhergehenden bewiesen haben, von jedem Bestandtheil S_ν, folglich auch vom Bestandtheil $\overline{S}_\nu$, da er aus S_ν durch Abtrennung von höchstens zwei Punkten hervorgeht. (Letzteres ist leicht zu beweisen mit Anwendung der Methode, die ich in Borchardts Journal, Bd. 84, pag. 254 gebraucht habe).

So haben wir nun in Formel (19) S zerlegt in eine *endliche* oder *abzählbar unendliche* Anzahl von Theilmengen $(c_\nu \ldots d_\nu)$ und $\overline{S}_\nu$, von welchen *jede* die Mächtigkeit des Linearcontinuums hat.

Nach einem bekannten in Borchardts J., Bd. 84 bewiesenen Satze hat folglich auch die perfecte Menge S die Mächtigkeit von $(0 \ldots 1)$ und es haben daher *alle* linearen *perfecten* Mengen *gleiche* Mächtigkeit.

In einem späteren Paragraphen will ich denselben Satz für perfecte Mengen beweisen, die einem Raum mit n Dimensionen angehören.

Zunächst will ich aber bei den *linearen* Punktmengen stehen bleiben und zeigen, welcher Schluss sich aus dem soeben bewiesenen Satze auf die Mächtigkeiten der *abgeschlossenen* linearen Mengen ziehen lässt.

Falls die *abgeschlossene* lineare Menge P *nicht* von der *ersten* Mächtigkeit, d. h. in dem Falle, dass sie irreductibel ist, zerfällt sie nach dem Theorem E' in § 17 in eine bestimmte Menge R von der *ersten* Mächtigkeit und in eine bestimmte perfecte Menge S, so dass:

$$P \equiv R + S.$$

Schreiben wir R in der Form $\{r_\nu\}$, so haben wir:

(20) $$P \equiv \{r_\nu\} + S.$$

Sei $\{\eta_\nu\}$ irgend eine im Intervall $(0\ldots 1)$ enthaltene Punktmenge *erster* Mächtigkeit, $\{u\}$ die Menge der übrigen Punkte dieses Intervalles und $\{\vartheta_\nu\}$ irgend eine in $\{u\}$ enthaltene Punktmenge *erster* Mächtigkeit, $\{v\}$ der Inbegriff aller übrigen Punkte der Menge $\{u\}$; wir haben alsdann:

$$\begin{aligned}(0\ldots 1) &\equiv \{\eta_\nu\} + \{\vartheta_\nu\} + \{v\}\\ \{u\} &\equiv \{\vartheta_{2\nu}\} + \{\vartheta_{2\nu-1}\} + \{v\}\end{aligned}$$

und weil:

$$\{\eta_\nu\} \sim \{\vartheta_{2\nu}\};\ \{\vartheta_\nu\} \sim \{\vartheta_{2\nu-1}\};\ \{v\} \sim \{v\},$$

so folgt hieraus:

$$(0\ldots 1) \sim \{u\},$$

mithin ist auch:

(21) $$S \sim \{u\}.$$

Nun ist:

(22) $$(0\ldots 1) \equiv \{\eta_\nu\} + \{u\}.$$

Aus den Formeln (20), (21) und (22) folgt nun:

(23) $$P \sim (0\ldots 1),$$

d. h. wenn die abgeschlossene lineare Punktmenge P nicht die *erste* Mächtigkeit hat, so hat sie die Mächtigkeit des Linearcontinuums.

Wir haben also folgenden Satz:

Eine unendliche abgeschlossene lineare Punktmenge hat entweder die erste Mächtigkeit oder sie hat die Mächtigkeit des Linearcontinuums, sie kann also entweder in der Form Funct. (ν) oder in der Form Funct. (x) gedacht werden, wo ν eine unbeschränkt veränderliche endliche ganze Zahl und x eine unbeschränkt veränderliche beliebige Zahl des Intervalls $(0\ldots 1)$ *ist.*

Dass dieser merkwürdige Satz eine weitere Gültigkeit auch für *nicht abgeschlossene* lineare Punktmengen und ebenso auch für alle n-dimensionalen Punktmengen hat, wird in späteren Paragraphen bewiesen werden. (Vergl. Borchardts J., Bd. 84, pag. 257).

Hieraus wird mit Hülfe der in Bd. XXI, pag. 582 *bewiesenen* Sätze geschlossen werden, dass das *Linearcontinuum die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II.) hat.*

Halle, 15. Novbr. 1883.

(Fortsetzung folgt).